负虚约束下的Koopman算子逼近

M. A. Mabrok、Ilyasse Aksikas 和 Nader Meskin

arXiv:2305.04191v1 [math.OC] 7 May 2023

摘要——非线性负虚（NI）系统广泛存在于各种工程应用中，例如柔性结构和飞行器的控制。然而，与线性NI系统不同，其理论尚未充分发展。本文提出一种数据驱动方法，利用Koopman理论学习提升线性NI动力学，以逼近非线性动力系统。Koopman理论是一种算子，可在提升后的高维空间中捕捉非线性系统的演化。刻画负虚性质的线性矩阵不等式被嵌入Koopman框架中，由此形成一个非凸优化问题。为克服求解带有非线性约束的非凸优化问题时遇到的数值挑战，我们重新表示优化变量，将原优化问题转化为关于新变量的凸优化问题。我们将该方法与局部线性化技术进行比较，结果表明，该方法能够准确捕捉非线性动力学，并取得更优的控制性能。我们的方法为在负虚约束下学习非线性NI系统的Koopman算子提供了一种数值上易于求解的方案，并为在线性化近似之外将线性控制技术应用于非线性NI系统开辟了新的可能。

I. 引言

负 Egative 虚（NI）系统是指在正反馈互连 [1]–[3]作用下具有负虚频率响应的系统。NI系统理论已广泛用于线性时不变（LTI）控制系统的分析与设计，尤其适用于柔性结构和飞行器 [1], [2], [4], [5]。NI系统具有多项理想特性，例如在正反馈下具备鲁棒稳定性、关于共置输入和输出的耗散性，以及最优控制器的存在性 [3]。NI理论中的一个核心结果是：如图1所示，具有传递函数矩阵 $G(s)$的负虚系统与具有传递函数矩阵 $G(s)$的严格NI系统之间的正反馈互连，会形成鲁棒稳定的反馈互联系统 [1], [2]。这意味着，如果给定系统是负虚系统，那么设计严格负虚控制器以保证鲁棒稳定性将具有极大优势。

已有多种方法用于解决NI控制器综合问题 [6]–[8]。论文 [8] 提出了一种非线性系统综合方法，该方法采用参数化且严格负虚的控制器库，并通过序列二次规划进行优化。此方法可应用于不同的非线性系统。在 [6], 中，利用负虚引理和严格负虚引理构造了一个静态控制器，以确保对严格负虚不确定性具有鲁棒稳定性。在[7], 中，提出了一种数据驱动的控制器综合方法，该方法利用测得的频率响应数据构造控制器响应和传递函数。 [9],研究了数据驱动的线性负虚系统辨识问题，并提出了一种改进的子空间系统辨识算法，通过施加约束来确保稳定性和负虚性，从而保证所辨识模型具有负虚特性。

另一种方法是 [10] 中提出的充分条件，可据此设计各种类型的输出反馈控制器，包括静态、动态和基于观测器的反馈控制器。所需的控制器可以通过各种数值算法求得。[11], [12] 引入了离散时间负虚系统，并探讨了这一概念与离散时间正实系统理论之间的关系。离散时间负虚系统通过传递函数解析域内必须满足的符号条件来定义。 [13], 探讨了类似的离散时间结果，但不要求传递函数为对称函数。

负虚系统理论为分析鲁棒性和设计鲁棒控制器提供了一种方法。换言之，该理论可用于设计控制器，使其即使在系统存在不确定性时（例如未建模的溢出动态，或谐振频率和阻尼水平的变化），仍能保持稳定性和性能 [14]。

然而，许多现实世界中的系统本质上是非线性的，无法用LTI系统进行充分建模。例如，具有非线性弹簧或非线性阻尼器的质量-弹簧-阻尼器系统的动力学属于非线性NI系统 [15]。非线性NI系统给分析与控制带来了重大挑战，因为现有的NI系统理论无法直接应用于这些系统。因此，有必要为非线性NI系统建立一个通用框架，以捕捉其基本特征并实现对其的有效控制。

处理非线性系统的一种可行方法是使用 Koopman 算子。它是一种线性算子，用于描述非线性系统的标量可观测量在无限维希尔伯特空间中的演化 [16]。近年来，Koopman 算子作为非线性动力学建模与控制的有力工具，受到了广泛关注[16]–[18]。借助 Koopman 算子，可以将非线性动力学提升到高维空间，使其转化为线性形式，进而应用线性方法对其进行分析和控制。然而，从数据中学习 Koopman 算子通常是一项具有挑战性的任务，因为这涉及求解带有非线性约束的非凸优化问题

M. A. Mabrok 和 Ilyasse Aksikas 任职于卡塔尔大学文理学院数学、统计与物理系数学项目，地址为卡塔尔多哈邮政信箱 2713。邮箱：m.a.mabrok@gmail.com、aksikas@qu.edu.qa。Nader Meskin 任职于卡塔尔大学工程学院电气工程系，邮箱：nader.meskin@qu.edu.qa。

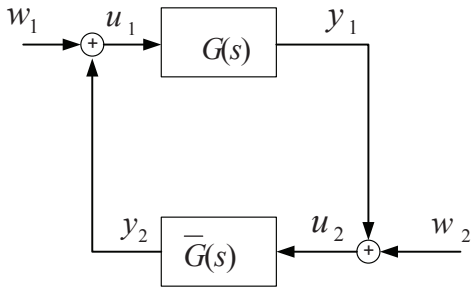

图1. 若被控对象的传递函数矩阵 $G(s)$ 为负虚（NI），且控制器的传递函数矩阵 $\bar{G}(s)$ 为严格负虚（SNI），则当且仅当满足直流增益条件 $\lambda_{max}(G(0)\,\bar{G}(0)) < 1$ 时，正反馈互联系统内部稳定。

[16]。

本文提出一种数据驱动方法，用于在负虚约束下为非线性负虚系统学习Koopman算子。我们设计了一种数据驱动方法，利用Koopman理论学习提升线性NI动力学，以近似非线性动力系统。为克服求解带有非线性约束的非凸优化问题时面临的数值挑战，我们采用变量替换技术，将问题重新表述为可高效求解的凸优化问题。我们将该方法与局部线性化技术进行比较，并表明该方法能够准确捕捉非线性动力学，并获得更好的控制性能。我们的方法为在负虚约束下为非线性负虚系统学习Koopman算子提供了一种数值上易于处理的解决方案，并为在不采用线性化近似的情况下将线性控制技术应用于非线性系统开辟了新的可能性。

本文其余部分组织如下。第二节回顾NI系统理论和Koopman算子理论的一些预备知识。第三节介绍本文关于在负虚约束下为非线性NI系统学习Koopman算子的主要结果。第四节通过一个数值示例——质量-弹簧-阻尼器系统——展示我们的方法。第五节总结全文并讨论未来的一些研究方向。

II. Preliminaries and Notation

本节介绍负虚系统和Koopman算子的定义。

A. 负虚系统

考虑以下 LTI 系统。

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{1}$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \tag{2}$$

其中 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$、$B \in \mathbb{R}^{n\times m}$、$C \in \mathbb{R}^{m\times n}$、$D \in \mathbb{R}^{m\times m}$，且具有方阵传递函数矩阵 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$。若传递函数矩阵 $G(s)$ 满足 $G(\infty) = D = 0$，则称其为严格真有理的。我们将使用记号 $\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$ 表示状态空间实现（1）、（2）。负虚系统定义如下：

定义 1：[2] 若方阵传递函数矩阵 $G(s)$ 满足以下条件，则称其为 NI：

1) $G(s)$ 在 $\mathrm{Re}[s] > 0$ 中没有极点。
2) 对于所有 $\omega > 0$，使得 $s = j\omega$ 不是 $G(s)$ 的极点，

$$j\left(G(j\omega) - G(j\omega)^*\right) \geq 0. \tag{3}$$

3) 如果 $s = j\omega_0$ with $\omega_0 > 0$ 是 $G(s)$ 的一个极点，则该极点为简单极点，且留数矩阵 $K = \lim_{s\longrightarrow j\omega_0}(s - j\omega_0)jG(s)$ 是厄米半正定矩阵。4) 如果 $s = 0$ 是 $G(s)$ 的一个极点，则对于所有 $k \geq 3$，$\lim_{s\longrightarrow 0} s^k G(s) = 0$，且 $\lim_{s\longrightarrow 0} s^2 G(s)$ 是厄米半正定矩阵。

定义 2：如果满足以下条件，则 [19] 一个方形传递函数矩阵 $G(s)$ 是 SNI：

1) $G(s)$ has no pole in $\mathrm{Re}[s] \geq 0$.
2) For all $\omega > 0$, $j\left(G(j\omega) - G(j\omega)^*\right) > 0$.

B. 负虚引理

负虚引理是一项利用一对线性矩阵不等式描述负虚系统的结果，与正实引理的描述方式类似 [20], [21]。该结果发表于 [1]–[22]，并且还涵盖了除零点以外的虚轴上存在极点的情况 [19]。

引理1：（参见 [19]）设 $\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$ 是传递函数矩阵 $G(s)$ 的一个最小状态空间实现。那么，当且仅当 $\det(A) \neq 0$，$D = D^T$ 且存在一个实矩阵 $P > 0$ 使得 $G(s)$ 为负虚系统时，

$$AP + PA^* \leq 0, \tag{4}$$

$$B = -APC^*. \tag{5}$$

如图1所示，传递函数矩阵为 $G(s)$ 的负虚系统与传递函数矩阵为 $\bar{G}(s)$ 的严格负虚系统之间存在正反馈互连。此外，假设传递函数矩阵 $G(s)$ 具有最小状态空间实现 $\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$，且 $\bar{G}(s)$ 具有最小状态空间实现 $\left[\begin{array}{c|c} \bar{A} & \bar{B} \\ \hline C & D \end{array}\right]$.

C. 非线性负虚系统

非线性负虚性的理论尚未得到充分研究。文献 [15], [23], [24] 中已开展初步研究。在本小节中，我们给出非线性负虚性的定义。

考虑以下非线性动力系统

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \tag{6}$$
$$y(t) = h(x(t)), \tag{7}$$

其中，$x(t) \in \mathbb{R}^n$、$u(t) \in \mathbb{R}^m$和 $y(t) \in \mathbb{R}^m$ 分别为系统状态、控制输入和输出。

定义 3：如果存在一个正储能函数 S_f：$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，属于 C^1，使得非线性系统 (7) 满足 NI 条件，则称该系统为 NI 系统

$$S_f(x(t)) \leq S_f(x(0)) + \int_0^t u(s)^T \dot{y}(s)ds, \tag{8}$$

对于所有 $t > 0$ 均成立。或者，积分条件 (8) 可以表示为微分条件

$$\dot{S}_f(x(t)) \leq u(t)^T \dot{y}(t). \tag{9}$$

需要注意的是，负虚系统中输出测量的定义方式与被动系统不同。负虚系统采用位置或加速度测量，而被动系统采用速度传感器。负虚系统还允许相对阶最高为二的传递函数，而被动系统只允许相对阶为零或一的传递函数。这一点在采用力执行器和位置传感器的系统中可以看到，例如机器人学和纳米定位系统。被动系统与严格被动系统之间的负反馈互连稳定性结果，并不适用于负虚系统与严格负虚系统之间的正位置反馈互连。 [25] 通过比较负虚系统反馈互联系统与被动系统的稳定性结果，证明了这一点；所讨论的物理系统包括弹簧-质量-阻尼系统和RLC电网络。

有几类重要的机械系统满足非线性负虚性质。例如，具有正非线性阻尼系数的质量-弹簧-阻尼器系统，在力输入和位移输出下是非线性负虚系统。更一般的一类非线性负虚系统，是由以下欧拉-拉格朗日动力学方程描述的系统：

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = F. \tag{10}$$

已有研究表明， [15] 由方程（10）所描述的动力系统确实是非线性负虚系统。

D. Koopman理论

本节简要介绍 [26] 中给出的Koopman算子。

Koopman算子是一种用于分析动力系统的数学工具。它由Bernard Koopman于1931年提出，此后成为研究非线性系统的重要工具。具体而言，在动力系统领域，Koopman算子为研究系统随时间的演化提供了有力工具。通过将系统的状态空间映射到更高维的空间，该算子能够利用线性方法分析非线性动力学。这在传统的非线性分析技术（如数值模拟或分岔分析）计算成本过高或难以实施时尤其有用。Koopman算子的一个重要应用是对复杂系统进行数据驱动建模。利用系统数据可以估计Koopman算子，并用它来近似系统的行为。这种方法在流体动力学等领域尤为成功，因为系统的复杂性常使传统建模技术难以实用。

考虑以下非线性差分方程

$$\begin{cases} x(j+1) &= f\left(x(j), u(j)\right), \\ y(j) &= g\left(x(j)\right), \end{cases} \tag{11}$$

其中， j 表示离散时间， $u \in \mathbb{R}^m$ 表示输入， $x \in \mathbb{R}^n$ 表示动力系统的状态， $y \in \mathbb{R}^l$ 表示输出， $f(x,u)$: $\mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$和 $g(x)$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ 是非线性函数。定义 ξ 如下： $\xi := \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}$.。此外，定义 $\mathbb{F}$ 为由 $\mathbb{F}(\xi)$: $= \begin{bmatrix} f(x,u) \\ \Xi(u) \end{bmatrix}$ 给出的非线性算子，其中Ξ 是时间移位算子，即 $\Xi(u(j)) := u(j+1)$。这意味着 ξ的时间演化可表示为 $\xi(j+1) = \mathbb{F}(\xi(j))$。此外，在新的状态空间表示中，定义 $\phi_{\text{inf}}(\xi)$为无限维提升函数，

$$\phi_{\text{inf}}(\xi) = \begin{bmatrix} \phi_1(\xi) \\ \phi_2(\xi) \\ \vdots \end{bmatrix}. \tag{12}$$

现在，我们可以将 Koopman 算子 $\mathcal{K}$ 定义为

$$\mathcal{K}(\phi_{\text{inf}}(\xi)) := \phi_{\text{inf}}(\mathbb{F}(\xi)),$$

其中，提升函数 $\phi_{\text{inf}}(\xi)$ 的时间演化如下所示；

$$\phi_{\text{inf}}(\xi(j+1)) = \mathcal{K}(\phi_{\text{inf}}(\xi(j))). \tag{13}$$

它是在无限维状态空间上定义的线性映射。

为了通过有限维近似来逼近无限维 Koopman 算子，我们定义N_ϕ维提升函数 $\phi(\xi) : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^{N_\phi}$ 如下：

$$\phi(\xi) = \begin{bmatrix} \phi_1(\xi) \\ \vdots \\ \phi_{N_\phi}(\xi) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N_\phi}.$$

现在，定义 $U \in \mathbb{R}^{N_\phi \times N_\phi}$ 为近似 Koopman 算子 $\mathcal{K}$的有限维矩阵，即 U 使以下范数最小

$$\|U\phi(\xi) - \phi(\mathcal{F}(\xi))\|. \tag{14}$$

这意味着

$$\phi(\xi(j+1)) \approx U\phi(\xi(j)), \tag{15}$$

它描述了式 (13) 中定义的 $\phi_{\text{inf}}(\xi)$ 的行为。与 [26]，中的方法类似，我们考虑一类提升函数

$$\phi(\xi) = \begin{bmatrix} \psi(x) \\ u \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N+m},$$

其中， $\psi(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$ 是一个 N 维提升函数，定义如下

$$\psi(x) = \begin{bmatrix} \psi_1(x) \\ \vdots \\ \psi_N(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N, \tag{16}$$

并且 $N + m = N_\phi$ 成立。矩阵 U 可表示为

$$U = \begin{bmatrix} A_d & B_d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N)\times(N+m)},$$

其中 $A_d \in \mathbb{R}^{N\times N}$ 和 $B_d \in \mathbb{R}^{N\times m}$。这意味着 (15) 可以改写为

$$\psi(x(j+1)) \approx A_d\psi(x(j)) + B_d u(j). \tag{17}$$

为了在 Koopman算子中构建输出方程，可将式（11）中的输出方程近似为:

$$y(j) \approx C_d\psi(x(j)),$$

其中 $C_d \in \mathbb{R}^{l\times N}$。最终的线性状态空间模型可定义如下:

$$\begin{cases} \psi(j+1) &= A_d\psi(j) + B_d u(j), \\ y(j) &= C_d\psi(j). \end{cases} \tag{18}$$

III。构建 Koopman 负虚约束　　约束

本节将构建离散动力系统的负虚约束，并将其施加于学习问题，以获得式（15）中的 Koopman算子近似。考虑以下离散时间系统

$$x(j+1) = A_d x(j) + B_d u(j), \tag{19}$$
$$y(j) = C_d x(j) + D_d u(j), \tag{20}$$

其中 $A_d \in \mathbb{R}^{n\times n}$、$B_d \in \mathbb{R}^{n\times m}$、$C_d \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $D_d \in \mathbb{R}^{m\times m}$. 。引理1中给出的负虚引理是在连续时间下构建的，因此需要进行双线性变换，如 [9], 所示，变换形式如下:

$$A = \frac{1}{T}(I+A_d)^{-1}(A_d - I), \quad B = \frac{1}{\sqrt{T}}(I+A_d)^{-1}B_d,$$
$$C = \frac{1}{\sqrt{T}}C_d(I+A_d)^{-1}, \quad D = D_d - C_d(I+A_d)^{-1}B_d,$$

其中，T 表示采样时间，用于将条件 (4) 转换为相应的离散时间条件。线性矩阵不等式 (4) 从连续时间形式转换为离散时间形式如下:

$$\begin{aligned} &AP + PA^T \le 0 \qquad (21)\\ \Leftrightarrow &(I+A_d)^{-1}(A_d-1)P + P(A_d^T-1)(I+A_d^T)^{-1} \le 0,\\ \Leftrightarrow &(A_dP - P)(I+A_d^T) + (P+A_dP)(A_d^T - I) \le 0,\\ \Leftrightarrow &A_dP + A_dPA_d^T - P - PA_d^T + PA_d^T + A_dPA_d^T\\ &\quad - P - A_dP \le 0,\\ \Leftrightarrow &A_dPA_d^T - P + A_dPA_d^T - P \le 0,\\ \Leftrightarrow &A_dPA_d^T - P \le 0. \qquad (22)\end{aligned}$$

此外,

$$\begin{aligned} &B = -APC^T\\ \Leftrightarrow\ &B_d = -\frac{1}{T}(A_d - I)P(I+A_d^T)^{-1}C_d^T. \end{aligned} \tag{23}$$

A. Koopman算子学习问题

类似的方法在 [26], 中定义以下数据矩阵，这些数据矩阵由 L 测量值生成,

$$\Omega := [u(j), u(j+1), \ldots, u(j+L-1)] \in \mathbb{R}^{m\times L}, \tag{24}$$
$$Y := [y(j), y(j+1), \ldots, y(j+L-1)] \in \mathbb{R}^{m\times L}, \tag{25}$$
$$\Theta := [\psi(j), \psi(j+1), \ldots, \psi(j+L-1)] \in \mathbb{R}^{N\times L}, \tag{26}$$
$$\Theta_+ := [\psi(j+1), \psi(j+2), \ldots, \psi(j+L)] \in \mathbb{R}^{N\times L} \tag{27}$$

这意味着，Koopman算子学习问题可以表述如下:

问题 1:

$$\begin{aligned} &\min_{A_d, B_d, C_d} \quad J_1(A_d, B_d) + J_2(C_d)\\ &\text{s.t.}\\ &P \ge 0,\\ &A_dPA_d^T - P \le 0,\\ &B_d = -\frac{1}{T}(A_d - I)P(I+A_d^T)^{-1}C_d^T \end{aligned} \tag{28}$$

其中

$$J_1(A_d, B_d) := \left\| \Theta_+ - \begin{bmatrix} A_d & B_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta \\ \Omega \end{bmatrix} \right\|_F^2, \tag{29}$$
$$J_2(C_d) := \|Y_j - C_d\Theta\|_F^2. \tag{30}$$

式（28）中给出的优化问题由于约束的非凸性而是非凸的。为了解决这个问题，我们用严格不等式替代矩阵不等式（22），并引入一个正的 $\alpha > 0$，使得以下条件成立,

$$P \ge \alpha I \tag{31}$$
$$A_dPA_d^T - P \le -\alpha I. \tag{32}$$

现在，利用舒尔补，式（31）和（32）中的线性矩阵不等式可写为:

$$\begin{bmatrix} P-\alpha I & A_dP \\ PA_d^T & P \end{bmatrix} \ge 0 \ \Rightarrow \begin{bmatrix} P-\alpha I & Q \\ Q^T & P \end{bmatrix} \ge 0, \tag{33}$$

其中 $Q = A_dP$。
现在，线性矩阵不等式（33）关于变量 Q 和 P 是凸的。此外，可以从 $A_d = QP^{-1}$ 中恢复矩阵 A_d。然而，整体优化问题仍然是非凸的，因为代价函数中的变量仍然 A_d、B_d、C_d。为解决这一问题，将矩阵 C_d 的辨识作为一个单独的优化问题，通过最小化式（30）给出的代价函数来实现，其最优解为

$$C_d = Y\Theta^\dagger, \tag{34}$$

其中 $(\cdot)^\dagger$ 表示 Θ 的摩尔–彭若斯伪逆。其次，引入两个加权矩阵 W 和 W，并将其用于　　o
代价函数（29），如下所示:

$$J_1(A_d, B_d) := \left\| W\left(\Theta_+ - \begin{bmatrix} A_d & B_d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Theta \\ \Omega \end{bmatrix}\right)\hat{W} \right\|_F^2, \tag{35}$$

其中，W 选取为:

$$\hat{W} = \begin{bmatrix} \Theta \\ \Omega \end{bmatrix}^T \times \left(\begin{bmatrix} \Theta \\ \Omega \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Theta \\ \Omega \end{bmatrix}^T \right)^\dagger \times \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}. \tag{36}$$

假设可以收集到足够的数据，从而可以假设 $\begin{bmatrix} \Theta \\ \Omega \end{bmatrix}$ 满行秩。这意味着，式 (35) 中的代价函数可以写成如下形式:

$$J_1(P,Q,B_d) := \left\| W\Theta_+\hat{W} - W\begin{bmatrix} Q & B_d \end{bmatrix} \right\|_F^2. \quad (37)$$

因此，优化问题现在可以写成如下形式；

问题 2：

$$\begin{aligned} \min_{P,Q,B_d} \quad & \left\| W\Theta_+\hat{W} - W\begin{bmatrix} Q & B_d \end{bmatrix} \right\|_F^2. \\ \text{s.t.} \quad & \\ & \begin{bmatrix} P-\alpha I & Q \\ Q^T & P \end{bmatrix} \geq 0. \end{aligned} \quad (38)$$

ˆ其中，W的定义见式 (36)，矩阵 W是加权矩阵，可将其视为设计参数，用于调整优化问题。

现在，式 (38) 中的优化问题关于变量 P、Q、B_d是凸的。使用任意凸优化求解器（例如 CVX），即可准确求出变量 P、Q、B_d，因此，根据$Q = A_dP$，可将矩阵 A_d 计算为 $A_d = QP^{-1}$。注意，矩阵 C_d 在式 (34) 中单独计算。

IV. Example: Mass-Spring-Damper System

考虑一个非线性质量-弹簧-阻尼系统

$$\ddot{z}(t) + \beta(z(t),\dot{z}(t))\dot{z}(t) + K(z(t)) = u(t), \quad y(t) = z(t). \quad (39)$$

其中，$\beta(z(t)\ \dot{z}(t))$ 和 $k(z(t))$ 分别表示摩擦系数和弹簧刚度。

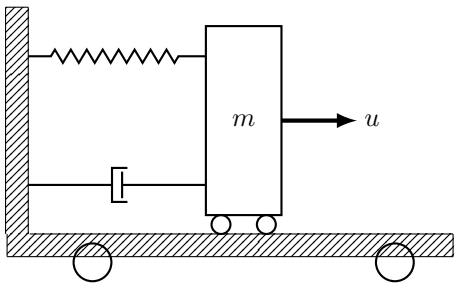

图 2. 弹簧-阻尼器-质量系统

通过选择如下储能函数，可以很容易地证明上述系统是一个非线性负虚系统；

$$V(z(t),\dot{z}(t)) = \frac{1}{2}m\dot{z}^2(t) + \int_0^z (t)k(\xi)d\xi.$$

$V(z(t)\ \dot{z}(t))$的时间导数为，

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t),\dot{z}(t)) &= m\dot{z}(t)\ddot{z}(t) + k(z(t))\dot{z}(t) \\ &= \dot{z}(t)u(t) - \beta(z(t),\dot{z}(t))\dot{z}^2(t) \leq \dot{z}(t)u(t), \end{aligned}$$

这意味着式（39）给出的弹簧-阻尼-质量系统确实是负虚系统。

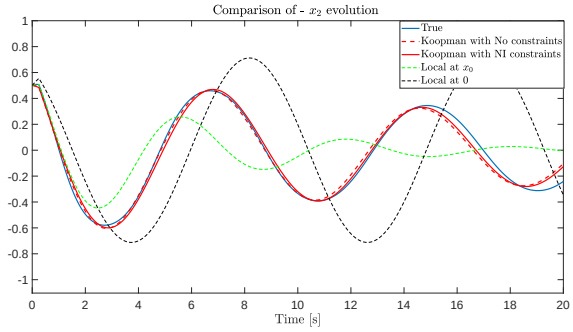

图 3. 不同模型的状态 x_2 与由非线性系统生成的真实数据的比较

现在，通过将状态定义为 $x_1(t) = z(t)$ 和 $x_2(t) = \dot{z}(t)$，式 (39) 中给出的弹簧-阻尼-质量系统可以写成如下形式；

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ \frac{-K(x_1(t))}{m} - \frac{\beta(x_1(t),x_2(t))}{m}x_2(t) + \frac{u(t)}{m} \end{bmatrix}, \quad (40)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}. \quad (41)$$

接下来，使用式 (38) 中的优化问题来学习一个表示式 (40) 所给非线性动力系统的线性系统。

提升函数 $\phi(x)$选为以下形式的一类径向基函数：

$$\psi_i(x(j)) = \|x(j) - r_i\|_2^2 \ln\|x(j) - r_i\|_2,$$

其中，中心 r_i 是从均匀分布中随机选取的。

关于提升函数的新状态空间表示如下，

$$\psi(x(j)) = [x_1(j), x_2(j), \psi_1(x(j)), \ldots, \psi_{N_{\text{rbf}}}(x(j))]^{\text{T}} \quad (42)$$

我们假设 $K(x_1(t)) = \left(x_1(t) + x_1^3(t)\right)$，并将阻尼器中的非线性视为 $\beta(x_1(t)\ x_2(t)) = x_1^2(t) + x_2^2(t)$。此外，令提升状态的数量为 6，即 $N_{\text{rbf}} = 6$。将所得模型与状态数量相同的无约束 Koopman 模型、初始点附近的线性化模型 $x_0 = [0,0]^{\text{T}}$以及初始点附近的线性化模型 $x_0 = [0.5,0.5]^{\text{T}}$进行比较。使用随机强迫输入信号生成优化问题所需的数据。

图 3 展示了不同模型的状态 x_2 演化情况，并将其与非线性系统生成的真实数据进行了比较。图 4 也展示了不同模型的状态 x_1 演化情况，并将其与非线性系统生成的真实数据进行了比较。如图 3 和图 4 所示，线性模型无法近似非线性项，而 Koopman 模型则能够准确地近似非线性。

图 5 展示了采用 Koopman 算子对近似线性系统所得的波特图。蓝色曲线表示本文提出的受负虚约束的模型，

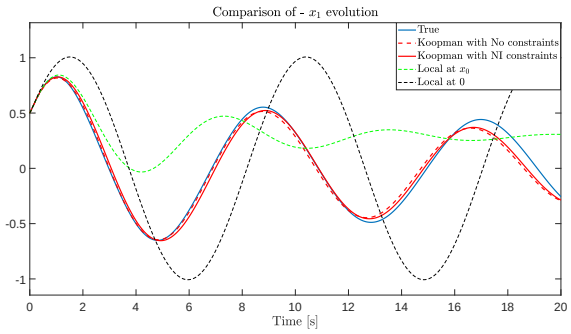

图4. 不同模型的状态 x_1 与由非线性系统生成的真实数据的比较

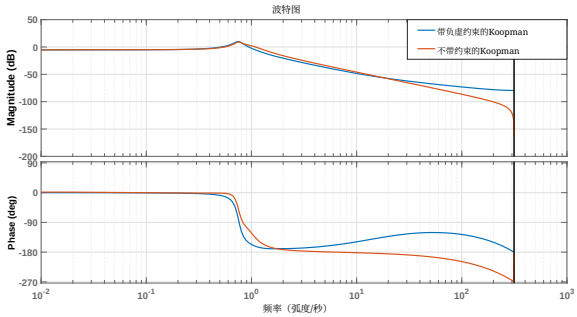

图5. 使用Koopman算子得到的近似线性系统的波特图。蓝线表示本文构建的负虚约束模型，橙线表示无约束模型。

而橙色曲线表示无约束模型。从相位图可以清楚看出，负虚约束模型满足负虚性质，即相位位于 $(0, -\pi)$ 之间；然而，无约束模型不满足负虚性质。

状态真实值与生成的受约束模型之间的均方误差（MSE）如表I所示。该表表明，受约束模型的MSE增幅非常小。

为强调对Koopman算子施加负虚约束的重要性，我们针对线性化模型考虑一种反馈控制设计。假设为弹簧-阻尼器-质量系统设计了一个严格负虚控制器，其形式为式（43）中的正位置反馈控制器（PPF）；这种控制器常用于此类系统。

$$C(s) = \frac{K}{s^2 + 2\zeta\omega\ s + \omega^2}. \tag{43}$$

当公式 (43) 中给出的控制器分别与线性负虚约束模型和无约束模型进行正反馈连接时，可得到一个稳定的闭环做爱片

表I 不同模型的均方误差。

均方误差（MSE）对比：	x_1	x_2
真实值与受约束模型	0.0078	0.0042
真实值与无约束模型	0.0030	0.0021
受约束模型与无约束模型	0.0095	0.0059

在负虚约束模型下获得，而在无约束模型下，闭环系统不稳定。这一点可从图6中的闭环系统阶跃响应和图7中的奈奎斯特图看出。这确实说明了在控制器综合中，获得负虚非线性系统的负虚线性模型近似的重要性。

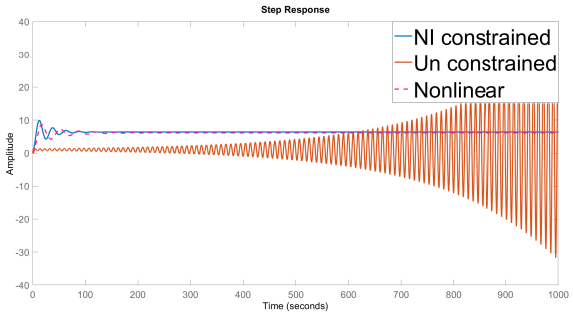

图 6. 正位置反馈控制器与非线性模型（虚线）、线性负虚约束模型（蓝色实线）及无约束模型的连接

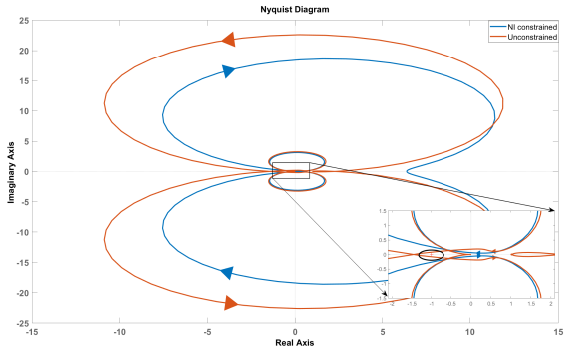

图 7. 闭环奈奎斯特图。

V. 结论

总之，本文提出了一种数据驱动方法，利用Koopman理论学习提升线性负虚（NI）动力学，以近似非线性动力系统。所提出的方法将刻画负虚性质的线性矩阵不等式嵌入Koopman框架，从而形成一个非凸优化问题。为克服求解该问题时的数值挑战，本文重新表述了优化变量，将问题转换为凸优化问题。将所提出的方法与局部线性化技术进行比较表明，该方法能够准确捕捉非线性动力学，并实现更好的控制性能。该方法为在负虚约束下学习Koopman算子提供了一种数值上易处理的解决方案，并为在线性化近似的情况下将线性控制技术应用于非线性系统开辟了新的可能性。总体而言，所提出的方法是控制工程领域的一项重要贡献，因为它为在各种工程应用中控制非线性NI系统提供了一种有前景的方法。

参考文献

[1] A. Lanzon 和 I. R. Petersen，“具有负虚频率响应系统的反馈互联系统的稳定鲁棒性”，IEEE 自动控制汇刊，第53卷，1046，2008 4，1042，第—号，页码。[2] M. A. Mabrok、A. G. Kallapur、I. R. Petersen 和 A. Lanzon，“将负虚系统理论推广至包含自由体动力学：具有自由体运动的高谐振结构控制”，IEEE 自动控制汇刊，第59卷，2707，2014 10，2692，第—号，页码。[3] I. R. Petersen，“负虚系统理论及其应用”，《控制年度评论》，第42卷，第309–318页，2016年。[4] V. P. Tran、F. Santoso、M. Garratt 和 S. Anavatti，“利用神经网络自学习自适应严格负虚跟踪控制器，实现运输缆绳悬挂载荷且最小摆动的四旋翼无人机控制”，IEEE 工业电子学汇刊，第68卷，第10期，第10 258–10 268页，2020年。[5] A. Preumont，《主动结构振动控制：导论》，N. Jacobs 编，施普林格，2011年。[6] M. A. Mabrok、A. G. Kallapur、I. R. Petersen 和 A. Lanzon，“利用黎卡提方程方法稳定条件不确定负虚系统”，载于第20届网络与系统数学理论国际研讨会（MTNS）论文集，2012年，第9–13页。[7] M. A. Mabrok 和 I. R. Petersen，“负虚系统的控制器综合：一种数据驱动方法”，IET《控制理论与应用》，第10卷，第12期，第1480–1486页，2016年。[8] M. Mabrok，“利用非线性优化和h 2性能指标进行负虚系统的控制器综合”，《国际控制杂志》，第94卷，第3期，第579–587页，2021年。[9] M. A. Mabrok、M. A. Haggag 和 I. R. Petersen，“负虚系统的系统辨识算法”，《应用计算与数学》，第14卷，第3期，第336–348页，2015年。[10] J. Xiong、J. Lam 和 I. R. Petersen，“结构约束下的输出反馈负虚综合”，《自动化》，第71卷，第222–228页，2016年。[11] A. Ferrante、A. Lanzon 和 L. Ntogramatzidis，“负虚系统理论基础及其与正实系统的关系”，arXiv预印本 arXiv:1412.5709，2014年。[12] ——，“离散时间负虚系统”，《自动化》，第79卷，第1–10页，2017年。[13] M. Liu 和 J. Xiong，“离散时间负虚系统的性质与稳定性分析”，《自动化》，第83卷，第58–64页，2017年。[14] I. R. Petersen、A. Lanzon 和 Z. Song，“通过状态反馈控制稳定不确定负虚系统”，载于欧洲控制会议论文集，布达佩斯，匈牙利，2009年8月。[15] A. G. Ghallab 和 I. R. Petersen，“非线性系统的负虚系统理论：一种耗散性方法”，arXiv预印本 arXiv:2201.00144，2022年。[16] A. Mauroy、Y. Susuki 和 I. Mezi´c，《系统与控制中的Koopman算子》，施普林格，2020年。[17] M. Korda 和 I. Mezi´c，“非线性动力系统的线性预测器：Koopman算子与模型预测控制的结合”，《自动化》，第93卷，第149–160页，2018年。[18] P. Bevanda、S. Sosnowski 和 S. Hirche，“Koopman算子动力学模型：学习、分析与控制”，《控制年度评论》，第52卷，第197–212页，2021年。[19] J. Xiong、I. R. Petersen 和 A. Lanzon，“负虚引理及线性负虚系统互联系统的稳定性”，IEEE 自动控制汇刊，第55卷，第10期，第2342–2347页，2010年。[20] B. D. O. Anderson 和 S. Vongpanitlerd，《网络分析与综合：一种现代系统方法》，恩格尔伍德克利夫斯，新泽西州，美国：普伦蒂斯-霍尔，1973年。[21] B. Brogliato、R. Lozano、B. Maschke 和 O. Egeland，《耗散系统分析与控制》，第2版，通信与控制工程丛书，伦敦，英国：施普林格，2007年。[22] A. Lanzon 和 I. R. Petersen，“修正的正实型稳定性条件”，载于欧洲控制会议论文集，科斯，希腊，2007年7月，第3912–3918页。[23] A. G. Ghallab、M. A. Mabrok 和 I. R. Petersen，“将负虚系统理论扩展至非线性系统”，载于2018年IEEE决策与控制会议（CDC），IEEE，2018年，第2348–2353页。[24] M. A. Mabrok、M. A. Alyami 和 E. E. Mahmoud，“关于负虚系统的耗散性”，《亚历山大工程学报》，第60卷，第1期，第1403–1410页，2021年。[25] I. R. Petersen，“负虚系统理论的物理解释”，载于《2015年第10届亚洲控制会议（ASCC）》，2015年5月，第1–6页。[26] K. Hara、M. Inoue 和 N. Sebe，“耗散性约束下的 Koopman 算子学习”，《IFAC-PapersOnLine》，第53卷，第2期，第1169–1174页，2020年。