arXiv:2305.04246v1 [math.DS] 7 May 2023

低维广义T, T^{-1}变换的极限定理

D. DOLGOPYAT[1], C. DONG[2], A. KANIGOWSKI[1,4], P. N ´ANDORI[3].

Abstract. 我们研究广义（T, T^{-1}）变换，其中基映射满足多重混合局部极限定理和反集中大偏差界，而纤维中具有 $\mathbb{R}^d$ 作用，其阶数为 $d = 1$ 或 2，并且各阶均为指数混合。若扭曲余圈的漂移为零，我们证明遍历和满足与 Kesten 和 Spitzer（1979）及 Bolthausen（1989）研究的随机环境中的随机游走相同的极限定理。证明依赖于纤维作用的淬火中心极限定理以及对淬火方差的控制。本文补充了我们此前的工作；在该工作中，我们对一大类广义（T, T^{-1}）变换证明了经典中心极限定理。

1. Introduction

本工作延续了我们对广义 T, T^{-1} 变换的研究，接续此前的工作 [11, 12, 13]。本文的主要创新在于给出了若干低维情形下的极限定理，作为对文献 [12]中高维情形的补充。

1.1. 结果。设 f 是流形 X 上的一个光滑映射，保持测度 μ，且G_t 是流形 Y 上的一个 $\mathbb{R}^d$ 作用，保持测度 ν.

定义 1.1. 若存在 $\alpha > 0$，使得对每个 r，都存在常数 $C, c > 0$，并且对所有零均值的 C^α 函数$A_1, \dots, A_r$以及所有 $t_1, \dots t_r \in \mathbb{R}^d$， G_t 都具有各阶多重指数混合性质

$$\left|\nu\left(\prod_{j=1}^{r} A(G_{t_j} y)\right)\right| \le C\left[\prod_{j=1}^{r} \|A\|_{C^\alpha}\right] e^{-c\mathfrak{l}} \tag{1.1}$$

其中 $\mathfrak{l}$是间隔 $\mathfrak{l} = \max_{i \neq j} \|t_i - t_j\|$.

注 1.2. 简单的插值论证表明，如果 (1.1) 对某个 α 成立，那么它也对所有 α 成立（例如参见 [14,附录 A]）。

日期：2023年5月9日[1]美国马里兰州大学公园市，马里兰大学帕克分校[2]中国天津，南开大学陈省身数学研究所与 LPMC[3]美国纽约州纽约市，叶史瓦大学[4]波兰克拉科夫，雅盖隆大学。2020数学主题分类。主要分类：60F05。次要分类：37D30，60J55，60K35。关键词与短语。(T, T^{-1})变换；Kesten–Spitzer过程；淬火与退火极限定理；局部时。

在 $d=1$的情况下，多重指数混合系统的例子有很多，例如参见 [11]中的讨论。在 $d=2$ 的情况下，我们的主要例子如下：$Y=SL_3(\mathbb{R})/\Gamma$，其中 Γ 是一个余紧格， $G_t:\ Y\to Y$ 是作用在Y上的 Cartan作用，而 ν 是 Haar测度。更一般地，可以考虑 Cartan作用在 $\mathcal{G}/\Gamma$ 上的子作用，其中 $\mathcal{G}$ 是一个带有紧因子的半单李群， Γ 是一个余紧格。特别地，我们可以取 $Y=SL_d(\mathbb{R})/\Gamma$，并令 G_t 为对角矩阵群的一个二维子群的作用。

设 $\tau:\ X\to\mathbb{R}^d$ 是一个光滑映射。我们研究由下式给出的映射 $F:\ (X\times Y)\to(X\times Y)$

$$F(x,y)=(f(x),G_{\tau(x)}y). \tag{1.2}$$

注意， F 保持测度 $\zeta=\mu\times\nu$，并且

$$F^N(x,y)=(f^Nx,G_{\tau_N(x)}y)\quad\text{where}\quad\tau_N(x)=\sum_{n=0}^{N-1}\tau(f^nx).$$

设 $H:\ X\times Y\to\mathbb{R}$ 是一个足够光滑的函数，满足 $\zeta(H)=0$，且

$$S_N=\sum_{n=0}^{N-1}H(F^n(x,y)).$$

我们希望研究当初始条件 (x,y) 按照 $\zeta.$ 分布时， S_N 的分布

我们假设 f 是遍历的，并且对 H¨older 函数满足中心极限定理。

定义 1.3. 若对于任意满足 $\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$ 的序列 $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}$，以及满足 $|\frac{z_n}{\sqrt{n}}-z|<\delta_n$的序列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^d$，对任意立方体 $\mathcal{C}\subset\mathbb{R}^d$ 和任意连续函数 A_0、 A_1，均有： $X\to\mathbb{R}$，则称 τ 满足混合局部极限定理（MLLT）。

$$\lim_{n\to\infty}n^{d/2}\mu\Big(A_0(\cdot)A_1(f^n\cdot)_{\mathbb{I}\mathcal{C}}(\tau_n-z_n)\Big)=\mathfrak{g}(z)\mu(A_0)\mu(A_1)\mathrm{Vol}(\mathcal{C})$$

其中， $\mathfrak{g}(z)$ 是非退化高斯密度；一旦固定 $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$，且 A_0、 A_1、 z 取遍 $C(X)$ $C(X)$ 和 $\mathbb{R}^d$的紧子集，该收敛即为一致收敛。

定义 1.4. 若对于每个$m\in\mathbb{N}$，对任意满足 $\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$ 的序列 $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}$，以及任意满足 $|\frac{z_n^{(j)}}{\sqrt{n}}-z^{(j)}|<\delta_n$ 的序列族 $(z_n^{(1)},\dots,z_n^{(m)})_{n\in\mathbb{N}}$，对任意立方体 $\{\mathcal{C}_j\}_{j\le m}\subset\mathbb{R}^d$ 和任意连续函数 $A_0,A_1,\dots A_m:\ X\to\mathbb{R}$；对任意满足 $n_{j+1}-n_j\to\infty$ （其中 $n_0=0$）的序列 $n_1\dots n_m\in\mathbb{N}$，则称 τ 满足多重混合局部极限定理（MMLLT）。

$$\lim_{\min|n_j-n_{j'}|\to\infty}\left(\prod_{j=1}^m(n_j-n_{j-1})^{d/2}\right)\mu\left(\prod_{j=0}^mA_j(f^{n_j}\cdot)\prod_{j=1}^m{}_{\mathbb{I}}\mathcal{C}_j\left(\tau_{n_j}-z_{n_j}^{(j)}\right)\right)$$
$$=\prod_{j=0}^m\mu(A_j)\prod_{j=1}^m\mathfrak{g}\left(z^{(j)}-z^{(j-1)}\right)\prod_{j=1}^m\mathrm{Vol}(\mathcal{C}_j),$$

其中 $z^{(0)} = 0.$。此外，一旦固定 $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$，对于每个 $j \le m$，当 $A_0, A_1, \dots, A_m$ 在 $C(X)$ 的紧子集内取值，且 $z^{(j)}$ 在 $\mathbb{R}^d$ 的某个紧子集内取值时，该收敛是一致的。

定义 1.5. τ 满足阶数为 s的反集中大偏差界，即存在常数 K 和一个递减函数 Θ，使得 $\int_1^\infty \Theta(r) r^d \mathrm{d}r < \infty$，且对任意数值 $n_1, n_2, \dots, n_s$，以及以 $c_1, c_2, \dots, c_s$为中心的任意单位立方体 $C_1, C_2, \dots, C_s$

$$\mu\left(x : \tau_{n_j} \in C_j \text{ for } j = 1, \dots, s\right) \le K\left(\prod_{j=1}^{s} (n_j - n_{j-1})^{-d/2}\right) \Theta\left(\max_j \frac{\|c_j - c_{j-1}\|}{\sqrt{n_j - n_{j-1}}}\right). \tag{1.3}$$

满足 MMLLT 和大偏差反集中界的映射类，尤其包括那些存在具有指数尾的 Young 塔的映射，参见 [21, 19]。

定理 1.6. 假设 $d = 2$, G_t 具有各阶多重指数混合性质， f 对光滑观测量满足中心极限定理，且 τ 满足 MMLLT 和反集中大偏差界。那么存在 Σ^2，使得 $\frac{S_N}{\sqrt{N \ln N}}$ 在 $N \to \infty$ 时收敛于零均值、方差为 Σ^2.的正态分布

定理 1.7. 假设 $d = 1$, G_t 满足各阶多重指数混合， f 对光滑观测量满足中心极限定理，且 τ 满足 MMLLT 和反集中大偏差界。那么存在一个常数 Σ 使得

$$\frac{S_N}{N^{3/4}} \quad \text{converges as } N \to \infty \text{ to a product} \quad \Sigma \mathcal{L} \mathcal{N}, \tag{1.4}$$

其中 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{N}$ 相互独立， $\mathcal{N}$ 服从标准正态分布，并且

$$\mathcal{L} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \ell_x^2 \mathrm{d}x} \tag{1.5}$$

其中 ℓ_x 是标准布朗运动在时刻 1、空间位置 x.处的局部时

注 1.8. 若 $d = 1$，则指数混合条件可弱化为足够快的多项式混合，参见第 5 节中的定理 5.1。要弱化二维情形下的混合假设似乎更加困难。我们不讨论这一问题，因为我们不知道存在以快速多项式（而非指数）速度混合的光滑 $\mathbb{R}^2$ 作用的例子。

注 1.9。定理 1.6 和 1.7 中的渐近方差 Σ^2 具有类似的形式（见 (3.10) 和 (4.5)）。具体而言，令 $\tilde{H}(y) = \int_X H(x, y) d\mu(x)$。那么

$$\Sigma^2 = c_d \int_{\mathbb{R}^d} \int_Y \tilde{H}(y) \tilde{H}(G_t y) d\nu(y) dt.$$

在维数 1 的情形下，若 $\Sigma^2 = 0$，则存在一个 L^2 函数 $J(y)$，使得

$$\int_0^t \tilde{H}(G_s y)ds = J(G_t y) - J(y).$$

这已由 Rudolph 在离散情形下证明，[20]（命题 2 和引理 7），但该证明同样适用于连续情形，无需任何改动。

[12, 定理 6.4] 表明，对于 $\mathbb{R}^1$ 保体积的指数混合流，二次型 $H \mapsto \Sigma^2(H)$ 不恒为零。因此，渐近方差为零的函数集合是一个真线性子空间。[12] 中定理 6.4 的证明对于更高维的（不一定保体积的作用）也成立，前提是

(i) 存在常数 $K_1, \beta_1, K_2, \beta_2$，使得对所有 y 和 r，$K_1 r^{\beta_1} \leq \nu(B(y,r)) \leq K_2 r^{\beta_2}$，并且

(ii) 存在一个缓慢回归点，也就是说，存在一点 $y \in Y$，使得对于所有正常数 K 和 A，都存在 $r_0(K, A)$，从而对于所有 $r < r_0$，以及所有满足 $|t| < K$ 的 t，都有 $\nu(B(y,r)G_{-t}B(y,r)) \leq \nu(B(y,r))|\ln r|^A$，其中 $B(y,r)$ 是以 y 为中心、半径为 r 的球。（我们注意到，对于指数混合的保体积 $\mathbb{R}$ 作用，几乎所有点都是缓慢回归点，见 [14]。）

我们认为，在许多情况下，渐近方差趋于零意味着 H 的遍历和满足经典中心极限定理，但这将是未来研究的课题。

注 1.10. 当 G 是 $\mathbb{Z}^d$ ($d = 1,2$) 的作用，且 $\tau : X \to \mathbb{Z}^d$ 是满足适当假设（例如中心极限定理、MMLLT 和反集中大偏差界）的分段光滑映射时，也可以证明与上述定理类似的结果。由于结果和证明几乎完全相同，我们省略离散作用的情形。也可以取 X 为有限型子移位，参见下文的讨论。

1.2. 讨论。这里我们讨论与定理 1.6、1.7 相关的先前结果。

关于 T、T^{-1} 变换的最初研究结果涉及所谓的随机环境中的随机游走。在这一模型中，我们给定一个由 $\{\xi_z\}_{z\in\mathbb{Z}^d}$ 独立同分布随机变量构成的序列。设 τ_n 是定义在 $\mathbb{Z}^d$ 上、且独立于 ξs 的简单随机游走。我们关注的是 N 在 $S_N = \sum \xi_{\tau_n}$. 中的情形。该模型可以按照以下方式纳入当前的框架。设 $X_{n=1}$ 是由序列 $\{v_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 构成的集合，其中 $v_n \in \{\pm e_1, \pm e_2, \cdots \pm e_d\}$，这里 e_j 是 $\mathbb{Z}^d$ 中的基向量，μ 是伯努利测度，满足对于所有 $j \in 1$，.....，d，$\mathbb{P}(v = \pm e_j) = \frac{1}{2d}$，$Y$ 是由序列 $\{\xi_z\}_{z\in\mathbb{Z}^d}$ 构成的空间，ν 是 ξ 的分布函数的乘积，f 和 G_t 是移位，且 $\tau(\{v\}) = v_0$. 。对于随机环境中的随机游走，定理 1.7 归功于 [15], ，而定理 1.6 归功于 [4]。[15] 和 [4] 的结果在 [7, 8] 中被推广到纤维上的更一般作用（仍假设基空间中的随机游走）。

在动力系统的背景下，定理 1.7 已在 [17] 中得到证明，其前提是我们在中心极限定理中具有良好的收敛速率，适用于

f。本文采用 [4] 的方法，该方法似乎更加灵活，并允许使用更广泛的基系统。

我们还指出，如果 $d \geq 3$ 或 τ 存在漂移，则有经典中心极限定理（即 $S_N - \mathbb{E}(S_N)$)$\sqrt{N}$ 收敛于高斯分布）。这些结果在 [11, 12]中得到证明。论文 [11] 还研究了由 (1.2) 定义的 (T, T^{-1}) 变换的混合性质。特别是， [11] 表明，在许多情况下，整个乘积 F 的混合是指数的。我们注意到，如果 F 具有多重指数混合性质，则可以应用 [3]的结果得到经典中心极限定理。Bj¨orklund 和 Gorodnik 的中心极限定理 [3] 在我们的证明中也起着关键作用，我们将在第 2 节回顾该定理。

当基映射 f 是一致双曲时，斜积映射 F 是部分双曲的。一般的部分双曲映射可能具有强统计性质，包括多重指数混合和中心极限定理。然而，这样的结果目前似乎仍遥不可及（ [1, 6]考察了一些特殊情形）。在当前的 (T, T^{-1}) 情形中，诸如定理 1.7 和定理 1.6 这样的奇异极限定理要求满足零漂移假设，而这是一个余维 d条件。

2. Björklund - Gorodnik CLT

为了证明我们的结果，我们采用 [4] 的策略：用 [3] 提出的指数混合系统的中心极限定理，替代针对独立同分布随机变量的 Feller-Lindeberg 中心极限定理。更确切地说，我们需要以下事实。

命题 2.1. 设 $\mathfrak{m}_N, N \in \mathbb{N}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的测度序列，且 $\{A_{t,N}\}_{t\in\mathbb{R}^d, N\in\mathbb{N}}$ 是 Y 上的一族实值函数，使得 $\|A_{t,N}\|_{C^1(Y)}$ 一致有界，且$\nu(A_{t,N}) \equiv 0$。令 $\mathcal{S}_N := \int_{\mathbb{R}^d} A_{t,N}(G_t y)\mathrm{d}\mathfrak{m}_N(t)$。假设

(a) $\lim_{N\to\infty} \|\mathfrak{m}_N\| = \infty$，其中 $\|\mathfrak{m}\| = \mathfrak{m}($ $\mathbb{R}^d)$。(b) 对每个 $r \in \mathbb{N}$， $r \geq 3$ 对每个 K

$$\int \mathfrak{m}_N^{r-1}[B(t, K \ln \|\mathfrak{m}_N\|)]\mathrm{d}\mathfrak{m}_N(t) = 0,$$

其中 $B(t, R) \subset \mathbb{R}^d$ 是以 $t \in \mathbb{R}^d$ 为中心、半径为 R 的球。
(c) $\lim_{N\to\infty} V_N = \sigma^2$ 其中

$$V_N := \int \mathcal{S}_N^2(y)\mathrm{d}\nu(y) = \iiint A_{t_1,N}(G_{t_1}y)A_{t_2,N}(G_{t_2}y)\mathrm{d}\mathfrak{m}_N(t_1)\mathrm{d}\mathfrak{m}_N(t_2)\mathrm{d}\nu(y).$$

那么，当 $N \to \infty$、 $\mathcal{S}_N$ 弱收敛于均值为零、方差为 σ^2. 的正态分布时。

该命题在 [3] 中证明，其中 $A_{t,\ T}$ 不依赖于 t 和 T；不过，证明很容易推广到 t, T-依赖的 A情形，见 [13]。

3. Dimension two

3.1. 化归为淬火中心极限定理。这里我们证明定理 1.6。

考虑一个函数 $\tilde{H}$ 满足

$$\int \tilde{H}(x,y)\mathrm{d}\nu(y) = 0 \tag{3.1}$$

对所有 $x \in X$.

给定 $x \in X$，定义 $\mathbb{R}^2$ 上的测度 $\mathfrak{m}_N$，如下:

$$\mathfrak{m}_N(x) = \frac{1}{\sqrt{N \ln N}} \sum_{n=0}^{N-1} \delta_{\tau_n(x)} \tag{3.2}$$

以及函数 $A_{t,N,x}(y)$ 由

$$A_{t,N,x}(y) = \frac{1}{\mathrm{Card}(n \le N : \tau_n(x) = t)} \sum_{n \le N : \tau_n(x) = t} \tilde{H}(f^n x, y). \tag{3.3}$$

命题 3.1。在定理 1.6 的假设下，存在 σ^2 和子集$X_N \subset X$，使得 $\lim_{N\to\infty} \mu(X_N) = 1$，且对于任意序列 $x_N \in X_N$，测度$\{\mathfrak{m}_N(x_N)\}$ 满足命题 2.1 的条件。

该命题将在后文证明。现在我们将说明如何利用该命题得到定理 1.6。

假设命题 3.1 成立，证明定理 1.6。分割

$$H(x,y) = \tilde{H}(x,y) + \bar{H}(x) \quad \text{where} \quad \bar{H}(x) = \int H(x,y)\mathrm{d}\nu(y). \tag{3.4}$$

记作

$$\mathcal{S}_N(x,y) = \frac{1}{\sqrt{N \ln N}} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{H}(F^n(x,y)).$$

注意，H 满足 (3.1)，因此根据命题 3.1，$\mathcal{S}_N(x,y)$ 渐近服从正态分布，并且与 x 渐近独立。最后，H 的贡献可以忽略。事实上，光滑观测量的中心极限定理给出 $\frac{1}{\sqrt{N \ln N}} \sum_{n=0}^{N-1} \bar{H}(f^n(x)) \Rightarrow 0$.这就完成了定理的证明（命题 3.1 除外）。

□

本节剩余部分将用于证明命题 3.1。只需验证命题 2.1 的条件。

性质 (a) 显然，因为 $\|\mathfrak{m}_N(x)\| = \sqrt{N/\ln N}$.

验证性质 (b) 和 (c) 需要更长的计算，这些计算见 §3.2 和 §3.3。

3.2. 性质（b）。设

$$X_{K,N} = \left\{x : \mathrm{Card}(n : |n| < N \text{ and } \|\tau_n(x)\| \leq K \ln N) \geq N^{1/5}\right\}. \tag{3.5}$$

ˆ 引理 3.2. 若对每个 K，$\lim_{N\to\infty} N\mu(X_{K,N}) = 0$，则存在集合 X_N，使得对所有 ˆˆ $x_N \in X_N$，测度 $\mathfrak{m}_N(x_N)$ 满足性质（b），且 $\mu(X_N) \to 1$

ˆ 证明. 给定 K，令 $X_N = \{x : f^n x \notin X_{K,N}$，对 $n < N\}$.。根据引理的假设，ˆˆ $\mu(X_N) \to 1$.。另一方面，对 $x \in X_N$，

$$\int \mathfrak{m}_N^{r-1}(x)[B(t, K\ln N)]\mathrm{d}\mathfrak{m}_N(x) = \frac{1}{(N\ln N)^{r/2}} \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{Card}^{r-1}(j < N : \ \|\tau_j - \tau_n\| \leq K\ln N)$$

$$\leq N^{-\frac{r}{2}+1+\frac{r-1}{5}} \leq N^{-1/10},$$

ˆ 其中，第一个不等式成立是因为 $x \in X_N$，第二个不等式成立是因为 $r \geq 3$。由于 K 是任意的，结论得证。□

Let

$$\ell(x, t, N) = \mathrm{Card}(n \leq N : |\tau_n(x) - t| \leq 1). \tag{3.6}$$

引理 3.3. 对每个 p，存在一个常数 C_p，使得对每个 $t \in \mathbb{R}^d$ 和 $N \in \mathbb{N}$,

$$\mu\left(\ell^p(\cdot, t, N)\right) \leq C_p \ln^p N. \tag{3.7}$$

证明。由于 $\ell(x, t, N) = \sum_{n<N} \mathbb{I}^{B(t,\ 1)}(\tau_n(x))$，我们有

$$\mu\left(\ell^p(\cdot, t, n)\right) = \sum_{n_1,\ldots n_p} \mu\left(x : |\tau_{n_j}(x) - t| \leq 1 \text{ for } j = 1, \ldots p\right)$$

$$\leq \sum_{n_1,\ldots n_p} K_p \frac{1}{n_1} \prod_{j=2}^{p} \left(\frac{1}{n_j - n_{j-1} + 1}\right),$$

其中最后一步使用了反集中大偏差界。 □

由引理 3.3 和马尔可夫不等式可知，对每个 ε, t, p，我们有

$$\mu\left(x : \ell(x, t, N) \geq \frac{N^{1/5}}{(K\ln N)^2}\right) \leq \frac{C_p (K\ln N)^{2p}}{N^{p/5}}$$

当 N 足够大时。由此可得

$$\mu\left(x : \exists t : \|t\| \leq K\ln N \text{ and } \ell(x, t, N) \geq \frac{N^{1/5}}{(K\ln N)^2}\right) \leq \frac{C_p (K\ln N)^{2p+2}}{N^{p/5}}.$$

取 $p = 6$，我们验证引理 3.2 的条件。

3.3. 性质（c）。 [11] 中的定理 4.7 表明,

$$\int \tilde{H}(x,y)\tilde{H}(F^k(x,y))\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\nu(y) = \frac{\mathfrak{g}(0)}{k}\varsigma_2^2 + o\left(\frac{1}{k}\right), \tag{3.8}$$

其中

$$\varsigma_2^2 = \iiint_{-\infty}^{\infty} \int \tilde{H}(x_1,y)\tilde{H}(x_2,G_t(y))\mathrm{d}\nu(y)\mathrm{d}t\mathrm{d}\mu(x_1)\mathrm{d}\mu(x_2) \tag{3.9}$$

且 $\mathfrak{g}$ 是 τ 的极限高斯密度（也就是说， $\tau_N/\sqrt{N}$ 当 $N\to\infty$ 时收敛到密度为 $\mathfrak{g}$ 的正态分布）。我们注意到，积分 (3.9) 由 G 的指数混合性和 (3.1) 收敛。此外, $\varsigma_2^2 \geq 0$，这可由以下公式得出（其证明是标准的，故略去）

$$\varsigma_2^2 = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\left[\int\int_0^T \tilde{H}(x,G_t(y))\mathrm{d}t\mathrm{d}\mu\right]^2\mathrm{d}\nu.$$

定义

$$V_N = \frac{1}{N\ln N}\int\left[\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{H}(F^n(x,y))\right]^2\mathrm{d}\nu(y)\,,$$

我们计算

$$\begin{aligned} V_N &= \frac{1}{N\ln N}\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1}\int \tilde{H}(F^{n_1}(x,y))\tilde{H}(F^{n_2}(x,y))\mathrm{d}\nu(y) \\ &= \frac{1}{N\ln N}\sum_{k=0}^{N-1}(N-k)(1+\mathbb{I}^{k\neq 0})\int \tilde{H}(x,y)\tilde{H}(F^k(x,y))\mathrm{d}\nu(y)\,, \end{aligned}$$

因此，由（3.8）式可得

$$\Sigma^2 := \lim_{N\to\infty}\mu\left(V_N(x)\right) = 2\mathfrak{g}(0)\iiint \tilde{H}(x,y)\tilde{H}(\bar{x},G_t y)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(\bar{x})\mathrm{d}\nu(y)\mathrm{d}t. \tag{3.10}$$

By 切比雪夫不等式，要证明性质（c），只需证明

$$\lim_{N\to\infty}\mu(V_N^2) = \Sigma^4. \tag{3.11}$$

注意,

$$\mu(V_N^2) = \frac{1}{N^2\ln^2 N}\sum_{n_1,n_2,n_3,n_4}\mu(\sigma_{n_1,n_2}\sigma_{n_3,n_4}),$$

其中

$$\sigma_{n_1,n_2}(x) = \int H(f^{n_1}x, G_{\tau_{n_1}x}y)H(f^{n_2}x, G_{\tau_{n_2}(x)}y)\mathrm{d}\nu(y).$$

固定一个较大的 L，令 $\mathbf{k} = \mathbf{k}(n_1,n_2,n_3,n_4)$ 表示满足以下条件的指标 j 的数量：对所有 $i\neq j.$， $|n_i - n_j| \geq L$。$\mathbf{k}\leq 1$ 的项数为 $O(L^2N^2)$。利用平凡上界$|\mu(\sigma_{n_1,\ n_2}\sigma_{n_3,\ n_4})| \leq \|\tilde{H}\|_\infty^2$，可知 $\mathbf{k}\leq 1$ 的项所作的贡献为 $O(N^2L^2)$，这是可忽略的。

接下来，我们考虑 $\mathbf{k}=4$ 的项所作的贡献。不失一般性，我们假设

$$n_1 < n_2, \quad n_3 < n_4, \quad n_1 < n_3. \tag{3.12}$$

我们区分 3 种情形，具体取决于 n_2 相对于 n_3 和 n_4. 的相对位置

情形 1。我们断言，对于每个 $\varepsilon>0$，存在 L，使得如果

$$n_1 < n_1+L \le n_2 < n_2+L \le n_3 < n_3+L \le n_4, \tag{3.13}$$

then

$$\left|\mu\left(\sigma_{n_1,n_2}\sigma_{n_3,n_4}\right) - \frac{\Sigma^4}{4|n_2-n_1||n_4-n_3|}\right| \le \frac{\varepsilon}{|n_2-n_1||n_4-n_3|}. \tag{3.14}$$

(3.14) 的证明基于 [11]。首先，根据 [11, 引理 3.3], ，我们可以假设 $H(x,y)=A(x)B(y)$，并且不失一般性地假设 $\nu(B)=0$。于是我们有

$$\mu\left(\sigma_{n_1,n_2}\sigma_{n_3,n_4}\right) = \int \left[\prod_{i=1}^{4} A(f^{n_i}x)\right] \rho(\tau_{n_2-n_1}(f^{n_1}x))\rho(\tau_{n_3-n_4}(f^{n_4}x))\mathrm{d}\mu(x),$$

其中 $\rho(t)=\int B(y)B(G_t y)\mathrm{d}\nu(y)$。注意，对于上述的 $\tilde{H}$，(3.11) 可简化为

$$\Sigma^2 = 2\mathfrak{g}(0)\mu(A)^2\int \rho(t)\mathrm{d}t. \tag{3.15}$$

(3.14) 的证明其余部分大致沿用 [11, 定理 4.6、4.7] 的思路，因此我们只给出一个概略。将 $\mathbb{R}^2$ 分解为一个由小正方形 $\mathcal{C}_i$ 构成的可数不交族。设 z_i 为正方形 $\mathcal{C}_i$ 的中心。那么

$$\mu\left(\sigma_{n_1,n_2}\sigma_{n_3,n_4}\right) \approx \sum_{i,j} S_{i,j},$$

其中

$$S_{i,j} = \rho(z_i)\rho(z_j)\int \prod_{k=1}^{4} A(f^{n_k}x)_{\mathbb{I}^{\mathcal{C}_i}}(\tau_{n_2-n_1}(f^{n_1}x))_{\mathbb{I}^{\mathcal{C}_j}}(\tau_{n_3-n_4}(f^{n_4}x))\mathrm{d}\mu(x).$$

固定 i,j，令 $L\to\infty$，并利用 MMLLT 和 (3.13)，我们得到

$$S_{i,j} \approx \frac{1}{|n_2-n_1|}\frac{1}{|n_4-n_3|}\int_{\mathcal{C}_i}\rho(t)\mathrm{d}t\int_{\mathcal{C}_j}\rho(t)\mathrm{d}t\mathfrak{g}(0)^2[\mu(A)]^4.$$

对 i、j 求和，并利用 (3.15)，即可得到 (3.14)。

情形 2。我们声称

$$\sum_{(n_1,\ldots,n_4):n_1<n_3<n_4<n_2} \mu\left(\sigma_{n_1,n_2}\sigma_{n_3,n_4}\right) \le CN^2\ln N. \tag{3.16}$$

为证明 (3.16)，取 $(\{n_1\},\ldots,n_4)$ 如 (3.16) 所示，并写作

$$m_0=0, \quad m_1=n_3-n_1, \quad m_2=n_4-n_1, \quad m_3=n_2-n_1.$$

于是有

$$\mu\left(\sigma_{n_1,n_2}\sigma_{n_3,n_4}\right)=\int\left[\prod_{i=0}^{3}A(f^{m_i}(x))\right]\rho(\tau_{m_3}(x))\rho(\tau_{m_2-m_1}(f^{m_1}x))\mathrm{d}\mu(x).$$

将 $\mathbb{R}^2$ 分解为以 z_i为中心的单位方块 $\mathcal{C}_i$ 。于是我们得到

$$\left|\mu\left(\sigma_{n_1,n_2}\sigma_{n_3,n_4}\right)\right|\leq C\sum_{i_1,i_2,i_3}\tilde{\rho}(z_{i_3})\tilde{\rho}(z_{i_2}-z_{i_1})\int\prod_{j=1}^{3}{}_{\mathbb{I}^{\tau_{m_j}\in\mathcal{C}_{i_j}}}\mathrm{d}\mu(x),$$

其中 $\tilde{\rho}(t)=\sup|\rho(t)|$. 应用 (1.3)，我们得到$_{t':\ \|t'-t\|\leq 1}$

$$\begin{aligned}(3.17)\qquad\left|\mu\left(\sigma_{n_1,n_2}\sigma_{n_3,n_4}\right)\right|\leq&C\sum_{i_1,i_2,i_3}\frac{\tilde{\rho}(z_{i_3})\tilde{\rho}(z_{i_2}-z_{i_1})}{m_1(m_2-m_1)(m_3-m_2)}\Theta\left(\max_{1\leq j\leq 3}\frac{\|z_{i_j}-z_{i_{j-1}}\|}{\sqrt{m_j-m_{j-1}}}\right)\\=:&\sum_{i_1,i_2,i_3}\mathcal{S}_{i_1,i_2,i_3}(m_1,m_2,m_3).\end{aligned}$$

考虑 $i_2=i_1$ 和 $z_{i_3}=0$ 的特殊情形（不失一般性，我们设此时 $i_3=0$）。于是有

$$(3.18)\qquad\sum_{i_1}\mathcal{S}_{i_1,i_1,0}(m_1,m_2,m_3)\leq$$

$$C\sum_{i_1}\frac{1}{m_1}\frac{1}{m_2-m_1}\frac{1}{m_3-m_2}\Theta\left(\frac{\|z_{i_1}\|}{\min\{\sqrt{m_1},\sqrt{m_3-m_2}\}}\right).$$

注意，最后一个表达式关于 $m_1=n_3-n_1$和 $m_3-m_2=n_2-n_4$是对称的。因此，不失一般性，我们可以假设 $n_3-n_1\leq n_2-n_4$（事实上，乘数 2 可以并入常数 C）。记 $a=n_3-n_1$、 $b=n_4-n_3$、 $c=n_2-n_4$，得到

$$\sum_{(n_1,\ldots,n_4):n_1<n_3<n_4<n_2<N}\sum_{i_1}\mathcal{S}_{i_1,i_1,0}(m_1,m_2,m_3)\leq CN\sum_{i}\sum_{a=1}^{N}\sum_{b=1}^{N}\sum_{c=a}^{N}\frac{1}{abc}\Theta\left(\frac{\|z_i\|}{\sqrt{a}}\right).$$

请注意，乘数 N 涵盖了 n_1 的所有选择。因此

$$\sum_{(n_1,\ldots,n_4):n_1<n_3<n_4<n_2<N}\sum_{i_1}\mathcal{S}_{i_1,i_1,0}(m_1,m_2,m_3)\leq CN\ln N\sum_{i}\sum_{a=1}^{N}\sum_{c=a}^{N}\frac{1}{ac}\Theta\left(\frac{\|z_i\|}{\sqrt{a}}\right)$$

$$\leq CN\ln N\int_{\mathbb{R}^2}\int_{1}^{N}\int_{a}^{N}\frac{1}{ac}\Theta\left(\frac{\|z\|}{\sqrt{a}}\right)\mathrm{d}c\mathrm{d}a\mathrm{d}z\leq CN\ln N\int_{1}^{N}\int_{a}^{N}\frac{1}{c}\mathrm{d}c\mathrm{d}a\leq CN^2\ln N$$

其中，在第三个不等式中我们用到了 $\int_1^\infty\Theta(r)rdr<\infty$，最后一个不等式则由直接积分得出。因此，我们已验证与$i_1=i_2$和 $i_3=0$对应的项属于 $O(N^2\ln\ N)$。

为完成 (3.16) 的证明，我们需要估计对应于所有 i_2 和 i_3的总和的贡献。为此，我们将根据以下假设是否成立来区分两种情况：

$$\|z_{i_2} - z_{i_1}\| < \frac{1}{4}\|z_{i_1}\|, \text{ and } \|z_{i_3} - z_{i_2}\| < \frac{1}{4}\|z_{i_1}\|. \tag{3.19}$$

对于任意给定的固定 i_1，令 $\sum_{i_2,i_3}$ 表示对不满足(3.19)的 i_2, i_3 求和，并令 $\sum_{i_2,i_3}$ 表示对满足 (3.19) 的 i_2, i_3 求和。

首先，我们假设（3.19）不成立。那么，我们有

$$\sum_{i_1}\widehat{\sum_{i_2,i_3}}\mathcal{S}_{i_1,i_2,i_3}(m_1,m_2,m_3) \le C\sum_{i_1}\widehat{\sum_{i_2,i_3}}\tilde{\rho}(z_{i_2}-z_{i_1})\tilde{\rho}(z_{i_3})\frac{1}{m_1}\frac{1}{m_2-m_1}\frac{1}{m_3-m_2}$$
$$\times\left[\Theta\left(\frac{\|z_{i_1}\|}{4\min\{\sqrt{m_1},\sqrt{m_2-m_1}\}}\right)+\Theta\left(\frac{\|z_{i_1}\|}{4\min\{\sqrt{m_1},\sqrt{m_3-m_2}\}}\right)\right].$$

现在我们可以先对 i_2、i_3 求和。记 $a = m_1$、$b = m_2 - m_1$、$c = m_3 - m_2$。由 $\tilde{\rho}$ 的指数衰减，我们得到

$$\sum_{i_1}\widehat{\sum_{i_2,i_3}}\mathcal{S}_{i_1,i_2,i_3}(m_1,m_2,m_3) \le C\sum_{i_1}\frac{1}{abc}\left[\Theta\left(\frac{\|z_{i_1}\|}{4\min\{\sqrt{a},\sqrt{b}\}}\right)+\Theta\left(\frac{\|z_{i_1}\|}{4\min\{\sqrt{a},\sqrt{c}\}}\right)\right].$$

将最后显示的公式分别对 n_1、n_2、n_3 和 n_4 求和，得到一项 $O(N^2 \ln N)$，与估计式 (3.18) 中的项完全相同。

现在我们假设（3.19）成立。接下来，注意到 $\|z_{i_3}\| \ge \|z_{i_1}\|/2$，并利用 $\tilde{\rho}$ 的指数衰减性，我们得到

$$\tilde{\rho}(z_{i_2}-z_{i_1})\tilde{\rho}(z_{i_3}) \le Ce^{-c\|z_{i_1}\|}$$

其中 c 为固定常数。因此我们得出结论。

$$\sum_{m_1\le m_2\le m_3\le N}\widetilde{\sum_{i_1}\sum_{i_2,i_3}}\mathcal{S}_{i_1,i_2,i_3}$$
$$\le C\sum_{m_1\le m_2\le m_3\le N}\frac{1}{m_1}\frac{1}{m_2-m_1}\frac{1}{m_3-m_2}\widetilde{\sum_{i_1}\sum_{i_2,i_3}}e^{-c\|z_{i_1}\|} \le C\ln^3 N.$$

对所有 n_1 的取值求和，我们得到一项 $O(N\ln^3 N)$。这就完成了 (3.16) 的证明。

情形 3。我们声称：

$$\sum_{(n_1,\dots,n_4):n_1<n_3<n_2<n_4}\mu\left(\sigma_{n_1,n_2}\sigma_{n_3,n_4}\right) \le CN^2\ln N. \tag{3.20}$$

(3.20) 的证明与 (3.16) 的证明类似。事实上，现在 (3.17) 的右端被替换为

$$C\sum_{i_1,i_2,i_3}\frac{\tilde{\rho}(z_{i_2})\tilde{\rho}(z_{i_3}-z_{i_1})}{m_1(m_2-m_1)(m_3-m_2)}\Theta\left(\max_j\frac{\|z_{i_j}-z_{i_{j-1}}\|}{\sqrt{m_j-m_{j-1}}}\right).$$

我们先考虑特殊情形 $i_2 = 0, i_3 = i_1$。此时 (3.18) 被替换为

$$\sum_{i_1} \mathcal{S}_{i_1,0,i_1}(m_1, m_2, m_3) \tag{3.21}$$
$$\leq C \sum_{i_1} \frac{1}{m_1} \frac{1}{m_2 - m_1} \frac{1}{m_3 - m_2} \Theta\left(\frac{\|z_{i_1}\|}{\min\{\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2 - m_1}, \sqrt{m_3 - m_2}\}} \right).$$

它被 (3.18) 右侧的量所界（可能相差一个常数C），因此属于 $O(N^2 \ln N)$。一般的 i_2, i_3 的贡献可像之前那样估计。(3.20) 随之成立。

上述三种情形的结论是，主导项仅来自满足 (3.13) 的指标$n_1, ..., n_4$。对所有满足 (3.13) 的指标 $n_1, ..., n_4$，将 $\mu(\sigma_{n_1,n_2}\sigma_{n_3,n_4})$ 求和，我们得到 $N^2 \ln^2 N[\Sigma^4/8 + o_{L\to\infty}(1)]$，这里用到了 (3.14) 以及这一事实

$$\text{that} \sum_{n_1<n_3<N} \ln(n_3 - n_1) \ln(N - n_3) = \frac{N^2 \ln^2 N}{2}(1 + o_{N\to\infty}(1)).$$

接下来我们断言

$$\sum_{n_1,...,n_4:\mathbf{k}=4} \mu(\sigma_{n_1,n_2}\sigma_{n_3,n_4}) = [\Sigma^2 + o_{L\to\infty}(1)]N^2 \ln^2 N. \tag{3.22}$$

事实上，与上文讨论的 (3.13) 情形类似，我们发现，和式的主要贡献来自数对 (n_1, n_2) 和 (n_3, n_4) 不交错的项。注意，若对 (n_1, n_2, n_3, n_4) 进行随机排列，则不交错的概率为 1/3（因为第二个元素必须与第一个元素来自同一对）。因此，有 24/3=8 个置换 [1] 对和式有贡献，这解释了 (3.22) 中额外的因子 8。

为了完成性质（c）的证明，还需要验证满足 $\mathbf{k} = 2$、3 的项的贡献可以忽略。首先注意，根据 k 的定义，$\mathbf{k} = 3$ 不可能。最后，如果 $\mathbf{k} = 2$，则可以用 MLLT 代替 MMLLT，重复证明 $\mathbf{k} = 4$ 情形时的简化版本。例如，考虑情形 $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4$。由于 $\mathbf{k} = 2$，必有 $|n_2 - n_1| \geq L$ 或 $|n_4 - n_3| \geq L$。不失一般性，假设 $|n_4 - n_3| \geq L$。于是，利用 G 的指数混合这一事实，$\sigma_{n_3,\ n_4} \leq Ce^{-c\ell}$ 在集合 $\|\tau_{n_4} - \tau_{n_3}\| \in [\ell, \ell + 1]$ 上，我们可由局部极限定理得到

$$\mu\left(\sigma_{n_1,n_2}\sigma_{n_3,n_4}\right) = O\left(\frac{1}{|n_4 - n_3|}\right).$$

因此，满足 $\mathbf{k} = 2$ 的项的总贡献为 $O(LN^2 \ln N)$。至此，性质（c）的证明完成。我们已经完成命题 3.1 的证明，从而也完成了定理 1.6 的证明。

[1] 这八个 置换对应于不等式中的所有可能符号选择（$* \in \{\leq, \geq\}$） s

$$n_1 * n_2, \quad n_3 * n_4, \quad \min(n_1, n_2) * \min(n_3, n_4)$$

4. Dimension one

4.1. 化归为方差极限定理。这里我们证明定理 1.7。

我们使用分解 (3.4)。由于 f 对光滑观测量满足中心极限定理，$\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=1}^{N}\bar{H}(f^n(x))$ 弱收敛，因此该和在按 $N^{3/4}$ 重新缩放后可以忽略。剩下的问题是研究 $\tilde{H}$ 的遍历和。

按照上一节的思路，我们令

$$\mathfrak{m}_N(x)=\frac{1}{\sqrt{V_N(x)}}\sum_{n=0}^{N-1}\delta_{\tau_n(x)}, \tag{4.1}$$

$$A_{t,N,x}(y)=\frac{1}{\mathrm{Card}(n\le N:\tau_n(x)=t)}\sum_{n\le N:\tau_n(x)=t}\tilde{H}(f^n(x),y),$$

其中

$$V_N(x)=\int S_N^2(x,y)\mathrm{d}\nu(y),\quad S_N(x,y)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{H}\circ F^n(x,y).$$

因此，按照命题 2.1 的记号，我们有 $\mathcal{S}_N=\frac{S_N}{\sqrt{V_N}}(x)$. ═══

与定理 1.6 相反， $V_N(x)$ 不满足弱大数定律。相反，我们有

命题 4.1。存在一个常数 Λ，使得当 $N\to\infty$ 时，$\frac{V_N}{\Lambda N^{3/2}}$ 依分布收敛于随机变量 $\mathcal{L}^2$，后者由（1.5）给出。

在证明命题 4.1 之前，让我们先利用它推导定理 1.7。我们从下面这个命题 3.1 的类似结果开始:

引理 4.2。在定理 1.7 的假设下，存在子集 $X_N\subset X$，使得 $\lim_{N\to\infty}\mu(X_N)=1$，并且对于任意序列 $x_N\in X_N$，测度 $\{\mathfrak{m}_N(x_N)\}$ 满足命题 2.1 的条件，其中 $\sigma=1$。

引理 4.2 在假设命题 4.1 下的证明。显然，对于 x 的一个大集合，$\|\mathfrak{m}_N\|\to\infty$，因此（a）成立。回顾 $\mathcal{S}_N(x,y)=S_N(x,y)/\sqrt{V_N(x)}$，性质（c）对所有 $x\in X$ 都显然成立。剩下的工作是证明性质（b）。

注意， $\mathcal{L}^2$ 是非负的，且在零点无原子，即对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $\varepsilon'>0$使得 $\mathbb{P}(\mathcal{L}^2<\varepsilon')<\varepsilon$，因此根据命题 4.1,

$$\lim_{N\to\infty}\mu(x:N^{1.49}<V_N(x)<N^{1.51})=1.$$

因此，我们可以假设 x满足 $N^{1.49}<V_N(x)<N^{1.51}$。接下来，我们定义

$$\tilde{\ell}(x,t,N)=\frac{\mathrm{Card}(n\le N:|\tau_n(x)-t|<1)}{\sqrt{N}}.$$

与引理 3.3 的证明一样，我们发现，对于每个 $p\in\mathbb{Z}_+$、每个 $t\in\mathbb{R}$ 以及每个 $N\in\mathbb{N}$，都有 $\mu(\ell^p(.,t,N))<C_p$。接着选取 $p=1000$，马尔可夫不等式

给出 $\mu(x\colon \tilde{\ell}(x,t,N) > N^{1/100}) < CN^{-10}$。因此，我们可以假设，对于所有满足$|t| < N^{0.6}$的 $t \in \mathbb{Z}$， $\tilde{\ell}(x,t,N) < N^{1/100}$成立。根据反集中大偏差界，我们还可以假设 $\max_{n\le N} |\tau_n(x)| \le N^{0.6}$，因为不满足此条件的点集测度可忽略。总之，满足以下条件的 x的集合的测度

$$N^{1.49} < V_N(x) < N^{1.51} \quad \text{and} \quad \tilde{\ell}(x,t,N) \le \begin{cases} N^{0.01} & |t| \le N^{0.6}, \\ 0 & |t| \ge N^{0.6}. \end{cases}$$

当 $N \to \infty$. 时趋于 1。对于任意这样的 x，我们有

$$\int \mathfrak{m}_N^{r-1}(x)(t, K\ln N)\mathrm{d}\mathfrak{m}_N(x) = \frac{1}{(V_N(x))^{r/2}} \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{Card}^{r-1}(j < N\colon\ |\tau_j - \tau_n| \le K\ln\|\mathfrak{m}_N\|)$$

$$\le \frac{1}{(N^{1.49})^{r/2}} \sum_{t\in\mathbb{Z}:|t|\le N^{0.6}} \ell^r(x,t,N) \le 2N^{0.51r+0.6-0.745r} = o(1).$$

若 $r \ge 3$。性质（b）和引理得证。 □

在命题 4.1 的假设下证明定理 1.7。回忆一下， $\mathcal{S}_N(x,y) = S_N(x,y)\sqrt{V_N(x)}$. 根据引理 4.2 和命题 2.1，存在一个子集序列 $X_N \subset X$，满足 $\mu(X_N) \to 1$，使得对于任意序列 $x_N \in X_N$， $\mathcal{S}_N(x,y)$ 相对于 $\nu(y)$ 的分布都收敛到标准正态分布（注意，此时性质（a）和（c）显然成立）。

事实上，我们有更强的结论:

$$\left(\frac{V_N}{\Lambda N^{3/2}}, \mathcal{S}_N\right) \Rightarrow (\mathcal{L}^2, \mathcal{N}) \quad \text{as} \quad N \to \infty, \tag{4.2}$$

其中 $\mathcal{L}$ 由（1.5）给出， $\mathcal{N}$ 服从标准正态分布，且 $\mathcal{L}^2$ 和 $\mathcal{N}$ 相互独立。这由命题 4.1、引理 4.2 以及 $\mathcal{S}_N$ 与V_N 的渐近独立性推出，而这种渐近独立性源于 V_N 仅依赖于 x ，而 $\mathcal{S}_N$ 与 x渐近独立。更准确地说，设 ϕ 和 ψ 是两个连续紧支撑测试函数。那么

$$\lim_{N\to\infty} \zeta\left(\phi\left(\frac{V_N}{\Lambda N^{3/2}}\right)\psi(\mathcal{S}_N)\right) = \lim_{N\to\infty} \zeta\left(\phi\left(\frac{V_N}{\Lambda N^{3/2}}\right)\psi(\mathcal{S}_N)_{\mathbb{I}^{X_N}}\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int_{X_N} \left[\phi\left(\frac{V_N}{\Lambda N^{3/2}}\right)\int_Y \psi(\mathcal{S}_N)\mathrm{d}\nu\right]\mathrm{d}\mu = \mathbb{E}(\psi(\mathcal{N}))\lim_{N\to\infty}\int_{X_N}\phi\left(\frac{V_N}{\Lambda N^{3/2}}\right)\mathrm{d}\mu$$

$$= \mathbb{E}(\psi(\mathcal{N}))\lim_{N\to\infty}\int_X \phi\left(\frac{V_N}{\Lambda N^{3/2}}\right)\mathrm{d}\mu = \mathbb{E}(\psi(\mathcal{N}))\mathbb{E}(\phi(\mathcal{L}^2)),$$

其中，第一个和第四个等式成立是因为 $\mu(X_N) \to 1$，第三个不等式由命题 2.1 得出，最后一个等式由命题 4.1 得出。这证明了（4.2）。

记为 $\Sigma = \sqrt{\Lambda}$。由 (4.2) 和连续映射定理,

$$\frac{S_N}{\Sigma N^{3/4}} = \frac{\sqrt{V_N}}{\sqrt{\Lambda N^{3/2}}} \times \frac{\mathcal{S}_N}{\sqrt{V_N}} \Rightarrow \mathcal{L}\mathcal{N}$$

定理 1.7 的证明至此完成。 □

4.2. 命题 4.1 的证明。我们将用到以下众所周知的事实（例如参见 [2] 第 1.7 章，问题 4）。设 $\mathcal{X}_n$ 是一列随机变量，使得对每个 $k \in \mathbb{Z}_+$

$$J_k = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\mathcal{X}_n^k) \tag{4.3}$$

都存在，并且

$$\limsup_{k\to\infty} \left(\frac{J_k}{k!}\right)^{1/k} < \infty, \tag{4.4}$$

那么 $\mathcal{X}_n$ 弱收敛于一个随机变量 $\mathcal{X}$。此外，对于每个$k \in \mathbb{Z}_+$， $\mathbb{E}(\mathcal{X}^k) = J_k$，且 $\mathcal{X}$ 由其矩唯一确定。

现在我们说明命题 4.1 的证明策略（类似的策略曾用于[18]）。我们证明存在一个常数 Λ，它取决于 (T, T^{-1}) 变换 F和观测量 H，使得 $\mathcal{X}_N = V_N/(\Lambda N^{3/2})$ 满足 (4.3)（其中 $\mathbb{E}$ 表示关于 μ 的积分）以及 (4.4)，且常数 J_k 不依赖于 F 和 H。因此，存在一个随机变量 $\mathcal{X}$，使得对于任何满足定理 1.7 假设的 (T, T^{-1}) 变换， $\mathcal{X}_N = V_N/(\Lambda N^{3/2})$ 弱收敛于 $\mathcal{X}$。回忆 §1.2 中的一个例子，即随机环境中的一维随机游走；在这种情况下，根据 [15]的结果， $\mathcal{X}_N = V_N/(\Lambda N^{3/2})$ 弱收敛于 $\mathcal{L}^2$。因此 $\mathcal{X} = \mathcal{L}^2$，而它必定是所有满足定理 1.7 假设的 (T, T^{-1}) 变换的极限。剩下的就是验证 (4.3) 和 (4.4)。

回想一下， τ 满足具有高斯密度 $\mathfrak{g}$ 的 MMLLT。设 ς_1 为该高斯随机变量的标准差，即 $\mathfrak{g}(z) = \varphi(z/\varsigma_1)/\varsigma_1$，其中 φ 为标准高斯密度。

定义

$$\Lambda = \frac{\sqrt{\pi}\varsigma_2^2}{\varsigma_1} = \sqrt{2}\pi\varsigma_2^2\mathfrak{g}(0) \tag{4.5}$$

其中， ς_2^2 由式（3.9）给出。

引理 4.3. 对于 $k = 1$，(4.3) 成立，且具有

$$J_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{w\in\mathbb{R}} \int_{0<t_1<t_2<1} \frac{1}{\sqrt{t_1}} \frac{1}{\sqrt{t_2 - t_1}} \varphi\left(\frac{w}{\sqrt{t_1}}\right) \varphi(0) \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 \mathrm{d}w. \tag{4.6}$$

我们注意到，上述积分可以显式计算。也就是说， $J_1 = \dfrac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}}$。这表明 Λ 的选择是正确的。事实上，对于随机环境中的简单随机游走， [15] 中的公式（1.2）表明 $J_1 = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}}$；而根据[15], 的主要结果，命题 4.1 的结论对随机环境中的简单随机游走成立。引理 4.3 的证明。固定某个 $\varepsilon > 0$。我们需要证明，当 N 足够大时，

$$\left| N^{-3/2}\Lambda^{-1} \iint \left[\sum_{n=1}^{N} \tilde{H} \circ F^n(x, y)\right]^2 \mathrm{d}\mu\mathrm{d}\nu - J_1 \right| < \varepsilon.$$

在以下证明中，我们将选取一个较小的 $\eta = \eta(\varepsilon)$、一个较大的 $L = L(\varepsilon)$、一个较小的η'=$\eta'(\varepsilon、\eta、L)$<$\eta$，最后选取 $N = N(\varepsilon、\eta、L、\eta')$。这些参数会受到有限多个限制，我们可以选择其中最严格的限制。

将 X 划分为直径为 $< \eta$ 的集合 X_i、$i \in I$，并选定一些元素$x_i \in X_i$。我们有

$$\iint \left[\sum_{n=1}^{N} \tilde{H} \circ F^n(x,y)\right]^2 \mathrm{d}\mu\mathrm{d}\nu =$$

$$\sum_{n_1,n_2=1}^{N} \sum_{i_1,i_2\in I} \sum_{z_1,z_2\in\mathbb{Z}} \int p(x) \int \tilde{H}(f^{n_1}(x), G_{\tau_{n_1}(x)}(y))\tilde{H}(f^{n_2}(x), G_{\tau_{n_2}(x)}(y))\mathrm{d}\nu\mathrm{d}\mu, \tag{4.7}$$

其中

$$p(x) = p_{\eta,n_1,n_2,i_1,i_2,z_1,z_2}(x) = \mathbb{I}^{f^{n_1}x\in X_{i_1}}\mathbb{I}^{f^{n_2}x\in X_{i_2}}\mathbb{I}^{\tau_{n_1}(x)\in[z_1,z_1+1]\eta}\mathbb{I}^{\tau_{n_2}(x)\in[z_2,z_2+1]\eta}.$$

将 (4.7) 中的和拆分为 $T_1 + T_2$，其中 T_1 对应满足以下条件的项

(A1) $\eta' N <$最小$\{n_1, n_2\} <$最小$\{n_1, n_2\} + \eta' N <$最大$\{n_1, n_2\}$(A2) $|z_1| < L\sqrt{N}/\eta$(A3) $|z_1 - z_2| < L/\eta$。

而 T_2 表示至少有一个条件 (A1)–(A3) 不成立的项。∼记 $T_1 = \sum$(...)。

我们首先估计 T_1。设 $a_N \approx b_N$，如果存在常数 η、L 和 η'，使得当 N 足够大时，$|a_N - b_N| < \varepsilon\Lambda N^{3/2}/10$。我们声称:

$$T_1 \approx \widetilde{\sum} \int p(x)\mathrm{d}\mu \int \tilde{H}(x_{i_1}, G_{z_1\eta}(y))\tilde{H}(x_{i_2}, G_{z_2\eta}(y))\mathrm{d}\nu. \tag{4.8}$$

事实上，由于 H 的连续性，我们可以将 η 选得足够小，使得 (4.8) 的左边与右边之差不超过

$$\frac{\varepsilon\Lambda}{1000}\widetilde{\sum} \int p_{\eta,n_1,n_2,i_1,i_2,z_1,z_2}(x)\mathrm{d}\mu(x),$$

因此，(4.8) 由反集中大偏差界推出。

接下来，写下取 $m_1 = \min\{n_1, n_2\}$、$m_2 = \max\{n_1, n_2\}$，并使用 MMLLT，我们得到

$$T_1 \approx \frac{1}{\varsigma_1^2}\widetilde{\sum}\eta^2 \frac{1}{\sqrt{m_1}}\varphi\left(\frac{z_1\eta}{\varsigma_1\sqrt{m_1}}\right)\frac{1}{\sqrt{m_2 - m_1}}\varphi\left(\frac{(z_2 - z_1)\eta}{\varsigma_1\sqrt{m_2 - m_1}}\right)\mu(X_{i_1})\mu(X_{i_2})\times \tag{4.9}$$

$$\int \tilde{H}(x_{i_1}, G_{z_1\eta}(y))\tilde{H}(x_{i_2}, G_{z_2\eta}(y))\mathrm{d}\nu.$$

注意到由 (A1) 和 (A3)，$(z_2 - z_1)\eta/[\varsigma_1\sqrt{m_2 - m_1}] = O(N^{-1/2})$，我们看到，在不使 $\approx$失效的情况下，可以将 (4.9) 中的 $\varphi\left(\frac{z_2 - z_1\ \eta}{\varsigma_1\sqrt{m_2 - m_1}}\right)$ 替换为 $\varphi(0)$。然后

唯一依赖于 z_2 的项位于关于 ν 的积分中。我们可以用黎曼积分来近似关于 z_2 的求和:

$$\eta \sum_{z_2=z_1-L/\eta}^{z_1+L/\eta} \int \tilde{H}(x_{i_1}, G_{z_1\eta}(y))\tilde{H}(x_{i_2}, G_{z_2\eta}(y))\mathrm{d}\nu = \mathcal{I}_{i_1,i_2} + o_{\eta\to 0, L\to\infty, N\to\infty}(1) \tag{4.10}$$

其中

$$\mathcal{I}_{i_1,i_2} = \int_{\mathbb{R}} \int \tilde{H}(x_{i_1}, y)\tilde{H}(x_{i_2}, G_t(y))\mathrm{d}\nu\mathrm{d}t.$$

结合 (4.9) 和 (4.10)，我们得出

$$\begin{aligned} T_1 \;\approx\; & \frac{2}{\varsigma_1^2}\left[\sum_{i_1,i_2}\mu(X_{i_1})\mu(X_{i_2})\mathcal{I}_{i_1,i_2}\right]\times \\ & \times\left[\sum_{\eta' N<m_1<m_1+\eta' N<m_2<N}\;\sum_{|z_1|<L\sqrt{N}/\eta}\eta\frac{1}{\sqrt{m_1}}\varphi\left(\frac{z_1\eta}{\varsigma_1\sqrt{m_1}}\right)\frac{1}{\sqrt{m_2-m_1}}\varphi(0)\right], \end{aligned}$$

其中因子 2 是考虑到 $n_1 < n_2$ 和 $n_2 < n_1$两者而得到的。必要时进一步减小 η 并增大 L，并回想 (3.9)，我们可以用 ς_2^2替换第一个求和式。

现在用相应的黎曼积分替换两个黎曼和，我们得到

$$T_1 \approx \frac{2\varsigma_2^2}{\varsigma_1^2}N^{3/2}\int_{|w|<L}\int_{\eta'<t_1<t_1+\eta'<t_2<1}\frac{1}{\sqrt{t_1}}\frac{1}{\sqrt{t_2-t_1}}\varphi\left(\frac{w}{\varsigma_1\sqrt{t_1}}\right)\varphi(0)\mathrm{d}t\mathrm{d}w \approx \frac{\varsigma_2^2}{\varsigma_1}\sqrt{\pi}N^{3/2}J_1.$$

为了完成 (4.6) 的证明，只需证明当 L 足够大且 η, η'足够小时

$$|T_2| < \varepsilon N^{3/2}/10. \tag{4.11}$$

我们将估计恰有一个假设 (A1)–(A3) 不成立时各项的贡献（多个假设不成立的情形类似且更容易处理）。

假设 (A1) 不成立，此外，$m_1 < \eta' N$（其他情形类似）。使用反集中大偏差界代替 MMLLT，我们得到相应的和有界于

$$\sum_{m_1=1}^{\eta' N}\sum_{m_2=0}^{N}\frac{1}{\sqrt{m_1}}\frac{1}{\sqrt{m_2+1}}\sum_{|z_1|<L\sqrt{N}/\eta}C(\eta, L) \le \sqrt{\eta'}NC'(\eta, L)\sqrt{N} < \varepsilon N^{3/2}/10$$

如果 η' 足够小。

假设 (A2) 不成立。那么，同样地，使用反集中大偏差界代替 MMLLT，我们可以得到相应的和有界于

$$\sum_{m_1=\eta' N}^{N}\sum_{m_2=m_1+\eta' N}^{N}\frac{1}{\sqrt{m_1}}\frac{1}{\sqrt{m_2-m_1}}\sum_{|z_1|\ge L\sqrt{N}/\eta}C\eta\Theta(|z_1|\eta/\sqrt{m_1})$$

$$\leq CN \sum_{|z_1|\geq L\sqrt{N}/\eta} \eta\Theta(|z_1|\eta/\sqrt{N}) \leq CN^{3/2}\int_{L-1}^{\infty}\Theta(r)\mathrm{d}r < \varepsilon N^{3/2}/10$$

对于 L 较大时。

最后假设 设 (A3) 不成立。然后我们利用 G 的指数混合性推导出

$$\eta \sum_{z_2:|z_2-z_1|>L/\eta} \int \tilde{H}(x_{i_1}, G_{z_1\eta}(y))\tilde{H}(x_{i_2}, G_{z_2\eta}(y))\mathrm{d}\nu$$

$$\leq 2\int_L^{\infty}\int \tilde{H}(x_{i_1}, y)\tilde{H}(x_{i_2}, G_t(y))\mathrm{d}\nu\mathrm{d}t \leq Ce^{-cL}.$$

按照 T_1 的情形进行处理，我们得到当 (A3) 不满足时，与指标对应的和有界于 $CN^{3/2}e^{-cL} < \varepsilon N^{3/2}/10$。引理得证。□

引理 4.4。对于任意 $k \geq 2$，(4.3) 成立，其中

(4.12)

$$J_k = \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right]^k \int_{w_1,\ldots,w_k\in\mathbb{R}} \int_{0<t_1<\ldots<t_{2k}<1} \prod_{j=1}^{2k} \frac{1}{\sqrt{t_j - t_{j-1}}} \sum_{v\in V}\prod_{j=1}^{2k}\varphi\left(\frac{w_{v(j)} - w_{v(j-1)}}{\sqrt{t_j - t_{j-1}}}\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}w,$$

其中 V是从 $\{1, 2, ..., 2k\}$ 到 $\{1, 2, ..., k\}$ 的所有二对一映射的集合（即，对于所有 $l = 1$，...，k，$|v^{-1}(l)| = 2$）。

引理 4.4 的证明。我们沿用引理 4.3 证明中的策略 .

固定某个 $\varepsilon > 0$。我们需要证明，当 N 足够大时，

$$\left| N^{-3k/2}\Lambda^{-k}\int\left(\int\left[\sum_{n=1}^{N}\tilde{H}\circ F^n(x,y)\right]^2\mathrm{d}\nu\right)^k\mathrm{d}\mu - J_k\right| < \varepsilon.$$

现在我们有

$$\int\left(\int\left[\sum_{n=1}^{N}\tilde{H}\circ F^n(x,y)\right]^2\mathrm{d}\nu\right)^k\mathrm{d}\mu$$

(4.13) $$= \sum_{n_1,n_2,\ldots,n_{2k}=1}^{N}\sum_{i_1,i_2\ldots,i_{2k}\in I}\sum_{z_1,z_2,\ldots,z_{2k}\in\mathbb{Z}}$$

$$\int p(x)\left[\prod_{j=1}^{k}\int \tilde{H}(f^{n_{2j-1}}(x), G_{\tau_{n_{2j-1}}(x)}(y))\tilde{H}(f^{n_{2j}}(x), G_{\tau_{n_{2j}}(x)}(y))\mathrm{d}\nu\right]\mathrm{d}\mu$$

其中

$$p(x) = p_{\eta,\underline{n},\underline{i},\underline{z}}(x) = \left[\prod_{j=1}^{2k}\mathbb{I}_{f^{n_j}x\in X_{i_j}}\right]\left[\prod_{j=1}^{2k}\mathbb{I}_{\tau_{n_j}(x)\in[z_j,z_j+1]\eta}\right].$$

将数字 $n_1, ..., n_{2k}$ 按 $m_1 \leq m_2 \leq ... \leq m_{2k}$ 排序，并记作 $m_0 = 0$。与之前一样，我们将 (4.13) 中的和写作 $T_1 + T_2$，其中 T_1 对应满足以下条件的项。

(A1') 对每个 $j = 1, ..., 2k$, $m_j - m_{j-1} > \eta' N$(A2') 对所有 $j = 1, ..., k$, $|z_{2j-1}| < L\sqrt{N}/\eta$(A3') 对所有 $j = 1, ..., k$, $|z_{2j-1} - z_{2j}| < L/\eta$

~并写作 $T_1 = \sum(...)$。如同在 (4.8) 中,

$$T_1 \approx \widetilde{\sum} \int p(x)\mathrm{d}\mu \prod_{j=1}^{k} \int \tilde{H}(x_{i_{2j-1}}, G_{z_{2j-1}\eta}(y))\tilde{H}(x_{i_{2j}}, G_{z_{2j}\eta}(y))\mathrm{d}\nu, \tag{4.14}$$

其中 $\approx$ 表示, 只要 η 和 η' 足够小且 L 和 N 足够大, LHS 与 RHS 之间的差就可以小于 $\varepsilon\Lambda^k N^{3k/2}/10$ 。为计算 $\int p(x)d\mu$, 我们对 $m_1 < m_2 < ... < m_{2k}$ 次使用 MMLLT。不过请注意, 不同 z_j 的求和范围不同, 因此必须跟踪索引 i , 以便 $n_i = m_j$。为此, 定义置换 ρ （若 (A1') 成立, 则由元组 $(n_1, ..., n_{2k})$ 唯一确定）, 使得 $m_j = n_{\rho(j)}$。写作 $\rho(0) = 0$ 和 $z_0 = 0$, 并使用 MMLLT, 我们得到

$$T_1 \approx \frac{1}{\varsigma_1^{2k}} \widetilde{\sum} \eta^{2k} \left[\prod_{j=1}^{2k} \frac{1}{\sqrt{m_j - m_{j-1}}} \varphi\left(\frac{(z_{\rho(j)} - z_{\rho(j-1)})\eta}{\varsigma_1 \sqrt{m_j - m_{j-1}}} \right) \right] \times \tag{4.15}$$

$$\left[\prod_{j=1}^{2k} \mu(X_{i_j}) \right] \left[\prod_{j=1}^{k} \int \tilde{H}(x_{i_{2j-1}}, G_{z_{2j-1}}(y))\tilde{H}(x_{i_{2j}}, G_{z_{2j}}(y))\mathrm{d}\nu \right]. \tag{4.16}$$

由 (A1') 和 (A3') 可知, 在 (4.15) 中 z 的下标 $l = j-1, j$ 对应的 $\rho(l)$ 可替换为 $2\lceil \rho(l)/2 \rceil - 1$（不大于 $\rho(j)$ 的最大奇数）。因此, z_{2j} 只出现在 (4.16) 中。与前面一样, 我们计算得

$$\sum_{i_1,...,i_{2k}} \left[\prod_{j=1}^{2k} \mu(X_{i_j}) \right] \eta^k \sum_{\substack{z_2, z_4, ..., z_{2k}: \\ |z_{2j} - z_{2j-1}| < L/\eta}} \left[\prod_{j=1}^{k} \int \tilde{H}(x_{i_{2j-1}}, G_{z_{2j-1}}(y))\tilde{H}(x_{i_{2j}}, G_{z_{2j}}(y))\mathrm{d}\nu \right]$$

$$= \varsigma_2^{2k} + o(1).$$

由此得到

$$T_1 \approx \frac{\varsigma_2^{2k}}{\varsigma_1^{2k}} \widehat{\sum} \eta^k \left[\prod_{j=1}^{2k} \frac{1}{\sqrt{m_j - m_{j-1}}} \varphi\left(\frac{(z_{2\lceil \rho(j)/2 \rceil - 1} - z_{2\lceil \rho(j-1)/2 \rceil - 1})\eta}{\varsigma_1 \sqrt{m_j - m_{j-1}}} \right) \right],$$

^其中, Σ 表示 $n_1, ..., n_{2k}$, $z_1, z_3, ..., z_{2k-1}$的和, 且满足 (A1')、(A3')。接下来注意到, u : 由 $u(j) = 2\lceil \rho(j)/2 \rceil - 1$ 定义的 $\{1, ..., 2k\} \to \{1, 3..., 2k-1\}$ 是一个二对一映射。令 U 为所有此类映射的集合。最后一个显示公式中的被加数仅通过 $(m_1, ..., m_{2k})$ 和 u 依赖于 $(n_1, ..., n_{2k})$。此外, 对于任意给定的 $(m_1, ..., m_{2k})$ 和 u, 恰有 2^k 个对应的元组 $(n_1, ..., n_{2k})$。因此

$$T_1 \approx 2^k \frac{\varsigma_2^{2k}}{\varsigma_1^{2k}} \sum_{u \in U} \sum_{\substack{m_1, ... m_{2k} \\ \text{satisfying (A1')}}} \sum_{\substack{z_1, .., z_{2k-1} \\ \text{satisfying (A3')}}} \eta^k \left[\prod_{j=1}^{2k} \frac{1}{\sqrt{m_j - m_{j-1}}} \varphi\left(\frac{(z_{u(j)} - z_{u(j-1)})\eta}{\varsigma_1 \sqrt{m_j - m_{j-1}}} \right) \right].$$

现在我们可以用相应的黎曼积分替换最后两个和（黎曼和），其中 $t_j \sim m_j/N$ 和 $w_l \sim z_{2l-1}\eta/\sqrt{N}$。为简化记号，我们记 $v(j) = (u(j) + 1)/2$，因此 v 是从 $\{1, 2, ..., 2k\}$ 到 $\{1, 2, ..., k\}$ 的二对一映射（所有此类映射的集合记为 V）。我们得到

$$T_1 \approx 2^k \frac{\varsigma_2^{2k}}{\varsigma_1^{2k}} N^{3k/2} \sum_{v\in V} \int_{|w_1|,...,|w_k|<L} \int_{\substack{0=t_0<t_1<...<t_{2k}<1:\\ t_j-t_{j-1}<\eta'}} \prod_{j=1}^{2k} \frac{1}{\sqrt{t_j - t_{j-1}}} \prod_{j=1}^{2k} \varphi\left(\frac{w_{v(j)} - w_{v(j-1)}}{\varsigma_1\sqrt{t_j - t_{j-1}}}\right) \mathrm{d}t\mathrm{d}w.$$

在上述积分中代入 w 得到 w/ς_1，我们得到

$$T_1 \approx \frac{\varsigma_2^{2k}}{\varsigma_1^{k}} \pi^{k/2} N^{3k/2} J_k.$$

与引理 4.3 中一样，T_2 可以忽略不计。这就完成了引理 4.4 的证明。 □

为了完成命题 4.1 的证明，还需要验证 (4.4)。为此，首先注意到，由于 φ 衰减得很快，因此存在一个常数 M，使得对于每个 $v \in V$ 和每个 t_1，...，$t_{2k} \in (0, 1]$，

$$\int_{\mathbb{R}^k} \prod_{j=1}^{2k} \varphi\left(\frac{w_{v(j)} - w_{v(j-1)}}{\varsigma_1\sqrt{t_j - t_{j-1}}}\right) \mathrm{d}w < M^k.$$

注意到 $|V| = (2k)!/2^k$，我们得到。

$$|J_k| \le C^k (2k)! \int_{0<t_1<...<t_{2k}<1} \prod_{j=1}^{2k} \frac{1}{\sqrt{t_j - t_{j-1}}} \mathrm{d}t.$$

上述积分可以显式计算，结果等于 $\frac{\Gamma(1/2)^{2k}}{\Gamma(k+1)} = \frac{\pi^k}{k!}$。注意到 $(2k)!/(k!) < C^k k!$，我们得到 $|J_k| \le C^k k!$，由此可得 (4.4)。命题 4.1 的证明至此完成。

5. Polynomially mixing flows in dimension one.

本节将定理 1.7 的结果推广到具有多项式混合速率的一些流。我们采用 [10] 的设定。回想一下，若存在一个 G_t 不变分裂 $TY = E_u \oplus E_{cs}$ 以及正的常数C_1、C_2、λ_1、λ_2，使得对每个 $t \ge 0$

(i) $\|dG_{-t}|E_u\| \le C_1 e^{-\lambda_1 t}$；(ii) 对任意单位向量 $v_u \in E_u$、$v_{cs} \in E_{cs}$，我们有 $\|dG_t|v_{cs}\| \le C_2 e^{-\lambda_2 t}\|dG_t v_u\|$.

对于部分双曲流，E_u 的叶与一个绝对连续叶状结构 W^u. 的叶相切

固定常数 R、$\bar{v}$、C_1、α_1。令 $\mathfrak{A}(R, \bar{v}, C_1, \alpha_1)$ 表示集合 D 的集合族，其中这些集合属于 W^u 的一片叶，并且满足

$$\mathrm{diam}(D) \le R, \quad \mathrm{mes}(D) \ge \bar{v}, \quad \mathrm{mes}(\partial_\varepsilon D) \le \bar{C}_1 \varepsilon^{\alpha_1}$$

对所有 $\varepsilon > 0$均成立，其中 $\partial_\varepsilon D$ 是 D. 边界的 ε 邻域。我们称来自 $\mathfrak{A}(R, \bar{v}, C_1, \alpha_1)$ 的集合具有有界几何。

令 $C_2, \alpha_2 > 0$. 设 $\mathfrak{M}(R, \bar{v}, C_1, \alpha_1, C_2, \alpha_2)$ 表示如下形式的线性泛函集合

$$\mathbb{E}_{\ell_{D,\rho}}(A) = \int_D A(y)\rho(y)\mathrm{d}y,$$

其中 $D \in \mathfrak{A}(R, \bar{v}, C_1, \alpha_1)$ ρ 是 D 上的概率密度，$\ln \rho \in C^{\alpha_2}(D)$ $\|\ln \rho\|_{C^r} \leq C_2$. 我们将经常用到 [10, 节中所建立的近似马尔可夫分解的存在性：如果 R, C_1 足够大，且 α_1, α_2 和 $\bar{v}$ 足够小，那么给定 $\ell \in \mathfrak{M}(R, \bar{v}, C_1, \alpha_1, C_2, \alpha_2)$ 和 $t > 0$，我们可以将其分解

$$\mathbb{E}_\ell(A \circ G_t) = \sum_s c_s \mathbb{E}_{\ell_s}(A) + O\left(\|A\|_{C^0}\theta^t\right) \tag{5.1}$$

其中 $\ell_s \in \mathfrak{M}(R, \bar{v}, \bar{C}_1, \alpha_1, \bar{C}_2, \alpha_2)$ 和 $\sum_s$ 对于某个 $\theta < 1$., $c_s = 1 + O(\theta^t)$

如果一个测度在不稳定叶上的条件测度具有光滑密度，我们就称它为 u-Gibbs。近似马尔可夫分解的存在性意味着，对于适当选取的 $R, \bar{v}, C_1, \alpha_1, C_2, \alpha_2$（见 [5, §11.2]），u-Gibbs 测度属于 $\mathfrak{M}(R, \bar{v}, C_1, \alpha_1, C_2, \alpha_2)$ 的凸包。

从现在起，我们将固定其中涉及的常数。为简便起见，我们将写作 $\mathfrak{M}$，而不写 $\mathfrak{M}(R, \bar{v}, C_1, \alpha_1, C_2, \alpha_2)$。

我们称不稳定叶以速率 $a(t)$ 等分布，若存在 $r > 0$，使得对所有 $\ell \in \mathfrak{M}$，都有

$$|\mathbb{E}_\ell(A \circ G_t) - \nu(A)| \leq a(t)\|A\|_{C^r} \tag{5.2}$$

其中 ν 是 G_t. 的参考不变测度。注意，若 (5.2) 以 $a(t) \to 0$ 成立，则 ν 属于 $\mathfrak{M}$ 的凸包，因此它是一个 u-Gibbs 测度（事实上，它是 G_t 的唯一 SRB测度，见 [10, 推论 2]）。

定理 5.1. 若将定理 1.7 中关于 G 具有各阶指数混合性质的假设，替换为以下假设： G 是部分双曲的，且不稳定叶以速率 $Kt^{-\gamma}$ 等分布，其中某个 $\gamma > 1$ 和 $K > 0$ 满足相应条件，则定理 1.7 仍然成立。

推论 5.2. 假设 τ 满足定理 1.7 的假设， G_t 是一个拓扑传递的 Anosov 流，其稳定叶状结构与不稳定叶状结构不可联合积分，且 ν 是 SRB测度。那么，对于足够光滑的函数，(1.4) 成立。

事实上，根据 [9, 关于阿诺索夫流的定理 3], ，不稳定叶在 C^r 上以速率 $Kt^{-\gamma(r)}$ 均匀分布，其中 $\gamma(r) \to \infty$ ，当 $r \to \infty$.

定理 5.1 的证明需要对命题 2.1 作出修改。我们将使用该命题中的相同记号。

命题 5.3. 假设 G_t 是部分双曲的，其不稳定叶以速率 $Kt^{-\gamma}$ 均匀分布，其中某个 $\gamma > 1.$ 。假设存在某个 $0 < \delta < 1/20$ ，使得

$$\gamma - 1 > \frac{16\delta}{1 - 20\delta} \tag{5.3}$$

并且 $\kappa > 0$ 我们有

(a) $\mathfrak{m}_N(t \in \mathbb{R}\colon |t| \le N^{(1/2)+\delta}) \le N^{1/4+\delta}$ 且 $\mathfrak{m}_N(t\colon |t| > N^{(1/2)+\delta}) = 0$；(b) 对每个 $t \in \mathbb{R}$， $\mathfrak{m}_N([t, t+1]) \le N^{\delta-(1/4)}$；(c) $\iint_{|t_1-t_2|>\sqrt{\ln N}} \mathrm{d}\mathfrak{m}_N(t_1)\mathrm{d}\overline{\mathfrak{m}_N(t_2)}\,\overline{|t_1 - t_2|^\gamma} \le \ln^{-\kappa} N$；(d) $\lim_{N\to\infty} \nu(\mathcal{S}_N^2) = 1.$ 那么 $\mathcal{S}_N \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ 当 $N \to \infty.$

引理 5.4。在定理 5.1 的假设下，存在子集 $X_N \subset X$ ，使得 $\lim_{N\to\infty} \mu(X_N) = 1$，且对任意序列 $x_N \in X_N$，由 (4.1) 定义的测度 $\{\mathfrak{m}_N(x_N)\}$ 满足命题 5.3 的条件。

证明。对于任意的 $\delta > 0$ ，条件 (a) 和 (b) 成立这一事实可按前述方法验证。根据 $\mathfrak{m}_N.$ 的定义，条件 (d) 显然成立。为了验证条件 (c)，注意到由命题 4.1，对于任意 $\kappa > 0$, $\mu(x\colon V_N(x) < N^{3/2}\ln^{-\kappa} N) \to 0 \text{as} N \to \infty.$ 。因此，只需验证当 δ 和 κ 足够小时，

$$\mu(x : \mathcal{R}_N(x) < N^{3/2} \ln^{-2\kappa} N)$$

接近于 1，其中

$$\mathcal{R}_N(x) := \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}: |n_1 - n_2| > \sqrt{\ln N}} \frac{\ell(x, n_1, N)\ell(x, n_2, N)}{|n_1 - n_2|^\gamma}$$

而 $\ell(x, t, N)$ 是由 (3.6) 定义的局部时。注意到

$$\mu\left(\ell(n_1, N)\ell(n_2, N)\right) = \sum_{1 \le j_1, j_2 \le N} \mu(x : |\tau_{j_1}(x) - n_1| \le 1, |\tau_{j_2}(x) - n_2| \le 1).$$

因此，利用反集中大偏差界，我们得到

$$\mu(\mathcal{R}_N) \le C \sum_{1 \le j_1 \le j_2 \le N} \sum_{|n_1 - n_2| \ge \sqrt{\ln N}} \frac{1}{\sqrt{j_1}\sqrt{j_2 - j_1 + 1}} \Theta\left(\frac{n_1}{\sqrt{j_1}}\right) \frac{1}{|n_2 - n_1|^\gamma}$$

$$\le C \frac{\sqrt{N}}{\ln^{(\gamma-1)/2} N} \sum_{j_1} \sum_{n_1} \frac{1}{\sqrt{j_1}} \Theta\left(\frac{n_1}{\sqrt{j_1}}\right) \le C \frac{\sqrt{N}}{\ln^{(\gamma-1)/2} N} \sum_{j_1} \int_0^\infty \Theta(r)\,\mathrm{d}r \le C \frac{N^{3/2}}{\ln^{(\gamma-1)/2} N}.$$

现在，只要 $\gamma - 1 > 4\kappa.$ 成立，结论便由马尔可夫不等式得出 □

因此，为了证明定理 5.1，只需证明命题 5.3。

命题 5.3 的证明。我们将区间 $[-N^{1/2+\delta}, N^{1/2+\delta}]$ 划分为大小为 $N^{\beta_1} > 0$ 的大块，各大块之间由大小为 N^{β_2} 的小块隔开，其中参数 $\beta_2 < \beta_1$ 将在后文选定。令 J_j 表示第 j 个大块， L 表示所有小块的并集。

令 $\mathcal{S}'_N = \int_{t\in L} A_t(G_t y)\mathrm{d}\mathfrak{m}_N(y)$。注意，$\nu(\mathcal{S}'_N) = 0.$。我们声称，当 $N\to\infty$ 时，$\nu((\mathcal{S}'_N)^2) \to 0$。

$$\beta_1 > \beta_2 + 3\delta. \tag{5.4}$$

确实

$$\nu\left((\mathcal{S}'_N)^2\right) \le \iint_{L\times L} \nu(A_{t_1}(A_{t_2}\circ G_{t_2-t_1}))\mathrm{d}\mathfrak{m}_N(t_1)\mathrm{d}\mathfrak{m}_N(t_2). \tag{5.5}$$

根据 [10, 定理 2], $\nu(A_{t_1}(A_{t_2}\circ G_{t_2-t_1})) = O\left(|t_2-t_1|^{-\gamma}\right)$. 因此，性质（b）表明，(5.5) 式右端关于 t_2 的积分为 $O\left(N^{-(1/4)+\delta}\right)$。为了关于 t_1 进行积分，我们将 L 划分为单位区间。注意到每个区间的质量为 $O\left(N^{\delta-(1/4)}\right)$，且区间的数量为 $O\left(N^{(1/2)+\delta-\beta_1+\beta_2}\right)$，我们得出 $\nu\left((\mathcal{S}'_N)^2\right) = O\left(N^{\beta_2+3\delta-\beta_1}\right)$，根据 (5.4)，该值趋于零。

因此，方差的主要贡献来自大块。Le t

$$\tau = N^{1/2+\delta}, \quad T_j = T_j(y) = \int_{J_j} A_t(G_{\tau+t}y)\mathrm{d}\mathfrak{m}_N(t), \quad S_{N,j} = \sum_{k=1}^{j} T_k.$$

固定任意的 $\xi\in\mathbb{R}$。我们将证明，存在一个仅依赖于 $|\xi|$ 的序列 $\varepsilon_N\to 0$，使得对于每个 $\ell\in\mathfrak{M}$，都有

$$\left|\mathbb{E}_\ell\left(e^{i\xi S_{N,\bar N}}\right) - e^{-\xi^2/2}\right| \le \varepsilon_N$$

其中 $\bar N$ 是大块的数量。令 $\Phi_j(\xi) = \mathbb{E}_\ell\left(e^{i\xi S_{N,j}}\right)$，其中 $\Phi_0(\xi) = 1$。

引理 5.5. 如果

$$\beta_1 < 1/4 - 2\delta, \tag{5.6}$$

then

$$\Phi_j(\xi) = \Phi_{j-1}(\xi)\left[1 - \frac{\xi^2}{2}v_j\right] + O\left(v_j N^{-\delta} + w_j + \hat\varepsilon_N\right),$$

其中

$$v_j = \nu(T_j^2), \quad w_j = \iint_{\substack{(t_1,t_2)\in J_j \\ |t_1-t_2|\ge\sqrt{\ln N}}} \frac{\mathrm{d}\mathfrak{m}_N(t_1)\mathrm{d}\mathfrak{m}_N(t_2)}{|t_1-t_2|^\gamma}, \quad \hat\varepsilon_N = N^{\delta-1/4-\beta_2(\gamma-1)}.$$

注意，由性质（b）和（5.6），我们有 $T_j = O(N^{-\delta})$。因此 $v_j = O(N^{-2\delta})$，于是引理 5.5 的估计可以改写为

$$\Phi_j(\xi) = \Phi_{j-1}(\xi)e^{-\xi^2 v_j/2} + O\left(v_j N^{-\delta} + w_j + \hat\varepsilon_N\right).$$

重复这一过程，我们得到

$$\mathbb{E}_\ell\left(e^{i\xi\mathcal{S}_{N,\bar N}}\right) = \Phi_{\bar N}(\xi) = \exp\left[-\frac{\xi^2}{2}\sum_{j=1}^{N} v_j\right] + O\left(\sum_j\left[v_j N^{-\delta} + w_j\right] + \bar N\hat\varepsilon_N\right). \tag{5.7}$$

接下来我们断言

$$\sum_{j=1}^{\bar N} v_j = 1 + o_{N\to\infty}(1) \tag{5.8}$$

前提是

$$\beta_2(\gamma-1)>2\delta. \tag{5.9}$$

Indeed, $1+o(1)=\nu(S^2_{N,\bar N})=\sum_{j=1}^{\bar N} v_j+\sum_{j_1\neq j_2}\nu\left(T_{j_1}T_{j_2}\right)$. The second term here is at most

$$C\sum_{n_1,n_2:|n_1-n_2|\geq N^{\beta_2}}\frac{\mathfrak{m}_N([n_1,n_1+1])\mathfrak{m}_N([n_2,n_2+1])}{|n_1-n_2|^\gamma}.$$

根据假设 (b) 对 n_2 求和后，剩下

$$C\sum_{n_1}\mathfrak{m}_N([n_1,n_1+1])N^{\delta-(1/4)-\beta_2(\gamma-1)}$$

$$=C\mathfrak{m}_N([-N^{1/2+\delta},N^{1/2+\delta}])N^{\delta-(1/4)-\beta_2(\gamma-1)}\leq \bar C N^{2\delta-\beta_2(\gamma-1)}=o_{N\to\infty}(1),$$

其中在最后一个不等式中，我们还使用了假设 (a)。

这证明了 (5.9) 蕴含 (5.8)。(5.8) 特别表明 $\sum_j v_j N^{-\delta}=O(N^{-\delta})$。此外，由命题 5.3 的假设 (c)，有 $\sum_j w_j=o(1)$，而

$$\bar N\hat\varepsilon\leq N^{1/4+2\delta-\beta_1-\beta_2(\gamma-1)}=o(1)$$

条件是

$$\beta_1+\beta_2(\gamma-1)>\frac14+2\delta. \tag{5.10}$$

将这些估计代入 (5.7)，我们得出，对于所有 $\ell\in\mathfrak{M}$，有

$$\mathbb{E}_\ell\left(e^{i\xi S_{N,\bar N}}\right)=e^{-\xi^2/2}+o_{N\to\infty}(1) \tag{5.11}$$

如果 β_1 和 β_2 满足 (5.4)、(5.6)、(5.9) 和 (5.10)。因此，我们需要 β_1 和 β_2 满足

$$\beta_1<\frac14-2\delta,\quad \beta_2<\beta_1-3\delta,\quad \beta_1+\beta_2(\gamma-1)>\frac14+2\delta,\quad \beta_2(\gamma-1)>2\delta.$$

由于 β_1 可以任意接近 $\frac14-2\delta$，且 β_2 可以任意接近 $\beta_1-3\delta$，若 (5.3) 成立，则上述不等式相容。由此可知，(5.11) 在 $\mathfrak{M}$ 的凸包上成立，该凸包包含 ν. 。至此，命题 5.3 的证明已完成，但仍有待引理 5.5。□

引理 5.5 的证明。令 $J_j=[n_j^-,n_j^+]$. 。记 $m_j=\tau+\frac{n_{j-1}^++n_j^-}{2}$. 。我们使用近似马尔可夫分解 (5.1)：

$$\mathbb{E}_\ell(A\circ G_{m_j})=\sum c_s\mathbb{E}_{\ell_s}(A)+O(\tilde\varepsilon_N)$$

其中 $\tilde\varepsilon_N=\theta^{N^{\beta_2}}$、$\ell_s=$（$D_s$、$\rho_s$）$\in\mathfrak{M}$，且 $\sum c_s=1-O$（$\tilde\varepsilon_N$）。$_s$

固定任意 $y_s\in G_{-m_j}D_s$. 然后

$$\mathbb{E}_\ell\left(e^{i\xi S_{N,j}}\right)=\sum_s c_s\mathbb{E}_{\ell_s}\left(e^{i\xi[S_{N,j-1}(y_s)+\tilde T_j(y)]}\right)+O(\tilde\varepsilon_N)$$

其中

$$\tilde{T}_j(y) = T_j(G_{-m_j}y) = \int_{J_j} A_t(G_{t-m_j}y)\mathrm{d}\mathfrak{m}_N(t).$$

Next

$$\mathbb{E}_{\ell_s}\left(e^{i\xi\tilde{T}_j}\right) = 1 + i\xi\mathbb{E}(\tilde{T}_j) - \frac{\xi^2}{2}\mathbb{E}_{\ell_s}(\tilde{T}_j^2) + O\left(\mathbb{E}_{\ell_s}\left(\left|\tilde{T}_j\right|^3\right)\right).$$

注意，由于不稳定叶的等分布，$\mathbb{E}(\tilde{T}_j) = O\left(N^{\beta_2(\gamma-1)-(1/4)^+\delta}\right)$。为了估计 $\mathbb{E}_{\ell_s}(\tilde{T}_j^2)$，我们将其拆分

$$\mathbb{E}_{\ell_s}(\tilde{T}_j^2) = \iint_{J_j\times J_j} \mathbb{E}_{\ell_s}[A_{t_1}(G_{t_1-m_j}y)A_{t_2}(G_{t_2-m_j}y)]\mathrm{d}\mathfrak{m}_N(t_1)\mathrm{d}\mathfrak{m}_N(t_2) = I + I\!I$$

其中，I 包含满足 $|t_1 - t_2| \le \sqrt{\ln N}$ 的项，而 $I\!I$ 包含其他项。

根据 [10, 定理 2],

$$\mathbb{E}_{\ell_s}\left((A_{t_1}\circ G_{t_1-m_j})(A_{t_2}\circ G_{t_2-m_j})\right) = O\left(|t_2-t_1|^{-\gamma}\right).$$

因此 $I\!I = O(w_j)$。

为了估计 I，注意到

$$\mathbb{E}_{\ell_s}\left((A_{t_1}\circ G_{t_1-m_j})(A_{t_2}\circ G_{t_2-m_j})\right) = \mathbb{E}_{\ell_s}\left((D_{t_1,t_2}\circ G_{t_1-m_j})\right)$$

其中 $D_{t_1,t_2} = A_{t_1}(A_{t_2}\circ G_{t_2-t_1})$，且 $\|D_{t_1,t_2}\|_{C^r} \le K^{t_2-t_1} \le N^{\delta/2}$.

因此，利用不稳定叶的等分布，我们得到

$$\mathbb{E}_{\ell_s}\left((A_{t_1}\circ G_{t_1-m_j})(A_{t_2}\circ G_{t_2-m_j})\right) = \nu(D_{t_1,t_2}) + O\left(N^{\delta/2}(t_1-m_j)^{-\gamma}\right)$$

$$= \nu(A_{t_1}(A_{t_2}\circ G_{t_2-t_1})) + O\left(N^{\delta/2}(t_1-m_j)^{-\gamma}\right).$$

由此可得

$$I = \iint_{\substack{t_1,t_2\in J_j\\ |t_1-t_2|\le\sqrt{\ln N}}} \nu(A_{t_1}(A_{t_2}G_{t_2-t_1}))\mathrm{d}\mathfrak{m}_N(t_1)\mathrm{d}\mathfrak{m}_N(t_2) + O\left(N^{(5\delta/2)-(1/2)-\beta_2(\gamma-1)}\sqrt{\ln N}\right)$$

$$= v_j + O(w_j) + O\left(N^{3\delta-(1/2)-\beta_2(\gamma-1)}\right).$$

最后

$$\mathbb{E}_{\ell_s}(|\tilde{T}_j|^3) \le N^{-\delta}\mathbb{E}_{\ell_s}(|\tilde{T}_j|^2) = O\left([v_j+w_j]\,N^{-\delta} + N^{2\delta-(1/2)-\beta_2(\gamma-1)}\right).$$

对 s 求和，并利用 $\sum c_s\mathbb{E}_{\ell_s}\left(e^{i\xi S_{N,j-1}(y_s)}\right) = \mathbb{E}_\ell\left(e^{i\xi S_{N,j-1}}\right) + O(\tilde{\varepsilon}_N)$，这一事实，我们得到所需结果。

□

Acknowledgement

C.D. 的研究经费部分由南开志德基金会和 AMS-Simons 差旅资助提供。D.D. 的研究经费部分由 NSF DMS 1956049 提供。A.K. 的研究经费部分由 NSF DMS 1956310 提供。P.N. 的研究经费部分由 NSF DMS 2154725 提供。

References

[1] Avila A., Gouezel S., Tsujii, M. 溶度吸引子的光滑性，《离散与连续动力系统》15 (2006) 21–35.[2] Billingsley, P.，《概率测度的收敛》，威利出版社 (1968).[3] Bjorkund M., Gorodnik A. 指数混合且各阶均混合的群作用的中心极限定理，《数学分析杂志》141 (2020) 457–482.[4] Bolthausen E. 随机环境中二维随机游走的中心极限定理，《概率年刊》17 (1989) 108–115.[5] Bonatti C., Diaz L. J., Viana M. 超越一致双曲性的动力学：全局几何与概率视角，《数学科学百科全书》102 (2005) 施普林格，柏林，xviii+384页。[6] Castorrini R., Liverani C. 二维部分双曲系统的定量统计性质，《数学进展》409 (2022)，A 部分，论文 108625，共 122 页。[7] Cohen G., Conze J.–P. 紧阿贝尔群上可交换自同态的随机游走的中心极限定理，《理论概率杂志》30 (2017) 143–195.[8] Cohen G., Conze J.–P. 关于随机环境中的淬火泛函中心极限定理，《数学研究》269 (2023) 261–303.[9] Dolgopyat D. 阿诺索夫流中的相关衰减，《数学年刊》147 (1998) 357–390.[10] Dolgopyat, D. 部分双曲系统的极限定理，《美国数学会汇刊》356 (2004) 1637–1689.[11] Dolgopyat D., Dong C., Kanigowski A., N ´andori P. 广义 (T, T^{-1}) 变换的混合性质，《以色列数学杂志》247 (2022) 21–73.[12] Dolgopyat D., Dong C., Kanigowski A., N ´andori P. 满足中心极限定理的光滑系统统计性质的灵活性，《数学创刊》230 (2022) 31–120.[13] Dolgopyat D., Dong C., Kanigowski A., N ´andori P. 关于 Bjorklund-Gorodnik 中心极限定理的注记，预印本。[14] Dolgopyat D., Fayad B., Liu S. 动力系统中的多重博雷尔-坎泰利引理与回归的多重对数律，《现代动力系统杂志》18 (2022) 209–289.[15] Kesten H., Spitzer F. 与一类新的自相似过程有关的极限定理，《概率论及相关领域》50 (1979) 5–25.[16] Kleinbock, D. Y., Margulis, G. A.：齐性空间上非拟幺幂流的有界轨道。《美国数学会译丛》171 (1996) 141–172.[17]Le Borgne S. 慢去相关的拟双曲动力系统实例，预印本；研究公告：《法国科学院院报》343 (2006) 125–128.[18] N ´andori, P., Sz ´asz, D. 墙上有缩小孔洞的洛伦兹过程，《混沌》22 (2012) 论文 026115.[19] P`ene F. 随机环境中的平面洛伦兹过程，《亨利·庞加莱研究所概率与统计年刊》45 (2009) 818–839.[20] Rudolph, D, 渐近布朗偏积产生非松散伯努利 K-自同构，《数学创刊》91 (1988) 105–128.[21] Sz ´asz D., Varj ´u T. 洛伦兹过程的局部极限定理及其在平面上的回归，《遍历理论与动力系统》24 (2004) 257–278。