arXiv:2305.04230v1 [math.DG] 7 May 2023

反德西特3空间中伪球面类空标架曲线的零曲面

O. Oğulcan Tuncer*

土耳其安卡拉贝伊特佩06800，哈哲特佩大学数学系

2023年5月9日

摘要

我们在三维反德西特空间中引入伪球面类空标架曲线的零曲面（或零锥前沿）。这些曲面由从反德西特类空标架曲线上的点发出的光线构成。随后，我们对伪球面类空标架曲线的零锥前沿的奇点进行分类，并说明这些奇点与相关标架曲线的奇点之间的关系。我们还定义了一族称为反德西特距离平方函数的函数，从Legendrian奇点理论的角度，将伪球面类空标架曲线的零锥前沿解释为波前。最后，我们给出一些例子来说明本文的结果。

关键词：零锥前沿、反德西特空间、标架曲线、距离平方函数

数学主题分类：53A35;57R45; 58K05

1 引言

作为最简单的曲率时空之一， n维反德西特时空（AdS）长期以来不仅受到相对论学家的关注，也受到几何学家的关注。反德西特三维空间中正则曲线的局部微分几何仍是一个活跃的研究领域。然而，我们无法使用标准工具研究具有奇点的曲线。许多学者通过在不同空间中引入定义良好的移动标架，研究了这些奇异曲线的若干特定族；这些研究不仅探讨了奇异曲线的多种几何性质，还引入了与这些奇异曲线相关的重要曲线，例如渐屈线、渐伸线、足线和正交投影线 [3–7, 9, 10, 14, 15, 17, 18, 20, 24, 25, 28]。最近，我们在反德西特三维空间中引入了伪球面非零标架曲线，并证明了此类曲线的存在性与唯一性 [23]。在这些标架曲线上定义了即使在奇异点处也良定义的移动标架之后，我们还研究了

*电子邮箱：otuncer@hacettepe.edu.tr

伪球面标架浸入的渐屈线和焦曲面的几何性质与奇点性质。

零子流形是奇点理论和广义相对论领域中最具吸引力的研究课题之一。与曲线相关联的零曲面已得到广泛研究[1,8,12,19,21,22,26,27]。这些论文主要致力于研究此类零曲面的几何性质并对其奇点进行分类。然而，据作者所知，唯一一篇研究与奇异标架曲线相关联的零曲面的论文是 [16]。

本文旨在研究反德西特三维空间中伪球面类空标架曲线的零曲面（或零锥前沿）的奇点。因此，我们将 [1] 中关于反德西特三维空间内与正则类空曲线相关的零曲面的奇点结果推广到奇异类空标架曲线的零曲面。

本文组织如下。第2节简要回顾反德西特三维空间中正则类空曲线的局部微分几何。第3节回顾反德西特三维空间中的伪球面类空标架曲线。第4节介绍反德西特三维空间中伪球面类空标架曲线的零锥前沿，并对这些曲面的奇点进行分类。第5节利用伪球面类空标架曲线上的距离平方函数，从Legendrian奇点理论的角度将零锥前沿解释为波前。最后，我们在第6节给出一些例子以支持我们的结果。

2 预备知识

配备如下伪标量积的四维实向量空间： $u=(u_1,u_2,u_3,u_4)$ $w=(w_1,w_2,w_3,w_4)\in\mathbb{R}^4$，称为

$$\langle u,w\rangle=-u_1w_1-u_2w_2+u_3w_3+u_4w_4,$$

指标为2的半欧几里得四维空间，记作 $\mathbb{R}^4_2$。

若非零向量 $u=(u_1,u_2,u_3,u_4)$ 满足 $\langle u,u\rangle>0$、 $\langle u,u\rangle<0$ 或 $\langle u,u\rangle=0$，则分别称其为类空、类时或类光（零）向量。向量 u 的伪范数定义为$\|u\|=\sqrt{|\langle u,u\rangle|}$。对于任意三个向量 $u=(u_1,u_2,u_3,u_4)$、 $v=(v_1,v_2,v_3,v_4)$ 和$w=(w_1,w_2,w_3,w_4)$，三重向量积定义为

$$u\times v\times w=\begin{vmatrix}-e_1 & -e_2 & e_3 & e_4\\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4\\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4\\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4\end{vmatrix}$$

其中集合 $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ 是 $\mathbb{R}^4_2$的标准基。

$\mathbb{R}^4_2$ 中的曲线称为类空、类时或类光（零）曲线，分别是指曲线的切向量为类空、类时或类光（零）。

$\mathbb{R}^4_2$中有三种伪球面：反德西特三维空间、指标2的伪三球面，以及原点处的零锥，它们分别定义为

$$\begin{aligned}&AdS^3=\{u\in\mathbb{R}^4_2\,|\,\langle u,u\rangle=-1\},\\&S^3_2=\{u\in\mathbb{R}^4_2\,|\,\langle u,u\rangle=1\},\\&\Lambda^3=\{u\in\mathbb{R}^4_2\backslash\{0\}\,|\,\langle u,u\rangle=0\}.\end{aligned}$$

现在我们讨论反德西特三维空间中正则类空曲线的局部微分几何。设 $\gamma\colon I\to AdS^3$ 是一条单位速类空曲线。设 $T(s)=\gamma'(s)$ 为单位切向量

。由于 $\langle\gamma(s)\ \gamma(s)\rangle=-1$，我们有 $\langle\gamma(s)\ T(s)\rangle=0$。于是可得 $\langle\gamma(s)\ T'(s)\rangle=-1$。我们取 $N_1(s)=T'(s)-\gamma(s)$ 和 $N_2(s)=\gamma(s)\times T(s)\times N_1(s)$。容易验证，$N_1$ 和 N_2 是 AdS^3 中类空曲线 γ 的法向量。这些法向量可以是类空的，也可以是类时的。我们还将曲率定义为 $\kappa_g(s)=\|T'(s)-\gamma(s)\|$。因此，若 $\kappa_g(s)=0$ 且 $N_1(s)=0$，则称类空曲线 γ 是 AdS^3 中的一条测地线。当 $\kappa_g(s)\neq 0$ 时，我们可以定义以下单位向量。

$$n_1(s)=\frac{T'(s)-\gamma(s)}{\|T'(s)-\gamma(s)\|}=\frac{N_1(s)}{\|N_1(s)\|},\qquad n_2(s)=\gamma(s)\times T(s)\times n_1(s).$$

因此，集合 $\{\gamma(s)\ T(s)\ n_1(s)\ n_2(s)\}$ 沿类空曲线 γ 构成一个伪正交标架。于是，Frenet-Serret 型公式由下式给出：

$$\begin{pmatrix}\gamma'(s)\\ T'(s)\\ n_1'(s)\\ n_2'(s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & \kappa_g(s) & 0\\ 0 & -\delta\kappa_g(s) & 0 & \tau_g(s)\\ 0 & 0 & \tau_g(s) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma(s)\\ T(s)\\ n_1(s)\\ n_2(s)\end{pmatrix},$$

其中 $\delta=\langle n_1(s)\ n_1(s)\rangle$ 和 $\tau_g(s)=\frac{\delta}{\kappa_g^2(s)}\det(\gamma(s)\ \gamma'(s)\ \gamma''(s)\ \gamma'''(s))$。

3 反德西特三维空间中的伪球面类空标架曲线

设 $\gamma:\ I\to AdS^3$ 是一条光滑曲线。若对所有 $s\in I$，均有 $(\gamma,v_1,v_2):\ I\to AdS^3\times\Delta_1$，且满足 $\gamma(s)\ v_1(s)^*\theta=0$ 和 $\gamma(s)\ v_2(s)^*\theta=0$，则称其为一条伪球面类空标架曲线，其中

$$\Delta_1=\{(\mathbf{u},\mathbf{w})\,|\,\langle\mathbf{u},\mathbf{w}\rangle=0\}\subset AdS^3\times S_2^3\ (\text{or } S_2^3\times AdS^3)$$

是一个 4 维接触流形，且 θ 是 Δ_1 [2] 上的典范接触 1-形式。条件 $(\gamma(s)\ v_i(s))^*\theta=0\,(i=1,2)$ 等价于对所有 $s\in I$，$\langle\gamma'(s)\ v_i(s)\rangle=0\,(i=1,2)$。若 (γ,v_1,v_2) 是一个浸入，则称其为一个伪球面类空标架浸入。

若存在一个光滑映射 $(v_1,v_2):\ I\to\Delta_1$，使得 (γ,v_1,v_2) 是一条伪球面类空标架曲线，则称曲线 $\gamma:\ I\to AdS^3$ 为一条伪球面类空标架基曲线。

设 $\mu(s)=\gamma(s)\times v_1(s)\times v_2(s)$。集合 $\{\gamma(s)\ v_1(s)\ v_2(s)\ \mu(s)\}$ 是沿着 γ 的一个伪正交标架。即使在 γ 的奇异点处，此标架也定义良好。该标架的 Frenet-Serret 型公式为

$$\begin{pmatrix}\gamma'(s)\\ v_1'(s)\\ v_2'(s)\\ \mu'(s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & \alpha(s)\\ 0 & 0 & \ell(s) & m(s)\\ 0 & \ell(s) & 0 & n(s)\\ \alpha(s) & -\epsilon m(s) & \epsilon n(s) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma(s)\\ v_1(s)\\ v_2(s)\\ \mu(s)\end{pmatrix},\tag{3.1}$$

其中 $\epsilon=\langle v_1(s)\ v_1(s)\rangle$, $\alpha(s)=\langle\gamma'(s)\ \mu(s)\rangle$, $\ell(s)=-\epsilon\langle v_1'(s)\ v_2(s)\rangle$, $m(s)=\langle v_1'(s)\ \mu(s)\rangle$，以及$n(s)=\langle v_2'(s)\ \mu(s)\rangle$。我们称映射 $(\alpha,\ell,m,n):\ I\to\mathbb{R}^4$ 为伪球面类空标架曲线 (γ,v_1,v_2) 的曲率。注意，当且仅当$\alpha(s_0)=0$时，s_0是 γ的奇异点。更多细节请参见 [23]。

定理 3.1（伪球面类空标架曲线的存在性 [23]）。对于光滑映射（α,ℓ,m,n）：$I\to\mathbb{R}^4$，存在一条伪球面类空标架曲线（γ,v_1,v_2），使得 α、ℓ、m 和 n 是 γ的曲率。

定理 3.2（伪球面类空标架曲线的唯一性 [23]）。设（γ, v_1, v_2）和（$\tilde{\gamma}, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2$）是 AdS^3中的两条伪球面类空标架曲线。假设这两条标架曲线的曲率~（α, ℓ, m, n）和（$\tilde{\alpha}, \ell, \tilde{m}, \tilde{n}$）相同。那么，（$\gamma, v_1, v_2$）和（$\tilde{\gamma}, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2$）作为伪球面类空标架曲线是全等的。

4 伪球面类空标架曲线的零锥前沿

本节利用伪正交标架 $\{\gamma(s)\ v_1(s)\ v_2(s)\ \mu(s)\}$ 定义伪球面类空标架曲线的零锥前沿。随后，我们对这些曲面的奇点进行分类。

定义 4.1. 设 (γ, v_1, v_2)：$I \to AdS^3 \times \Delta_1$ 是一条伪球面类空标架曲线。γ 的零锥前沿 定义为

$$\mathcal{NF}^{\pm}_{\gamma}(s, \lambda) = \gamma(s) + \lambda(v_1(s) \pm v_2(s)). \tag{4.1}$$

注意，在 (4.1) 中，$v_1(s) \pm v_2(s)$ 是一个零向量。因此，这些零锥前沿可以看作是由反德西特三维空间中类空标架曲线上各点发出的光线的轨迹所形成的曲面。

在陈述本文的主要定理之前，我们需要回顾前沿映射奇点的判别准则（详见 [11, 13] ）。若存在沿 f 的单位向量场 ν：$U \to T_1(AdS^3)$，使得对任意 $X \in T_pU$，都有 $\langle df(X)\ \nu\rangle(p) = 0$，则光滑映射 f：$U \subset \mathbb{R}^2 \to AdS^3$ 是前沿映射。若 (f, ν) 是浸入，则称 f 为前沿。给定 U 的一个局部坐标系 (u, v)，存在定义在 U 上的光滑函数 $\Omega(u, v)$，称为带符号面积密度，使得

$$f(u, v) \times \frac{\partial}{\partial u} f(u, v) \times \frac{\partial}{\partial v} f(u, v) = \Omega(u, v)\nu(u, v).$$

那么我们有 $\Omega^{-1}(0) = \mathcal{S}(f)$，其中 $\mathcal{S}(f)$ 是 f 的奇异点集合。若奇异点p 满足 $d\Omega(p) \neq 0$，则称其为非退化点。对于非退化点 p，存在一条正则曲线 $c(s)$：$I \to U$，使得 $c(s_0) = p$，且 image$(c) = \mathcal{S}(f)$ 在 p 附近成立。于是存在一个非零向量场 $\xi(s)$，定义在 p 附近，称为沿 c 的零向量场，使得对于所有 s， $df(\xi(s)) = 0$。

定理 4.2. 设 $f : U \to AdS^3$ 为一个前，且 $p = c(s_0) \in U$ 是 f的一个非退化奇异点。

(i) p 处 f 的芽局部微分同胚于尖点边，当且仅当 $\xi(s_0)$ 与 $c'(s_0)$横截，即$\det(c'(s_0)\ \xi(s_0)) \neq 0$.(ii) p 处 f 的芽局部微分同胚于燕尾，当且仅当$\det(c'(s_0)\ \xi(s_0)) = 0$ 且 $\frac{d}{ds}\det(c'(s)\ \xi(s))(s_0) \neq 0$。

这里，$C \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2) | \, x_1^2 - x_2^3 = 0\} \times \mathbb{R}$ 是尖点边，而$SW = \{(x_1, x_2, x_3) \,|\, x_1 = 3u^4 + u^2v,\ x_2 = 4u^3 + 2uv,\ x_3 = v\}$ 是燕尾（见图*1*）。

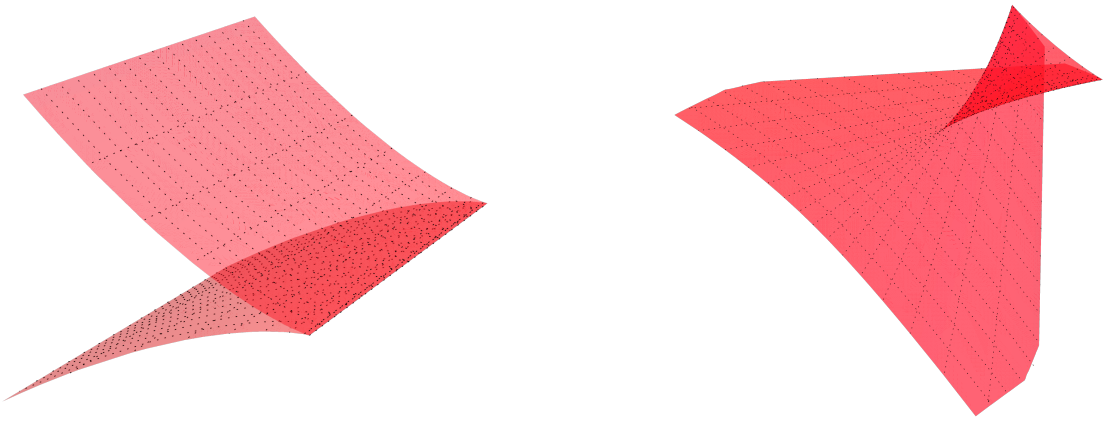


图1：尖点边（左）和燕尾（右）

现在我们对式（4.1）定义的零锥前沿的奇点进行分类。因此，本文旨在证明以下定理。

定理4.3。 设 $(\gamma, v_1, v_2)\colon I \to AdS^3 \times \Delta_1$ 是一条伪球面类空标架曲线，其曲率为 (α, ℓ, m, n)，满足 $m(s) \pm n(s) \neq 0$。则有以下结论。

(i) γ的零锥前沿 $\mathcal{NF}^{\pm}_{\gamma}$在 (s_0, λ_0) 处具有奇点，当且仅当 $\lambda_0 = -\alpha(s_0)m(s_0) \pm n(s_0)$。

(ii) γ的零锥前沿 $\mathcal{NF}^{\pm}_{\gamma}$在 (s_0, λ_0) 处局部微分同胚于尖点边，当且仅当 $\lambda_0 = -\alpha(s_0)\, m(s_0) \pm n(s_0)$ 且 $\sigma(s_0) \neq 0$。

(iii) $\mathcal{NF}^{\pm}_{\gamma}$的 γ零锥前沿在(s_0, λ_0) 处局部微分同胚于燕尾，当且 *only if* $\lambda_0 = \dfrac{-\alpha(s_0)}{m(s_0) \pm n(s_0)}$, $\sigma(s_0) = 0$, *and* $\sigma'(s_0) \neq 0$.

Here

$$\sigma(s) = \alpha(s)\big(-(m'(s) \pm n'(s)) + \ell(s)(n(s) \pm m(s))\big) + \alpha'(s)(m(s) \pm n(s)).$$

证明。 我们来计算$\mathcal{NF}^{\pm}_{\gamma}(s, \lambda)$的偏导数。对(4.1)关于 s 求导，并利用(3.1)，可得

$$\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{NF}^{\pm}_{\gamma}(s, \lambda) = (\alpha(s) + \lambda(m(s) \pm n(s)))\mu(s) + \lambda\ell(s)(v_2(s) \pm v_1(s)). \tag{4.2}$$

对(4.1)关于 λ 求导，得到

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\mathcal{NF}^{\pm}_{\gamma}(s, \lambda) = v_1(s) \pm v_2(s). \tag{4.3}$$

γ由(4.1)定义的零锥曲面在(s_0, θ_0)处有奇点，当且仅当 $\mathcal{NF}^{\pm}_{\gamma} \times^{\partial}_{\partial s} \mathcal{NF}^{\pm}_{\gamma} \times^{\partial}_{\partial \theta} \mathcal{NF}^{\pm}_{\gamma}(s_0, \lambda_0) = 0$。由此，根据(4.1)、(4.2)和(4.3)，这个三重向量积等于

$$-(\alpha(s) + \lambda(m(s) \pm n(s)))\,(v_2(s) \pm v_1(s)),$$

当且仅当在 $(s_0,\ \lambda_0)$ 处为零。

$$\alpha(s_0) + \lambda_0(m(s_0) \pm n(s_0)) = 0. \tag{4.4}$$

因此，(i) 可由假设 $m(s) \pm n(s) \neq 0$ 立即推出。我们考虑带符号
的密度函数。

$$\Omega(s,\lambda) = -(\alpha(s) + \lambda(m(s) \pm n(s))).$$

令 $\Omega^{-1}(0) = \mathcal{S}(\mathcal{NF}_\gamma^{\pm})$。我们看到 $\mathcal{S}(\mathcal{NF}_\gamma^{\pm}) = \{(s,\ \lambda(s))\}$，其中 $\lambda(s)$ 是满足 $\Omega(s,\ \lambda(s)) = 0$ 的函数。于是根据假设，我们有

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\Omega(s,\lambda) = -(m(s) \pm n(s)) \neq 0.$$

因此，任意 $p \in \mathcal{S}(\mathcal{NF}_\gamma^{\pm})$ 都是非退化的。设 p 是一个非退化奇异点。则存在一条正则曲线 c: $I \to I \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$，使得 $c(0) = p$，且在 p 附近，image$(c) = \mathcal{S}(\mathcal{NF}_\gamma^{\pm})$。令 $c(s) = (s,\ \lambda(s))$。考虑沿 $c(s)$ 的零向量场 ξ: $I \to \mathbb{R}^2$，其定义为$\xi(s) = (1,\ \pm\alpha(s)\ell(s)/(m(s) \pm n(s)))$。于是由 (4.4) 得

$$\begin{aligned}
\det(c'(s_0), \xi(s_0)) &= \begin{vmatrix} 1 & -\dfrac{\alpha'(s_0)(m(s_0) \pm n(s_0)) - \alpha(s_0)(m'(s_0) \pm n'(s_0))}{(m(s_0) \pm n(s_0))^2} \\ 1 & \pm\dfrac{\alpha(s_0)\ell(s_0)}{m(s_0) \pm n(s_0)} \end{vmatrix} \\
&= \frac{\pm\alpha(s_0)\ell(s_0)(m(s_0) \pm n(s_0)) + \alpha'(s_0)(m(s_0) \pm n(s_0)) - \alpha(s_0)(m'(s_0) \pm n'(s_0))}{(m(s_0) \pm n(s_0))^2} \\
&= \frac{\sigma(s_0)}{(m(s_0) \pm n(s_0))^2}.
\end{aligned}$$

因此，根据定理 4.2(i)，$\mathcal{NF}_\gamma^{\pm}$ 在 $(s_0,\ \lambda_0)$ 处局部微分同胚于尖点边，当且仅当 $\sigma(s_0) \neq 0$。这就得到了 (ii)。

容易计算得

$$\frac{d}{ds} = \det(c'(s), \xi(s)) = \frac{\sigma'(s)(m(s) \pm n(s))^2 - \sigma(s)(m'(s) \pm n'(s))}{(m(s) \pm n(s))^4}.$$

根据定理 4.2(ii)，$\mathcal{NF}_\gamma^{\pm}$在$(s_0,\ \lambda_0)$处局部微分同胚于燕尾，当且仅当 $\sigma(s_0) = 0$ 且 $\sigma'(s_0) \neq 0$。因此，(iii)的证明完成。 □

注4.4. 设 s_0 是 $\gamma(s)$的奇异点。那么，$(s_0,\ 0)$是$\mathcal{NF}_\gamma^{\pm}$的奇异点。

下面的推论是定理4.3的直接推论。

推论4.5. 设$(\gamma、\ v_1、\ v_2)$: $I \to AdS^3 \times \Delta_1$ 是一条在 s_0处有奇点的伪球面标架曲线，即 $\alpha(s_0) = 0$。假设对于所有 $s \in I$，$m(s) \pm n(s) \neq 0$。

（i）零锥前沿 $\mathcal{NF}_\gamma^{\pm}$在（$s_0$，0）处局部微分同胚于尖点边，当且仅当 α'（s_0）$\neq 0$。

(ii) 零锥前沿 $\mathcal{NF}_\gamma^{\pm}$在点 $(s_0, 0)$ 处局部微分同胚于燕尾，当且仅当 $\alpha'(s_0) = 0$, $\alpha''(s_0) \neq 0$。

5 伪球面类空标架曲线上的距离平方函数

给定一条伪球面类空标架曲线 $(\gamma, v_1, v_2): I \to AdS^3 \times \Delta_1$，我们现在从Legendrian奇点理论的角度说明如何将 γ 的零曲面解释为波前。定义以下函数族 $D: I \times AdS^3 \to \mathbb{R}$，其定义为 $D(s,\mathbf{v}) = \langle \gamma(s) - \mathbf{v}, \gamma(s) - \mathbf{v} \rangle$，称为反德西特距离平方函数。对于任意$\mathbf{v}_0 \in AdS^3$，令 $d_{\mathbf{v}_0}(s) = D(s,\mathbf{v}_0)$。以下命题可由直接计算得到。

命题*5.1.* 设 $(\gamma, v_1, v_2): I \to AdS^3 \times \Delta_1$ 是曲率为 (α, ℓ, m, n) 的伪球面类空标架曲线。假设对所有 $s \in I$, $m(s) \pm n(s) \neq 0$。令 $\sigma(s) = \alpha(s)\big(-(m'(s) \pm n'(s)) + \ell(s)(n(s) \pm m(s))\big) + \alpha'(s)(m(s) \pm n(s))$。

(1) $d_{\mathbf{v}_0}(s_0) = 0$ 当且仅当存在 $a, b, c \in \mathbb{R}$，使得 $\mathbf{v}_0 = \gamma(s_0) + av_1(s_0) + bv_2(s_0) + c\mu(s_0)$，$c^2 = -\epsilon(a^2 - b^2)$。

(2) $d_{\mathbf{v}_0}(s_0) = d'_{\mathbf{v}_0}(s_0) = 0$ 当且仅当 $\alpha(s_0)$，或者存在一个 $\lambda \in \mathbb{R}$，使得 $\mathbf{v} = \gamma(s_0) + \lambda(v_1(s_0) \pm v_2(s_0))$。

(3) $d_{\mathbf{v}_0}(s_0) = d'_{\mathbf{v}_0}(s_0) = d''_{\mathbf{v}_0}(s_0) = 0$ 当且仅当下列条件中至少有一个成立

(i) $\alpha(s_0) = \alpha'(s_0) = 0$，(ii) $\alpha(s_0)$ 并且存在一个 $\lambda \in \mathbb{R}$，使得$\mathbf{v}_0 = \gamma(s_0) + \lambda(v_1(s_0) \pm v_2(s_0))$，(iii) $\mathbf{v}_0 = \gamma(s_0) - \overset{\alpha}{}(s_0)\, m(s_0) \pm n(s_0)(v_1(s_0) \pm v_2(s_0))$。

---

(4) $d_{\mathbf{v}_0}(s_0) = d'_{\mathbf{v}_0}(s_0) = d''_{\mathbf{v}_0}(s_0) = d'''_{\mathbf{v}_0}(s_0) = 0$ 当且仅当下列条件中至少有一个成立

(i) $\alpha(s_0) = \alpha'(s_0) = \alpha''(s_0) = 0$，(ii) $\alpha(s_0) = \alpha'(s_0) = 0$，并且存在一个 $\lambda \in \mathbb{R}$，使得 $\mathbf{v}_0 = \gamma(s_0) + \lambda(v_1(s_0) \pm v_2(s_0))$，(iii) $\alpha(s_0) = 0$ 且 $\mathbf{v}_0 = \gamma(s_0)$，(iv) $\mathbf{v}_0 = \gamma(s_0) - \overset{\alpha}{}(s_0)\, m(s_0) \pm n(s_0)(v_1(s_0) \pm v_2(s_0))$，并且 $\sigma(s_0) = 0$。

---

(5) $d_{\mathbf{v}_0}(s_0) = d'_{\mathbf{v}_0}(s_0) = d''_{\mathbf{v}_0}(s_0) = d'''_{\mathbf{v}_0}(s_0) = d^{(4)}_{\mathbf{v}_0}(s_0) = 0$ 当且仅当以下条件中至少有一个成立

(i) $\alpha(s_0) = \alpha'(s_0) = \alpha''(s_0) = \alpha'''(s_0) = 0$, (ii) $\alpha(s_0) = \alpha'(s_0) = \alpha''(s_0) = 0$ 并且存在一个 $\lambda \in \mathbb{R}$ 使得 $\mathbf{v}_0 = \gamma(s_0) + \lambda(v_1(s_0) \pm v_2(s_0))$, (iii) $\alpha(s_0) = \alpha'(s_0) = 0$ 和 $\mathbf{v}_0 = \gamma(s_0)$, (iv) $\mathbf{v}_0 = \gamma(s_0) - \overset{\alpha}{}(s_0)\, m(s_0) \pm n(s_0)(v_1(s_0) \pm v_2(s_0))$，$\sigma(s_0) = 0$，且 $\sigma'(s_0) = 0$。

---

6 个例子

例 6.1. 考虑由下式定义的光滑曲线 $\gamma_1 : I \to AdS^3$

$$\gamma_1(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1+s^4}, \sqrt{1+s^6}, s^2, s^3\right).$$

该曲线关于 s 的导数为

$$\gamma_1'(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2s^3}{\sqrt{1+s^4}}, \frac{3s^5}{\sqrt{1+s^6}}, 2s, 3s^2\right).$$

因此，曲线 γ 在 $s=0$处是奇异的。定义 v_1： $I \to S_2^3$ 和 v_2： $I \to AdS^3$ 为

$$\begin{aligned}
v_1(s) &= \frac{1}{\sqrt{2(8+18s^2+s^6)}}(s^3\sqrt{1+s^4}, s^3\sqrt{1+s^6}, s^5+6s, s^6-4),\\
v_2(s) &= \frac{1}{\sqrt{8+18s^2+s^6}\sqrt{4+9s^2+13s^6}}\big(-\sqrt{1+s^4}(4+9s^2-2s^6), \sqrt{1+s^6}(4+9s^2-2s^6),\\
&\qquad 2s^2(-2+3s^2+s^6), 3s^3(-2+3s^2+s^6)\big).
\end{aligned}$$

容易看出， $\langle v_1, \gamma_1\rangle = 0$、 $\langle v_2, \gamma_1\rangle = 0$、 $\langle v_1, \gamma_1'\rangle = 0$和 $\langle v_2, \gamma_1'\rangle = 0$。因此，$(\gamma_1,\ v_1,\ v_2)$: $I \to AdS^3 \times \Delta_1$ 是 AdS^3中的伪球面类空标架曲线。由三重向量积 $\gamma_1 \times v_1 \times v_2$，可得

$$\mu(s) = \frac{\sqrt{1+s^4}\sqrt{1+s^6}}{\sqrt{4+9s^2+13s^6}}\left(\frac{2s^2}{\sqrt{1+s^4}}, \frac{3s^4}{\sqrt{1+s^6}}, 2, 3s\right).$$

γ_1的曲率由$(\alpha,\ \ell,\ m,\ n)$给出，其中

$$\begin{aligned}
\alpha(s) &= \frac{s\sqrt{4+9s^2+13s^6}}{\sqrt{2}\sqrt{1+s^4}\sqrt{1+s^6}},\\
\ell(s) &= \frac{6\sqrt{2}s^2(2-3s^2-s^6)}{(8+18s^2+s^6)\sqrt{4+9s^2+13s^6}},\\
m(s) &= \frac{12+16s^4+21s^6+25s^{10}}{\sqrt{2}\sqrt{1+s^4}\sqrt{1+s^6}\sqrt{8+18s^2+s^6}\sqrt{4+9s^2+13s^6}},\\
n(s) &= \frac{s(-16+30s^2+81s^4+58s^6+102s^8+65s^{12})}{\sqrt{1+s^4}\sqrt{1+s^6}\sqrt{8+18s^2+s^6}(4+9s^2+13s^6)}.
\end{aligned}$$

那么零锥前沿 $\mathcal{NF}^+_{\gamma_1}$是

$$\begin{aligned}
\mathcal{NF}^+_{\gamma_1}(s,\lambda) = &\left(\frac{\sqrt{1+s^4}}{2}\left(\sqrt{2}+\frac{\left(-8+s^2(-18+4s^4+s\sqrt{8+18s^2+26s^6})\right)\lambda}{\sqrt{8+18s^2+s^6}\sqrt{4+9s^2+13s^6}}\right),\right.\\
&\frac{\sqrt{1+s^6}}{2}\left(\sqrt{2}+\frac{\left(8+s^2(18+6s^4+s\sqrt{8+18s^2+26s^6})\right)\lambda}{\sqrt{8+18s^2+s^6}\sqrt{4+9s^2+13s^6}}\right),\\
&\frac{s}{2}\left(\sqrt{2}s+\frac{\left(-8s+12s^3+4s^7+(6+s^4)\sqrt{8+18s^2+26s^6}\right)\lambda}{\sqrt{8+18s^2+s^6}\sqrt{4+9s^2+13s^6}}\right),\\
&\left.\frac{s^3}{\sqrt{2}}+\frac{\left(-12s^3+18s^5+6s^9+(s^6-4)\sqrt{8+18s^2+26s^6}\right)\lambda}{2\sqrt{8+18s^2+s^6}\sqrt{4+9s^2+13s^6}}\right).
\end{aligned}$$

γ_1和 $\mathcal{NF}^+_{\gamma_1}$在 $x_2x_3x_4$空间中的投影如图2所示。注意，$\alpha(0) = 0$且 $\alpha'(0) \neq 0$。于是，根据推论4.5(i)， $\mathcal{NF}^+_{\gamma_1}$局部微分同胚于(0,0)处的尖点边。

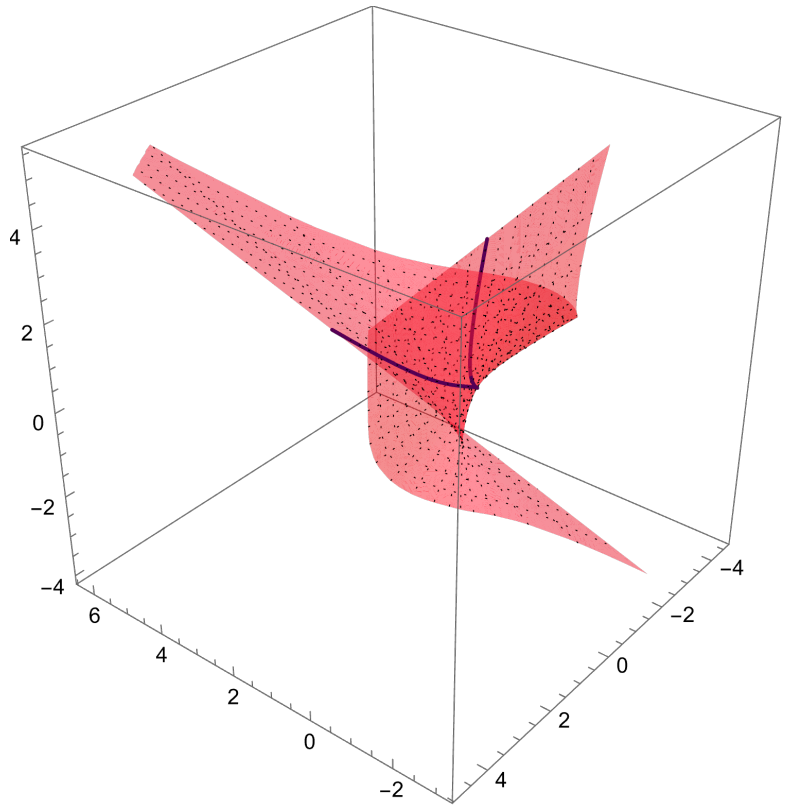


图2：零锥前沿 $\mathcal{NF}^+_{\gamma_1}$ 在 $x_2x_3x_4$-空间中的投影

例6.2。 考虑曲线 $\gamma_2(s) = (0,\ \sqrt{1+\sin^6 s+\cos^6 s},\ \cos^3(s),\ \sin^3(s))$. 令

$$v_1(s) = \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 s\cos^2 s}}\left(0, \sin s\cos s\sqrt{1+\cos^6 s+\sin^6 s}, \sin s(1+\cos^4 s), \cos s(1+\sin^4 s)\right),$$

且 $v_2(s) = (1,\ 0,\ 0,\ 0)$，可知 $(\gamma_2,\ v_1,\ v_2) : I \to AdS^3 \times \Delta_1$ 是伪球面类空标架曲线。我们还得到

$$\mu(s) = \frac{\sqrt{1+\cos^6 s+\sin^6 s}}{\sqrt{1+\sin^2 s\cos^2 s}}\left(0, \frac{\cos^4 s-\sin^4 s}{\sqrt{1+\cos^6 s+\sin^6 s}}, \cos s, -\sin s\right).$$

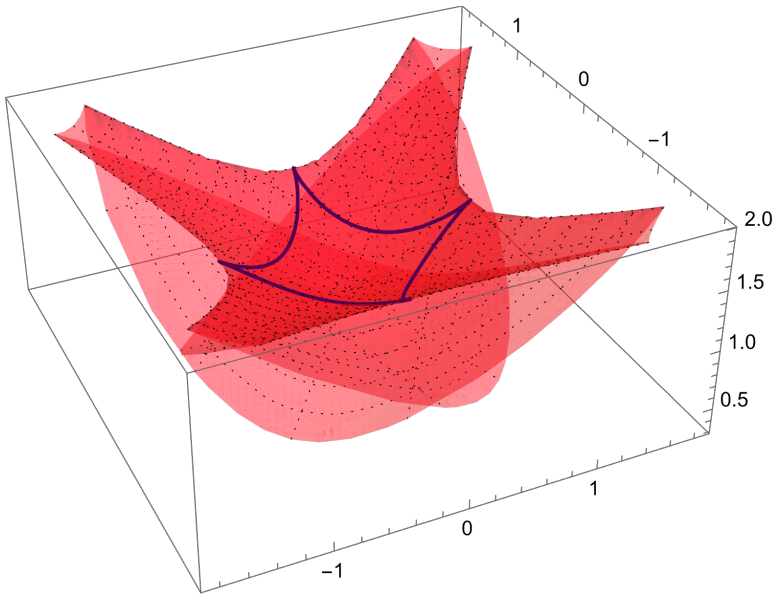
该标架曲线的曲率为 $(\alpha,\ \ell,\ m,\ n)$，其中

$$\alpha(s) = -\frac{3\sin 2s\sqrt{4+\sin^2(2s)}}{\sqrt{26+6\cos 4s}}, \quad \ell(s) = 0, \quad m(s) = \frac{302+216\cos 4s-6\cos 8s}{8(9-\cos 4s)\sqrt{26+6\cos 4s}}, \quad n(s) = 0.$$

那么，零锥前沿 $\mathcal{NF}^+_{\gamma_2}$ 是

$$\mathcal{NF}^+_{\gamma_2}(s,\lambda) = \left(\lambda, \sqrt{1+\cos^6 s+\sin^6 s}\left(1+\frac{\lambda\cos s\ \sin s}{\sqrt{1+\cos^2 s\sin^2 s}}\right),\right.$$
$$\left.\cos^3 s+\frac{\sin s\,(1+\cos^4 s)\lambda}{\sqrt{1+\cos^2 s\sin^2 s}}, \sin^3 s+\frac{\cos s\,(1+\sin^4 s)\lambda}{\sqrt{1+\cos^2 s\sin^2 s}}\right).$$

γ_2和 $\mathcal{NF}^+_{\gamma_2}$在 $x_2x_3x_4$空间上的投影如图3所示。根据推论4.5(i)，该零锥前沿在(ρ,0)处与尖点边局部微分同胚，因为 $\alpha(\rho) = 0$且 $\alpha'(\rho) \neq 0$，其中 $\rho = 0, \pi/2, \pi, 2\pi$。



零锥前沿 $\mathcal{NF}^+_{\gamma_2}$ 在 $x_2x_3x_4$-空间中的投影

例 6.3. 考虑曲线 $\gamma_3(s) = (0, \sqrt{1+s^6+s^8}, s^3, s^4)$。对该方程关于 s 求导，得到

$$\gamma_3'(s) = (0, \frac{3s^5+4s^7}{\sqrt{1+s^6+s^8}}, 3s^2, 4s^3).$$

取

$$v_1(s) = \frac{1}{\sqrt{s^8+8s^2+9}}\big(0, s^4\sqrt{1+s^6+s^8}, s^7+4s, s^8-3\big),$$

and

$$v_2(s) = (1,0,0,0),$$

我们发现 $(\gamma_3, v_1, v_2) : I \to AdS^3 \times \Delta_1$ 是一条伪球面类空标架曲线，其曲率为 (α, ℓ, m, n)，其中

$$\alpha(s) = \frac{s^2\sqrt{s^8+8s^2+9}}{\sqrt{1+s^6+s^8}}, \quad \ell(s) = 0, \quad m(s) = \frac{s^{14}+28s^8+21s^6+12}{(s^8+8s^2+9)\sqrt{1+s^6+s^8}}, \quad n(s) = 0.$$

那么，零锥前沿 $\mathcal{NF}^+_{\gamma_3}$ 为

$$\mathcal{NF}^+_{\gamma_3}(s,\lambda) = \left(\lambda, \sqrt{1+s^6+s^8}\left(1+\frac{s^4\lambda}{\sqrt{9+8s^2+s^8}}\right),\right.$$
$$\left. s^3+\frac{s(4+s^6)\lambda}{\sqrt{9+8s^2+s^8}}, s^4+\frac{(-3+s^8)\lambda}{\sqrt{9+8s^2+s^8}}\right).$$

γ_3和 $\mathcal{NF}^+_{\gamma_3}$在 $x_2x_3x_4$-空间上的投影如图4所示。注意，$\alpha(0) = 0$，$\alpha'(0) = 0$，且 $\alpha''(0) \neq 0$。那么由推论4.5(ii)可知，$\mathcal{NF}^+_{\gamma_3}$在(0,0)处局部微分同胚于燕尾。

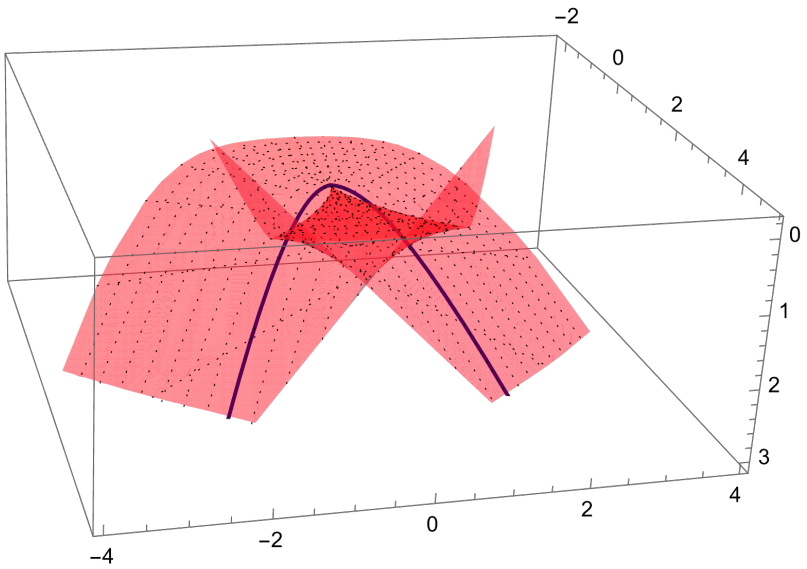


图4：零锥前沿 $\mathcal{NF}^{+}_{\gamma_3}$ 在 $x_2x_3x_4$-空间中的投影

参考文献

[1] L. Chen、Q. Han、D. Pei 和 W. Sun，《反德西特三维空间中零曲面的奇点》，J. Math. Anal. Appl. 366, 256–265, 2010年。[2] L. Chen 和 S. Izumiya，《半欧几里得空间中伪球面的勒让德对偶图谱》，Proc. Japan. Acad. Ser. A 85 (4), 49–54, 2009年。[3] L. Chen 和 M Takahashi，《双曲空间与德西特空间中前沿的对偶及渐屈线》，J. Math. Anal. Appl. 437, 133–159, 2016年。[4] T. Fukunaga 和 M. Takahashi，《勒让德曲线的存在性与唯一性》，J. Geom.104, 297–307, 2013年。[5] T Fukunaga 和 M Takahashi，《欧几里得平面中前沿的渐屈线》，J. Singul. 10, 92–107, 2014年。[6] T Fukunaga 和 M Takahashi，《欧几里得平面中前沿的渐伸线》，Beitr Algebra Geom. 57, 637–653, 2016年。[7] T Fukunaga 和 M Takahashi，《欧几里得平面中前沿映射的渐屈线与渐伸线》，Demonstr. Math. 48:2, 147–166, 2015年。[8] T. Fusho 和S. Izumiya，《德西特三维空间中类空曲线的类光曲面》，J. Geom. 88, 19–29, 2008年。[9] S Honda 和 M Takahashi，《欧几里得空间中的标架曲线》，Adv. Geom. 16 (3), 265–276, 2016年。[10] S. Honda 和 M. Takahashi，《欧几里得空间中标架浸入的渐屈线与焦曲面》，Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 150, 497–516, 2020年。[11] S. Izumiya、T. Nagai 和 K. Saji，《三维球面中的大圆曲面》，Diff. Geom. Appl. 29, 409–425, 2011年。

[12] S. Izumiya、D. Pei 和 T. Sano，《闵可夫斯基三维空间中类空曲线的光锥高斯映射与光锥可展曲面》，Glasg. Math. J. 42，75–89，2000年。[13] M. Kokubu、W. Rossman、K. Saji、M. Umehara 和 K. Yamada，《双曲三维空间中平坦前沿的奇点》，Pacific J. Math. 221 (2)，303–351，2005年。[14] Y. Li 和 D. Pei，《球面中前沿的垂足曲线》，J. Nonlinear Sci. Appl. 9，836–844，2016年。[15] Y. Li 和 D. Pei，《欧几里得平面中前沿映射的垂足曲线》，Math. Meth. Appl. Sci.41，1988–1997，2018年。[16] P. Li 和 D. Pei，《闵可夫斯基三维空间中类空标架曲线的零锥前沿》，Mathematics 9，2939，2021年。[17] Y. Li 和 Q-Y. Sun，《闵可夫斯基平面中前沿的渐屈线》，Math. Meth. Appl. Sci.42 (16)，5416–5426，2019年。[18] Y. Li 和 O.O. Tuncer，《德西特二维空间中前沿映射的（反）垂足曲线与（反）正交曲线》，Math. Meth. Appl. Sci.，2023年，http://doi.org/10.1002/mma.9173。[19] Y. Li 和 Z. Wang，《德西特三维空间中的类光切向可展曲面》，J. Geom. Phys. 164，104188，2021年。[20] X. Song、E. Li 和 D. Pei，《零球面中类空前沿的勒让德对偶与渐屈线–渐伸线曲线对》，J. Geom. Phys. 178，104543，2022年。[21] X. Song 和 D. Pei，《零德西特球面中类空前沿的零锥对偶世界面与焦散》，Internat. J. Modern Phys. A 36，2150240，2021年。[22] J. Sun 和 D. Pei，《三维零锥上零曲线的零曲面》，Phys. Lett. A 378，1010–1016，2014年。[23] O.O. Tuncer，《三维反德西特空间中伪球面标架浸入焦集的奇点》，arXiv:2304.08045，2023年。[24] O.O. Tuncer、H. Ceyhan、I. Gok 和 F.N. Ekmekci，《关于欧几里得平面中前沿的垂足曲线与反垂足曲线的注记》，Math. Meth. Appl. Sci. 41，5096–5111，2018年。[25] O.O. Tuncer 和 I. Gok，《双曲前沿镜面反射光线的双曲焦散》，Eur. Phys. J. Plus 138:266，2023年，doi: 10.1140/epjp/s13360-023-03891-9。[26] Y. Wang、D. Pei 和 R. Gao，《半欧几里得空间中反德西特类空曲线的一参数零超曲面的奇点》，J. Funct. Spaces 2016，文章编号 2319741，2016年。[27] S. Wei、J. Huang 和 L. Chen，《三维反德西特空间中零 Cartan 曲线的零曲面奇点》，Topol. Appl. 234，238–247，2018年。[28] H. Yu、D. Pei 和 X. Cui，《欧几里得二维球面上前沿的渐屈线》，J. Nonlinear Sci. Appl. 8，678–686，2015年。