arXiv:2305.04218v1 [math.DS] 7 May 2023

曼德博集合分岔轨迹上的单值化

HYUNGRYUL BAIK 和 JUHUN BAIK

Abstract. 我们研究当移位轨迹 c 中的参数 $z \mapsto z^2 + c$ 可以穿过分岔轨迹 $\mathcal{P}_2$上的点时，Julia 集中各点的行程序列如何变化；我们将这些点称为“窄的”，这一概念最早由 Dierk Schleicher 在 [Sch17] 中提出。我们首先证明窄特征弧的组合与几何性质。然后，我们借助 Keller 在 [Kel07] 中提出的层状模型，展示行程序列如何以算法方式变化。最后，我们在 0-1 序列集合上找到一种等价关系，使得变化规则在该等价关系下是移位不变的。这推广了 Atela 在 [Ate92], [Ate93], 中的工作；该工作讨论的是广义兔子多项式这一特殊情形。

1. Introduction

次数为 $d \geq 2$ 的复多项式的移位轨迹，是由这样一些多项式组成的集合：每个临界点在多次迭代作用下都逃向无穷远。我们将其称为移位多项式，原因如下定理所述。

定理 1.1. 假设 P 是次数为 $d \geq 2$ 的移位多项式，且 J_P 是 P的 *Julia* 集。那么存在 J_P 与 Σ_d之间的一个同胚，其中 Σ_d是由 d 个符号组成的单边无限序列集合。此外，$P|_{J_P}$：$J_P \to J_P$ 在此同胚下与单侧移位映射 σ： $\Sigma_d \to \Sigma_d$ 共轭。即，

$$\begin{array}{ccc} J_P & \longrightarrow & \Sigma_d \\ \downarrow{\scriptstyle P} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma} \\ J_P & \longrightarrow & \Sigma_d \end{array}$$

我们赋予 Σ_d 以 $\{0, 1, \cdots, d-1\}^{\mathbb{N}}$ 的乘积拓扑，因此它与康托尔集同胚。

最著名且最简单的例子是曼德博集合的外部，$\mathbb{C} - \mathcal{M}$，它是二次多项式 $\mathcal{S}_2$ 的移位轨迹。正如曼德博集合呈现出分形特征，次数为 d、$\mathcal{S}_d$ 的移位轨迹也具有分形结构，理解其拓扑与几何一直是一项挑战。1994 年，Blanchard、Devaney 和 Keen [BDK91]证明了

Date: 2023年5月9日。*Key words and phrases.* 双可达点、分岔轨迹、行程序列、折叠序列。

移位轨迹 $\pi_1(\mathcal{S}_d)$ 的基本群作用于 d 符号的移位自同构集合上。此外，他们证明了这一作用是满射的。也就是说，对于任意移位自同构 ϕ，都存在 $\pi_1(\mathcal{S}_d)$ 中的一个元素，其在 Julia 集上的作用与 ϕ 完全相同。

$$\mathrm{BDK} : \pi_1(\mathcal{S}_d) \twoheadrightarrow Aut(\Sigma_d, \sigma)$$

这里，移位自同构是指一个与单侧移位映射 σ 交换的 Σ_d 的自同构。

与 $d \geq 3$ 不同，二次情形通常并不受到关注，因为正如 Douady 和 Hubbard 所证明的，移位轨迹 $\mathcal{S}_2$ 与 $\mathbb{C} - \mathbb{D}$ 共形。因此， $\pi_1(\mathcal{S}_2)$ 是 $\mathbb{Z}$，并且由一个回路 γ 生成，该回路如图 1 所示环绕 $\mathcal{M}$ 。在 BDK 映射下，这个生成元在 Σ_2 上的作用是将 0 和 1 进行符号变换，而这正是 Σ_2 中唯一的非平凡移位自同构。

$$\begin{aligned} \mathrm{BDK} : \pi_1(\mathcal{S}_2) \cong \langle\gamma\rangle &\longrightarrow Aut(\Sigma_2, \sigma) \\ \gamma &\longmapsto (0,1) \text{ symbol swap} \end{aligned}$$

设 J_α 是 $P_\alpha\colon z \mapsto z^2 + c$ 的一个 Cantor Julia 集，其中 c 的参数角为 α。那么，当 c 沿回路移动时， J_0 会发生置换，并回到它们的起始位置。

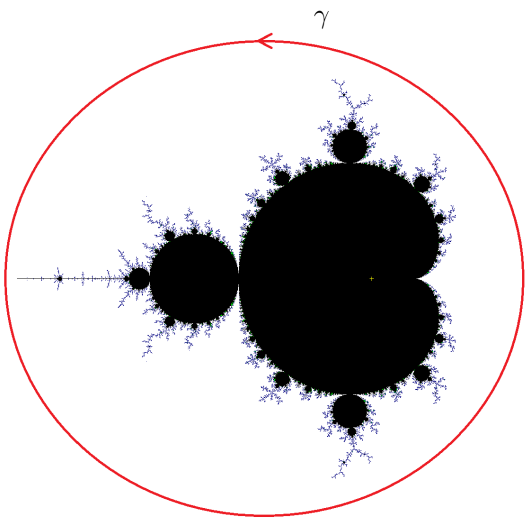


FIGURE 1. γ 是一条绕着曼德博集合 $\mathcal{M}$移动的回路。 γ 是移位轨迹 $\mathcal{S}_2 \cong \mathbb{C} - \mathbb{D}$的生成元。

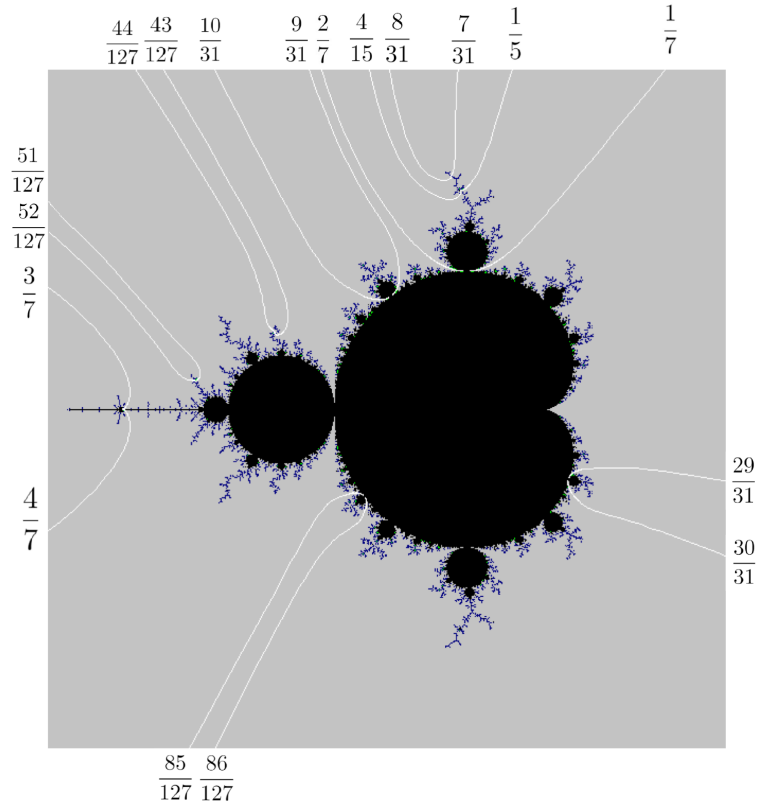


FIGURE 2. 落在分岔轨迹上的参数射线对示例，这些射线对均为窄的。我们研究当 c 沿一对参数射线移动时会发生什么。

窄特征弧。 Milnor 在 [Mil00] 中证明，存在一种组合方法（称为“轨道画像”）来描述抛物点的动力学性质。此外，Douady、Hubbard 和 Lavarus 在 [DHL84] 中证明，每个抛物点恰有两条参数射线落在某个双曲分支的根上。这对角度称为伴随角，记作 α 和 α。端点构成一对伴随角的弧称为特征弧。所有特征弧构成一个层叠，称为二次小叶叠。在 [Sch17]，中，Schleicher 提出了窄特征弧的概念。简而言之，周期为 n的窄弧，其宽度为 $\frac{1}{2^n-1}$。我们根据轨道画像给出了特征弧具有窄性的充要条件。利用这一条件，我们提出了单纯可重整化弧的几何条件。

定理 1.2 (推论 3.12)。 每个窄弧/分支都不是简单可重整化的。每个素周期弧/分支都不是简单可重整化的。除非其根与主心形区相接，否则每个卫星弧/分支都不是窄的 M_0。

我们注记，Schleicher 在 Sch 中为$\mathcal{M}$ 的每个双曲分支定义了内部地址 [17]。借助这一结果，他完全确定了相应多项式何时可重整化，包括简单情形和交叉情形。得益于他的定理，我们得到了附录 B 中非窄的、具有非素周期的非简单可重整化多项式集合。

揉捏序列在分岔轨迹处发生变化。 Julia 集中所有点的外角集合 J_α 与 J_α的外角集合相同。因此，从揉捏序列／行程序列的角度来看，自然会问：如果将 α 改为 α，会发生什么？图 2 展示了一些窄的参数射线示例。我们证明了，对于窄情形，存在一种算法，可以描述行程序列如何变化，见定理 5.8。

在 [Ate93]和 [Ate92], 中，Atela 针对广义兔子多项式情形得到了这样一种算法（在论文中，Atela 将其称为主分岔点。）广义兔子多项式或主分岔点对应于参数角 $\left(\frac{1}{2^n-1}, \frac{2}{2^n-1}\right)$ 在 $n \geq 2$下的特征弧集合。Atela 构造了动力图，并将每个行程序列提升为图中的无限路径，然后通过区分一对顶点的着色来找出规则。我们将这一结果推广到了所有窄特征弧。我们的方法与 Atela 的不同之处在于，我们采用了 Keller 在 [Kel07]中提出的层状模型。通过这种方法，我们能够更明确地描述行程序列如何变化。

定理 1.3 (定理 5.8)。 设 $s = s_1 s_2 s_3 \cdots$ 是一个0-1 序列。此外，设 $v = v^\alpha$ 是 α 的重复词， $e = e^\alpha$ 是 α 的特征符号，且 周期(α) $= |v| + 1$ 是 α 的周期。然后我们如下定义 $\varphi_\alpha(s)$ 。

(1) $i = 0$。(2) </style}设定 。(a) 如果 $w = 0v$ 或 $1v$，则设定 $i \leftarrow i + |v| + 1$ 并返回步骤 *(2)*。(b) 如果不是，但存在前一个 $0v$ 或 $1v$，则检查 $s_i = e$。(i) 如果 $s_{i+|v|+1} = e$，则交换所有 $0v$ 和 $1v$。(ii) 如果 $s_{i+|v|+1} \neq e$，则回溯到前一个 $0v$ （或 $1v$），并返回步骤 *(b)*。(3) 如果 w 既不是 $0v$ 也不是 $1v$，则设定 $i \leftarrow i + 1$ 并返回步骤 *(2)*。

假设(α, α)是窄的。选取 $p \in J_\alpha$，并设 θ 为 p 的动力角。如果 θ 不是预临界角，那么 $\varphi_\alpha(I^\alpha(\theta)) = I^\alpha(\theta)$。

该定理的优势在于：（1）我们不必像 [Ate93]，中提出的那样，将给定序列提升为图的无限路径；（2）只需从头查看给定序列，我们就总能得到目标行程序列。

与 [Ate93]，一样，我们也在附录A中提供动力图方法来理解 φ_α 。无论 α 是否具有窄性，这种方法都适用，不过很难显式地得到目标序列。

目前，算法 φ_α 仅涵盖那些不是预临界角的点。为了将定义域扩展到整个 $J_\alpha \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$，我们为每个预临界角赋予一个标记，并将在下一小节中介绍。

行程序列上的等价关系。 行程序列函数 $I^\alpha : S^1 \to \Sigma_2$ 不是满射，而且对某些角度未定义；这些角度是 α 在角度加倍映射下的原像。为了使每个行程序列都与康托尔型朱利亚集中的点相兼容，我们首先用 $\mathbf{E}_\alpha$ 扩展 S^1 的角度（见定义6.1）。

此外， φ_α 既不是单射也不是满射，有时还是多值的。我们将考察这些情况何时发生，并通过如下定义等价关系来解决这些问题。

定义1.4 (定义6.5)。 设 $s_1, s_2 \in \Sigma_2$ 和 $x_1, x_2 \in J_\alpha$ 为相应的点。假设 θ_1, θ_2 分别是 x_1, x_2 的扩展角。我们如下定义等价关系 $\sim$ ：

$$s_1 \sim s_2 \quad \Leftrightarrow \quad \theta_1 \approx_\alpha \theta_2$$

将$\mathbf{E}_\alpha$ 按此等价关系取商后， φ_α 便定义良好且移位不变。这里的移位不变是指它与序列的单边移位可交换。

定理1.5 (定理6.6)。 φ_α ： $\Sigma_2/\sim \to \Sigma_2/\sim$ 定义良好。此外，它是二阶元素且移位不变。

未来工作。 在即将发表的论文中，我们将为二次分岔轨迹上的每个点构造 Mod(ℂ–{康托尔集}) 或 Mod(S^2 – {康托尔集}) 中的大映射类。这些大映射类生成 Mod(ℂ – {康托尔集}) 或 Mod(S^2 – { 康托尔集 }) 的一个子群，该子群具有许多有趣的动力学性质。

论文提纲。 我们在第 2 节简要介绍复动力学基础知识。第 3 节详细讨论窄弧及其轨道画像的组合结构，并证明窄条件足以保证其不能被简单地重整化。在第 4 节，我们介绍 Keller的工作 [Kel07] 并定义四边形。

利用层叠来描述行程序列如何变化，但仅针对在角度加倍映射下不是前临界角的角度。第 5 节关注前临界角，以便为临界角 α 完整定义 φ_α。我们通过添加一些标记来扩展 S^1 中的角度，并在第 6 节给出一个等价关系，使 φ_α 成为移位不变的。在附录 A 中，我们展示了对于窄弧，存在一个与 93]Ate93] 中类似的动力图。最后，我们以附录 B 中附上的非窄、非简单可重整化的非素周期弧表格作为结尾。

致谢。感谢 InSung Park 的有益交流。此外，我们感谢 Wolf Jung 编写的程序 $mandel$ [Jun19] ，该程序有助于理解和可视化许多示例。

2. Preliminary

本节简要概述与二次多项式动力学相关的基本理论。更多详情请参阅 [Mil11], [Hub16], [DH84] 和 [CG13]。部分图形由 Wolf Jung 编写的计算机程序 *'mandel'* [Jun19] 绘制。

2.1. 二次多项式。

任意复多项式 $a_d z^d + \cdots + a_0$ 都可以通过线性映射共轭为一个首一 ($a_d = 1$)且中心化 ($a_{d-1} = 0$)的多项式。特别地，任意二次多项式$P(z) = \alpha z^2 + \beta z + \gamma$ 都共轭于形如 $z \mapsto z^2 + c$ 的多项式，其中 $c \in \mathbb{C}$为某个值，因此二次多项式在忽略线性共轭的意义下由常数项$c \in \mathbb{C}$决定。 consequently，二次多项式的模空间就是一个复平面$\mathbb{C}$。下面我们先简要回顾 Fatou 集和 Julia 集的定义。

定义 2.1 (Fatou 集，Julia 集)。设 $P: \ S \to S$ 是一个将黎曼球面 S 映射到自身的二次多项式。***Fatou*** 集 F_P 是由点 $z \in S$ 构成的集合，其中每个点都存在一个邻域 U，使得 P在 U、 $P|_U$、 $P^{\circ 2}|_U$、 $\cdots$处的迭代构成正规族。根据定义，***Fatou*** 集是开集。***Julia*** 集 J_P 是 F_P的补集。即， $J_P = S - F_P$。

此外，正向轨道 $\{P^{\circ n}(z)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 有界的点集称为填充朱利亚集 K_P。顾名思义， K_P 的边界就是 J_P。Julia 集的连通性取决于临界点 $z = 0$ 的行为。

定理 2.2。设 $P(z) = z^2 + c, \ \ c \in S$。那么

- J_P 连通 $\Leftrightarrow \{P^{\circ n}(0)\}_{n=1,\ 2,\ \cdots}$ 有界。
- J_P 是一个康托尔集 $\Leftrightarrow \{P^{\circ n}\ (0)\ \}_{n=1,\ 2,\ \cdots}$ 逃逸到无穷远。

此外，如果0 在对 P进行迭代时逃逸到无穷远（后一种情况）， $P|_{J(P)}$ 与2 个符号上的单边移位共轭。

最后一个陈述恰好是情形 $d = 2$ 下的定理 1.1。二次移位轨迹记作 $\mathcal{S}_2$，是所有二次移位多项式的集合。回顾一下，曼德博集合 $\mathcal{M}$ 是满足 0 不逃逸到无穷远的 $c \in \mathbb{C}$ 的集合；根据定理 2.2，它也就是连通轨迹。因此， $\mathcal{S}_2$ 是 $\mathcal{M}$ 的补集。

对于二次多项式 P，假设存在某个满足 $P^{\circ k}(z) = z$ 的 z。我们称这样的最小正整数 k 为周期，并将 $\{z, P(z) \cdots, P^{\circ(k-1)}(z)\}$ 称为一个周期循环（这里沿用记号，有时也称其为不动点，尽管它并非单个点）。对于每个周期为 k 的周期循环，我们定义乘子 $\rho(z) := \left(P^{\circ k}\right)'(z) = P'(z) \times P'(P(z)) \times \cdots P'(P^{\circ(k-1)}(z))$。注意，同一周期循环中的乘子保持不变。不动点根据其乘子分类：若 $|\rho| = 0$，则称为超吸引；若 $0 < |\rho| < 1$，则称为吸引；若 $\rho = e^{2\pi i\theta}$ 且 θ 为无理数，则称为无理中性；若 $\rho = e^{2\pi i\theta}$ 且 θ 为有理数，则称为抛物；若 $|\rho| > 1$，则称为排斥。

定义 *2.3*（双曲分支）。令 $P_c := z^2 + c$ *for* $c \in \mathbb{C}$。记 X_k 为由满足 $P_c^{\circ k}(z) = z$ 的点对 $(c, z) \in \mathbb{C}^2$ 构成的集合。考虑函数 $\rho_k : X_k \to \mathbb{C}$，它将 $(c, z) \mapsto$ 映射为 $(P_c^{\circ k})'(z)$，即此类不动点的乘子。令 A_k 为满足 $|\rho(c, z)| < 1$ 的点对 $(c, z) \in X_k$ 构成的集合，并令 M_k 为 $\pi(A_k)$，其中 $\pi : (c, z) \mapsto c$ 是到第一个因子的投影（即， M_k 是由满足 P_c 具有一个周期为k的吸引不动点的 c 构成的集合）。那么， M_k 的每个分支 M 都是其内部 $\mathcal{M}$ 中的一个开分支，称为“ 双曲分支”。

$Int(\mathcal{M})$ 的每个分支是否都是双曲的，这仍是一个未解决的问题。这被称为双曲密度猜想。

乘子映射 ρ 将每个双曲分支M 解析同构地映射到开单位圆盘 $\mathbb{D}$，并可延拓为从 M 到 $\mathbb{D}$的同胚。滥用一下记号，令 ρ 表示这个延拓后的同胚。那么，$c_M := \rho^{-1}(0)$ 称为 M 的中心，而 $r_M := \rho^{-1}(1)$ 称为 M的根。

2.2. **参数角**。

Douady 和 Hubbard 在 [DH84] 中证明了 $\mathcal{M}$ 是连通的，并明确给出了从 $\mathbb{C} - \mathbb{D}$ 到 $\mathbb{C} - \mathcal{M}$ 的解析映射。目前尚不清楚 $\mathcal{M}$ 是否局部连通，这被称为 *MLC* 猜想。

定理2.4. 存在一个解析同构 Ψ，将 $\mathbb{C} - \mathcal{M}$ 映射到 $\mathbb{C} - \mathbb{D}$，因此曼德博集合 $\overline{\mathcal{M}}$ 是连通的。

将 $\mathcal{M}$ 的外部与 $\mathbb{C}-\mathbb{D}$等同起来后，我们可以为 $\mathbb{C}-\mathcal{M}$ 中的每个点指定一个角度。更确切地说，对于任意 $c\in\mathbb{C}-\mathcal{M}$， c 的外角 为 $\arg(\Psi^{-1}(c))/2\pi\in[0,1]$。这里，为方便起见，角度归一化到 0 和 1 之间，并将 0 和 1 视为相同，因此外角集合构成一个周长为 1 的圆。我们也将射线 $\Psi^{-1}\big(\{re^{i\alpha}\mid r\le 1\}\big)$ 称为外射线 $\mathcal{R}_\alpha$。这里的外角和外射线也分别称为参数角 和参数射线，因为它们位于参数平面上。我们将在 Julia 集补集上类似地定义外角和外射线，由于它们位于动力平面上，因此分别称为动力角 和动力射线。我们记 $P_\alpha:=z^2+c$，其中 $c\in\mathcal{S}_2$ 的外角为 α，并将 J_α 称为其 Julia 集。

同样根据 Douady 和 Hubbard 的结果，众所周知，对于每个抛物点 $c\in\mathcal{M}$，都有一对参数射线 $\mathcal{R}_\alpha$， $\mathcal{R}_\alpha$ 在该点落地，反之亦然。此外，这样的α 和 α 在角度加倍下是周期的，因此是奇数分母的有理数。这样的一对角度称为伴随角。

2.3. **外角与切迹序列**。

对于多项式情形，B¨ottcher 在 [Boe04] 中给出了一种很巧妙的坐标变换。

定理 2.5 (B¨ottcher 坐标)**.** 设 P 是一个次数为 d的多项式。那么存在一对邻域 $V\subset U$，它们分别属于 ∞，以及一个解析映射 $\phi:\ V\to\mathbb{C}$，它将 ∞ 映射到0，并满足 $\phi'(\infty)=1$ 和$(\phi(z))^d=\phi(P(z))$。

B¨ottcher 坐标使我们能够理解无穷远附近的动力学，它是单项式映射 $w\mapsto w^d$ 的半共轭。令 $G_P:=\log|\phi|$，这是一个格林函数。

引理 2.6 （格林函数的性质）。

（1） $G_P:\ \mathbb{C}\to\mathbb{R}_{\ge0}$。（2） G_P 的水平集（除 0 外）构成 $\mathbb{C}-K_P$ 的水平叶状结构。（3） $K_P=G_P^{-1}$ （0）。（4） G_P 的临界点由 P 的临界点及其在 P 下的原像组成。

此处省略证明。根据引理 2.6，我们可以将无穷远的一个小邻域识别为圆盘，从而画出一条固定角度的射线。这样的射线称为动力角 θ 的动力射线，它与 G_P 的每个水平集正交。我们也滥用记号将其记为 $\mathcal{R}_\theta$。换言之，动力射线构成垂直于水平集的垂直叶状结构，而这些水平集构成水平叶状结构。

对于角度加倍下的周期角度， $\mathbb{C}-J_\alpha$ 的每条动力射线都会落在 J_α 中的某些点，或与（前）临界点相交并发生分岔。请注意，0 是 α 唯一的临界点

，它是临界值的一个原像，其动力角为 α。因此，从 B¨ottcher 坐标的意义上说，角度为$\frac{\alpha}{2}$， $\frac{\alpha+1}{2}$ 的两条动力射线落在 0 上。

现在，任取一点 $p \in J_\alpha$ ，并设 θ 为其动力角。那么， p 的揉捏序列（或等价地，θ）定义如下。

定义 2.7 (揉捏序列**)**。 假设上述条件成立。将 S^1 分成2 部分，在$\frac{\alpha}{2}$ 和 $\frac{\alpha+1}{2}$ 处切开。令 A_α 为一条开弧 $\{\theta \mid \frac{\alpha}{2} < \theta < \frac{\alpha+1}{2}\}$ ，令 B_α 为另一条开弧。那么揉捏序列 $I^\alpha(\theta) := x_0x_1x_2\cdots$ 是一个0-1 序列，其中可能含有一些 $*$，其各项由以下方式确定。

$$x_i = \begin{cases} 0 & if\ 2^i\theta \in A_\alpha \\ 1 & if\ 2^i\theta \in B_\alpha \\ * & if\ 2^i\theta = \dfrac{\alpha}{2}\ or\ \dfrac{\alpha+1}{2} \end{cases}$$

因此，我们通过将 $p \in J_P$ 映射到其行程序列来构造映射 $J_P \to \Sigma_2$。本节最后介绍一些记号。

- 0-1 字 w 是一个有限序列 $w := w_0w_1\cdots w_k$，其中 $w_i \in \{0,1\}$。类似地，0-1 序列是一个所有项均为 0 或 1 的无限序列。
- $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 是所有无限长 0-1 序列的并集。
- 0-1 字 w 属于 $\{0,1\}^n$ ，当且仅当 w 的长度 $|w|$ 为 n。
- $\{0,1\}^* := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{0,1\}^n$ 是所有有限 0-1 字 w构成的集合。
- 对于 $w \in \{0,1\}^*$，$w \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 是一个由重复的 w 构成的无限序列。

The这些记号将在后续讨论层状模型的章节中使用。

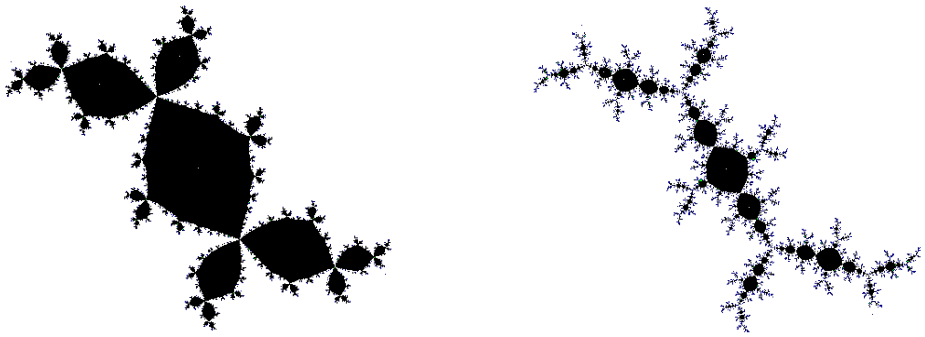
2.4. 重整化与调谐。 在 [Dou86], Douady 提出，存在一个将曼德博集合 $\mathcal{M}$ 映入其自身的同胚。更准确地说，设 M_0 为 $\mathcal{M}$ 的主心形分支，并任取一个双曲分支 M。那么存在一个拓扑嵌入 $\psi_M : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 满足以下条件：

(1) $\psi_M(0) = c_M$，其中 c_M是 M的中心。(2) $\psi_M(M_0) = M$。换言之， ψ_M将主心形区映射到我们选定的双曲分支 M 。(3) $\partial\psi_M(\mathcal{M}) \subset \partial\mathcal{M}$。

这称为（简单）重整化或调谐。对于任意 $c \in \mathcal{M}$， $\psi_M(c)$称为 M由.....调谐 c ，记作 $M \perp c$。

调谐也会影响它们的 Julia集。粗略地说，填充朱利亚集 $K_{M\perp c}$ 是先画出 K_{c_M} ，再将其每个有界 Fatou 分支替换为一个

K_c 的副本。参见图3a、3b和图4。图中的所有 Julia 集均对应于其双曲分支的中心。



(A) Douady兔子。其参数角为(B) 由basilica调谐的兔子。该双曲分支的参数角为$\frac{1}{7}$和$\frac{2}{7}$。其参数角为$\frac{10}{63}$，$\frac{17}{63}$

FIGURE 3. 兔子参数及调谐兔子的图像。注意，兔子参数的 Fatou 分支会变为 basilica。

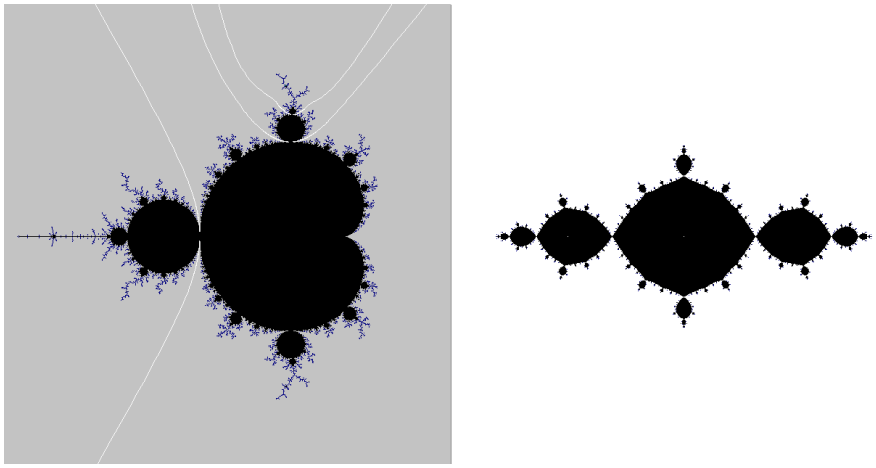


FIGURE 4. 白色线条是参数射线，它们落在分别对应于 basilica、兔子参数以及由 basilica调谐的兔子的双曲分支上。右图是一个 basilica。

重整化性有两种，一种是简单的，另一种是交叉的。这里不详述细节，请参阅 [McM94] 和 [McM96] 以了解更多讨论。

取 M 为任意一个双曲分支。设 $\alpha < \alpha$ 为 M的根的一对参数角。在同一篇论文中，Douady 证明了以下公式。

引理2.8 (Douady角调谐)。 设上述情形成立。注意， α 和 α在角度加倍下均为周期相同的周期点，因此在以2 为底的展开中，它们

分别具有长度相同的重复字 w_0、$w_1 \in \{0,1\}^n$。即，

$$\alpha = 0.w_0w_0\cdots . \qquad and \qquad \overline{\alpha} = 0.w_1w_1\cdots .$$

设 $x \in \partial\mathcal{M}$，有一条角度为 θ 的参数射线落在 x 上。假设 θ 的二进制展开为

$$\theta = 0.t_1t_2t_3\cdots .$$

那么，有一条角度为 $M \perp \theta$ 的参数射线落在 $M \perp x$ 上，并且，

$$M \perp \theta = 0.w_{t_1}w_{t_2}w_{t_3}\cdots .$$

注意，该公式保持顺序。换言之，$a < b \Rightarrow$ （$M \perp a$） $<$ （$M \perp b$）。

关于该公式有几点注记。首先，二进制展开有时并非一一对应。特别是在 S^1 中，我们将 $0 = 1$ 视为相同，因此 0 有两种不同的二进制展开 $0.000\cdots .$ 和 $0.111\cdots .$。根据 Douady 公式，这两种展开对应于 M 的根的那一对参数角。

3. Characteristic arcs

在本节中，我们将 S^1 视为由 $\mathbb{Z}$ 取商得到的实数集，并在 $[0,1)$ 中选取一个实数作为 S^1 中每个点的代表元。S^1 上有一个规范的循环序，它由 $\mathbb{R}$ 上的自然全序经映射 $x \mapsto e^{2\pi ix}$ 继承而来。

先介绍一些记号。对于 $x, y \in S^1$ 我们将 (x, y) 记作 S^1 的一条弧，它是满足 $[x, z, y]$ 按正向排列（相对于典范循环序）的 z 的集合。

我们将 xy 称为 S^1 的一条弦，其端点为 x，$y \in S^1$。除非另有说明，我们不关心两个点的顺序。通常我们会像在圆内画曲线那样绘制它，就像庞加莱圆盘中的一条双曲测地线。当 $x = y$ 时，这条弦 xy 称为退化的。

弧 $l(x,\ y)$ 的长度采用 S^1 中的通常度量来测量。

我们称点 p 位于弦 xy 后方，如果 p 属于其中一个小于 $1/2$ 的弦段 $(x,\ y)$，$(y,\ x)$ 的内部。（此处排除 xy 是直径的情况，本文其余部分也不需要考虑这种情况。）另外，如果每个位于 xy 后方的点 p 也位于 zw 后方，则称 xy 被 zw 嵌套（记作 $xy \subset zw$）。另请参见图 5。

3.1. 轨道画像。 对于非零的周期 $p \in S^1$，[Mil00] Milnor 引入了一种组合模型来理解动力平面中的周期点，称为轨道画像。

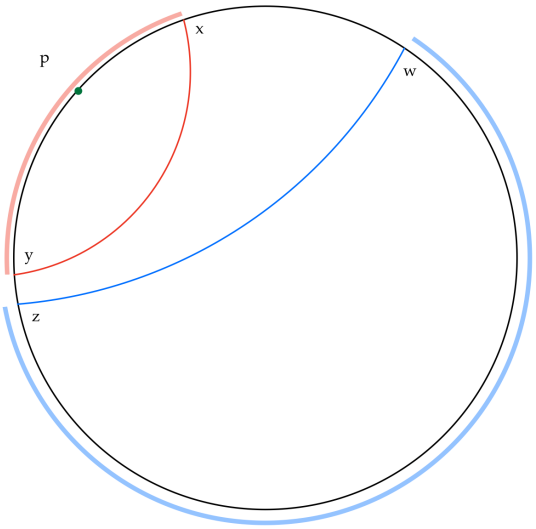


FIGURE 5. 这里 xy 和 zw 是弦。点 p 位于 xy 后方，弦 xy 位于 zw后方。注意，两条弧（x，y）和（z，w）互不相交。

定义 3.1（轨道画像）。设 O_j 为角度的集合。那么，集合 $\mathcal{O} := \{O_1, \cdots, O_p\}$ 称为轨道画像，如果

(1) 每个 O_j 都是有限的，并且对于所有 $i \neq j$，$|O_i| = |O_j|$ 均成立。(2) 对于每个 j，角度加倍映射 $\theta \mapsto 2\theta \bmod \mathbb{Z}$ 是从 O_j 到 O_{j+1} 的双射，并且保持 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 的循环序。(3) 对于任意 $a \in \cup_{j=1}^{p} O_j$，a 在角度加倍作用下都是周期的，且具有相同的周期 rp，该周期是 p 的倍数。(4) O_j 两两互不相交。更准确地说，对于每个 $i \neq j$，内接于单位圆 S_1 、且顶点为 O_i 中各点的直线/多边形 $\mathbf{P}_i$ 与 $\mathbf{P}^j$ 没有交点。

p 称为轨道周期，rp 称为射线周期或角周期。图 6 展示了轨道画像的示例。

最后一个陈述意味着，连接每个 O_j 的端点所形成的线段或多边形，会使轨道画像产生层叠。轨道画像刻画了给定 Julia 集中任意排斥周期点的动力学。特别地，我们有如下结论。

定理 3.2 ([枢纽16], 定理 10.5.13)。设 $I = (\alpha, \alpha)$ 是周期为 $\overline{n}$ 的特征弧，M 是相应的双曲分支。令 c_M 为 M 的中心，使得 $p(z) = z^2 + c_M$ 后临界有限。那么，角度为 α 和 α 的动力射线落在包含 c_M 的 *Fatou* 分支的根上。 _

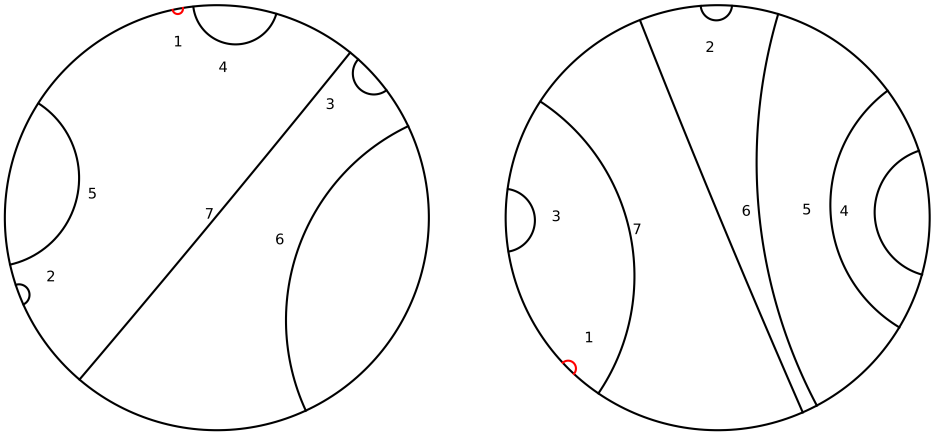


FIGURE 6. 特征弧示例。左、右轨道画像的特征弧分别为 $\left(\frac{35}{127}、\frac{36}{127}\right)$、$\left(\frac{158}{255}、\frac{161}{255}\right)$。我们用数字表示 A_1的第 i个像。注意，左侧的弧较窄，而右侧的弧不窄。因此，右侧的特征弧被第 7 个轨道嵌套。

换句话说，如果轨道画像中存在多边形间隙，那么一些包含临界轨道的 Fatou 分支会在同一点相交。

每个 $A_j \in \mathcal{O}$ 的补弧都是在 A_j的各点处切分后得到的子区间。根据引理 3.1，除一个例外，角度加倍映射 h仍然是 A_j、A_{j+1}的补弧集合之间的双射。更具体地说，同一个集合中不可能存在两个长度为 $> 1/2$ 的补弧。假设存在长度为$> 1/2$ 的补弧 L_j。那么，除了 L_j之外，h 将其余部分微分同胚地映射出去，而 L_j 覆盖整个长度为 1 的圆。重叠区域应是A_{j+1}的补弧之一，因为长度之和应为 2，且取出 h后只剩下一段。下面的引理将阐述上述内容。

引理 3.3 ([Mil00], 引理 2.5)。 A_j 的补弧集合微分同胚映射到 A_{j+1} 的补弧集合（模其周期），但有一个例外。对于每个 j，都存在 L_j，其在 h 下的像覆盖整个圆，并且存在唯一一个 A_{j+1}的补弧，其仅被该像覆盖一次。

所有补弧中均可取得唯一的最小长度，而任何达到这一最小值的补弧都称为 $\mathcal{O}$ 的特征弧。

沿用上述记号，我们将特征弧 I 在角度加倍下的轨道枚举如下。令 $I := A_1$。若 $l(A_i) < 1/2$，则 A_{i+1} 是 A_i 在

角度加倍下的像。否则，我们将 A_{i+1} 设为由引理 3.3 得到的唯一补弧。

特征弧的集合与分岔轨迹之间存在一一对应关系。对于分岔轨迹中的每个点，都存在唯一的双曲分支以该点为其根。即，我们可以将特征弧与其对应的双曲分支相对应。更准确地说，如果 c 是分岔轨迹中的一个点，那么 $z^2 + c$ 具有一个由若干点组成的抛物周期。画出所有在该抛物周期中的点处着陆的射线，这些射线便构成一个轨道画像。Milnor 证明了，每个轨道画像都可以实现为某个二次多项式的抛物周期。

此外，如果一个特征弧 I 被另一个特征弧 J 嵌套，那么这些轨道画像彼此不连结。在动力学意义下，如果 c 属于与 I 对应的双曲分支，那么 $z^2 + c$ 的 Julia 集具有一个排斥周期点，其着陆射线构成 J 的轨道画像。这称为轨道强迫。

可以收集所有特征弧，并将它们绘制在单位圆盘中。这些弧构成一种称为二次小叶叠（或简称 *QML*）的层叠，这一概念最早由 Thurston 提出。我们在图 7 中给出了 QML 的示意图。特征弧具有一些性质，使我们能够通过算法的方式得到所有弧。

引理 3.4. *QML* 中的每片叶都满足以下性质。

(1) 每个周期角都是 *QML* 中非退化叶的一条端点，其另一端点具有相同的周期。(2) *QML* 中的每条叶都是端点为周期角的叶的极限。(3) 假设 *QML* 中两条叶的周期相同 p，且一条嵌套在另一条之中。那么存在一条叶 L，其周期为 $< p$，并且将这两条叶分隔开。

前两条性质表明，要生成 QML，只需找出所有周期性特征弧。Lavarus 在 [Lav 86] 中提出了一种算法，用于求出所有特征弧。

引理 3.5 (Lavarus 算法，[Lav86])。从一片叶$(1/3, 2/3)$开始。假设 C_n 是所有周期小于 n 的特征弧的集合。对于 $p = n + 1$，考虑 $k/(2^{n+1} - 1)$ $1 \leq k \leq 2^{n+1} - 2$ 的所有点。从 $1/(2^{n+1} - 1)$ 开始，按照以下规则将它们两两连接。

(1) 按角度递增的顺序选择该点。(2) 另一个端点是在集合 C_n 中未与任何其他叶相连的所有角度中最低的角度。

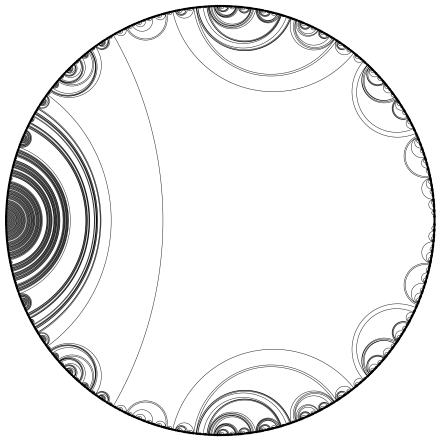


FIGURE 7. QML，在这幅图中，我们只画出了周期不超过 10 的弧。

如果周期为$(n+1)$ 的每个点都找到其配对，则将 p 增加1。通过迭代，该算法收集所有特征弧。

在单位圆上画出所有特征弧后，取其闭包（加入所有累积的弧），便得到一个著名的层叠，称为 QML（二次小叶叠），它最早由 Thurston 提出。

假设 z_1 是 P 的一个抛物固定点，$\{z_1, \cdots, z_p\}$ 是它在 P 作用下的周期轨道。抛物点有两种类型，一种是 原始型，另一种是 卫星型。

定义 3.6. 假设 $\alpha \in S^1$ 是非零周期的，α 是它的伴随角。如果 α 的轨道与 α 的轨道重合，则称 α 为 卫星型。否则，称 α 为 原始型。

我们简要说明原始型点和卫星型点的一些性质。

注记 (参见 [Mil00] 中的引理 2.7)。

(1) 若 α 为原始型，则轨道画像中不存在多边形间隙。就动力平面和射线而言，周期轨道上的每个点最多有 2 条射线落在其上。(2) 若 α 为卫星型，则轨道画像中有一个 r 边形间隙。即，周期轨道上的每个点恰有 r 条射线落在其上。

3.2. **窄弧**。分类特征弧的另一种标准是其长度。

定义 3.7 (窄弧、窄分支、 [Sch17])。 假设 I 是角周期为 n的特征弧。那么，如果 $l(I) = \frac{1}{2^n-1}$，则称 I 为窄弧 。与 I 对应的双曲分支称为窄分支。

根据定义和引理 3.4，如果特征弧 I 不是窄弧，那么在 I 后面有一条更短的弧，其周期严格小于 n。

我们证明以下性质。

引理 3.8. 设 I 是周期为 n 的特征弧。如果 I 不是窄弧，且 I满足 $\frac{1}{2^k-1} < l(I) < \frac{1}{2^{k-1}-1}$，那么存在一条被 I嵌套的窄弧 J，其周期为k。此外， k 严格小于 n。

证明. 由于 $\frac{1}{2^k-1} < l(I) < \frac{1}{2^{k-1}-1}$，在 I后面有 2 或 3 个周期为 k 的点。根据引理 3.4，这些点必定有 2 个，并且由于 QML 的不链接条件，它们必须是某条特征弧J的端点。于是 $l(J) = \frac{1}{2^k-1}$。因此， J是周期为 k的窄弧。如果 $k = n$, $l(I) < \frac{1}{2^{n-1}-1}$ 意味着 $l(I) = \frac{1}{2^n-1}$。因此产生矛盾。□

请注意，此类弧 J 是所有位于 I 后方的窄弧中最长的。利用引理 3.8，我们证明了 I 的窄条件的等价定义。

命题 3.9。 假设 $I = A_1$ 是周期为 n 的特征弧。那么，对于所有 $2 \le i < n$， I 是窄的，当且仅当 I 不被 A_i 嵌套。

证明。 我们将 I 记为 A_1。反设 A_1 是窄的，且它被某个 $2 \le k \le n-1$对应的A_k 嵌套。$l(A_1) = \frac{1}{2^n-1}$ 意味着 $l(A_i) = \frac{2^{i-1}}{2^n-1}$。因此，对于所有 $i \le n-1$， A_n 是唯一长度为 $> 1/2$ 的弧，而 $A_i \to A_{i+1}$ 只是一次角度加倍。设 $x < y$ 为 A_1的端点。在角度加倍下，x和 y的原像分别为 $\frac{x}{2}$， $\frac{x+1}{2}$和 $\frac{y}{2}$， $\frac{y+1}{2}$。由于 $A_{k-1} \to A_k$ 是一次角度加倍， A_{k-1} 的端点必须包含 $\frac{x}{2}$， $\frac{y}{2}$或 $\frac{x+1}{2}$， $\frac{y+1}{2}$。但是， A_n 是一个四边形的长边之一，该四边形的顶点是原像，而 A_n 与 A_{k-1} 相交。因此，我们得出结论：如果 A_1 是窄的，那么它要么从不被嵌套，要么仅被 A_n嵌套。

现在，假设 I 不是窄的，且满足 $\frac{1}{2^m-1} < l(A_1) < \frac{1}{2^{m-1}-1}$。根据引理 3.8，存在唯一一条周期为 $m < n$的最长窄弧 B_1 。将 B_j's 记作它的轨道。我们分两种情况讨论。另见图 8。

- $l(A_1) > \frac{1}{2^{m-1}}$

  那么 $\frac{1}{2^m-1} < l(A_1) < \frac{1}{2^{m-1}-1}$ 得到 $\frac{2^{i-1}}{2^m-1} < l(A_i) < \frac{2^{i-1}}{2^{m-1}-1}$， 对于 $1 \le i \le m$， 因此 A_{m-1} 是第一个长度大于 $1/2$ 的 A_i 。 A_{m-1} 的端点不能位于 A_1 的原像中，除非 A_m 的某一个补弧是

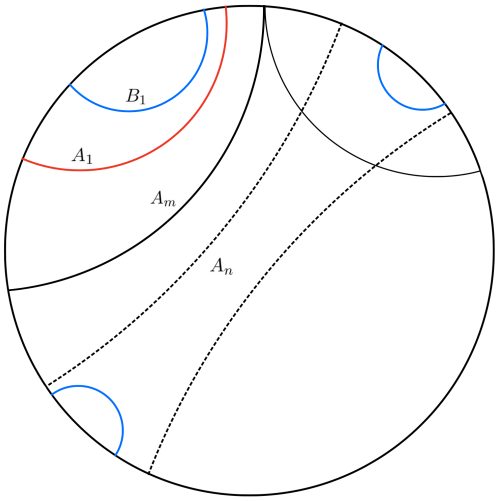


FIGURE 8. 中间有两条 A_n的候选弦。于是， A_m 不能在不与 A_n相交的情况下嵌套 A_1 的原像。

比 A_1 短，这是不可能的。由于 A_1 套在 B_1 中， B_1 的原像是 A_1 的一个（真）子集。这意味着 A_m 套在 B_1 中。由于 A_1 是所有其他 A_j 中最短的，因此 A_m 不可能位于 B_1 和 A_1 之间。因此， A_m 套在 A_1 中，且 m 严格小于 n，证毕。

- $l\left(A_1\right) < \frac{1}{2^m-1}$。

  采用与上文相同的策略，可得 A_{m+1} 嵌套 A_1。因此，只要 $m+1<n$，就大功告成了。假设 $m+1=n$。那么， A_m 仍是第一个长度长于1/2的 A_i。令 S_m 为 S^1-A_m。如果 A_m 包含 B_1，那么 A_{m-1} 必定包含 B_1 的某个原像，因为 $A_{m-1} \to A_m$ 只是一个角度加倍映射。 A_m 严格长于 $l\left(A_1\right)/2$，因此包含 A_1 在角度加倍映射下的原像（不在轨道中），由此导致 A_n相交。这说明 S_m 包含 B_1，因而 A_m 必定嵌套 A_1。

S与后一种情况类似，如果我们将 A_m 替换为 A_n，就得到 A_n 必须包含在 A_1中。 □

该命题表明，特征弧 I 总是包含在某个 A_m 中，其中m 小于或等于 I的周期；并且 $m=n$ 当且仅当 I 是窄的。

引理 3.10。 设 $I=\left(\frac{a}{2^n-1}, \frac{a+1}{2^n-1}\right)$。~~那么~~ a必为奇数。

证明。 根据假设， $I=A_1$ 是窄的。因此， A_n 嵌套于 A_1之中。考虑A_1 在角度加倍映射下的原像。它由两条短弧组成；若画出以这些弧的端点为顶点的多边形， A_n 必定是嵌套 A_1的较长一侧。

这意味着 A_n 的一个端点是$2\ ^{a+1}_{2^n-1}()$。因此，~~除非~~$2\ ^{a+1}_{2^n-1}()$变成严格预周期的，否则 a ~~必定~~是奇数。□

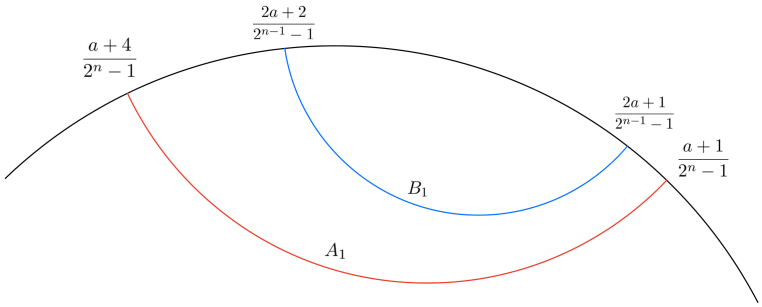


FIGURE 9. 注记中的示例。

注记。 (1) 引理 3.9 表明， A_m 是第一个嵌套 A_1的对象。

(2) 在后一种情况下，只有满足条件 $\frac{1}{2^{n-1}-1} < l(A_1) < \frac{1}{2^{n-2}-1}$ ~~是~~$l(A_1) = \frac{3}{2^n-1}$ ~~的~~ $l(A_1)$。由于引理 3.10，A_1， B_1 如下所示，只有 1 种情况。

$$\frac{a+1}{2^n-1} < \frac{2a+1}{2^{n-1}-1} < \frac{2a+2}{2^{n-1}-1} < \frac{a+4}{2^n-1}$$

这些情况如图 9 所示。

3.3. 单纯可重整化弧。 设 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$ 是双曲分支，且I 是对应于双曲分支 $\mathcal{P} * \mathcal{Q}$的特征弧。首先注意到， $\mathcal{Q} \mapsto \mathcal{P} * \mathcal{Q}$ 给出了从任意点 $c \in \mathcal{Q}$开始的调谐，因此 $p(z) = z^2 + c$ 与 $c \in \mathcal{P} * \mathcal{Q}$ 是可重整化的。取 c 为 $\mathcal{P} * \mathcal{Q}$ 的一个中心，并考虑 I的轨道画像。由于 $\mathcal{P} * \mathcal{Q}$ 包含于 $\mathcal{P}$的唤醒集中，轨道画像 $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ 对应的$\mathcal{P}$ 与 I的轨道画像是不相交的。此外，轨道画像 $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ 将弧 $I = A_1$、 A_2、 $\cdots$、 A_n 划分为数量相同的 m 个子集 $\{A_1, A_{m+1}, \cdots A_{(k-1)m+1}\}$、$\{A_2, A_{m+2}, \cdots, A_{(k-1)m+2}\}$、 $\cdots \{A_m, A_{2m}, \cdots, A_{km}(= A_n)\}$，其中 m、 k和 $n = km$ 分别是 $\mathcal{Q}$、 $\mathcal{P}$和 $\mathcal{P} * \mathcal{Q}$的周期。

小 Julia 集 $K(1)$ 对应于 c_M。局部映射 $p^{\circ m}$ 与某个多项式混合等价，其常数项属于 $\mathcal{Q}$。因此，局部存在一个与 $\mathcal{Q}$ 对应的轨道画像，其他 $K(i)$ 也同样如此。

根据 Douady 角度调谐公式 2.8，我们可以将每个轨道画像还原为 $\mathcal{I}$的完整轨道画像。此外，每个小轨道画像都由 $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$中的弦分隔。

也就是说，如果给定的特征弧 I 是简单可重整化的，那么存在一条特征弧 J，满足以下条件：

- I 被 J 嵌套。
- J 的周期是 I周期的整数倍。 J 的轨道画像将 I 中的轨道划分为基数相同的子集。

这些条件为可重整化提供了充分条件。

引理 3.11。 设 I 是周期为 n的可重整化弧。那么， $I:=A_1$ 被某个A_i 嵌套，其中 i 严格小于 n。因此， A_1 不能是窄的。

证明。 根据上述讨论，特征弧 I 位于小分割中，并构成一个轨道画像。设该轨道画像为 $\mathcal{O}_{inn}$，并将各弧记为 $I=B_1$、$\cdots$、B_k。根据命题 3.9， I 被某个 B_l 嵌套，其中为 $l\leq k$。应用 Douady 角度调谐公式 2.8 后， A_1 被 $A_{(l-1)m+1}$ 嵌套，而这显然不同于 A_n。这里$km=n$。因此，根据命题 3.9， A_1 不能是窄的。□

推论 3.12。 每条窄弧/分支都不是简单可重整化的。每条素周期弧/分支都不是简单可重整化的。每条卫星弧/分支都不是窄的，除非其根在主心形区 M_0 中相交。

然而，逆命题不成立。例如，存在素周期的非窄特征弧。很容易验证，要实现重整化，其周期必须有一个既非 1 也非自身的因数，因此它不是简单可重整化的。

遗憾的是，有许多例子既非素周期、非窄，也非简单可重整化。附录 B 中的表格留待读者查阅。我们利用 Schleicher 在 [Sch17] 中提出的双曲分支内部地址，找到了这类例子。事实上，内部地址给出了可重整化性的完整分类，包括交叉可重整化性。本节最后以一个问题作结。

问题 1。 要成为不可重整化，还需要满足哪些几何条件?

4. Invariant Laminations

本节的大部分内容由Keller完成，更多细节请读者参见 [Kel07]。这里我们采用他的记号和定理。

4.1. 由长弦生成的层状模型。 令 h 为 S^1中的角度加倍映射。即， $h(x)=2x$ 模 1。固定 $\alpha\in S^1$ ，并假设 $\alpha\neq 0$ 在 h 下是周期的。换言之，存在最小的 $n\in\mathbb{N}$，即 α 的周期，使得 $h^n(\alpha)=\alpha$。将 PER(α)记为 α 的周期，并令 v^α 为其在揉捏序列 $\hat{}\alpha:=I^\alpha(\alpha)$中的重复字。注意， v^α 总是以 0 开始，因为 α 位于 $A_\alpha:=\frac{\alpha}{2}\,\frac{\alpha+1}{2}$ 上。由于 α 是周期的，其中一个

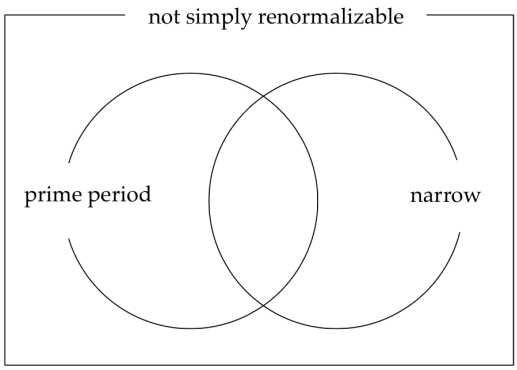


FIGURE 10. 窄性、素周期与非简单可重整化条件之间的包含关系。请注意，存在许多非窄、非素周期的非简单可重整化弧。我们在附录 B 中提供了一张表。

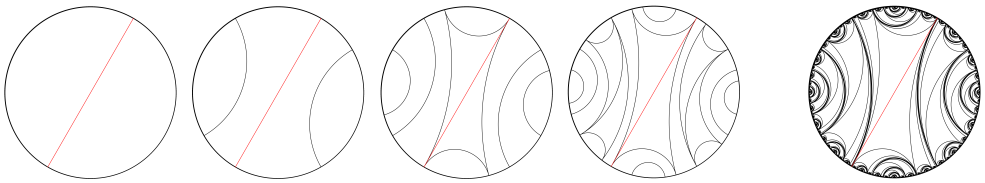


FIGURE 11. $\alpha = \frac{1}{3}$。从红线 1 6 2 3 开始，逐步加入原像。图中展示了从步骤 1 到步骤 4 的过程，最右侧的图展示了 $\mathcal{L}_\alpha$。

– $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\alpha+1}{2}$ 应等于 $h^{\mathrm{PER}(\alpha)-1}(\alpha)$。这样的点记为 $\dot{\alpha}$，另一个点记为 $\ddot{\alpha}$，它是预周期的。

考虑定义域为 $S^1 - \{\alpha\}$ 的逆映射分支 h^{-1}。若像为 $(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha+1}{2})$，则将其中一个分支记为$l_0^\alpha$；若像为 $(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\alpha}{2})$，则将另一个分支记为 l_1^α。为将定义域扩展至整个 S^1，定义 $l^{\alpha,}{}_s{}^t(\alpha) = \dot{\alpha}$，若 $t = s$；否则，对于 $t, s \in \{0,1\}$，令 $l^{\alpha,}{}_s{}^t(\alpha) = \ddot{\alpha}$。

从图形上看，映射 $l^{\alpha,}{}_s{}^t$ 根据 s 和 t 的奇偶性，决定弧 $(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha+1}{2})$ 或 $(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha+1}{2})$ 的哪个端点是 α 的原像。

设 $w = w_1 w_2 \cdots w_n$ 是一个由 0、1 符号组成的有限长度词。通过迭代，我们可以定义 $l^{\alpha,}{}_w{}^t := l^{\alpha,}{}_{w_1}{}^t \circ \cdots l^{\alpha,}{}_{w_n}{}^t$。如果输入属于 $S^1 - \{\alpha, h(\alpha) \cdots, h^{n-1}(\alpha)\}$，那么上标 t 无关紧要。

我们首先注意到，分支逆映射被视为 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 上的前缀附加映射。

引理4.1. 设 $p(z) = z^2 + c$，使得 c 的外角为 α。假设 $x \in J_p$ 以 $x_1 x_2 \cdots$ 为其三进制序列，并以 θ 为其外角。对于任意 0、1 有限长度词$w = w_1 w_2 \cdots w_n$, $l^{\alpha,}{}_w{}^t(\theta)$ $= w_1 \cdots w_n x_1 x_2 \cdots$。

证明. 根据 l的定义，这显然成立。回顾一下，如果分支定义在 A_α 或 B_α 上（分别定义于2.7），我们会附加上标0或1。□

现在为长弦 $S_\lambda^\alpha := {}_2^\alpha{}_2^{\alpha+1} = \dot{\alpha}\ddot{\alpha}$ 构造层状模型。这里 λ 表示空字。对于有限的 $0,1$ 字 w，记作 $S^{\alpha}{}_{,w}{}^{t} := l^{\alpha}{}_{,w}{}^{t}(S_\lambda^\alpha)$。由于 α 是周期的，$l^{\alpha}{}_{,tv^\alpha}{}^{t}(\dot{\alpha}) = \dot{\alpha}$ 以及 $l^{\alpha}{}_{,t}{}^{(1-t)v^\alpha}(\ddot{\alpha}) = \ddot{\alpha}$。

准确地说，我们定义 α 正规词 $w \in \{0,1\}^*$。

定义 4.2 (α-正则词)。固定一个周期的 $\alpha \in S^1$。$w \in \{0,1\}^*$ 称为 α-正则的，如果 w 不以 $0v^\alpha$ 或 $1v^\alpha$ 结尾。

我们将通过收集所有 $j < k$ 对应的长弦 S_λ^α 的 j 阶原像，称为由 α 生成的步 k 层叠。此外，我们将 $\mathcal{L}_\alpha$ 记为所有弦 $S^{\alpha}{}_{,w}{}^{t}$、$w \in \{0,1\}^*$ 和$t \in \{0,1\}$的集合。根据构造，它在 h 下正向和反向均是不变集。见图11。

请注意，$S^{\alpha}{}_{,0v^\alpha}{}^{0}$，$S^{\alpha}{}_{,0v^\alpha}{}^{1}$，$S_\lambda^\alpha$ 构成一个三角形；同样，$S^{\alpha}{}_{,1v^\alpha}{}^{0}$，$S^{\alpha}{}_{,1v^\alpha}{}^{1}$，$S_\lambda^\alpha$ 也构成一个三角形。我们分别将它们记为 Δ_{0v^α} 和 Δ_{1v^α}。在 h的逆映射下，每个有限词 $u \in \{0,1\}^*$对应无穷多个三角形，它们的内部两两不相交，并且可能共享顶点或边。我们称这些为三角形间隙 Δ_{utv^α}，$t \in \{0,1\}$，名称取自弦的标签。更确切地说，Δ_{utv^α} 的三条边是 $S^{\alpha}{}_{,utv^\alpha}{}^{0}$，$S^{\alpha}{}_{,utv^\alpha}{}^{1}$，$S^{\alpha}{}_{,u}{}^{t}$。

注记。设 $u \in \{0,1\}^*$。考虑两个三角形间隙 Δ_{utv^α} 和 $\Delta_{utv^\alpha 0v^\alpha}$。它们共享一条边 $S^{\alpha}{}_{,utv^\alpha 0}{}^{0}$。类似地，$\Delta_{utv^\alpha}$ 和 $\Delta_{utv^\alpha 1v^\alpha}$ 共享一条边 $S^{\alpha}{}_{,utv^\alpha 0}{}^{1}$。因此，对于每个 α-正则词 w，都有无穷多个三角形从 Δ_{wtv^α}附接而来。迭代地进行，将形成一棵由三角形组成的无限二叉树。即，若有一个 0，1 单侧序列 $x_1x_2\cdots$，那么对于每个 α 正则词 w，都有一条与之对应的三角形间隙路径 $\Delta_{wx_1v^\alpha}$，$\Delta_{wx_1v^\alpha x_2v^\alpha}$，$\cdots$。见图12。

为区分给定三角形间隙的两侧，我们采用以下概念。

定义 4.3（特征符号）。设 α 是 S^1 中一个非零的周期点。具有 $d(S^{\alpha}{}_{,0v^\alpha}{}^{t}) < 1/4$ 的符号 t 称为 α 的特征符号，记作 e^α。

注意，$S^{\alpha}{}_{,0v^\alpha}{}^{t}$ 是三角形间隙 Δ_{0v^α} 的一条边。正如定义所述，特征符号指出三角形的哪一条边（长弦除外）比另一条短。更一般地，假设我们有一个 α-正则词 w。那么由 S_w^α 可得到一个三角形间隙 Δ_{w0v^α}，其边为 $S^{\alpha}{}_{,w0v^\alpha}{}^{0}$，$S^{\alpha}{}_{,w0v^\alpha}{}^{1}$ 和 $S_{w^\circ}^\alpha$。特征符号 e指出 $d(S^{\alpha}{}_{,w0v^\alpha}{}^{e}) < d(S^{\alpha}{}_{,w0v^\alpha}{}^{1-e})$。

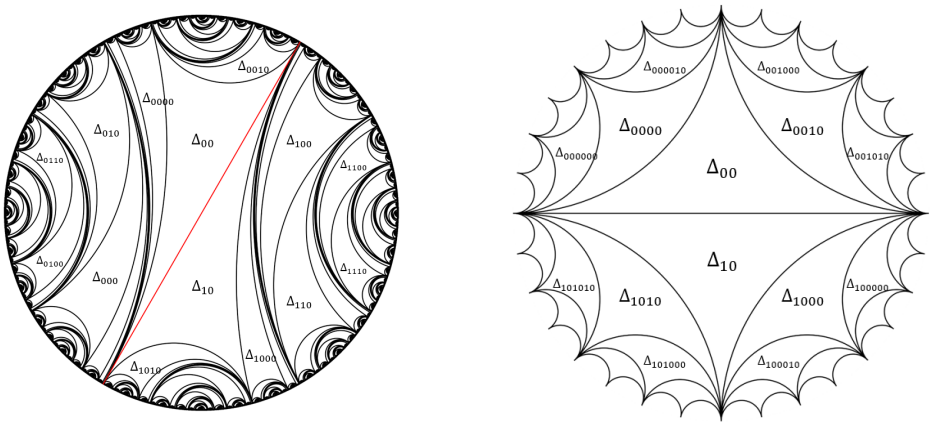


FIGURE 12. 这里有 $\alpha = \frac{1}{3}$ 以及三角形空隙的一些下标。如果我们关注从长弦（左图中的红线）开始的三角形空隙，那么它会形成一棵无限二叉树。

但对于另一个三角形间隙 Δ_{w1v^α}，根据对称性，$d(S^{\alpha,\ {}^{1-e}_{w1v^\alpha}}) < d(S^{\alpha,\ {}^{e}_{w1v^\alpha}})$。因此，特征符号是一种判断哪一条更短的工具，其作用类似于上标和下标之间的奇偶性。

有许多方法可以找出哪个 $t \in \{0,1\}$ 是 α的特征符号，下面介绍其中一种方法。

引理*4.4*。*</style}*设 α 是 S^1中的一个非零周期的 $e^\alpha = 0$，当 $\dot{\alpha}\dot{\alpha}$ 分隔 $\ddot{\alpha}\ddot{\alpha}$ 和 $0 \in S^1$时成立。对称地，当 $e^\alpha = 1$ 分隔 $\ddot{\alpha}\ddot{\alpha}$ 和 $\dot{\alpha}\dot{\alpha}$ 时，$0 \in S^1$成立。

证明。 </style}这是 [Kel07]中的命题2.41。 □

$S^{\alpha,\ {}^{e^\alpha}_{u0v^\alpha}}$ 对于某些 $u \in \{0,1\}^*$，随着 $|u|$ 增长，它最终会变小并退化，因为下标 e^α 总是选择较短的一侧。

4.2. **层叠的极限**。

定义4.5 (弦的聚点)。 设 x_iy_i 是一个弦序列，在 S^1的通常拓扑下，$x_i \to x$ 和 $y_i \to y$ 满足相应条件。于是我们称 x_iy_i 聚集到 xy。

现在可以考虑给定层叠 $\mathcal{L}_\alpha$的极限层叠。即，$\mathcal{L}_\alpha$的所有聚点弦构成的集合。我们将其记为 $\partial\mathcal{L}_\alpha$。容易验证，$\partial\mathcal{L}_\alpha$ 在 h作用下仍是不变层叠。

由于 $d(S^{\alpha,\ {}^{e^\alpha}_{u0v^\alpha}})$趋于0，对 $S^{\alpha,\ {}^{e}_{w}}$取极限后，它最终退化。因此我们得到以下推论。

推论4.6。 $\partial\mathcal{L}_\alpha$ 对于非零周期的 $\alpha \in S^1$ 是 S^α的极限，$S^{\alpha,\ {}^{1-e}_{w}}$对于所有 $w \in \{0,1\}$。

根据前面的注记，在 $S^{\alpha}{}_{,w}{}^{1-e}$这一集合中，每条一个端点为$\alpha$的弦都具有 $S^{\alpha}{}_{,1-e\,(v^{\alpha}(}$ $_{1-e))^{n}v^{\alpha}}$的形式，并且它们由一条二进制路径（$1-e$）（$1-e$）$\cdots$关联。因此，另一个端点是$l^{\alpha}_{(v^{\alpha}(1-e))^{n}v^{\alpha}}$（$\ddot{\alpha}$）。此外，由于它只沿着（$1-e$）标记前进，三角形路径变得更窄，因此 $\alpha, l^{\alpha}_{v^{\alpha}}$（$\ddot{\alpha}$） $\cdots, l^{\alpha}_{(v^{\alpha}(1-e))^{n}v^{\alpha}}$（$\ddot{\alpha}$） $\cdots$按正向排序。由推论4.6可知，它会累积并收敛。我们采用以下定义。

定义 4.7（关联周期点）。设 α 是 S^1 中一个非零周期。点α：$=$极限$_{n\to\infty}\, l^{\alpha}_{(v^{\alpha}\ (1-e)}$ $^{n}v^{\alpha}$（$\ddot{\alpha}$）是定义良好的，称为与 α 关联的 周期点。

换言之， α 是累积弦的一个端点，而另一个端点是 α。相应的周期点 α 具有与 α 相同的性质，具体如下。

命题 4.8. $PER(\alpha) = PER(\alpha)$ 且 $v^{\alpha} = v^{\alpha}$.

我们不证明这个命题。我们将对相关周期点的一些性质作出注记，以此代替证明。

注记.

(1) 对于 S^1 中一个非零的周期 α ，其对应的 α 周期点 α 与其伴随角重合。因此，命题 4.8 成立，并且 $\alpha = \alpha$。（见推论 4.13。）

(2) 由于角度加倍映射 h 保持循环序，我们得出，对于 $w \in \{0,1\}^{*}$,

$$\lim_{n\to\infty} l^{\alpha}_{w(v^{\alpha}(1-e))^{n}v^{\alpha}}(\ddot{\alpha}) = l^{\alpha,1-e}_{w}(\overline{\alpha})$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} S^{\alpha,1-e}_{w(v^{\alpha}(1-e))^{n}v^{\alpha}} = l^{\alpha,1-e}_{w}(\alpha\overline{\alpha})$$

这只是关于累积弦 $\alpha\alpha \in \partial\mathcal{L}_{\alpha}$ 的一个原像论证。

(3) 基于这一观察，我们给出 α 的一个简洁公式。令 $\overline{m} = \mathrm{PER}(\alpha)$。

$$\overline{\alpha} = \alpha + \frac{2^{m}}{2^{m}-1}\left(l^{\alpha}_{v^{\alpha}}(\ddot{\alpha}) - \alpha\right)$$

$\dot{\alpha}\alpha$ 和 $\ddot{\alpha}\alpha$ 是 $\alpha\alpha$ 的原像，其中一个是这样一条弦：其端点与轨道画像中弧 A_n 的端点相同，其中 $n = \mathrm{PER}(\alpha)$。因此，我们有如下结论。

推论 4.9。设$(\alpha、\ \alpha)$ 是一个周期为 n 的特征弧。则 $e^{\alpha} = \alpha \times (2^{n}-1) \bmod 2$。因此，每个窄特征弧都有其特征符号 $e^{\alpha} = 1$。

证明。证明与引理 3.10 完全相同。设 $\alpha = {}^{a}_{2^{n}-1^{\circ}}$ 如果 a 是偶数，$\ddot{\alpha} = \alpha/2 > \alpha/2 = \dot{\alpha}$。因此 $\dot{\alpha}\ddot{\alpha}$ 和 $0 \in S^1$ 以及 $e^{\alpha} = 0$。对于奇数 a，证明过程对称。□

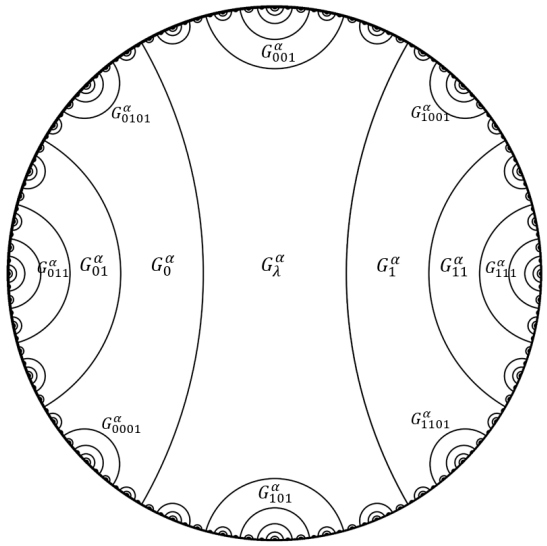


FIGURE 13. $\partial\mathcal{L}_\alpha$ 对于 $\alpha = \frac{1}{3}$。注意，所有空隙都是无限间隙，它们与 S^1 的交集是一个康托尔集。

由极限层叠 $\partial\mathcal{L}_\alpha$ 中的弦 $\alpha\alpha$，我们可以生成整个 $\partial\mathcal{L}_\alpha$。

定理4.10。设 α 是 S^1 中的一个非零周期点，且 $e = e^\alpha$ 是 α的特征符号。那么

$$\partial\mathcal{L}_\alpha = \ Closure\ of\ \left\{ l_w^{\alpha,1-e}(\alpha\overline{\alpha}) \mid w \in \{0,1\}^* \right\}$$

证明。这是 [Kel07]中的命题2.42。 □

容易猜到，$\partial\mathcal{L}_\alpha$ 中的所有间隙都是由一组三角形组成的，这些三角形从 $\mathcal{L}_\alpha$中的一条弦开始。正如前面的注记所述，三角形构成无限二叉树。结合三角形路径与二进制序列之间的对应关系，我们可推得以下结论。

命题4.11。设 α 和 e 如上所述，且 $m = PER\ (\alpha)$。那么，对于每个 α-正则词 $w \in \{0,1\}^*$，都存在与之对应的 $\partial\mathcal{L}_\alpha$中的一个无限间隙 G_w^α，其边界为$l^{\alpha,\ 1-e}_{ws_1v^\alpha s_2v^\alpha\cdots s_n}$，其中 $s_i \in \{0,1\}$。

我们将 $G^\alpha_{v^\alpha}$ 称为临界值空隙，因为它包含作为其边界间隙的 α，后者是临界值的一个外角。此外，G^α_λ 是与空词 λ 对应的无限间隙，称为临界点空隙。

证明。固定一个 α-正则词 w。那么间隙 G_w^α 与无限二叉树相关联，该树由一系列从 S^α_w 开始的三角形间隙组成。即，G_w^α 可以视为 $\Delta^\alpha_{ws_1v^\alpha s_2v^\alpha\cdots s_nv^\alpha}$ 的并集，其中有 $s_1\cdots s_n \in \{0,1\}^*$。此外，每条弦都累积

在这类三角形的长边上，并成为给定间隙 G_w^α的边界。因此得证。□

选择 α-正则词 w 的一个无穷间隙 G_w^α 。根据命题4.11，这个间隙由无穷多条弦 $l^\alpha_{ws_1v^\alpha s_2v^\alpha\cdots s_n}$, $l^{1-e}_{ws_1v^\alpha s_2v^\alpha\cdots s_n}$ 围成。因此，无穷间隙可以重新表述为一个康托尔集：从圆周开始，删去所有位于弦 $l^\alpha_{ws_1v^\alpha s_2v^\alpha\cdots s_n}$, $l^{1-e}_{ws_1v^\alpha s_2v^\alpha\cdots s_n}$ 后方的点。因此，任意剩余点 $p\in G_w^\alpha$ 都有一个形如 $ws_1v^\alpha s_2v^\alpha\cdots$ 的行程序列，其中 $s_1s_2\cdots$ 是一个 0-1 序列。注意，如果给定的行程序列以 $0v^\alpha$ 或 $1v^\alpha$结尾，那么它会收敛到某条边界弦的一个端点。根据上述观察，我们得到如下结论。

命题 4.12。 $p\in G_w^\alpha$ 当且仅当 $I^\alpha(p)$ 以 $0v^\alpha$-$1v^\alpha$ 序列结尾。此外，如果 $I^\alpha(p)$ 以 $0v^\alpha$ 或 $1v^\alpha$ 结尾，那么 p 就是边界弦的一个端点。

后一陈述的逆命题完全不成立，因为边界弦的端点可能是 α 的原像，而其行程序列最终可能包含 $*$。

4.3. 向二次多项式的转换。 在本节中， $\alpha\in S^1$ 在 h 下是非零周期的。对于这样的 α ，存在一个相关联的角度 α。正如我们在预备知识中所述，这样的点称为伴随角。因此，参数空间中角度为 α,α 的两条外射线落在同一点 r_{M_α}，该点是某个双曲分支M_α的根。从现在起，若 α 的含义明确，我们便省略 M ，并将中心和根分别记作 c_α 和 r_α 。即，对于任意周期的 α， $z\mapsto z^2+r_\alpha$ 都有一个抛物固定点。

推论 4.13 ([Kel07]中的推论 4.15)。对于周期的 $\alpha\in S^1$ ，角度为 α、 α 的参数射线对于某个 M 落在同一个根点 r_M。因此，非零周期 α 所对应的角度 α 与伴随角相同。–

在 r_M 处， z^2+r_M 的 Julia 集是连通的。令 α， α–为与 M 相对应的一对。假设 $\approx_\alpha$ 是 S^1 上满足以下条件的一个等价关系：

$$\theta_1\approx_\alpha\theta_2 \quad\Leftrightarrow \text{ 角度为 } \theta_1,\ \theta_2 \text{ 的动力射线着陆于同一点。}$$

如果我们绘制一条线段/多边形，使其端点/顶点属于 $\approx_\alpha$ 的同一个等价类，那么它就构成了一个层叠。我们称其为 α 的着陆模式，或称为 K_α 的捏合圆盘模型（$=K_\alpha$）。我们注记如下定理。

定理 4.14 (推论 *4.2*（ [Kel07]）。 假设 α 在 S^1中是非零周期的。那么， α 的着陆模式等于 $\partial\mathcal{L}_\alpha$。

假设参数 c 沿着参数射线 $\mathcal{R}_\alpha$ 移动，最终落在根 r_M上。每一时刻 c 都位于 $\mathcal{R}_\alpha$ 上，J_c 的层状模型由长弦 $\frac{\alpha}{2}\frac{\alpha+1}{2} = \dot{\alpha}\ddot{\alpha}$生成。若从这条长弦及其第一、第二等阶原像对其进行捏缩，那么极限过程将得到 $z \mapsto z^2 + c_\alpha$的 Julia 集，其中 c_α 是一个位于曼德博集合之外、参数角为 α的参数。

当 c 最终落在 r_M 时，我们选择 J_{r_M} 的一个层状模型作为其着陆模式。随后，这种极限层叠的选择使我们能够按照下文所示，在层状模型中考虑参数的着陆情况。即，

$$\lim_{c\in\mathcal{R}_\alpha,\ c\to r_M} \mathcal{L}_\alpha = \partial\mathcal{L}_\alpha$$

左侧的极限是由弦的累积所导出的拓扑定义的。它提供了一种从层叠的意义上理解二次移位轨迹边界的方法。

5. Action on itinerary sequences

现在我们引入四边形层状结构 $\mathcal{Q}$。

定义 5.1（四边形层状结构）。假设 α 是 α 的一个关联角度。与 (α,α) 关联的中心间隙，记作 $Q_\lambda^{(\alpha,\alpha)}$，是一个端点为 $\alpha/2$、$(\alpha+1)/2$, $\alpha/2$、$(\alpha+1)/2$ 的间隙。即，$\mathcal{L}_\alpha$ 和 $\mathcal{L}_\alpha$ 的长弦 $S_\lambda^\alpha, S_\lambda^\alpha$ 是中心间隙 $Q_\lambda^{(\alpha,\alpha)}$ 的对角线。

与 (α,α)相关的四边形层状结构记为 $\mathcal{Q}^\alpha$，它是在 h下 $Q = Q_\lambda^{(\alpha,\alpha)}$ 的所有原像的集合。

中心间隙实际上是一个矩形，因为它的对角线是直径。因此，它有两种类型的边，一种比另一种长。我们给出图14，展示参数 $\alpha = 1/3$对应的四边形层状结构 $\mathcal{Q}^\alpha$。

注意，α 及其对应的角度 α 构成一条特征弧。此外，$h(Q)$等于特征弧 $\alpha\alpha$，较短的边是 l^{α,e^α} 的原像，另一条则是 $l^{\alpha,1-e^\alpha}$ 的原像，这是由它们的长度决定的。因此，我们有以下结论。

命题 5.2. $\partial\mathcal{L}_\alpha$ 中的所有弦都属于 $\mathcal{Q}^\alpha$。其余弦的形式为 $l^{\alpha,w^e}(\alpha\alpha)$。也就是说，$\mathcal{Q}^\alpha$ 中的每条弦都具有 $l^{\alpha,w^t}(\alpha\alpha)$的形式，$t \in \{0,1\}$ 和 $w \in \{0,1\}^*$。

证明。注意，四边形间隙 Q^α 由 4 条互不相同的弦围成，其中一对是长边，另一对是短边。由于 $\alpha/2$,$(\alpha+1)/2$ 互为对跖，长边必定是 $\frac{\alpha}{2}\frac{\alpha}{2}$ 或 $\frac{\alpha}{2}\frac{\alpha+1}{2}$ 的某种形式，另一条则必定是短

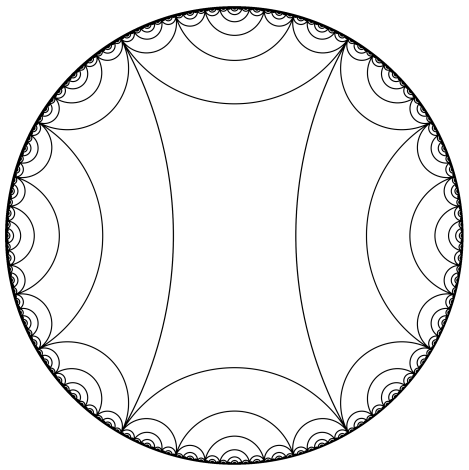


FIGURE 14. $\mathcal{Q}^\alpha$ 与 $\alpha = \frac{1}{3}$。另请参见图13。

边。不失一般性，设 $\frac{\alpha}{2}\frac{\alpha}{2}$ 是长边。由于它是 $\overline{\alpha\alpha}$的原像，且比另一个原像 $\frac{\alpha}{2}\frac{\alpha+1}{2}$ 长，因此它与 $l^\alpha_{,s}{}^{1-e}(\alpha\alpha)$重合。完全相同的论证可得 $l^\alpha_{,s}{}^{e}(\alpha\alpha) = \frac{\alpha}{2}\frac{\alpha+1}{2}$。这里 s 只是一个常数，用于说明弦位于 S^α 的哪一侧。于是，所有弦都是 $l^\alpha_{,w}{}^{t}(\alpha\alpha)$的原像，其中 $t \in \{0,1\}$ 和 $w \in \{0,1\}^*$。□

我们将 $l^\alpha_{,w}{}^{e^\alpha}(\alpha\alpha)$ 中的每条弦称为短弦，除此之外的弦则称为长弦。因此，$\mathcal{Q}^\alpha$ 是由 $\alpha\alpha$生成的层叠。

推论5.3。$\mathcal{Q}^\alpha$ 是一个层叠。

添加短弦，为描述 $\partial\mathcal{L}_\alpha$中的无限间隙提供了另一种方式。取中心处的无限间隙 G^α_λ。它由长弦围成。在中心间隙中添加一对短弦，会将无限间隙 G^α_λ 分成3个部分：一个中心间隙和另外两个部分。若继续添加短弦，则会在 Q^α的两条短弦上各附加两个四边形间隙。如此迭代下去，G^α_λ 由无限多个四边形间隙构成，形成一棵无限二叉树。另请参见图14。

我们为每个四边形间隙 Q_w 指定一个词 $w \in \{0,1\}^*$。该词是一个前缀，即 $l^\alpha_w(Q) = Q_w$。根据这一观察，如果 $w = w'0v^\alpha$ 或 $w'1v^\alpha$，那么四边形间隙Q_w 就紧邻 $Q_{w'}$，并与 $Q_{w'}$的一条短弦共边。

如定义所示，$\mathcal{Q}$ 中的所有四边形间隙的对角线都是 S^α_λ 和S^α_λ的原像。因此，如果 α 变为 α，唯一改变的就是对角线。这

这意味着，如果点 p 位于 Q^α的短弦后方，那么当 $I^\alpha(p)$变为 $I^\alpha(p)$时， $I^\alpha(p)$的第一个符号 x 会变为 $1-x$ 。因此我们得到如下结论，

引理 5.4. 假设 p 不是 $\partial\mathcal{L}_\alpha$的端点。那么 $I^\alpha(p)$ 的第 n个符号 s 变为 $(1-s)$ ，当且仅当 p 位于短弦的第$(n-1)$个原像之后。

证明。取出 $I^\alpha(h^{(n-1)}(p))$ 的第 $h^{(n-1)}$、 n 个符号后，它变成了第一个符号，因为 h 对行程序列的作用是单边移位。由于 Q 的对角线是长弦，当且仅当第一个符号发生变化时，该点才位于短边上。至此，证明完成。□

根据命题 5.2， $\partial\mathcal{L}_\alpha$ 中的所有无穷间隙都可以分解为四边形间隙 Q^α 及其原像，其中 $l^\alpha{}_{,w}{}^e(\alpha\alpha)$。我们将形如 $l^\alpha{}_{,w}{}^{1-e}(\alpha\alpha)$ 的每条弦称为长弦，并将 $l^\alpha{}_{,w}{}^e(\alpha\alpha)$ 称为短弦。

如果我们关注前四边形间隙的对角线， α 变为 α 意味着所有对角线都发生了交换，这意味着 $v^\alpha = v^\alpha$前面的符号 0,1。

定理 5.5. 假设 p 是 G_w^α 中的一个点，其中 α-正则词 w 和 $I^\alpha(p) = ws_1v^\alpha s_2v^\alpha\cdots$，其中 $s_i \in \{0,1\}$. 则 $I^\alpha(p) = w'(1-s_1)v^\alpha(1-s_2)v^\alpha\cdots$. 也就是说， $0v^\alpha$和 $1v^\alpha$在 $0v^\alpha$-$1v^\alpha$序列部分中互换。这里 w' 是另一个 α-正则词。

证明。第一个结论由引理 5.4 显然得出。此外， p 的实际位置并未移动，它仍位于同一个无穷间隙上，但相对于 $\partial\mathcal{L}_\alpha$ 的编码不同。□

尽管当 α 变为 α 时，无限间隙的编码会改变，但其深度不变，因此 $|w| = |w'|$。也就是说， φ_α 是层保持映射。

因此，剩下唯一的问题是，每当α 变为 α 时，所选无限间隙的编码会如何变化。换言之，我们需要一条适用于 α-正则词的规则。回想一下，符号发生变化的唯一情形是点 p 或间隙 G 位于 Q^α 短边的某个原像上。因此，只要 $\partial\mathcal{L}_\alpha$ 中的无限间隙位于短边之后，编码后的 α-正则词 w 中的某些符号就会改变。

对于窄的 α，我们提出一条规则。回想一下，若 $\alpha - \alpha = \frac{1}{2^{\mathrm{PER}(\alpha)}-1}$，特征弧（$\alpha$， α）就是窄弧。由命题 3.9 可知，窄弧意味着不存在嵌套。此外，窄弧不会嵌套任何周期严格小于其自身周期的其他特征弧。还要回想一下，每条窄弧 $\alpha\alpha$ 都有其特征符号$e^\alpha = 1$。

我们首先从这个引理开始。

引理 5.6. 假设 α 是窄的。设 p 位于 α 的中心间隙的一条短边后方。那么 $I^{\alpha}(p)$ 以 $0v^{\alpha}$ 或 $1v^{\alpha}$ 开始，且第一个符号取决于 p 位于哪条短边后方。

证明。 由于 α 是窄的，每个点都位于弦 $\alpha\alpha$ 之后 v^{α}。这是因为在角度加倍下，这些点始终位于 A_1、$\cdots$、A_{n-1}之后。中心间隙的两条短边是特征弧的原像。因此，行程序列的第一个符号为 0 或 1，后接 v^{α}；第一个符号仅取决于 p属于哪个原像。□

命题 5.7。 假设 $I = \alpha\alpha$ 是窄的。那么，在所有位于短边 l^{α}、$_{tv^{\alpha}}^{e^{\alpha}}$ 之后的间隙中，具有最短前缀的无限间隙是 $G^{\alpha}_{tv^{\alpha}e^{\alpha}}$, $t \in \{0,1\}$。

证明。 我们只证明 $t = 0$这种情况。另一种情况由对称性可得。设 Q 为中心间隙。根据观察，前缀为 $0v^{\alpha}$ 的四边形间隙 $Q_{0v^{\alpha}}$ 与中心间隙的短弦共边。设 l_1 为 $Q_{0v^{\alpha}}$ 中与短弦相对的一条弦，并任取一个位于 l_1之后的四边形间隙 Q 。由于它位于中心间隙的短边之后，根据引理 5.6， Q 的前缀以 $0v^{\alpha}$开头。取 h^n 到 Q，则 h^n(Q)的端点包含在弧 A_n 中。此外，由于 $h^n(l_1) = \ddot{\alpha}\ddot{\alpha}$，所有端点都位于弦 $\ddot{\alpha}\alpha$之后。因此，任何位于短弦之后的四边形间隙都以 $tv^{\alpha}e^{\alpha}$开头。□

注意，无限间隙 $G^{\alpha}_{tv^{\alpha}(1-e^{\alpha})}$， $t \in \{0,1\}$ 并不位于中心间隙的短弦后方。参见图13。

利用这一点，我们现在可以判断无限间隙的前缀如何变化。设 w beα-正则词，且 $n = \mathrm{PER}(\alpha)$。我们先检查前 n 个符号是否构成一个 t_1v^{α}。若不是，就将其向后移动一个符号。若是，则检查接下来的 n 个符号是否构成 t_2v^{α} 。我们重复此过程，直到它们不再构成 tv^{α}。假设它在 t_kv^{α} 处结束。下一步是检查后续的下一个符号。如果该符号是 e^{α}，那么所有这样的 t_iv^{α} 都变为 $(1-t_i)v^{\alpha}$。这是因为这表明这样的间隙位于中心间隙的边界弦 l^{α}, $_{t_1v^{\alpha}\cdots t_kv^{\alpha}}^{1-e^{\alpha}}$($\alpha\alpha$) 后方。

如果该符号不是 e^{α}，那么我们就回到前一个 v^{α}，检查其后面跟着什么符号。在这种情况下，我们有序列 $\cdots t_{k-1}v^{\alpha}t_kv^{\alpha}(1-e^{\alpha})\cdots$，因此我们检查 t_k 是否为 e^{α} 。如果不是，那么我们就一次又一次地往回追溯。

例如，令 $\alpha = \frac{1}{7}$。那么 $v^{\alpha} = 00$ 和 $e^{\alpha} = 1$。如果我们有一个 α-正则前缀 01000000001010010，它会变成如下的另一个前缀。

$$0|1|0|0|000\ 0001|0|1001|0 \Rightarrow 0|1|0|0|100\ 1001|0|0001|0$$

注意，该前缀从第二个符号开始是 100，但其后跟着一个 0，即 $1-e^{\alpha}$。因此，第二个符号不变，我们将符号向右移一位。

综上，我们得到以下算法。

定理 5.8. 设 $s=s_1s_2s_3\cdots$ 是一个 0-1 序列。此外，设 $v=v^{\alpha}$ 是 α 的重复词，$e=e^{\alpha}$ 是 α 的特征符号，且 周期$(\alpha)=|v|+1$ 是 α 的周期。于是我们如下定义 $\varphi_{\alpha}(s)$：

(1) $i=0$。(2) 令 $w=s_i\cdots s_{i+|v|}$。(a) 如果 $w=0v$ 或 $1v$，令 $i\leftarrow i+|v|+1$ 并返回 *(2)*。(b) 否则，若存在一个先前的 $0v$ 或 $1v$，则检查 $s_i=e$。(i) 如果 $s_{i+|v|+1}=e$，则交换所有的 $0v$ 和 $1v$。(ii) 如果 $s_{i+|v|+1}\neq e$，则回溯到先前的 $0v$（或 $1v$），并返回 *(b)*。

(3) 如果 w 既不是 $0v$ 也不是 $1v$，则令 $i\leftarrow i+1$，并返回步骤 *(2)*。

假设$(\alpha,\alpha)^{-}$是窄的。选取 $p\in J_{\alpha}$，并令 θ 为 p 的动力角。如果 θ 不是预临界角，则 $\varphi_{\alpha}(I^{\alpha}(\theta))=I^{\alpha}(\theta)$。

证明。我们已经证明，对于任意点 $p\in G_w^{\alpha}$，对于任意 α-正则词 w。剩下的情况是 p 为无限间隙的极限。此时，I^{α} 不以 $0v^{\alpha}$-$1v^{\alpha}$ 序列结尾。因此，通过从 $I^{\alpha}(p)$ 的开头进行截断，可以用嵌套 p 的前缀来逼近它。因此，$\varphi_{\alpha}(I^{\alpha}(p))=I^{\alpha}(p)$。□

我们注记，如果 α 不是窄的，那么该算法就会失败。由于不窄，存在一个 $m<PER(\alpha)$，它 A_m 嵌套 A_1。这意味着存在一个长度更短的无限间隙 G_w^{α} $|w|<|tv^{\alpha}e^{\alpha}|$，而这样的间隙可能会改变其符号。此外，如果点位于不窄弧的后方，那么行程序列不必以v^{α}开头，而只需包含 v^{α}的前$(m-1)$个符号。

另一个注记是，对于某些序列，v^{α} 存在歧义，尤其是以 $0v^{\alpha}$ 或 $1v^{\alpha}$结尾的行程序列。例如，令 $\alpha=\frac{1}{7}$。那么 $v^{\alpha}=00$ 且 $e^{\alpha}=1$。现在考虑序列 $s=0=0000\cdots$。按照规则，步骤 (2) 不会终止，因此我们必须区分该 $0v$-$1v$ 序列从何处开始。但问题在于，我们无法判断这个序列的前缀是什么，因为这三种情况（空字、0、00）都可能是它的前缀。每种情况都可以通过对前缀进行逼近得到。对于空字前缀的情况，它可由 0、0001、000 0001、000 000 0001 逼近，因此取 φ_{α}后得到 100。

在下一节中，我们将通过构造一个等价关系来消除这种歧义。

6. 关于 Σ2 的等价关系

行程序列的定义排除了一些在 Σ_2 中无法实现的序列。例如，$0 = 000\cdots$ 无法由 $I^\alpha(\theta)$、$\theta \in S^1$实现。这是因为，如果我们不断取逆像，使得每个像都包含一个行程序列以$0\cdots0$开头的角度，那么它就会收敛到集合 $\{1/3, 2/3\}$，而这两个角度的序列中都包含 $*$。

因此，我们提出的算法并未在整个 Σ_2 上定义，而且由于存在歧义φ_α，它是一个多值函数。此外，由于需要检测词的一部分并进行交换，它远非移位不变。

因此，本节的目标如下。

(1) 扩展角度，使 I^α 满射到 Σ_2。(2) 将 φ_α 的定义域扩展至 Σ_2。(3) 在 Σ_2 上构造等价关系，使我们的映射 φ_α 变成移位映射。

6.1. 扩展角。考虑 $z^2 + 2$。$c = 2$ 的参数角为 0，并且由于它位于 $\mathcal{S}_2$ 中，因此 Julia 集是一个康托尔集。设 p_1, p_2 分别为 Julia 集中对应于序列 $0 = 000\cdots$、$1 = 111\cdots$ 的点。它们的外角是多少？由于这两个点在移位作用下都是不动点，因此该角度必定是角度加倍映射的不动点。因此，两者的外角均为 0。

主要原因是，当我们将 B¨ottcher 坐标扩展到整个 $\mathbb{C} - J_P$ 上的移位多项式 P时，我们不断求解方程 $z \mapsto \sqrt{\phi(P^{\circ 2}(z))}$. 因此，分支区域变得越来越小，并且可能收敛到一些角度为前临界的点。如上例所示，行程序列的第一个符号等于 0 的区域是一个开区间 $(0,\ 1/2)$，而前两个符号都为 0 的区域是一个开区间 $(0,\ 1/4)$。继续这样做，我们可以推导出行程序列以 $0\cdots0$ 开头的区域为 $(0,\ 1/2^n)$。也就是说，点 p的动力角为 0，并且n这样的区间序列收敛到 0。不过，对 1 也可以完全照此处理，取 $(1/2,\ 1)$，$(3/4,\ 1)$，$(7/8,\ 1)\ \cdots$，它会收敛到 $1 = 0$。

为了区分这两个点，我们定义扩展角。

定义6.1。设 $P :\ = P_\alpha(z)\ = z^2 + c$ 是一个移位多项式，满足 c 的参数角为 α，且该角是周期的。假设 $x \in J_P$对应于 $s = s_1 s_2 \cdots$，并令 θ 为 x的外角。如果 θ 满足以下条件，则在其上赋予标记 $+$ 或 $-$。

(1) θ^+ 如果 极限$_{\theta' \to \theta,\ \theta' > \theta} I^\alpha(\theta')\ = s$,(2) θ^- 如果 极限$_{\theta' \to \theta,\ \theta' < \theta} I^\alpha(\theta')\ = s$,(3) θ 如果左右极限相等。

我们将这样的角度 $\theta^{\pm}$ 称为扩展角。请注意，如果 θ 不是 α的预周期角，那么外角就没有标记。

例如，对于上述的 $\alpha = 0$ ， 0^+ 是序列 **0** 的外角，而 0^- 则对应序列 **1**。

扩展角通过考虑 $\theta^- < \theta < \theta^+$，继承了 S^1 中通常序关系所赋予的序。在此序关系下， $I^{\alpha}(\theta^{\pm})$ 定义良好，并且与该定义相容。因此，我们将定义域扩展如下。

$$\{\theta \text{ 不是 } \alpha\} \cup \{\theta^{\pm} \text{ 的原像，是 } \alpha\text{的原像，并带有相应的标记}\}.$$

我们将定义域$\mathbf{E}_{\alpha}$记为。

命题 6.2。 设 α 是 S^1 中的非零周期点。那么 I^{α} :$\mathbf{E}_{\alpha} \to \Sigma_2$ 是满射。

证明。 根据定义，这显而易见。任取 Σ_2中的一个序列。由于我们从角度为 α的 Julia 集 J_{α} 出发，因此存在一个与 α对应的点 $x \in J_{\alpha}$ 。于是，它的扩展角属于$\mathbf{E}_{\alpha}$。□

根据定义， φ_{α} 是一个使图表交换的映射。

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{E}_{\alpha} & \xrightarrow{Id} & \mathbf{E}_{\alpha} \\ \downarrow{\scriptstyle I^{\alpha}} & & \downarrow{\scriptstyle I^{\overline{\alpha}}} \\ \Sigma_2 & \xrightarrow{\varphi_{\alpha}} & \Sigma_2 \end{array}$$

不过， φ_{α}还远非单射。例如，考虑 $\alpha = 2/7$，并令 $\theta_1 = \frac{1}{7}^+$， $\theta_2 = \frac{2}{7}^+$， $\theta_3 = \frac{4}{7}^+$。那么这三个 $I^{\alpha}(\theta_i) = 0$。然而，如果我们不仅知道序列，还知道它所属的无限间隙对应的扩展角，就能够区分前缀。在这个例子中， $\theta_1 \in G_{\lambda}^{\alpha}$， $\theta_2 \in G_0^{\alpha}$和 $\theta_3 \in G_{00}^{\alpha}$。它们的前缀会在每次标记变化时出现，例如 $I^2_{\frac{7}{7}}\left(\frac{4}{7}^-\right) = 001 = 00\ 100$。这在图15中有所说明。

6.2. **抛物 implosion**。 然而， φ_{α} 就序列之间的映射而言是多值的。在本节中，我们将解决这一问题。

我们首先在 $\mathbf{E}_{\alpha}$ 上定义 Julia 等价关系。这一定义同样由 Keller 在 [Kel07 中引入。].

定义 6.3 （Julia 等价关系）。 对于周期的 $\alpha \in S^1$ 和 θ、$\theta' \in S^1$，如果存在点的有限序列 $\theta = z_1$、$z_2 \cdots$、z_{n-1}、$z_n = \theta'$，使得 $z_i z_{i+1}$ 是 $\partial\mathcal{L}^{\alpha}$ 的弦，则记作 $\theta \approx^{\alpha} \theta'$。

很容易验证，它实际上是一种等价关系。可以将其转化为行程序列的语言。

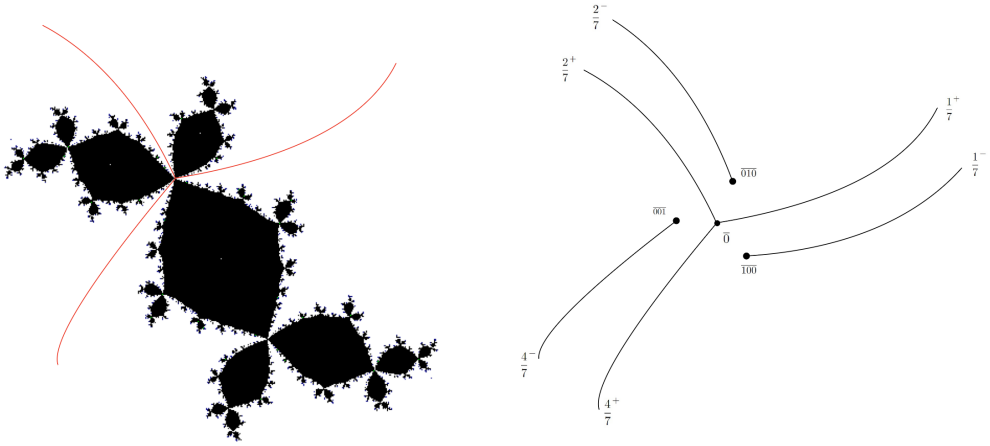


FIGURE 15. 左图展示了动力平面以及实际的动力射线；这些动力射线落在 z^2+c 的不动点上，其中 $c \approx -0.1226 + 0.7449i$ 是一个兔子参数。右图是左图的示意图，展示了在 c 落到根之前的情况。黑点是 Julia 集中的点。假设 $\alpha = \frac{2}{7}$。当 c 沿着 $\mathcal{R}^\alpha$ 移动并最终落到双曲分支的根上时，这 4 个点会合并为 1 个点。这里动力射线实际上应该发生分岔，但为了便于区分，我们将其分开绘制。这种分岔射线也曾在 [Ate92] 中讨论过。

命题 6.4. $x \approx^\alpha y \iff I^\alpha(x) = I^\alpha(y)$.

通过去掉标记，等价关系在来自 S^1 的 $\mathbf{E}_\alpha$ 上得以扩展。根据定义，$\theta_1 \approx^\alpha \theta_2$ 如果两条外部（动力学）射线 $\mathcal{R}_\theta, \mathcal{R}_{\theta'}$ 落在 $z^2 + r_\mathcal{P}$ 的 Julia 集的同一点上，其中 $r_\mathcal{P}$ 是双曲分支 $\mathcal{P}$ 的根，该分支对应于 α 及其伴随角。因此，这一扩展恰好是 Σ_2 的一个等价关系。

定义6.5。令 s_1、$s_2 \in \Sigma_2$ 和 x_1、$x_2 \in J_\alpha$ 为对应的点。假设 θ_1、θ_2分别是 x_1、x_2的扩展角。我们如下定义等价关系 $\sim$，

$$s_1 \sim s_2 \quad \Leftrightarrow \quad \theta_1 \approx^\alpha \theta_2$$

当 c沿着参数射线 $\mathcal{R}_\alpha$ 并最终落到双曲分支的根上时，Julia 集 J_α 中的一些点会聚集为 1 个点，这对应于等价类。它可以被视为一种抛物 implosion，因为当参数 c 从根 r_M 向角度 α的方向发生扰动时，一些周期循环会从该点迸发出来。

定理6.6. $\varphi_\alpha : \Sigma_2/\sim \to \Sigma_2/\sim$ 是良定义的。此外，它是二阶元素且移位不变。

证明. 根据定义，它的阶为2。尽管 $\varphi_\alpha : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ 是多值的，但根据上述构造，等价关系将所有导致问题的点归为同一个等价类。我们逐一检查。

(1) 将每个序列提升到扩展角 $\mathbf{E}_\alpha$ 的一个子集中。然后 φ_α 是 $I^\alpha \circ (I^\alpha)^{-1}$。根据命题 6.4，$\varphi_\alpha$ 在 $\Sigma_2/\sim$上定义良好。(2) 根据 φ_α的构造，它是一个二阶元素。事实上，$\varphi_\alpha^{-1} = \varphi_\alpha$。(3) 由 $\partial\mathcal{L}_\alpha$ 在角度加倍下是不变集这一事实可直接得出移位不变性。由于 Σ_2 上的移位映射对应于 p的角度加倍，φ_α 与单边移位可交换。

□

我们以这条注记结束本节。Blanchard、Devaney 和 Keen 在 [BDK91], 中证明了以下定理

定理 6.7 (BDK 映射)。 存在一个从 $\pi_1(\mathcal{S}_d)$ 到 $Aut(\Sigma_d, \sigma)$的满射映射，它是一个符号移位自同构。

二符号的唯一非平凡移位自同构是 0-1 交换，前面已在引言中提及。因此，每个 φ_α 都不是 Σ_2 的移位自同构。根据定义 6.5 中的等价关系，我们现在得到一种移位不变性。

然而，在 Σ_2 的子集上还有另一种移位不变性。假设我们忽略前缀部分，那么它就变成了一个 $0v^\alpha$-$1v^\alpha$ 序列，因此与 $\sigma^{\circ \mathrm{PER}(\alpha)}$ 交换，即移位 PER(α) 次。也就是说，如果 0 映射到 $0v^\alpha$，而 1 映射到 $1v^\alpha$，那么它的行为就像一个移位映射，而 φ_α 的作用则类似于二符号的非平凡移位自同构。

根据 Douady 角度公式 2.8，如果我们将关注范围限定在包含 0 的 Fatou 分支，那么经过调谐后，0-1 符号互换会转变为 $0v^\alpha$-$1v^\alpha$ 互换。我们将在后续论文中聚焦这一现象，并构造 Mod($\mathbb{C}$ – {康托尔集}) 或 Mod(S^2 – {康托尔集}) 的一个大映射类。

Appendix A. Symbolic dynamics and puzzle pieces

除非另有说明，本节只关注窄分支。附录的主要目的是构造动力图，这与 Atela 的论文 [Ate93] 中的动力图类似。该动力图由单位圆盘的拼图片构成，这些拼图片由 α 的轨道画像的弦以及一些额外的弦划分而成。先说明一点，这种构造对非窄情形也有效，但拼图的典范编号除外。

A.1. 马尔可夫拼图片。 在第 3 节中，我们证明了 $I = A_1$ 的窄性与不存在嵌套之间的充要条件。这一事实使我们能够以规范的方式为拼图片编号。

假设 $I = (\alpha,\ \overline{\alpha})$ $\alpha < \overline{\alpha}$ 是窄弧或周期 n，且 $I = A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n$ 如前所定义。记 a_i 为一条弦，其端点与 A_i的端点重合。我们添加 a_0 和S，它是 a_n 的一条对径弦，也是一条直径 $\frac{\alpha}{2}\frac{\alpha+1}{2}$。它们将单位圆盘分割成 $(n+2)$ 块或 $(n+3)$ 块，分别对应 I 为卫星型或原始型的情形。（回想一下，如果 I 是窄的，那么当且仅当 I 附着在主心形区 M_0上时，I 才是卫星型。在这种情况下，我们得到 $n+2$ 块拼图片。）

我们按如下方式对每个拼块进行编号。图16中也给出了一个示例。

(1) 有两个拼图片，一个由 $a_n,\ S$ 围成，另一个由$a_0,\ S$围成。我们分别将其记为 Π_0^0, Π_0^1。 (2) 假设 a_i 是最内侧的弧。我们将边界由 a_i 和弧 A_i 组成的拼图片编号为 Π_i。 (3) 假设 $A_{i_1} \subset A_{i_2} \subset \cdots \subset A_{i_k}$ 与 $i_k \neq n$。我们将 A_{i_j} 和 $A_{i_{j+1}}$ 之间的拼图片记为$\Pi_{i_{j+1}}$。 (4) 最后还剩下 2 个拼图片，一个紧邻 a_n，另一个紧邻 a_0。我们分别称它们为 Π_U 和 Π_D。请注意，如果 I 是卫星型，那么 Π_U 就变成了多边形间隙，其边数等于 I的周期。

角度加倍映射 $h:\ S^1 \to S^1$ 将每个拼图片映射到某个拼图片集合。我们绘制如下有向图。

- 顶点／状态：每个拼图片。
- 边：如果 $\Pi' \subset h(\Pi)$，则从 Π 到 Π' 的有向边。

注意到 Π_0^0 和 Π_0^1 都映到 Π_1。我们称之为与角度 α相关联的转移图 $\mathcal{G}_\alpha$。$\mathcal{G}_\alpha$ 中的路径是一个单向状态序列，其中每一对相邻状态之间都有一条方向相容的边相连。

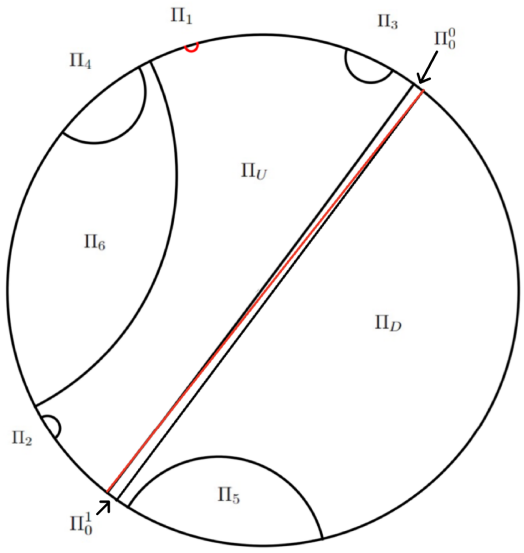


FIGURE 16. $I = \binom{37}{127}$的拼图片，$\underline{\binom{38}{127}}$。

引理 A.1. $\mathcal{G}_\alpha$ 和$\mathcal{G}_\alpha$ 同构。

证明。由于 α 和 $\bar{\alpha}$ 是 I的端点，除了 Π_0^0 和 Π_0^1之外，每个拼图都相同。但它们是 Π_1 的原像，因此从 Π_0^* 出发的出边相同，都指向Π_1。入边也完全相同。反之，假设并非如此。那么存在一个拼图片Π ，其像包含 Π_0^0 但不包含 Π_0^1。这意味着 $h(\Pi)$的边界包含S。由于任意拼图片的边界都可能包含 A_i或 a_i，且 h 将边界映到边界，因此 S 不可能是边界。于是，Π_0^0和 Π_0^1 的所有入边和出边都相同，因此我们可以将它们视为一个统一的状态 Π_0。定义拼图片的转移图 $\mathcal{G}'$ ，用 Π_0 代替 Π_0^0，Π_0^1。显然，从α 或 α得到的 $\mathcal{G}'$ 相同，因此我们得到相同的转移图。□

为每个拼图片分配符号$\in \{0,1\}$ 后，这两个转移图之间的差异便显现出来。在生成行程序列时，我们会为每个拼图片分配一个符号。即，如果拼图片 Π 包含于 A_α中，则为其分配 0；如果包含于 B_α中，则分配 1。请注意，Π_0^0, Π_1 和 Π_U 始终标记为 0，而 Π_0^1, Π_D 在另一侧为 1。如果我们只关注每个拼图片的弧边界，那么 $\Pi^0{}_{,0}{}^{\alpha}$ 的弧边界与 $\Pi^1{}_{,0}{}^{\alpha}$ 相同。

符号赋值映射 {拼图片} $\mapsto \{0,1\}$ 诱导出一个从 $\mathcal{G}_\alpha\} \to \Sigma_2$ 中的路径到 { 的映射。即，每条路径都将给出对行程序列的描述。事实上，Σ_2 中的每个序列都能实现。

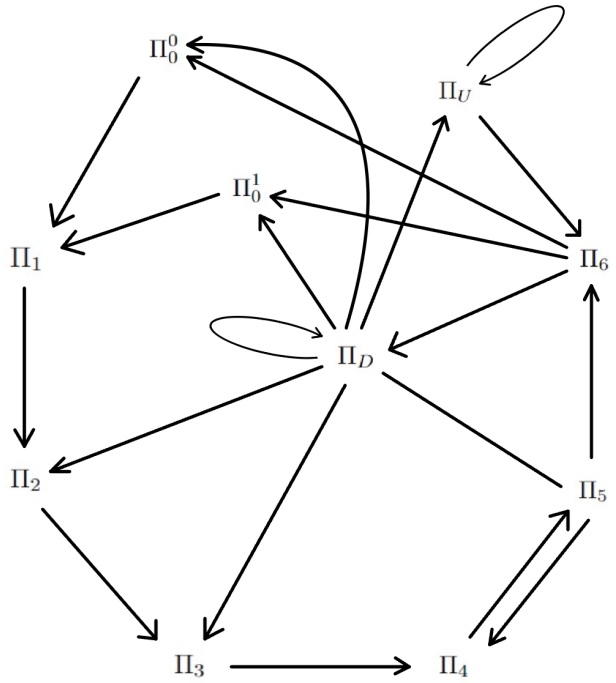


FIGURE 17. $\mathcal{G}_\alpha$ 的转移图 $\alpha = \frac{37}{127}$ —

定理 A.2. 设 $\mathbb{P}$ 为转移图 $\mathcal{G}_\alpha$ 的所有路径的集合。那么符号赋值映射是一个满射映射 $\mathbb{P} \twoheadrightarrow \Sigma_2$.

我们将通过证明每个序列都是某个 $\theta \in \mathbf{E}_\alpha$ 的 $I^\alpha(\theta)$ 来证明这一点。

定义 A.3. 设 $x \in \{0,1\}^*$ 是一个 0-1 字，且 $\alpha \in S^1$ 是非零周期的。 D_x^α 定义为 $\mathbf{E}_\alpha$ 的一个子集，其中 $\{\theta \in \mathbf{E}_\alpha \mid I^\alpha(\theta)$ 以 $x\}$ 开头。对于任意序列 $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \cdots\} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$，也可以将其定义为 $D_{\mathbf{x}} := \bigcap_{n=1}^{\infty} D_{x_1 \cdots x_n}$。

引理 A.4. (1) 如果 x 是 α-正则的，那么 $D_x^\alpha = D_{x0}^\alpha \cup D_{x1}^\alpha$ 且 $D_{x0}^\alpha \cap D_{x1}^\alpha = S_x^\alpha$。(2) 如果 x 不是 α-正则的，那么 $D_x^\alpha = D_{x0}^\alpha \cup D_{x1}^\alpha \cup \Delta_x^\alpha$。在这种情况下， $D_{x0}^\alpha \cap \Delta_x^\alpha = S^{\alpha,}{}_{x}{}^{0}$ 且 $D_{x1}^\alpha \cap \Delta_x^\alpha = S^{\alpha,}{}_{x}{}^{1}$。

证明。 这是 [Kel07] 中的定理 2.15。 □

由上述引理可知，这样的 D_x 有弦的边界，并且由于 $|x| \to \infty$ ，它被由长弦 $\frac{\alpha}{2}$ ($\alpha+1)$ 2 生成的另一条弦分成两部分。因此我们得到以下推论。 _ ____

推论 A.5。 任取 $\mathbf{x} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$。对于任意 θ_1， $\theta_2 \in D_{\mathbf{x}}$， $\theta_1\theta_2$ 与 α的轨道画像不相交。

证明。 $\partial\mathcal{L}_\alpha$ 由 $\alpha\alpha$生成，因此包含 α的轨道画像中的每一条弦。根据引理 A.4，对于任意单词 $x \in \{0,1\}^*$，每个 D_x 的边界都由 $\mathcal{L}_\alpha$ 的弦构成。取极限可知， $D_{\mathbf{x}}$ 由 $\partial\mathcal{L}_\alpha$中的弦围成，因此它们的凸包与该轨道画像不相交。□

证明。（定理 A.2 的证明）任取一个序列 $x \in \Sigma_2$。根据推论 A.5，它要么被适当地包含在一个拼图中，要么 ∂D_x 由某些拼图片的边界构成。任取角度 θ in D_x。注意， θ 是一个扩展角。通过追踪角度 $h^{\circ m}$（θ）所属的拼图片，可以得到转移图上的路径。□

拼图片 Π_0 以 A_1 的一个原像为其边界。注意，行程序列的符号只在该区域发生变化。换句话说，当 α 变化到 α 时，行程序列按以下规则变化。

定理 A.6（行程序列规则）。 对于 $\theta \in \mathbf{E}\alpha$， φ_α： I^α（θ）$\mapsto I^\alpha$（θ）按以下规则。

(1) 将 $I^\alpha(\theta)$ 提升为 $\mathcal{G}_\alpha$ 中的一条路径。
(2) 将其视为 $\mathcal{G}_\alpha$ 中的一条路径。(3) 根据 α 重新指定该路径。

根据构造， φ_α 是阶2 元素。

最后需要说明的是，正如我们在开篇所述，本文介绍的构造并不限于窄情形。唯一的限制是，我们无法找到为非窄情形中的每个状态或拼图片编号的规范方法。不过，附录 A 中的每个定理仍适用于非窄情形，这与 Atela 在 [Ate93]中的工作类似。尽管如此，φ_α的歧义仍然存在，而且仅凭输入，我们无法明确确定序列如何变化。

Appendix B. Tables of not simply renormalizable, non-narrow arcs ofnon-prime period

可重整化性可以通过其内部地址来检测，这一概念最初由 Dierk Schleicher 在他的论文 [Sch17] 中提出。我们介绍他关于可重整化性与内部地址之间关系的定理。

定理 B.1（命题 4.7，见 [Sch17]）。 假设特征弧 I 以$[S_1, S_2, \cdots, S_n]$ 作为其内部地址。当且仅当存在 S_i 使得对所有 $i \le j \le n$均有 $S_i \mid S_j$ 时， I 是（简单）可重整化的。

这里列出周期不超过 10 的所有非素周期、非窄且不可重整化的特征弧。请注意，周期为 4 的非窄特征弧只有一条，即（$2/5,\ 3/5$），它是由 basilica 调谐得到的 basilica。（因此可重整化。）

我们为每条特征弧给出一个揉捏序列和内部地址。由于根据 [1 2]，所有弧都是对称的（如果 (a, b) 是特征弧，那么 $\left(\frac{1}{2}-b, \frac{1}{2}-a\right)$ 也是特征弧），因此对于每个对称情形，我们只给出其中一个。揉捏序列栏中的元组表示其 v^{α}。即，$I^{\alpha}(\alpha) = v^{\alpha}*$。

——

我们还给出了每个周期的所有非简单可重整化特征弧中非窄弧所占的比例。这里的“窄”和“非窄”两栏分别表示窄弧和非窄弧的总数，与是否可重整化无关。

	所有弧			不可重整化弧		
周期	窄的	非窄的	总计	非窄的	总计	比率
4	5	1	6	0	5	0
6	19	8	27	2	21	0.095238
8	83	37	120	26	109	0.238532
9	173	79	252	70	243	0.288065
10	325	170	495	140	465	0.301075
12	1303	707	2010	626	1929	0.324520
14	5231	2896	8127	2770	8001	0.346206
15	10527	5838	16365	5748	16275	0.353179

TABLE 1. 该比率表示非窄弧的数量占非单纯可重整化弧总数的比例。

如表 1 所示，非窄且非简单可重整化弧的比率随着周期增加而持续上升，直到周期为 15。自然会有人想知道，当非素周期趋于无穷时，这一比率是否收敛。目前我们还没有理论上的答案。

周期 = 6					
特征弧	揉捏序列	内部地址	特征弧	揉捏序列	内部地址
29/63, 34/63	[0, 1, 1, 0, 0]	[1, 2, 3, 5, 6]	10/21, 11/21	[0, 1, 1, 1, 0]	[1, 2, 3, 4, 6]
周期 = 8					
特征弧	揉捏序列	内部地址	特征弧	揉捏序列	内部地址
41/255, 10/51	[0, 0, 1, 0, 0, 0, 0]	[1, 3, 6, 8]	116/255, 139/255	[0, 1, 1, 0, 0, 0, 1]	[1, 2, 3, 5, 8]
14/85, 49/255	[0, 0, 1, 0, 1, 0, 0]	[1, 3, 5, 8]	39/85, 46/85	[0, 1, 1, 0, 0, 0, 0]	[1, 2, 3, 5, 7, 8]
19/85, 22/85	[0, 0, 1, 1, 0, 0, 0]	[1, 3, 4, 7, 8]	118/255, 137/255	[0, 1, 1, 0, 0, 1, 0]	[1, 2, 3, 5, 6, 8]
58/255, 13/51	[0, 0, 1, 1, 1, 0, 0]	[1, 3, 4, 5, 8]	121/255, 134/255	[0, 1, 1, 1, 0, 1, 0]	[1, 2, 3, 4, 7, 8]
31/85, 98/255	[0, 1, 0, 1, 1, 0, 0]	[1, 2, 5, 7, 8]	122/255, 133/255	[0, 1, 1, 1, 0, 0, 0]	[1, 2, 3, 4, 6, 8]
94/255, 97/255	[0, 1, 0, 1, 1, 1, 0]	[1, 2, 5, 6, 8]	41/85, 44/85	[0, 1, 1, 1, 0, 0, 1]	[1, 2, 3, 4, 6, 7, 8]
109/255, 146/255	[0, 1, 0, 0, 1, 0, 0]	[1, 2, 4, 5, 7, 8]	124/255, 131/255	[0, 1, 1, 1, 1, 0, 1]	[1, 2, 3, 4, 5, 8]
22/51, 113/255	[0, 1, 1, 0, 1, 1, 0]	[1, 2, 3, 8]	25/51, 26/51	[0, 1, 1, 1, 1, 0, 0]	[1, 2, 3, 4, 5, 7, 8]
38/85, 47/85	[0, 1, 1, 0, 1, 0, 0]	[1, 2, 3, 6, 8]	42/85, 43/85	[0, 1, 1, 1, 1, 1, 0]	[1, 2, 3, 4, 5, 6, 8]
23/51, 28/51	[0, 1, 1, 0, 1, 0, 1]	[1, 2, 3, 6, 7, 8]			

TABLE 2. 周期 = 6, 8

周期 = 9					
特征弧	揉捏序列	内部地址	特征弧	揉捏序列	内部地址
7/73, 66/511	[0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0]	[1, 4, 8, 9]	221/511, 226/511	[0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0]	[1, 2, 3, 8, 9]
50/511, 65/511	[0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0]	[1, 4, 5, 9]	222/511, 225/511	[0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0]	[1, 2, 3, 7, 9]
89/511, 14/73	[0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0]	[1, 3, 5, 8, 9]	229/511, 282/511	[0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0]	[1, 2, 3, 6, 8, 9]
90/511, 97/511	[0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0]	[1, 3, 5, 6, 9]	230/511, 281/511	[0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0]	[1, 2, 3, 6, 7, 9]
15/73, 114/511	[0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0]	[1, 3, 4, 7, 9]	233/511, 278/511	[0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0]	[1, 2, 3, 5, 8, 9]
106/511, 113/511	[0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0]	[1, 3, 4, 6, 9]	234/511, 277/511	[0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0]	[1, 2, 3, 5, 7, 9]
115/511, 132/511	[0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1]	[1, 3, 4, 7, 8, 9]	235/511, 276/511	[0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1]	[1, 2, 3, 5, 7, 8, 9]
116/511, 131/511	[0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1]	[1, 3, 4, 5, 9]	236/511, 275/511	[0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1]	[1, 2, 3, 5, 6, 9]
121/511, 130/511	[0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0]	[1, 3, 4, 5, 8, 9]	237/511, 274/511	[0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0]	[1, 2, 3, 5, 6, 8, 9]
122/511, 129/511	[0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0]	[1, 3, 4, 5, 6, 9]	34/73, 39/73	[0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0]	[1, 2, 3, 5, 6, 7, 9]
173/511, 178/511	[0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0]	[1, 2, 8, 9]	241/511, 270/511	[0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0]	[1, 2, 3, 4, 8, 9]
174/511, 177/511	[0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0]	[1, 2, 7, 9]	242/511, 269/511	[0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0]	[1, 2, 3, 4, 7, 9]
181/511, 202/511	[0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0]	[1, 2, 6, 8, 9]	243/511, 268/511	[0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1]	[1, 2, 3, 4, 7, 8, 9]
26/73, 185/511	[0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0]	[1, 2, 5, 9]	244/511, 267/511	[0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1]	[1, 2, 3, 4, 6, 9]
186/511, 197/511	[0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0]	[1, 2, 5, 7, 9]	35/73、38/73	[0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0]	[1, 2, 3, 4, 6, 8, 9]
27/73, 194/511	[0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0]	[1, 2, 5, 6, 8, 9]	246/511, 265/511	[0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0]	[1, 2, 3, 4, 6, 7, 9]
190/511, 193/511	[0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0]	[1, 2, 5, 6, 7, 9]	247/511, 264/511	[0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1]	[1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9]
198/511, 201/511	[0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0]	[1, 2, 6, 7, 9]	248/511, 263/511	[0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1]	[1, 2, 3, 4, 5, 9]
205/511, 30/73	[0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0]	[1, 2, 4, 9]	249/511、262/511	[0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0]	[1, 2, 3, 4, 5, 8, 9]
206/511, 209/511	[0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0]	[1, 2, 4, 7, 9]	250/511, 261/511	[0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0]	[1, 2, 3, 4, 5, 7, 9]
213/511, 298/511	[0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]	[1, 2, 4, 6, 8, 9]	251/511, 260/511	[0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1]	[1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9]
214/511, 297/511	[0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0]	[1, 2, 4, 6, 7, 9]	36/73, 37/73	[0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1]	[1, 2, 3, 4, 5, 6, 9]
31/73, 42/73	[0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0]	[1, 2, 4, 5, 9]	253/511, 258/511	[0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0]	[1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9]
218/511, 293/511	[0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0]	[1, 2, 4, 5, 7, 9]	254/511, 257/511	[0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0]	[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9]

TABLE 3. 周期 = 9

周期 = 10					
特征弧	揉捏序列	内部地址	特征弧	揉捏序列	内部地址
27/341, 98/1023	[0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0]	[1, 4, 8, 10]	443/1023, 452/1023	[0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1]	[1, 2, 3, 8, 9, 10]
82/1023, 97/1023	[0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0]	[1, 4, 6, 10]	148/341, 41/93	[0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1]	[1, 2, 3, 7, 10]
113/1023, 130/1023	[0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0]	[1, 4, 5, 9, 10]	445/1023, 150/341	[0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0]	[1, 2, 3, 7, 9, 10]
38/341, 43/341	[0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0]	[1, 4, 5, 6, 10]	446/1023, 449/1023	[0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0]	[1, 2, 3, 7, 8, 10]
51/341, 54/341	[0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0]	[1, 3, 9, 10]	457/1023, 566/1023	[0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0]	[1, 2, 3, 6, 9, 10]
14/93, 161/1023	[0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0]	[1, 3, 7, 10]	458/1023, 565/1023	[0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0]	[1, 2, 3, 6, 8, 10]
169/1023, 178/1023	[0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0]	[1, 3, 5, 8, 10]	153/341, 188/341	[0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1]	[1, 2, 3, 6, 8, 9, 10]
170/1023, 59/341	[0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0]	[1, 3, 5, 7, 10]	460/1023, 563/1023	[0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1]	[1, 2, 3, 6, 7, 10]
185/1023, 194/1023	[0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0]	[1, 3, 5, 6, 9, 10]	461/1023, 562/1023	[0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0]	[1, 2, 3, 6, 7, 9, 10]
2/11, 193/1023	[0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0]	[1, 3, 5, 6, 7, 10]	466/1023, 557/1023	[0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0]	[1, 2, 3, 5, 8, 10]
67/341, 274/1023	[0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]	[1, 3, 6, 9, 10]	467/1023, 556/1023	[0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1]	[1, 2, 3, 5, 8, 9, 10]
202/1023, 91/341	[0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0]	[1, 3, 6, 7, 10]	156/341, 185/341	[0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1]	[1, 2, 3, 5, 7, 10]
19/93, 266/1023	[0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0]	[1, 3, 4, 8, 10]	469/1023, 554/1023	[0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]	[1, 2, 3, 5, 7, 9, 10]
70/341, 265/1023	[0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0]	[1, 3, 4, 7, 10]	470/1023, 553/1023	[0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0]	[1, 2, 3, 5, 7, 8, 10]
211/1023, 76/341	[0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1]	[1, 3, 4, 7, 9, 10]	43/93, 50/93	[0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0]	[1, 2, 3, 5, 6, 9, 10]
212/1023, 227/1023	[0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1]	[1, 3, 4, 6, 10]	158/341, 183/341	[0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0]	[1, 2, 3, 5, 6, 8, 10]
7/33, 226/1023	[0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0]	[1, 3, 4, 6, 9, 10]	475/1023, 548/1023	[0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1]	[1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 10]
218/1023, 75/341	[0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0]	[1, 3, 4, 6, 7, 10]	476/1023, 547/1023	[0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1]	[1, 2, 3, 5, 6, 7, 10]
233/1023, 22/93	[0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0]	[1, 3, 4, 5, 8, 10]	159/341, 182/341	[0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0]	[1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10]
78/341, 241/1023	[0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0]	[1, 3, 4, 5, 7, 10]	478/1023, 481/1023	[0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0]	[1, 2, 3, 4, 10]
81/341, 260/1023	[0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1]	[1, 3, 4, 5, 8, 9, 10]	482/1023, 541/1023	[0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0]	[1, 2, 3, 4, 8, 10]
244/1023, 259/1023	[0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1]	[1, 3, 4, 5, 6, 10]	161/341, 180/341	[0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1]	[1, 2, 3, 4, 8, 9, 10]
83/341, 86/341	[0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0]	[1, 3, 4, 5, 6, 9, 10]	44/93, 49/93	[0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1]	[1, 2, 3, 4, 7, 10]
250/1023, 257/1023	[0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0]	[1, 3, 4, 5, 6, 7, 10]	485/1023, 538/1023	[0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0]	[1, 2, 3, 4, 7, 9, 10]
281/1023, 290/1023	[0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0]	[1, 3, 9, 10]	162/341, 179/341	[0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0]	[1, 2, 3, 4, 7, 8, 10]
94/341, 289/1023	[0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0]	[1, 3, 7, 10]	487/1023, 536/1023	[0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1]	[1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10]
349/1023, 118/341	[0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0]	[1, 2, 7, 9, 10]	488/1023, 535/1023	[0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1]	[1, 2, 3, 4, 6, 10]
350/1023, 353/1023	[0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0]	[1, 2, 7, 8, 10]	163/341, 178/341	[0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0]	[1, 2, 3, 4, 6, 9, 10]
365/1023, 370/1023	[0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0]	[1, 2, 5, 9, 10]	490/1023, 533/1023	[0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0]	[1, 2, 3, 4, 6, 8, 10]
122/341, 123/341	[0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0]	[1, 2, 5, 8, 10]	491/1023, 532/1023	[0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1]	[1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10]
373/1023, 394/1023	[0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0]	[1, 2, 5, 7, 9, 10]	164/341, 177/341	[0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1]	[1, 2, 3, 4, 6, 7, 10]
34/93, 377/1023	[0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0]	[1, 2, 5, 6, 10]	493/1023, 530/1023	[0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0]	[1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10]
126/341, 389/1023	[0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0]	[1, 2, 5, 6, 8, 10]	494/1023, 529/1023	[0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0]	[1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10]
127/341, 386/1023	[0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0]	[1, 2, 5, 6, 7, 9, 10]	497/1023, 526/1023	[0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0]	[1, 2, 3, 4, 5, 9, 10]
382/1023, 35/93	[0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0]	[1, 2, 5, 6, 7, 8, 10]	166/341, 175/341	[0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0]	[1, 2, 3, 4, 5, 8, 10]
130/341, 131/341	[0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0]	[1, 2, 5, 7, 8, 10]	499/1023, 524/1023	[0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1]	[1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10]
397/1023, 134/341	[0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0]	[1, 2, 6, 7, 9, 10]	500/1023, 523/1023	[0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1]	[1, 2, 3, 4, 5, 7, 10]
398/1023, 401/1023	[0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0]	[1, 2, 6, 7, 8, 10]	167/341, 174/341	[0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0]	[1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10]
413/1023, 38/93	[0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0]	[1, 2, 4, 7, 9, 10]	502/1023, 521/1023	[0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0]	[1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10]
138/341, 139/341	[0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0]	[1, 2, 4, 7, 8, 10]	503/1023, 520/1023	[0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1]	[1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10]
430/1023, 433/1023	[0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0]	[1, 2, 4, 5, 8, 10]	168/341, 173/341	[0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1]	[1, 2, 3, 4, 5, 6, 10]
437/1023, 586/1023	[0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0]	[1, 2, 4, 5, 7, 9, 10]	505/1023, 518/1023	[0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0]	[1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10]
146/341, 195/341	[0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0]	[1, 2, 4, 5, 7, 8, 10]	46/93, 47/93	[0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0]	[1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10]
147/341, 454/1023	[0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0]	[1, 2, 3, 9, 10]	169/341, 172/341	[0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1]	[1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10]
442/1023, 151/341	[0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0]	[1, 2, 3, 8, 10]	508/1023, 515/1023	[0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1]	[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10]
509/1023, 514/1023	[0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0]	[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10]	170/341, 171/341	[0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0]	[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10]

TABLE 4. 周期 = 10

References

[Ate92] Pau Atela。二次复多项式中动力射线的分岔。 *Ergodic Theoryand Dynamical Systems*, 12(3):401–423，1992。[Ate93] Pau Atela。曼德博集合与移位商集的 σ-自同构。 *Transactions of the American Mathematical Society*，335(2):683–703，1993。[BDK91] Paul Blanchard、Robert L Devaney 和 Linda Keen。复多项式的动力学与移位的自同构。 *Inventiones mathematicae*，104(1):545–580，1991。[Boe04] Lucyan E Boettcher。迭代收敛的基本定律及其在分析中的应用。 *Izv. Kazan. Fiz.-Mat. Obshch*，14:155–234，1904。[CG13] Lennart Carleson 和 Theodore W Gamelin。 *Complex dynamics*。Springer Science & Business Media，2013。[DH84] Adrien Douady 和 John H Hubbard。探索曼德博集合。奥赛讲义。 *Publ. Math.Orsay*，1984。[DHL84] Adrien Douady、John Hamal Hubbard 和 Pierre Lavaurs。复多项式的动力学研究。1984。[Dou86] Adrien Douady。计算曼德博集合中角度的算法。载于 *Chaotic dynamicsand fractals*，第155–168页。Elsevier，1986。[Hub16] John H Hubbard。 *Teichmüller theory and applications to geometry, topology, and dynamics, Volume 2: Surface Homeomorphisms and Rational Functions*，第2卷。Matrix Editions，2016。[Jun19] Wolf Jung。Mandel（计算机软件）。 *Available at* `http://www.mndynamics.com/indexp.html`, *Version 5.17 (July 22, 2019)*，2019。[Kel07] Karsten Keller。 *Invariant factors, Julia equivalences and the (abstract) Mandelbrot set*。Springer，2007。[Lav86] Pierre Lavaurs。对由 m 在奇分母有理数上定义的对合的一种组合描述。 *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique*，303(4):143–146，1986。[McM94] Curtis T McMullen。 *Complex dynamics and renormalization*，第 AM-135 卷。Princeton University Press，1994。[McM96] Curtis T McMullen。 *Renormalization and 3-manifolds which fiber over the circle*，第 AM-142 卷。Princeton University Press，1996。[Mil00] John Milnor。周期轨道、外部射线与曼德博集合：一篇介绍性论述。*Astérisque*，261(xiii):277–333，2000。[Mil11] John Milnor。 *Dynamics in One Complex Variable.*，第 AM-160 卷。Princeton University Press，2011。[Sch17] Dierk Schleicher。曼德博集合的内部地址与多项式的伽罗瓦群。*Arnold Mathematical Journal*，3:1–35，2017。

Hyungryul Baik, Department of Mathematical Sciences, KAIST, 291 Daehak-ro, Yuseong-gu, Daejeon 34141, South Korea

Email address: hrbaik@kaist.ac.kr

Juhun Baik, Department of Mathematical Sciences, KAIST, 291 Daehak-ro, Yuseong-gu, Daejeon 34141, South Korea*Email address*: jhbaik@kaist.ac.kr