arXiv:2305.04244v1 [math.LO] 7 May 2023

传递模型的谱

EILON BILINSKY 和 YAIR HAYUT

Abstract. 本文在多种定义下研究扩展 $V = L[A]$ 的理论的传递模型的高度谱。具体而言，我们探讨如何以尽可能简单的方式构造这些谱所需的一致性强度。

1. Introduction

从柏拉图主义视角来看，有些序数比其他序数更容易定义。例如， ω_1^L 是极大序数，使得存在一个满足 $V = L$ 且每个序数都是可数的传递模型 M 。事实上，这个模型$M = L_{\omega_1^L}$ 相当绝对，并且相对于上述理论，满足各种极大性定义。这一观察在泛型多重宇宙中仍然成立。

本文试图形式化并分析这一性质。具体而言，我们要问：是否存在一个理论T，能以它们是 T的传递模型的最大高度这一意义将它们确定下来（或许是以绝对的方式；见第 2 节中的定义），而这些序数构成怎样的序数类。

这个问题与一个更广泛的模型论研究计划有关。回顾一下，莫利定理指出，对于任意可数理论 T 和一个类型 p，存在任意大基数的模型满足 T 并遗漏 p，当且仅当这类模型可能具有的基数在 $\beth_{\omega_1}$、 [10] 以下无界。Shelah 推广了这一结论，并证明，满足理论 T 且遗漏类型 p 的模型的基数，与在相关理论 [1] 的 ω-模型中可以保证为良基的可定义序的上确界之间存在联系。这种对应关系也适用于不可数语言，从而可以对莫利定理作出非平凡的推广，参见 [2]。

从某种意义上说，本文的主要动机与 Shelah 的观察是对偶的。给定一个序数，我们能否将其确定为某种理论的传递模型的最大高度？这个问题可以用许多彼此不等价的方式来表述；在本文中，我们研究了其中几种相关的表述及其相互联系。

第二位作者获得了以色列科学基金会的资助，资助编号为 1967/21。[1]一个 ω-模型是集合论语言扩展的模型，其中 ω 是标准的

我们还要指出，刻画 ω-模型可能的谱这一问题，与 Shelah 的一个猜想有关：设 T 是一个理论，使得 T 具有基数为 $\aleph_{\omega_1}$ 的 ω-模型。那么，T 具有一个基数为连续统的模型。本文的动机之一，是研究这一问题的某种变体的若干方面；在该变体中，我们将 ω-正确性替换为传递性。

2. Definitions

我们感兴趣的是尝试找出可确定为某个理论的传递模型高度的序数。我们希望这些概念具有相对绝对性，并将探讨传递模型的若干种唯一性概念。

我们的所有理论 T都建立在语言 $\{=, \in, A\}$ 之上，其中 A 是一个一元关系。此外，我们始终假设 T 包含公理$V = L[A]$。

加入公理 $V = L[A]$ 旨在确保选择公理的一个（强）版本。特别是，我们要排除“宽”模型，也就是基数远大于其高度的模型，如 [6] 中的模型。此外，这样也可以避免将 L 的结构编码到模型的序数上的必要。

尽管这一假设在某些方面显得不太自然，我们仍然保留它，以使下文的定义与这样一种直觉相一致：冯·诺伊曼序数刻画了传递模型的良序的序型，而无需假设我们的模型满足任何强形式的替换公理。尽管如此，在我们的模型中，Mostowski 塌缩引理仍可能不成立。

本文中的许多结果即使不施加这一限制，也可以通过相同的论证得到证明，但例如，定理 9 和引理20则实质性地依赖于这一限制。

定义 1. 令 S 为所有序数 α 的类，使得存在一个理论T，满足 α 是极大序数，并且存在一个模型 $M \models T$，其中 $M \cap$序数类 $= \alpha$。

设 S_u 为所有满足以下条件的 α 的类：存在传递模型 M，$M \cap$序数类 $= \alpha$，且不存在 $N \neq M$ 传递的、$N \cap$ 序数类 $\geq M \cap$ 序数类、$N \equiv M$。

定义 2. 令 S^* 为所有满足以下条件的 α 的收集：存在一个理论 T，以及一个 T 的传递模型 M，使得 $M \cap$序数类 $= \alpha$，并且在任何泛型扩张中，都不存在满足 $N \cap$ 序数类 $> \alpha$ 的传递 $N \models T$。

设 S^*_u 为所有 α 的收集公理，使得存在一个传递模型 M，满足 $M \cap$序数类 $= \alpha$，并且在任何泛型扩张中，都不存在 $N \neq M$传递、$N \cap$序数类 $\geq M \cap$序数类、$N \equiv M$。

Clearly, $S^* \subseteq S$, $S^*_u \subseteq S_u \subseteq S$.

注释 3. 每个可数序数都属于 S^*_u，因为我们可以将其序型编码进该理论。特别是 $\omega_1 \subseteq S^*$。

定义 4. 设 T 是一个理论。

令 $\mathfrak{Sp}_T$ 为所有满足以下条件的序数 α 所成的类：存在一个传递模型 M，满足 T、$M \cap$ 序数类 $= \alpha$，并且 M 在以下意义下是极大的：不存在传递的 N 以及非平凡初等嵌入 $j: M \to N$。[2]

令 $\mathfrak{Sp}_{T,u}$ 为所有序数 α 的类，使得存在唯一的传递模型 M，满足 T, $M \cap$ 序数 $= \alpha$，且 M 在如下意义下是极大的：不存在传递的 N，以及非平凡的初等嵌入 $j: M \to N$。

令 $\mathfrak{Sp}^*_T$ 为所有满足以下条件的序数 α 所构成的类：存在一个关于 T 的传递模型 M，$M \cap$ 序数类 $= \alpha$，并且在任何泛型扩张中，M 都是极大的。

令 $\mathfrak{Sp}^*_{T,\ u}$ 为所有序数 α 组成的类，使得存在唯一的传递模型 M，满足 T、$M \cap$序数类 $= \alpha$，并且在任意泛型扩张中，M都是唯一且极大的。

设 $\mathfrak{Sp} = \bigcup_T \mathfrak{Sp}_T$、$\mathfrak{Sp}^* = \bigcup_T \mathfrak{Sp}^*_T$，依此类推。

虽然 S 的基数至多为 $2^{\aleph_0}$，但 $\mathfrak{Sp}$ 可能是真类。事实上，根据引理 14 和 6，$\mathfrak{Sp}$ 是集合当且仅当存在可测基数。

断言 5。对于每个 $\alpha < \omega_1$，都存在 T 使得 $\mathfrak{Sp}^*_{T,\ u} = \{\alpha\}$。特别地，$\omega_1 \subseteq \mathfrak{Sp}^*_u \subseteq \mathfrak{Sp}^*$。

引理 6。设 κ 可测。$\mathfrak{Sp} \cup S \subseteq \kappa$。

证明。设 M是 T的传递模型，$M \cap$序数类 $\geq \kappa$。设 $j: V \to N$是一个临界点为 κ的初等嵌入，且 $j(\kappa) > M \cap$序数类并且 N传递。这样的嵌入确实存在，只需对 κ 上的一个测度进行足够长的迭代（注意，N 通常不对可数序列封闭）。

Then j " $M \prec j(M)$ and $j(M) \cap \mathrm{Ord} = j(M \cap \mathrm{Ord}) \geq j(\kappa) > M \cap \mathrm{Ord}$. □

通过局部应用这一论证，我们得到以下引理。

引理 7。设 κ 是弱紧基数。则 $[\kappa, \kappa^+) \cap (\mathfrak{Sp} \cup S) = \emptyset$。

3. The properties of S and $\mathfrak{Sp}$

对 $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$-句子之模型的可能谱的研究在模型论中扮演着重要角色。例如，在近期的论文 [1],中，构造了一个完全的 $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$-句子，其极大模型具有任意大的基数，且小于某个可测基数。在 [12], 中，构造了一个 $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$-句子，其谱恰好包含 ω_1-库雷帕树的分支数目以及连续统。

按照惯例，一个 $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$-句子的模型可以视为具有正确 ω 的某个一阶理论的模型。

[2]唯一平凡的初等嵌入是 $id: M \to M$，所以如果 $N \neq M$，该嵌入自动是非平凡的。

因此，我们可以将 $\mathfrak{Sp}_T$ 的定义理解为：询问能够正确计算序数的 T 模型的谱。对于这些模型而言，其序数的高度比其基数更精细地衡量了模型的大小。[3]

引理 8. $\omega_1 \in S$。此外，对于每个 α，若 $\alpha \in S$，则 $\aleph_\alpha$ 和 $\beth_\alpha$ 属于S。

证明。对于 ω_1，取 T 使其包含命题“每个序数都是可数的”。

一般而言，为了证明若 $\alpha \in S$ 则 $\aleph_\alpha \in S$，我们考虑非平凡情形 $\alpha < \aleph_\alpha$。令 T_0 为 $\alpha \in S$的见证。令 T_1 为理论“A 编码两个谓词，A_0、A_1。$L[A_1]$ 认为 $\exists\gamma$、$L_\gamma[A_0] \models T_0$，并且存在一个这样的极大 γ。对于每个无限基数 κ，存在 $\beta < \gamma$，使得 $\mathrm{otp}\{\mu < \kappa \mid \mu \text{ 是一个无限基数}\} = \beta$。”

$\beth_\alpha$ 的论证类似。 □

定理 9. 假设不存在具有可测基数的内模型。那么

$$S \subseteq \{\max \mathfrak{Sp}_T \mid T \textit{ is a theory and } \max \mathfrak{Sp}_T \textit{ exists}\}.$$

证明。记 $\mathfrak{Sp}_{max} = \{\max \mathfrak{Sp}_T \mid T \text{ 为一个理论，且 } \max \mathfrak{Sp}_T \text{exists}\}$，并证明 $S \subseteq \mathfrak{Sp}_{max}$。

首先，由于这两个集合都包含 ω_1，我们可以将注意力限制在不可数序数上。

设 $\gamma \in S$ 为不可数序数，并假设 M 是其见证，即 M 是传递模型，且不存在满足 $M \equiv N$ 的传递 N，并且 $N \cap \mathrm{Ord} > M \cap \mathrm{Ord}$。

设 $T = Th(M)$。根据我们的假设，$M = L_\gamma[A]$。我们希望证明存在一个谓词 B，使得对于某个 T'，$L_\gamma[A, B]$ 见证了 $\gamma \in \max \mathfrak{Sp}_{T'}$。理论 T' 将陈述 $L_\gamma[A]$ 是 T 的模型，并且 $L_\gamma[B]$ 将是 ZFC 的某个片段的模型。特别地，T' 包含以下陈述：

- 每个正则序数都是基数，
- 如果 ζ 是基数，那么 $\zeta \leq \rho < \zeta^+$ 当且仅当存在 $x \subseteq \zeta \times \zeta$，使得序型为 $x = \rho$，[4] 并且
- 如果 a是一个在层级 β 构造的序数集合，并且 $\forall n < \omega\beta + n$存在，那么 a的 Mostowski 塌缩 π_a：$a \to$ 的序型 a 存在。

假设对于 B 的每一种取法，情况都不是如此，因此存在一个初等嵌入 j：$L_\gamma[A, B] \to L_{\gamma'}[A', B']$。

由于 $L_\gamma[A] \models T$，根据初等性，$L_{\gamma'}[A'] \models T$。因为 γ是 T的传递模型的最大高度，并且 $\gamma' \geq \gamma$，我们得出结论：$\gamma' = \gamma$。

引理 10. 对于每个谓词 A，存在一个谓词 $B \subseteq L_\gamma$ 使得$L_\gamma[A, B] \models T'$，并且对于每个 $\alpha < \gamma$使得 cf $\alpha < \alpha$，存在一个元素 of

[3]我们加入断言 T包含句子 $V = L[A]$，以确保冯·诺依曼序数是衡量模型高度的正确方式。[4]为了使这个等式有意义，我们将其解释为 x 与 ρ之间存在一个保序双射。

$L_\gamma[B]$ 见证它。此外，对于每个 $\alpha < \gamma$， $L_\gamma[B]$ 中的 α 与 $|\alpha|$ 之间存在双射。

证明。首先，我们可以假设 γ 是一个极限序数。事实上，若对某个自然数 n 有 $\gamma = \gamma' + n$，那么请注意， γ' 之后的后继序数会自动以可定义的方式成为奇异的，并且它们与 $|\gamma'|$ 之间存在可定义双射。此外， T' 的最后一项并未涉及在 γ' 层之后构造的元素。因此，我们只需验证 γ' 本身的共终性是否计算正确，而这方面的论证与 γ 为极限序数时的论证并无不同。

设 γ 为一个极限序数。因此 $L_\gamma \supseteq \gamma \times \gamma \times \gamma$。对于每个奇异的 $\alpha < \gamma$，令 g_α: cf $\alpha \to \alpha$ 为 α 奇异性的见证。取 B_1 为 $\bigcup\{\alpha\} \times g_\alpha$。类似地，取 B_2，使其为每个 $\alpha < \gamma$ 在 α 与 $|\alpha$ 之间引入一个双射，

为了验证 Mostowski 塌缩的存在性，我们将定义 B_3为形如 $\bigcup\{\{a\} \times \pi_a \mid a \in \mathcal{P}(\gamma) \setminus$ 序数类$\}$的谓词。最后，取$B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$。□

引理 11. 设 j: $L_\gamma[B] \to L_\gamma[B']$ 是非平凡的初等嵌入，其中 B 如上文引理 10 所述。那么， j 的临界点是一个弱不可达基数。

证明。确实，crit j 在 $L_\gamma[B]$中必定是正则的，因此在 V中也是正则的。

若对于某个基数 μ，有 crit $j = \mu^+$，那么在 $L_\gamma[B]$ 中， μ 与 μ^+之间没有正则基数。根据初等性，这意味着在j的目标模型中（即 $L_\gamma[B']$）， μ 与 j(crit j) $> \mu^+$之间没有正则基数。由于是奇异的这一性质具有 Σ_1，我们得出同样的结论在 V中也成立，这与 μ^+的正则性矛盾。□

引理 12。设 $\kappa =$ crit j。则 $\gamma > \kappa^+$。

证明。与之前一样，我们假设 γ 是一个极限序数（否则，我们将在 γ 以下的最大极限序数处进行论证）。

设 $\kappa < \alpha < \gamma$。如果 $\kappa \leq \alpha < \kappa^+$，那么存在 f: $\kappa \to \alpha$，一个$L_\gamma[B]$中的双射。因此， $j(f) \in L_\gamma[B']$。由于 γ是一个极限序数， $j(f) \restriction \kappa$是$L_\gamma[B]$的一个元素。令 π: j” $\alpha \to \alpha$ 为 Mostowski 塌缩，并且由于 j” $\alpha \in L_\gamma[B']$，且 $L_\gamma[B'] \models T'$，我们得出 $\pi \in L_\gamma[B']$，从而 $\pi \circ (j(f) \restriction \kappa) \in L_\gamma[B']$。特别地， $|\alpha|^{L_\gamma[B']} = \kappa$。由于 $j(\kappa)$是 $L_\gamma[B']$中的一个基数，它必定至少为 κ^+。我们得出 $\gamma > \kappa^+$。□。

接下来，我们希望使用 Dodd-Jensen 覆盖引理来导出一个具有可测基数的内模型。回顾一下，如果不存在具有可测基数的内模型，那么 $K = K_{DJ}$ 满足覆盖引理——对于每个 $X \subseteq$序数类，都存在 $Y \in K$，使得 $X \subseteq Y$ 和 $|Y| = |X| + \aleph_1^V$， [4]。

让我们选取 B来编码 K_γ。也就是说， $L_\gamma[B]$ 将满足 T'，此外还包含一个可定义的、具有 K_γ 的子类。根据上述引理，我们知道 $\gamma > \kappa^+ \geq (\kappa^+)^K$，因此 j 诱导出一个 K-超滤子， U。我们需要证明内部超幂 Ult(K, U) 是良基的。因此，

存在非平凡的初等嵌入 $\iota\colon K \to M$，而且我们可以导出一个具有可测基数的内模型。

事实上，假设情况并非如此。那么，存在一个函数序列 $f_n\colon \kappa \to$ 序数类，使得 $[f_n]_U$ 是 E-递减的（其中 E 是超幂的属于关系）。虽然该序列不属于 K，但根据覆盖引理，它被 K中一个基数为 $\aleph_1^V$ 的集合所覆盖。

设 $\{g_\alpha \mid \alpha < \rho\}$ 是一个覆盖集，且 $|\rho| \leq \aleph_1^V$，于是 $\rho < \kappa$。令 $X_{\alpha,\,\beta} = \{\rho < \kappa \mid g_\alpha(\rho) \in g_\beta(\rho)\}$，并且 $\mathcal{X} = \{X_{\alpha,\beta} \mid \alpha \neq \beta\}$。集合 $\mathcal{X}$ 属于 K，其基数严格小于 κ。根据可接受性，它属于K_γ（因为 $\gamma > (\kappa^+)^K$）。此外，收集公理 $\{(\alpha,\beta) \in \rho^2 \mid \kappa \in j(X_{\alpha,\,\beta})\}$属于 $L_\gamma[B']$，因为 γ 是一个极限序数，因此也属于它的 K版本，我们将其记作 K'。由于 K_γ 满足可接受性，根据初等性，K'也满足。因此，该集合必属于某个 $\zeta < \kappa$对应的 K'_ζ。由于 $\operatorname{crit} j = \kappa$，$K'_\zeta = K_\zeta$，因此该集合属于 K_γ。

Take

$$\mathcal{Y} = \{X_{\alpha,\beta} \mid X_{\alpha,\beta} \in U\} \cup \{\kappa \setminus X_{\alpha,\beta} \mid X_{\alpha,\beta} \notin U\}.$$

根据上述推理，$\mathcal{Y} \in K$ 及其交集必定非空。但这会导致矛盾，因为交集中的任意元素 δ 都必须满足：$f_n(\delta)$ 是一个无限递减的序数序列。□

问题13. 不借助反大基数假设，能否证明定理 9?

我们再补充几点关于 $\mathfrak{Sp}$ 的说明。

引理14. 存在一个递归理论 T，使得 $\mathfrak{Sp}_T$ 有界当且仅当存在可测基数；在这种情况下，$\sup \mathfrak{Sp}_T$ 是最小可测基数。

证明. 我们先给出广义连续统假设下的证明，因为在这种情况下，该理论的表述稍显自然。令 T 为 ZFC^- 加上收集公理，以及存在一个最大基数 μ 且每个集合 x 的基数均为 $\leq \mu$ 的断言（注意，对于所有 μ，只要它们是无限的，$H(\mu^+) \models T$）。

若存在最小可测基数，令 κ 为它；否则令 κ 为序数类 Ord。对于每个基数 $\rho < \kappa$，$M = H(\rho^+)$ 都是 T 的一个极大模型。否则，存在某个传递模型 N 以及一个初等嵌入 $j\colon M \to N$。显然，j 有一个临界点（否则，$|\rho^+|^N \leq \rho$）。令 $\zeta = \operatorname{crit} j$。于是，由于 $\mathcal{P}(\zeta) \subseteq M$，$\zeta$ 是可测的。

我们得出结论，κ 以下的每个后继基数都属于 $\mathfrak{Sp}_T$。

让我们处理一般情形。来看一下理论：$L_\alpha[A]$，其中对某个 $\rho < \alpha$，A 编码了一个按序型 α 枚举 $\mathcal{P}(\rho)$ 的方式，并且该模型满足分离公理，且每个 $\zeta < \rho$ 的幂集都存在。假设该模型不是极大的。那么，存在一个初等嵌入 $j\colon L_\alpha[A] \to L_\beta[A]$。

首先，这个嵌入必须具有一个临界点。否则，初等嵌入 j “拉伸”了由 A 给出的枚举，并引入了 ρ的一个新子集。事实上，$j(\rho) > \rho$。

因此，我们可以在 $\kappa = \mathrm{crit}\, j$ 上得到一个测度，因为 $\mathcal{P}(\kappa) \subseteq L_\alpha[A]$。 □

对于可测基数所得到的现象绝非独有。我们先定义一般方案。

定义 15。理论 T 称为可达的，当且仅当 $\mathfrak{Sp}_T$ 非空且不包含极大元。

前面的定理表明，存在一个理论 T，使得 ZFC 证明 T 是可达的，并且 $\mathfrak{Sp}_T$ 无界，或者 $\sup \mathfrak{Sp}_T$ 是第一个可测基数。

引理 16。设 $\Phi(x)$ 是一个仅对极限基数成立的性质，并且若 $V \models \Phi(\kappa)$ 且 M 是 ZFC$^-$的某个片段的传递模型，则$M \models \Phi(\kappa)$。

那么，存在一个可达理论 T_Φ，使得 $\mathfrak{Sp}_T$ 无界，或者 $\sup \mathfrak{Sp}_T = \kappa$，其中 κ 是满足 $\Phi(\kappa)$的最小基数。

证明。令 T 为相应的集合论片段成立、存在一个最大基数，且不存在使 $\Phi(\alpha)$ 成立的 α 这一陈述。□

推论 17。存在一个可达理论 T_{inacc}，使得 $\sup \mathfrak{Sp}_T$ 在存在不可达基数时是最小的不可达基数，否则无界。最小的 Mahlo 基数、大 Mahlo 基数和反射基数也同样如此。

问题 18. 是否存在一个理论 T，使得 ZFC 能证明它可达最小的弱紧基数?

4. Upwards absolute versions

现在我们转而处理 S and$\mathfrak{Sp}$, $S^*, \mathfrak{Sp}^*$ 的向上绝对版本（参见定义 2）。

引理 19. 存在一个理论 T，使得如果 $\omega_1 \notin \mathfrak{Sp}^*_T$，那么 ω_1 在 L 中是弱紧致的。

证明。令 T 为包含以下陈述的理论： A 编码一棵高度为序数的二叉树 $\mathcal{T}$，且对于每个 $\eta \in \mathcal{T}$， η 都属于 L。此外，对于每个无限序数 γ， A 编码一个从 ω 到 γ 的满射。假设不存在传递的 M，使得 $M \models T$、 $M \cap \mathrm{Ord} = \omega_1$，且 M 是泛型极大的。取一棵高度为 ω_1^V 的二叉树 S，使其所有层在 L 中的基数均为 $< \omega_1^V$，并令 A 同时编码 S 以及从 ω 到每个无限序数的满射。由于模型 $M = L_{\omega_1^V}[A]$ 满足 T，它不可能是泛型极大的。

因此，在某个泛型扩张中存在一个传递模型 N，使得 $\langle L_{\omega_1^V}, \in, S\rangle \prec N$。事实上，任何初等嵌入 $j\colon M \to N$ 都不能移动 M 中的任何序数（因为它们是可数的），所以由于 j 非平凡， $N \neq M$。通过与之前相同的论证，我们得出 $N \cap$序数 $> M \cap$序数 $= \omega_1^V$。此外， S^N 是一棵高度为 $N \cap$序数的树。存在 $\eta \in N$ 使得

η 的层级为 ω_1^V。由初等性， $S^N \restriction \omega_1^V = S$ ，特别是， η 是一个共尾分支，并且属于 L^N。由于 N 是传递的，它属于 L。

因此， ω_1^V-树在 L 中都有一条分支，所以它在 L中是弱紧致的。□

引理20. 设 κ 是弱紧致的。那么，在通过 Levy塌缩 Col$(\omega, < \kappa)$ 得到的泛型扩张中， $\kappa = \omega_1 \notin \mathfrak{Sp}^*$。

证明. 设 T 是一个理论。由于 T 是可数的，它由塌缩的某个初始段引入，因此不失一般性地假设T 属于基模型。设 M 是在泛型扩张中高度为 κ 的 T 模型。设 M 是一个名称。

设 $j : \langle V_\kappa, \in, M\rangle \to N$是一个弱紧致嵌入。那么， j可提升至通过 Col$(\omega, [\kappa, < j(\kappa)))$ 得到的进一步扩张中的泛型扩张。因此，这个进一步扩张添加了一个模型 $j(M)$，它满足 T，并且 $j \restriction M$ 见证了 M不具有泛极大性。□

注意，如果 κ 是 L中的最小弱紧基数，那么 $(\kappa^+)^L$ 属于S^*_u，特别地属于 S^*。我们可以将 T 取为如下理论： $V = L$，存在一个极大基数，并且它是唯一的弱紧基数。出于同样的 T，它也是 $\mathfrak{Sp}^*_T$的极大元。对于其他局部大基数（例如不可言说基数），类似的论证同样成立，因此有理由猜测，使所有不可数序数都避开 S^* 的一致性强度，将与某种非局部类型的大基数相关。

回顾 Schindler 给出的虚强基数定义， [11],采用虚大基数这一较新的术语， [8]。

定义21。若基数 κ 是虚强（显著的）的，则对每个$\gamma \geq \kappa$ 以及每个 $\delta \geq \kappa$，存在一个包含 V_δ 的传递模型 M ，使得在通过 Col(ω, V_γ) 进行的泛型扩张中，存在一个初等嵌入j： $V_\gamma \to M$ ，其临界点为 κ，并且 $j(\kappa) \geq \delta$。

虚强基数与 $V = L$ 相容，并且严格弱于 ω-Erd˝os 基数。

定理22。设 κ 是一个虚强基数。那么在通过 Col$(\omega, < \kappa)$ 得到的泛型扩张中，$S^* = \mathfrak{Sp}^* = \omega_1$。

证明。设 T 是泛型扩张中的一个理论名称。由力迫的链条件可知，添加该名称的力迫有一个有界初始片段，因此不失一般性，我们可以假设它来自基模型。

Let $\dot{M}$ 是一个高度为 $\alpha \geq \kappa$的 T 模型的名称。根据虚强基数的定义，在通过 Col(ω, V_α) 得到的泛型扩张中，对于某个 $N \in V$，存在一个初等嵌入 $j : V_\alpha \to N$，其临界点为κ，且 $j(\kappa) \geq \alpha + 1$。特别地， $j(\dot{M})$ 是一个 Col$(\omega, < j(\kappa))^N$-名称，表示一个高度为 $j(\alpha) > \alpha$的 T的传递模型。这表明 T 不能见证 $\alpha \in S^*$，因为力迫 Col$(\omega, [\kappa, < j(\kappa))$ 引入了一个高度为 $> \alpha$的 T的传递模型。

为了证明 $\alpha \notin \mathfrak{Sp}^*_T$，我们必须证明在泛型扩张中$j$" $M \prec j(M)$。这由 Silver 的初等嵌入提升定理 [3] 推出。事实上，对于每个 $\bar{a} \in M^{<\omega}$ 和公式 φ，如果 $p \Vdash \dot{M} \models \varphi(\bar{a})\dot{}$，那么根据初等性， $j(p) \Vdash j(M) \models \varphi(j(\bar{a}))$; 又由于 $j(p) = p$，结论成立。□

猜想 23。 $\mathfrak{Sp}^* = \omega_1$ 的一致性强度恰好是一个虚强基数。

如下述定理所示，仅仅使 S^* 平凡化所需的一致性强度相当低。

定理 24。假设序数类是 Mahlo，且全局选择公理成立。那么，存在一个不可达基数 κ，使得 Col$(\omega, < \kappa)$ 强迫 $S^* = \omega_1$。

证明。我们先从一个一般引理入手，它可视为针对我们情形的 Fodor 引理变体。正如 Gitman、Hamkins 和 Karagila 所证明的，[7], 类的 Fodor 引理一般可能失效。在我们的情形中，我们关心以下较弱的特例。

引理 25。假设序数类是 Mahlo。那么，对于每个类闭无界集C 和类函数 $F\colon\ C \cap$ Inacc $\to V$，使得 $F(\alpha) \in V_\alpha$，都存在$\delta_0 < \delta_1$ 属于 C，使得 $F(\delta_0) = F(\delta_1)$。

证明。取这样的 C 和这样的 F。令 D 为所有满足以下条件的 $\delta \in C$ 所构成的类：对于每个 $x \in V_\delta$，若存在 $\gamma \in C$ 使得 $F(\gamma) = x$，则在 δ以下存在这样的γ。取 $\delta_1 \in D$ 不可达。于是，对某个$\delta_0 < \delta_1$，有 $F(\delta_1) = x = F(\delta_0)$。□

我们反设定理的结论不成立。于是，对于每个正则的 $\kappa < \delta$，都存在一个理论的 Col$(\omega, < \kappa)$-名称 T_κ，以及一个序数 $\dot{\gamma}_\kappa$ 的 Col$(\omega, < \kappa)$-名称，使得 $\Vdash_{\mathrm{Col}(\omega,<\kappa)} \dot{\gamma}_\kappa \in S^* \setminus \omega_1$。

由 Levy塌缩的链条件，我们不妨假设 $T_\kappa \in V_\kappa$。取 $\dot{\gamma}_\kappa$ 所有可能取值的上确界，即可给序数 $\dot{\gamma}_\kappa$ 设定上界。令 C 为由满足以下条件的基数 δ 构成的闭无界类：对于每个 $\delta' < \delta$，. . . $\not\Vdash \dot{\gamma}_{\delta'} < \delta$。由引理 25，存在 $\mu < \mu'$ 属于 C，使得 $T_\mu = T_{\mu'} = T$；根据 C的构造，Col$(\omega, < \mu')$ 强迫 $\dot{\gamma}_\mu^{G\restriction\mu} < \dot{\gamma}_{\mu'}^{G}$。

通过使用一个初始段进行力迫，我们可以假设 T 属于基模型。

设 $\mu < \mu'$ 属于 S。那么，在通过 Col$(\omega, < \mu)$ 得到的泛型扩张中，存在一个高度为 γ_μ、满足 T 的传递模型 M。在进一步通过 Col$(\omega, [\mu, < \mu'))$ 得到的泛型扩张中，我们再加入一个高度为$\gamma_{\mu'} > \gamma_\mu$、满足 T 的传递模型 M'，从而与 T 见证 $\gamma_\mu \in S^*$ 的假设矛盾。□

为了证明该定理的一个部分逆命题，我们先从两个引理开始。

引理 26. 对每个实数 r, $\omega_1^{L[r]} \in S^*_u$。此外，若 $\omega_1 = \omega_1^{L[r]}$，则对每个 $\alpha \geq \omega_1$，存在一个真迫概念，它迫使 $\alpha \in S^*_u$，并添加一个理论 T，使得 $\alpha \in \mathfrak{Sp}^*_{T,\ u}$。

证明。对于第一部分，令 T 为一个编码 $A = r$ 并断言每个序数都是可数的理论。

让我们处理第二部分。首先，使用一种 σ 闭的力迫将 $|\alpha|$ 坍缩为 ω_1，并令 B 为 ω_1 上的一个关系，用于将 α 编码为一个序数。然后，令 $\mathcal{A}$ 为 $L[r]$ 中由 $L_{\omega_1}[r]$ 可定义的一个由 ω_1 个 ω 的子集构成的几乎不交族。利用几乎不交编码，令 s 为一个编码了 B、$[9]$ 的实数。

令 T 为如下理论：$A = (r, s)$成立，并且对于每个序数 β，都存在一个可数序数 γ，使得 $\mathrm{otp}\{\delta \in \omega_1 \mid (\delta, \gamma) \in B\}$ 是 β，其中序关系由 B给出。注意，这是有意义的，因为序数与 B 的初始段之间的对应关系是唯一的。□

推论 27. 如果 ω_1 在 L中不是不可达基数，那么它是 S^*_u的一个成员。

引理 28. 假设 $L_{\omega_1^V}$ 中的不可达基数集合有界。那么 $\omega_1 \in S^*_u$。此外，如果存在一个闭无界集 $C \subseteq \omega_1$，它在 $L[r]$ 中对某个 $r \subseteq \omega_1$是 Π_1-可定义的，并且避开所有不可达基数，那么$\omega_1 \in S^*_u$。

证明. 我们来证明此外部分，因为它蕴含第一部分。

不失一般性，假设对于每个 r，ω_1 在模型 $L[r]$ 中都是不可达基数。

令 C 为引理陈述中的一个闭无界集。我们来看 $M = L_{\omega_1}[r]$。M 的理论包含以下断言：C 中没有元素是不可达基数，并且 C 是一个闭无界集。令 N 为泛型扩张中的一个传递模型，它与 M初等等价，并且 $N \cap$ 序数类 $> \omega_1^V$。那么，$N = L_\delta[r]$ 对某个 δ成立。由于 C 是 Π_1-可定义的，$C^N \cap \omega_1^V = C$，尤其是$\omega_1^V \in C^N$，这就产生了矛盾。□

定义 29. 我们称 κ 为 α-不可达的，如果对于每个 $\beta < \alpha$，所有 β-不可达基数的集合在 κ 中是无界的，并且 κ 是不可达的。

显然，所有 α-不可达基数构成的集合是 Π_1-可定义的。

推论30。$\omega_1 \notin S^*$ 和 $S^* = \omega_1$ 的一致性强度以上界为序数类是 Mahlo。其下界为一个 κ-不可达的基数 κ。

5. 埃尔德什基数

在引理20中，我们看到 $\omega_1 \notin \mathfrak{Sp}^*$ 的一致性强度恰好是一个弱紧基数。本节的主要定理是，某些大基数公理可以直接推出这个结果。根据标准论证，Woodin基数的存在就足够了，因为我们可以使用Woodin的平稳塔进行强迫。将平稳塔替换为一个更弱的

理想并分析所得泛型超幂的非良基性，我们得到以下改进结果。

定理31. 假设存在一个 ω_1-Erd ˝os 基数。那么，$\omega_1 \notin \mathfrak{Sp}^*$。

更一般地，若 α 是一个不可数序数，且存在一个 α-Erd ˝os 基数，那么 $\alpha \notin \mathfrak{Sp}^*$。

证明. 推广情形的证明与特例完全相同，因此为简化记号，我们将证明 $\alpha = \omega_1$ 的情形。

令 κ 为一个 ω_1-Erd ˝os 基数。因此，几乎根据定义，这意味着集合

$$E = \{x \subseteq \kappa \mid \operatorname{otp} x = \omega_1\}$$

在 $P_{\omega_2}(\kappa)$ 中是弱平稳的；定义见 [5, 第 3] 节。令 $\mathbb{E}$ 为由 E 的所有平稳子集组成、按包含关系排序的强迫概念。强迫 $\mathbb{E}$ 产生一个泛型 V-超滤子 $\mathcal{U}$。考虑由此得到的初等嵌入 $j\colon V \to M$。

我们首先推导出这个初等嵌入的几个众所周知的性质。

引理32. $\operatorname{crit} j = \omega_1$。

证明。设 $f\colon P_{\omega_2}(\kappa) \to \alpha$，其中 $\alpha < \omega_1$。令 E' 为一个条件。由闭无界滤子的 σ-完备性，存在 $E'' \subseteq E'$，使得 $f \restriction E''$ 为常值，尤其是对某个 $\gamma < \omega_1$，有 $[f] = j(\gamma)$。□

引理33。 $j(\omega_1) = \kappa$。特别是， M 在 $j(\omega_1)$ 之前是良基。

证明。对于每个 $\alpha \leq \kappa$，令 $f_\alpha(x) =$序型$(x \cap \alpha)$。我们希望证明，对于所有 $\alpha \leq \kappa$，都有$[f_\alpha] = \alpha$

事实上，令 g 为一个满足 $[g] < [f_\kappa] = [c_{\omega_1}]$ 的函数，并令 E' 为一个迫使该结论成立的条件。定义 $h(x) = \rho_x$，使得 $\operatorname{otp}(x \cap \rho_x) = g(x)$。这是可能的，因为几乎处处都有 $g(x) < \omega_1$。函数 h 是平稳集 E' 上的回归函数，因此存在 $E'' \subseteq E'$，使得它在其上为常值。令 ρ 为 h 所取的定值。于是，$E'' \Vdash [f_\rho] = [g]$。

我们得出，低于 $j(\omega_1)$ 的每个序数都具有 $[f_\alpha]$ 的形式，其中 $\alpha < \kappa$。显然，若 $\alpha < \beta$，则 $[f_\alpha] < [f_\beta]$（因为闭无界集中的许多 x 都包含 α 作为元素），因此引理得证。□

尽管以下引理并非本论证所必需，但我们仍将其列于此处，因为它补全了泛型超幂结构的全貌。

引理 34. j”$\kappa \in M$。

证明。恒等函数 $id\colon P_{\omega_2}\kappa \to P_{\omega_2}\kappa$ 表示 j”κ：事实上，j”$\kappa \subseteq [id]$，因为每个 $\alpha < \kappa$ 都属于几乎所有的 $x \in P_{\omega_2}(\kappa)$。

另一方面，如果 $E' \Vdash [g] \in [id]$，那么 g 在 E上是回归的，因此在某个 $E'' \subseteq E'$上为常值。□

现在我们可以证明该定理了。设 $L_{\omega_1}[A]$ 是某个理论 T的模型。那么，在由 $\mathbb{E}$得到的泛型扩张中，我们可以应用初等嵌入并得到 $j \restriction L_{\omega_1}[A]$：泛型扩张中的 $L_{\omega_1}[A] \to j(L_{\omega_1}[A])$。此外，由于 $j(\omega_1)$是良基的， $j(L_{\omega_1}[A])$是传递模型，并且 $j(\omega_1) > \omega_1$，这正是所需的。□

6. Evasive ordinals

在上一节中，我们讨论了若干属于 S、 S^*、 S^*_u等类的序数实例。正如我们所展示的，使这些类尽可能小的一致性强度低于 $0^\#$。本节中，我们将讨论一种更强的避免这些类的形式。

定义 35. 设 $R \in \{S, S_u, S^*, S^*_u, \dots\}$。
若对于每个集合力迫概念 $\mathbb{P}$， α 都是 R-逃避的，

$$\Vdash_{\mathbb{P}} \check{\alpha} < \dot{\omega}_1 \vee \check{\alpha} \notin \dot{R}.$$

引理 36. 每个基数都不是 S-逃避的。

证明。对于正则基数，存在一种强迫概念可以将它们变成 $\aleph_1$。对于奇异基数，存在一种强迫概念可以将其变成 $\aleph_\omega$。□
问题37。是否存在一个 S-逃逸序数?

另一方面，显然，存在真类的伍丁基数意味着每个不可数基数对于 $R \in \{S^*, \mathfrak{Sp}^*\}$ 都是 R-逃逸的。在定理31中，我们在假设一个较弱的大基数假设的前提下，给出了类似的结果。

引理38。设 X 是一个序数集合。若 $X^\#$ 不存在，则 S^*_u-逃逸序数类与 $\mathfrak{Sp}^*_u$-逃逸序数类都有界。
证明。首先，由于 $X^\#$ 不存在，存在一个基数 μ，它在 V 中是正则的，而在 $L[X]$ 中是后继基数。事实上，在 V 中选取一个足够大的奇异基数即可。于是，它的后继在 $L[X]$ 中被正确计算。设 ν 是 μ 在 $L[X]$ 中的前驱。

令 $G \subseteq \mathrm{Col}(\omega, \nu)$ 为 V-泛型。在 $V[G]$ 中，存在一个实数 r 使得 $\mu = \omega_1^{L[r]}$。由引理 26，我们得出 $\mu \in S^*_u$，并且在 $V[G]$ 中的 $\mathfrak{Sp}^*_u$ 中；此外，每个序数 $\alpha \geq \mu$ 都属于某个额外适当力迫的泛型扩张中的那些类，只需将其坍缩为基数$\aleph_1$ 并使用几乎不交编码对其序型进行编码即可。□

定理 39。假设对于每个 α，都存在一个 α-Erd ̋os 基数。那么，每个序数都是（$\mathfrak{Sp}^* \cup S^*$）-回避的。
证明。令 α 为一个序数，并假设存在一个由强迫概念 $\mathbb{P}$ 产生的泛型扩张，在该扩张中， α 是不可数的，并且对于某个T属于 $\mathfrak{Sp}^*_T$。

在该泛型扩张中存在一个 α-Erd ̋os 基数，正如在基模型中存在一个 β- Erd ̋os 基数一样，条件是 β 大于力迫的大小$\mathbb{P}$ 且 α。现在让我们应用定理31并导出矛盾。□

本节的定理将断言“每个序数都是 $\mathfrak{Sp}^*$-规避的”的一致性强度限制在“每个集合都存在锐集”与“存在 Erd˝os 基数”之间。

问题 40. 断言“每个序数 α 都是 $\mathfrak{Sp}^*$-回避的”的一致性强度是什么?

References

[1] John T Baldwin 和 Saharon Shelah, *Hanf numbers for extendibility and related phenomena* 2022 1 28 , 《数学逻辑档案》 （） , –。[2] Jon Barwise 和 Kenneth Kunen, *Hanf numbers for fragments of $L_{\infty\omega}$*, 《以色列数学杂志》10（1971） , 306–320。MR 316210[3] James Cummings, *Iterated forcing and elementary embeddings*, 《集合论手册》。第 1, 2, 3, 2010, 775 883 2768691 卷。Springer, Dordrecht, [4] *The covering lemma for K* 第–页。MR Tony Dodd 和 Ronald Jensen, , 《数学逻辑年刊》22（1982） , 第1期, 1–30。MR 661475[5] Matthew Foreman, *Ideals and generic elementary embeddings*, 《集合论手册》。第 1, 2, 3, 2010, 885 1147 2768692 卷。Springer, Dordrecht, [6] *Large models of countable height* 第–页。MR Harvey Friedman, , 《美国数学会汇刊》201（1975） , 227–239。MR 416903[7] Victoria Gitman、Joel David Hamkins 和 Asaf Karagila, *Kelley-Morse set theory does not prove the class Fodor principle* **254** 2021 2, 133 154 , 《数学基础》 （） , 第–期。MR 4241500[8] Victoria Gitman 和 Ralf Schindler, *Virtual large cardinals*, 《纯粹与应用逻辑年刊》 **169** 2018 12, 1317 1334 3860539 （） , 第–期。MR R. B. Jensen 和 R. M. Solovay, [9] *Some applications of almost disjoint sets*, 《数理逻辑与集合论基础》（国际研讨会论文集，耶路撒冷, 1968 1970, 84 104 0289291 ） , North-Holland, 阿姆斯特丹, [10] *Omitting classes of elements* 第–页。MR Michael Morley, 《模型理论》（1963年伯克利国际研讨会论文集） , North-Holland, 阿姆斯特丹, 1965, 265 273 0201305 第–页。 [11] *Proper forcing and remarkable cardinals* MR Ralf-Dieter Schindler, 《符号逻辑通报》6（2000） , 第2期, 176–184。MR 1765054[12] Dima Sinapova 和 Ioannis Souldatos, *Kurepa trees and spectra of $\mathcal{L}_{\omega_1,\,\omega}$-sentences*, 《数学逻辑档案》59（2020） , 第7–8期, 939–956。

Institute of Mathematics, The Hebrew University of Jerusalem, Jerusalem91904, Israel*Email address*: eilonbil@mail.tau.ac.il

Einstein Institute of Mathematics, The Hebrew University of Jerusalem, Jerusalem 91904, Israel*Email address*: yair.hayut@mail.huji.ac.il