《分数阶微积分与应用分析》稿件编号（将由编辑
填写）

分数阶拉普拉斯算子的梅林定义

Gianni Pagnini[1,2] · Claudio Runfola[3]

arXiv:2305.04251v2 [math.CA] 9 May 2023

收稿日期：/ 修订日期：/ 接受日期：.....

摘要：已知在无界区域中，分数阶拉普拉斯算子至少存在十种等价定义。本文基于梅林变换推导出另一种等价定义，该定义可用于分数阶拉普拉斯算子作用于径向函数的情形。通过空间分数阶扩散方程验证了这一主要结果。此外，本文还研究了一维情形，建立了黎曼（即对称黎曼–费勒）分数阶导数的梅林变换。这一维结果修正了文献中已有的一个公式。当 Riesz分数阶导数作用于对称函数时，还可得到进一步的结果，尤其是其与 Caputo 分数阶导数和 Riemann–Liouville分数阶导数之间的关系。

关键词 分数阶微积分（主要） · 分数阶拉普拉斯算子 · 梅林变换 · 径向函数 · Riesz分数阶导数 · 对称Riesz–Feller分数阶导数 · 空间分数阶扩散方程 · L´évy稳定密度 · L´évy飞行 · 反常扩散

数学主题分类（2010）26A33（主要） · 47G30 · 35S05 · 44A15 · 35R11

Gianni Pagnini[1, 2, *]1BCAM – 巴斯克应用数学中心，Alameda de Mazarredo 14，E-48009 Bilbao，巴斯克地区 – 西班牙2Ikerbasque – 巴斯克科学基金会，Plaza Euskadi 5，E-48009 Bilbao，巴斯克地区 – 西班牙 电子邮箱：gpagnini@bcamath.org * 通讯作者 ORCID ID：orcid.org/0000-0001-9917-4614 Claudio Runfola[3]3独立研究员 电子邮箱：claudio.runfola@gmail.com

1 引言

分数阶拉普拉斯算子 [6, 26], 或分数阶拉普拉斯算子，是分数阶微积分理论中的一个相关例子，属于非局部伪微分算子。在无界区域中，分数阶拉普拉斯算子至少有十种等价定义 [25], ；然而，在有界区域中，这种等价性并不成立，参见例如 [9, 14, 46]。本文展示了，当分数阶拉普拉斯算子作用于径向函数时，可以基于梅林变换给出无界区域中的另一种等价定义。实际上，梅林变换在分数阶微积分中发挥着显著作用，参见例如 [1, 16, 30–32], ，本文的结果也进一步支持了这一点。

更具体地说，当分数阶拉普拉斯算子作用于勒贝格空间 $\mathcal{L}^p$ （其中 $p \in [1, \infty)$）时，这种等价关系成立；在无穷远处趋于零的连续函数空间以及有界一致连续函数空间 [25]中也成立。出于本文的目的，并为使行文简洁，我们假设函数在 $\mathbb{R}^n$ 中具有足够好的性质，且满足 $n \in \{1, 2, \dots\}$，从而所讨论的公式都有意义。特别地，我们考虑 $\mathbb{R}^n$ 中的径向函数，这些函数是径向施瓦茨–布鲁阿函数，也就是说，当自变量取较大值时，它们及其所有导数都迅速趋于零，因此我们可以使用 N. Ormerod [37]此前推导的一个结果。我们将 $\mathbb{R}^n$ 中的分数阶拉普拉斯算子记为 $\mathscr{L} = -(-\Delta)^{\alpha/2}$，其中 $\alpha \in$ （0, 2）。当 $\alpha = 2$时，可得到经典拉普拉斯算子 Δ。有关分数阶拉普拉斯算子技术细节的读者，可参阅 C. Bucur 和 E. Valdinoci 的著作 [6], ；有关梅林变换技术细节的读者，可参阅 O.I. Marichev 的著作 [33] ，或 R.B. Paris 和 D. Kaminski 的著作 [41]。

在开始之前，我们还想提醒一点：分数阶拉普拉斯算子除了在分数阶微积分中发挥作用外，本身也是一种特殊的非局部算子。特别是，已有研究证明，所有函数在局部意义下都是 s-调和的，其误差至多为一个小量 [12] ，这里的调和性是从 $\alpha/2 = s$ 阶分数阶拉普拉斯算子的意义下定义的。事实上，这完全是分数阶拉普拉斯算子的非局部性所导致的，因为作为近似的 s-调和函数是在整个 $\mathbb{R}^n$ 上定义的，因此，通过谨慎选择参考区间 [24] 之外的函数值，就可以实现这种近似。对于任意其他非局部算子 [12], 类似的性质并不成立。这一结果已在文献 [13,24,55] 中得到进一步研究。

我们首先回顾热半群定义 [25,26,49] （或博赫纳定义 [3]）

$$\mathscr{L}u = \frac{-1}{\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^\infty (e^{t\Delta}u - u) \frac{dt}{t^{1+\alpha/2}}, \quad \alpha \in (0, 2), \tag{1.1}$$

其中 $e^{t\Delta}$ 是热方程的传播子，这意味着 $\rho(x,t) = e^{t\Delta}u(x) : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ 满足

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \Delta\rho, \quad \rho(x, 0) = u(x). \tag{1.2}$$

然后，对 (1.1) 应用傅里叶变换，我们得到分数阶拉普拉斯算子的另一种等价定义。特别地，分数阶拉普拉斯算子可表示为一个傅里叶乘子，其著名符号为

$$\mathscr{F}(\mathscr{L}u)(\kappa) = -|\kappa|^{\alpha}\mathscr{F}u(\kappa)\,, \quad \kappa \in \mathbb{R}^n\,. \tag{1.3}$$

注意到由 (1.2) 可得 $\mathscr{F}\rho(\kappa) = e^{-|\kappa|^2 t}\mathscr{F}u(\kappa)$，其中 $|\kappa| = \sqrt{\kappa\cdot\kappa}$ 和 $|\kappa|^{\alpha} = (|\kappa|^2)^{\alpha/2}$，并记住对于 $s \in \mathbb{C}$，有 $\int_0^{\infty} (e^{-y} - 1)\, y^{s-1}\, dy = \Gamma(s)$，且 $-1 < \Re(s) < 0$ [56, Chapter XII]；该结果可由伽马函数通过 Cauchy– Saalsch¨utz 表示的解析延拓得到，另见 [53, Chapter 3] 及 [41, 梅林变换表]。

分数阶拉普拉斯算子还与所谓的黎曼势有关，I^{α} 其定义为

$$I^{\alpha}u(x) = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)}\int_{\mathbb{R}^n} u(x+z)|z|^{-n+\alpha}\, dz\,, \quad \gamma_n(\alpha) = \frac{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}{2^{\alpha}\pi^{n/2}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\,, \tag{1.4}$$

其中 $\alpha \neq n + 2m$、 $m = 0$ 为 1、2、.....，当 $0 < \alpha < n$ 时收敛；也就是说，当 $n \geq 2$ 时 $\alpha \in (0, 2)$，而当 $n = 1$ 时 $\alpha \in (0, 1)$，参见例如 [44, 45]。事实上，由黎曼势 (1.4) 的左逆还可得到分数阶拉普拉斯算子的另一个等价定义 [25, 45]。实际上，积分 (1.4) 最初由 M. Riesz 于 20 世纪 40 年代末引入，用于研究波动方程的柯西问题，目的是将解写成闭式 [43]。事实上，算子 (1.4) 定义了一个具有分数阶指标的卷积算子族。

在本文中，我们基于梅林变换证明了分数阶拉普拉斯算子的另一个等价定义。

当 $n = 1$ 时，黎曼势 (1.4) 的左逆称为黎曼分数阶导数，此处记作 $\mathscr{D}_x^{\alpha}$ [7]。因此，在一维情形下，分数阶拉普拉斯算子 (1.3) 的符号与黎曼分数阶导数的符号相同，因为其中只涉及傅里叶变量的模。通过以下涉及其符号的等式，突出其与二阶导数（即一维拉普拉斯算子）的关系，可以写出黎曼分数阶导数 $-|\kappa|^{\alpha} = -\left(|\kappa|^2\right)^{\alpha/2}$ [31]，然后，类比地，可以形式上采用以下记号 $\mathscr{F}^{-1}(\mathscr{F}\mathscr{D}_x^{\alpha}) = \mathscr{D}_x^{\alpha}$: $= -\left(-d^2/dx^2\right)^{\alpha/2}$ 当 $x \in \mathbb{R}$ [15] 时。此外，我们在此指出，当 $n = 1$ 时，W. Feller 将黎曼势 (1.4) 推广到了任意复数 α，其中 $\Re(\alpha) > 0$，并引入了另一个参数 θ，该参数与算子的不对称性 [15] 有关。具体而言，沿用 M. Riesz 的方法，W. Feller 通过对左、右侧 Riemann–Liouville–Weyl 算子进行线性组合并求其逆，构造了一族一维伪微分算子 [15,17]。此外，受 S. Bochner [3] 所开展的研究启发——该研究旨在将标准扩散推广到 L´evy 稳定密度的广义扩散方程——W. Feller 给出了这类广义算子，如今称为黎曼–费勒

分数阶导数，用于描述收敛至 Lévy 稳定密度的扩散过程，其依据是每个稳定密度都定义了一个变换半群 [15]。最后，Riesz–Feller分数阶导数的符号为 $-|\kappa|^{\alpha}e^{i(\operatorname{sgn}\kappa)\theta\pi/2}$，其中 $\alpha\in(0,2)$，且 $|\theta|\le\min\{\alpha,2-\alpha\}$。因此，当 $\theta=0$ 时，对称Riesz–Feller分数阶导数就是Riesz分数阶导数，即当Riesz–Feller导数为对称算子时，它与 $\mathbb{R}^n$中对径向函数的要求一致。实际上，Riesz分数阶导数，或者更一般的双侧分数阶导数，仍然是近期研究的课题，参见例如 [2,7,38]。对于 $\alpha\in(0,2)$，Riesz分数阶导数可以明确写成正则化积分形式 [31, , 参见公式（2.6）和脚注 3]。

$$\mathscr{D}_x^{\alpha}f(x)=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\pi}\sin\frac{\pi\alpha}{2}\int_0^{\infty}\frac{f(x+z)-2f(x)+f(x-z)}{z^{1+\alpha}}\,dz\,. \tag{1.5}$$

利用此处推导的分数阶拉普拉斯算子梅林定义的一维情形，我们还建立了作用于对称函数的黎曼分数阶导数与 Caputo 分数阶导数及 Riemann–Liouville分数阶导数之间的关系。

下文首先在第 2 节介绍并讨论主要结果，随后在第 3 节给出证明。第 4 节中，我们将应用（并检验）所得结果来求解空间分数阶扩散方程。最后，第 5 节报告结论与未来研究方向。

2 主要结果

定理1 设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个径向函数，$\mathscr{M}(\mathscr{L}f)(s)$ 是其梅林变换，其中 $s\in\mathbb{C}$。分数阶拉普拉斯算子 $\mathscr{L}=-(-\Delta)^{\alpha/2}$ 的另一种定义（其中 $\alpha\in(0,2)$）与定义 (1.1) 和 (1.3) 等价，具体而言，依据参考文献 *[25]*，该定义为

$$\mathscr{M}(\mathscr{L}f)(s)=-2^{\alpha}\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left[\frac{n-(s-\alpha)}{2}\right]}{\Gamma\left(\frac{n-s}{2}\right)\Gamma\left[\frac{s-\alpha}{2}\right]}\mathscr{M}f(s-\alpha)\,,\quad s\in\mathbb{C}\,, \tag{2.1}$$

对于 $s\neq0$ 和 $0<\Re(s)<n$。

由定理1及 $n=1$，可得以下适用于 Riesz分数阶导数 (1.5) 的推论

推论1 当阶数为 $\alpha\in(0,2)$ 的 Riesz frational derivative $\mathscr{D}_x^{\alpha}$ (1.5) 作用于对称函数 $f(x)=f(|x|)$ 时，若 $x\in\mathbb{R}$，则有

$$\mathscr{M}(\mathscr{D}_x^{\alpha}f)(s)=-\frac{\Gamma(s)\cos\left(\frac{\pi}{2}s\right)}{\Gamma(s-\alpha)\cos\left[\frac{\pi}{2}(s-\alpha)\right]}\mathscr{M}f(s-\alpha)\,,\quad s\in\mathbb{C}\,, \tag{2.2}$$

对于 $s\neq0$ 和 $0<\Re(s)<1$。

公式（2.2）修正了此前为推导一种新型 Hilfer 型分数阶导数推广形式而得到的一个类似函数方程 [22, 公式（53）]。在该文献中，作者通过将 Riesz 分数阶导数视为 Riemann–Liouville 型伪微分算子，重新获得了其梅林变换的表达式 [22, 公式（42）]。然而，该公式在应用于空间分数阶扩散方程时并不适用。本文在此报告了公式（2.1）在求解空间分数阶扩散方程方面的有效性，以及公式（2.2）在一维情形下的有效性。

此外，对一维情形的研究可以推导出以下在分数阶微积分理论中颇具意义的函数关系。令 $x \in \mathbb{R}$，并设 $\mathbb{D}^{\alpha}_{|x|}$ 和 $\mathcal{D}^{\alpha}_{|x|}$ 分别为关于 $|x| \in \mathbb{R}^{+}$ 的 Caputo 意义下和 Riemann–Liouville 意义下的 $\alpha > 0$ 阶分数阶导数，则以下定理可由推论1所得结果证明。

定理2 设 $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个对称函数，使得 $\phi(x) = \phi(|x|)$，并设 $\mathscr{D}^{\alpha}_{x}$ 和 $\mathbb{D}^{\alpha}_{|x|}$ 分别是关于 x 和 $|x|$ 的黎曼分数阶导数和 Caputo分数阶导数，阶数为 $0 \le m-1 < \alpha < m$，其中 $m \in \mathbb{N}$。若满足以下条件#+#+#+#+

$$i)\ \lim_{|x|\to 0} \phi^{(j)}(|x|)\,|x|^{s-\alpha+j} = 0\,, \quad ii)\ \lim_{|x|\to +\infty} \phi^{(j)}|x|^{s-\alpha+j} = 0\,, \tag{2.3}$$

对于具有 $j = 0$、.....、$m-1$ 和适当 $\Re(s)$ 的情形，有如下结论

$$\mathscr{D}^{\alpha}_{x}\phi(|x|) = \int_{0}^{\infty} \left\{\mathbb{D}^{\alpha}_{\xi}\phi(\xi)\right\} \mathscr{E}(|x|/\xi)\,\frac{d\xi}{\xi}\,, \tag{2.4}$$

其中，对于 $\xi \in \mathbb{R}^{+}$，核 $\mathscr{E}(\xi)$ 定义为

$$\mathscr{E}(\xi) = \frac{2}{\pi}\frac{\sin(\pi\alpha/2)}{1-\xi^{2}} - \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\,\xi\delta(\xi-1)\,.$$

推论2 当 $\alpha = 1$ 时，有 $\mathbb{D}^{1}_{\xi} = d/d\xi$，其中 $\xi \in \mathbb{R}^{+}$。因此，利用莱布尼茨积分法则以及 ϕ 的对称性，使得 $d\phi/dx = \mathrm{sgn}(x)\,d\phi/d|x|$，其中 $x \in \mathbb{R}$，由定理2可得

$$\mathscr{D}^{1}_{x}\phi(|x|) = -\frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(|y|)}{x-y}\,dy\,. \tag{2.5}$$

公式 (2.5) 此前由 W. Feller 在对称柯西密度这一特殊情形下推导得出；他通过寻找由 P. L ´evy *[15]* 引入的稳定密度所解的空间分数阶扩散方程，得到了该公式。

备注 1 公式 (2.5) 仅对对称函数成立。这一对称性约束隐含于 W. Feller [15]，在原始推导中研究的对称扩散过程之中，但在综述中介绍算子 $\mathscr{D}^{1}_{x}$ 时确实被省略了，参见例如 [2,31]。另一方面，公式 (2.5) 是一项重要补充，而近期关于黎曼分数阶导数或更一般的双侧分数阶导数 [7, 38] 的研究中均未提及这一补充。

推论3 当 $\alpha = 2$ 时，利用 δ 函数的性质，由定理2可得

$$\mathscr{D}_x^2 \phi(|x|) = \mathbb{D}_{|x|}^2 \phi(|x|)\,. \tag{2.6}$$

定理 3 设 $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个对称函数，满足 $\phi(x) = \phi(|x|)$，并设 $\mathscr{D}_x^\alpha$ 和 $\mathcal{D}_{|x|}^\alpha$ 分别为关于 x 和 $|x|$、阶数为 $0 \le m-1 < \alpha < m$ 且满足 $m \in \mathbb{N}$ 的黎曼和 Riemann–Liouville 分数阶导数。如果式 (2.3) 中的条件 $i)$ 和 $ii)$ 均成立，并且还满足条件 $\phi^{(j)}(0^+) = 0$，那么对任意 $j = 0, \dots, m-1$，有

$$\mathscr{D}_x^\alpha \phi(|x|) = \int_0^\infty \left\{ \mathcal{D}_\xi^\alpha \phi(\xi) \right\} \mathscr{E}(|x|/\xi)\, \frac{d\xi}{\xi}\,, \tag{2.7}$$

其中，核 $\mathscr{E}$ 的定义与定理2相同。

推论4 还可以针对 Miller–Ross 分数阶导数证明一个与定理2和定理 3 类似的定理。实际上，在给出使 Miller–Ross 分数阶导数的梅林变换等于 Caputo 和 Riemann–Liouville 分数阶导数的梅林变换所需的条件后，可以推导出与公式 (2.4) 和 (2.7) 类似、具有相同核 $\mathscr{E}$ (3.20) 的公式 *[42,*第 2.10 节*.5]*。

3 证明及进一步结果

3.1 定理1的证明

在证明定理1之前，我们需要回顾一个先前的结果，该结果涉及 $\mathbb{R}^n$ 中径向函数的傅里叶变换与梅林变换。该结果最初由 N. Ormerod $[37,$ 定理 $1]$证明。实际上，N. Ormerod 推导这一结果，是为了给出一个已有结论的另一种证明方法；该结论将 $\mathbb{R}^n$ 中径向函数的傅里叶变换与适当的贝塞尔变换联系起来，此前曾通过不同的方法推导得出 $[4, 48]$。然而，对我们的证明有用的正是 N. Ormerod 给出的这一关于梅林变换的中间步骤。

设适当函数 $g:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 的傅里叶变换定义为

$$\mathscr{F} g(\kappa) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\kappa\cdot x}\, g(x)\, dx\,, \quad \kappa \in \mathbb{R}^n\,, \tag{3.1}$$

那么我们有公式 (1.3)。此外，设另一个适当函数 $\varphi:\ \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ 的梅林变换定义为

$$\mathscr{M}\varphi(s) = \int_0^\infty \varphi(r)\, r^{s-1}\, dr\,, \quad s \in \mathbb{C}\,. \tag{3.2}$$

然后，设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 中的径向函数，即 $f(x) = f(r)$，其中 $r = |x| \in \mathbb{R}_0^+$。用我们的记号，Ormerod 的定理表述为:

定理4（Ormerod [37]）函数 $\mathscr{M}f(s)$ 存在对所有 $s \neq 0$ 均成立的解析延拓，并满足函数方程

$$\mathscr{M}f(s) = \pi^{n/2-s}\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-s}{2}\right)}\mathscr{M}(\mathscr{F}'f)(n-s)\,, \tag{3.3}$$

其中，对于适当的函数 g，算子 $\mathscr{F}'$定义为 $\mathscr{F}'g(\kappa) = \mathscr{F}g(2\pi\kappa)$。更具体地说，定理4允许得到恒等式 [37, 方程 (3)]。

$$\int_0^\infty f(r)\, r^{s-1}\, dr = \pi^{n/2-s}\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-s}{2}\right)}\int_0^\infty \{\mathscr{F}'f(r)\}\, r^{n-s}\, dr\,, \tag{3.4}$$

对于 $s \neq 0$ 和 $0 < \Re(s) < n$。现在，我们可以证明定理1。

证明 通过使用定理4中的公式 (3.3)，我们可以写出函数方程

$$\mathscr{M}(\mathscr{L}f)(s) = \pi^{n/2-s}\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-s}{2}\right)}\mathscr{M}\{\mathscr{F}'(\mathscr{L}f)\}(n-s)\,. \tag{3.5}$$

采用算子 $\mathscr{F}'$ 后，径向函数 f 的公式 (1.3) 可写为$\mathscr{F}'(\mathscr{L}f)(\kappa) = -(2\pi|\kappa|)^{\alpha}\mathscr{F}'f(|\kappa|)$。因此，(3.5) 中的项 $\mathscr{M}\{\mathscr{F}'(\mathscr{L}f)\}(n-s)$ 为

$$\begin{aligned}
\mathscr{M}\{\mathscr{F}'(\mathscr{L}f)\}(n-s) &= -(2\pi)^{\alpha}\int_0^\infty |\kappa|^{\alpha}\mathscr{F}'f(|\kappa|)|\kappa|^{n-s-1}\, d|\kappa| \\
&= -(2\pi)^{\alpha}\mathscr{M}\{\mathscr{F}'f\}(n-(s-\alpha)) \\
&= -2^{\alpha}\pi^{-n/2+s}\frac{\Gamma\left[\frac{n-(s-\alpha)}{2}\right]}{\Gamma\left(\frac{s-\alpha}{2}\right)}\mathscr{M}f(s-\alpha)\,,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

其中，最后一步在将 s 替换为 $s-\alpha$ 后，使用了定理4来计算项 $\mathscr{M}\{\mathscr{F}'f\}(n-(s-\alpha))$。最后，将 (3.6) 的最后一行代入 (3.5)，并回顾 (3.3) 和恒等式 (3.4) 成立的条件，即可得到公式 (2.1)。证明完毕。□

3.2 推论1的证明

在证明推论1之前，我们先回顾伽马函数的以下性质

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1/2}}{\sqrt{2\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)\,, \tag{3.7}$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z}\,, \tag{3.8}$$

以及三角性质

$$\sin\left[\frac{\pi}{2}(1-\phi)\right] = \cos\left[\frac{\pi}{2}\phi\right]\,. \tag{3.9}$$

利用公式 (3.7)、(3.8) 和 (3.9)，当 $n=1$ 时，我们可以由公式 (2.1) 推导出公式 (2.2)。

证明 将（3.7）应用于公式（2.1）中的项 $\Gamma(s/2)$ 和 $\Gamma[(s-\alpha)/2]$ 后，后者可写为

$$\mathscr{M}(\mathscr{L}f)(s) = -\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-\alpha)}\frac{\Gamma\left(\frac{s-\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left[\frac{n-(s-\alpha)}{2}\right]}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\Gamma\left[\frac{n-s}{2}\right]}\mathscr{M}f(s-\alpha)\,, \tag{3.10}$$

对于 $s\in\mathbb{C}$，其中 $s\neq 0$ 且 $0<\Re(s)<n$。令 $n=1$，并利用性质 (3.8) 和 (3.9)，则 (3.10) 的分子满足

$$\begin{aligned}\Gamma\left[\frac{1-(s-\alpha)}{2}\right]\Gamma\left[\frac{1+(s-\alpha)}{2}\right] &= \Gamma\left[\frac{1-(s-\alpha)}{2}\right]\Gamma\left[1-\frac{1-(s-\alpha)}{2}\right]\\ &= \frac{\pi}{\sin\left[\pi(1-(s-\alpha))/2\right]}\\ &= \frac{\pi}{\cos\left[\pi(s-\alpha)/2\right]}\,,\end{aligned} \tag{3.11}$$

而 (3.10) 的分母满足

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1-s}{2}\right)\\ &= \frac{\pi}{\sin\left[\pi(1-s)/2\right]}\\ &= \frac{\pi}{\cos(\pi s/2)}\,.\end{aligned} \tag{3.12}$$

最后，将 (3.11) 和 (3.12) 代入 (3.10)，并令 $n=1$，得到公式 (2.2)。因此，推论1得证。□

3.3 定理2和定理3的证明及进一步结果

令 J^α 为阶数为 $\alpha>0$ 的黎曼–刘维尔分数阶积分，其定义为

$$J^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^y (t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)\,d\tau\,,\quad t\in\mathbb{R}^+\,, \tag{3.13}$$

那么，阶数为 $m-1<\alpha<m$ 且满足 $m\in\mathbb{N}$ 时，Caputo分数阶导数 $\mathbb{D}_t^\alpha$ 和 Riemann–Liouville 分数阶导数 $\mathcal{D}_t^\alpha$ 定义为

$$\mathbb{D}_t^\alpha f(t) = J^{m-\alpha}\frac{d^m f}{dt^m}\,, \tag{3.14}$$

$$\mathcal{D}_t^\alpha f(t) = \frac{d^m}{dt^m}J^{m-\alpha}f(t)\,. \tag{3.15}$$

特别是，$\mathbb{D}_t^\alpha$ 与 $\mathcal{D}_t^\alpha$ 之间存在如下值得注意的关系 [31]

$$\mathbb{D}_t^\alpha f(t) = \mathcal{D}_t^\alpha f(t) - \sum_{j=0}^{m-1} f^{(j)}(0^+)\frac{t^{j-\alpha}}{\Gamma(j-\alpha+1)}\,. \tag{3.16}$$

有趣的是，黎曼分数阶导数 (2.2) 的梅林变换与 Caputo 分数阶导数 [42, 第 2.10 节4]的梅林变换相差一个由三角函数构成的因子。具体而言，有

注 2 设 $\phi:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为一个对称函数，满足 $\phi(x)=\phi(|x|)$，且以下极限成立

$$i)\ \lim_{|x|\to 0}\phi^{(j)}(|x|)\,|x|^{s-\alpha+j}=0\,,\quad ii)\ \lim_{|x|\to+\infty}\phi^{(j)}|x|^{s-\alpha+j}=0\,,$$

对于 $j=0$、.....、$m-1$ 以及适当的 $\Re(s)$，那么将 (2.2) 乘以并除以 $\Gamma[1-(s-\alpha)]\Gamma(1-s)$，利用 (3.8)，并记住 $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$，可得

$$\mathscr{M}(\mathscr{D}_x^\alpha f)(s)=-\frac{\sin[\pi(s-\alpha)/2]}{\sin(\pi s/2)}\,\mathscr{M}(\mathbb{D}_{|x|}^\alpha f)(s)\,,\tag{3.17}$$

对于 $s\neq 0$ 和 $0<\Re(s)<1$。

此外，由关系式 (3.16) 可得，

注 3 当 $f^{(j)}(0^+)=0$ 满足 $j=0,\dots,m-1$ 时，Caputo 意义下的分数阶导数 (3.14) 与 Riemann– Liouville 意义下的分数阶导数 (3.15) 相等。因此，根据注 2，在相同条件下，下列公式成立。

$$\mathscr{M}(\mathscr{D}_x^\alpha f)(s)=-\frac{\sin[\pi(s-\alpha)/2]}{\sin(\pi s/2)}\,\mathscr{M}(\mathcal{D}_{|x|}^\alpha f)(s)\,,\tag{3.18}$$

对于 $s\neq 0$ 和 $0<\Re(s)<1$。

注 4 利用公式 $\sin(\theta-\pi)=-\sin\theta$，由公式 (3.17) 以及 (3.18) 可得，当 $\alpha=2$ 时，涉及的两个梅林变换相同。因此，正如预期的那样，对于依赖于 $|x|$的对称函数，涉及的两个算子也满足该恒等式。

利用注记2，我们可以如下证明定理2。

证明 我们注意到，公式 (3.17) 可以理解为两个梅林变换的乘积。特别地，我们引入一个函数 $\mathscr{E}$，使得

$$\mathscr{M}\mathscr{E}(s)=-\frac{\sin[\pi(s-\alpha)/2]}{\sin(\pi s/2)}=\frac{\sin[\pi(\alpha-s)/2]}{\sin(\pi s/2)}\,,\tag{3.19}$$

对于 $0<\Re(s)<1$。因此可得，函数 $\mathscr{E}(\xi)$ 满足 $\xi\in\mathbb{R}^+$ （计算过程见附录）

$$\mathscr{E}(\xi)=\frac{2}{\pi}\frac{\sin(\pi\alpha/2)}{1-\xi^2}-\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\xi\delta(\xi-1)\,,\quad \xi\in\mathbb{R}^+\,.\tag{3.20}$$

最后，利用梅林变换的卷积公式，由(3.17)可得(2.4)。定理2的证明至此完成。□

利用注释 3，我们可以证明定理 3。

证明 采用定理2的相同推理，我们将公式 (3.18) 解释为两个梅林变换的乘积。因此，再次使用梅林变换的卷积公式，可以引入相同的函数 $\mathscr{E}$，并由 (3.18) 得到 (2.7)。定理 3 的证明至此完成。□

4 空间分数阶扩散方程的应用

空间分数阶扩散方程是将拉普拉斯算子替换为分数阶拉普拉斯算子的扩散方程，参见例如 [18]。一维情形也如此，即将空间二阶导数替换为阶数为 $\alpha \in (0,2)$ [16,31] 的黎曼（或黎曼–费勒）空间分数阶导数。

众所周知，初始数据为 $\delta(x)$ 的标准扩散柯西问题，其解是高斯分布，也称正态分布。在这种情况下，若 $t>0$ 是时间变量，则解具有自相似性，其标度律为 $t^{-1/2}$，这也决定了粒子位移标准差随时间线性增长的规律。对于空间分数阶扩散，在相同设定下，解是具有标度律 $t^{-1/\alpha}$ 的 L´évy 稳定分布，其中 $\alpha \in$ 属于 (0,2)，且标准差无穷大。事实上，空间分数阶扩散与 Lévy 稳定密度之间的关系确由 W. Feller [15] 建立，正如第 1 节所述。

空间分数阶扩散背后的扩散过程称为 L´évy 飞行，它们是马尔可夫过程，其跳跃幅度分布具有幂律衰减尾部 [8]，因此行走者分布收敛于 Lévy 稳定密度，参见例如 [17,47,54]。因此，空间分数阶扩散方程是 Lévy 飞行的控制方程。这些过程在物理学文献中占有重要地位，常用于模拟无序介质中的反常扩散 [5,35,36,39,47,58]。然而，在考虑非局部模型的实验影响时，也会出现一些问题 [20]。

尽管确定跳跃幅度分布的精确形式并非判断收敛所必需， [23,34,47], 但实际的收敛时间尺度确实可能取决于跳跃幅度分布的具体形式，某些双峰分布就是如此。 [40]这会对最优搜索或觅食模型产生影响，因为这些模型忽略了跳跃分布的精确形式，尤其是在暂留性和回返性方面。 [40]

假设扩散系数为单位值，其物理量纲为 $[L]^2[T]^{-\alpha}$，则空间分数阶扩散方程为

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \mathscr{L} P = -(-\Delta)^{\alpha/2} P\,, \quad P(x;0)=\delta(x)\,, \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n \times (0,\infty)\,. \tag{4.1}$$

对（4.1）两边应用梅林变换（3.2）。由定理4，见（3.3），可知左端为

$$\frac{\partial \mathscr{M} P}{\partial t} = \pi^{n/2-s} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-s}{2}\right)} \frac{\partial}{\partial t} \mathscr{M}(\mathscr{F}' f)(n-s)\,, \tag{4.2}$$

并且根据定理1，参见（2.1），我们有右侧可写为

$$\mathscr{M}(\mathscr{L} P)(s) = -2^{\alpha} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left[\frac{n-(s-\alpha)}{2}\right]}{\Gamma\left(\frac{n-s}{2}\right) \Gamma\left[\frac{s-\alpha}{2}\right]} \mathscr{M} P(s-\alpha)\,, \tag{4.3}$$

并且，通过将定理4的公式（3.3）应用于项 $\mathscr{M}P(s-\alpha)$，我们最终得到

$$\mathscr{M}(\mathscr{L}P)(s) = -2^{\alpha}\pi^{n/2-(s-\alpha)}\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-s}{2}\right)}\mathscr{M}(\mathscr{F}'P)(n-(s-\alpha))\,. \tag{4.4}$$

通过比较 (4.2) 和 (4.4)，可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{M}(\mathscr{F}'P)(n-s) = -(2\pi)^{\alpha}\mathscr{M}(\mathscr{F}'P)(n-(s-\alpha))\,, \tag{4.5}$$

其可显式写为

$$\int_0^{\infty}\frac{\partial\mathscr{F}'P}{\partial t}|\kappa|^{(n-s)-1}\,d|\kappa| = -(2\pi)^{\alpha}\int_0^{\infty}\mathscr{F}'P(|\kappa|)\,|\kappa|^{(n-(s-\alpha))-1}\,d|\kappa|\,, \tag{4.6}$$

其中，在左端，梅林变换与对时间的求导可以交换。最后，通过令被积函数相等并求解 $\mathscr{F}'P$，得到

$$\mathscr{F}'P(|\kappa|) = e^{-(2\pi|\kappa|)^{\alpha}t}\,, \tag{4.7}$$

这意味着 $P(x;\,t) = t^{-1/\alpha}\mathscr{P}(|x|t^{-1/\alpha})$ 是稳定参数为 $\alpha\in(0,2)$ 的径向 Lévy 稳定分布。

当在 (4.1) 的右端使用一维情形下的空间分数阶导数 (1.5)，即对称里斯–费勒分数阶算子，并通过公式 (2.2) 应用推论1时，结论同样成立。

5 结论

本文基于梅林变换推导出了分数阶拉普拉斯算子的另一种定义。在无界区域中，该定义等价于其他一些已有定义，而这些定义之间的等价性已在文献 [25] 中讨论过。一般而言，这种梅林定义可用于求解径向函数的空间分数阶微分方程。特别是，我们将这一结果应用于空间分数阶扩散方程；这是一个涉及分数阶拉普拉斯算子的典型例子。

考虑一维情形时，分数阶拉普拉斯算子化为黎曼（即对称的黎曼–费勒）分数阶导数，径向性质则转化为对称性质。在这种情形下，我们的结果修正了此前对黎曼伪微分算子的梅林定义所作的确定 [22]。此外，我们还确立了黎曼分数阶导数与 Caputo 导数及 Riemann–Liouville 分数阶导数之间的关系。

鉴于近期为广义分数阶微积分 [10,19,27–29,52] 建立严谨理论所做的努力，以及相应的未来发展目标 [11,21],，本研究对这一计划的贡献有两方面。

对于多维算子 [52], , 我们强调，将分数阶拉普拉斯算子这一典型的多维非局部算子置于梅林积分变换理论的框架下（定理1），使得相关梅林变换工具得以应用。这是推导新结果的一种强有力工具 [33, 41, 57]。事实上，梅林框架在分数阶微积分中的成功应用，以及梅林–巴恩斯积分的应用，无论是在理论研究成果方面（参见例如 [1,30,32],），还是在分数阶方程的求解技术方面（参见例如 [16, 31]），都已得到充分证实。

此外，在考虑一维情形时，分数阶拉普拉斯算子的梅林定义允许建立双侧分数阶导数的梅林定义（推论1）。这一结果是新的，并且与单侧导数的已知结果 [30, 42] 相衔接。通过比较双侧和单侧分数阶导数的梅林定义，可以揭示它们之间的关系（定理2和定理3）。这一关系是一项关键成果，它有望将目前仅适用于单侧算子的理论基础推广至双侧算子，因为该理论基础是建立在索宁方程 [19, 29] 之上的。

附录：核函数 $\mathscr{E}(\xi)$ 的推导 (3.20)

利用正弦函数规则 $\sin(\theta+\omega) = \sin\theta\cos\omega + \cos\theta\sin\omega$，公式 (3.19) 可以改写为

$$\mathscr{M}\mathscr{E}(s) = \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\cot\left(\frac{\pi s}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right),$$

然后我们希望得到两个函数 $\varphi_1(r)$ 和 $\varphi_2(r)$，使得 $\mathscr{M}\varphi_1 = \cot(\pi s/2)$ 和 $\mathscr{M}\varphi_2 = 1$。

注意到由 [33, 公式（2.24）] 可知，

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{1-x}\,dx = \pi\cot\pi s\,, \quad \Re(s)\in(0,1)\,,$$

在替换 $x \to r^2$ 后，我们得到第一对

$$\mathscr{M}\varphi_1(s) = \frac{\pi}{2}\cot\frac{\pi s}{2}\,, \quad \text{with} \quad \varphi_1(r) = \frac{1}{1-r^2}\,.$$

现在，设 $\mathscr{M}^{-1}$ 为梅林逆变换，那么对于给定函数$\psi(r)$，有 $\psi = \mathscr{M}^{-1}\mathscr{M}\psi$。因此，交换积分次序后，我们得到

$$\psi(r) = \int_0^\infty \psi(y)\left\{\mathscr{M}^{-1}y^s\right\}\frac{dy}{y}\,.$$

该积分可理解为梅林卷积积分，其中按定义 $\mathscr{M}^{-1}y^s = q(r/y)$；利用 δ 函数的性质，可得 $q(z) = z\delta(z-1)$，其中 $z = r/y$。函数 $q(r/y)$ 与$\mathscr{M}q = y^s$ 一致。因此，令 $y=1$，我们还得到第二组

$$\mathscr{M}\varphi_2(s) = 1\,, \quad \text{with} \quad \varphi_2(r) = r\delta(r-1)\,.$$

最后得到

$$\mathscr{M}\mathscr{E}(s) = \frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\mathscr{M}\varphi_1(s) - \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\mathscr{M}\varphi_2(s)\,, \quad \Re(s)\in(0,1)\,,$$

由此可得公式 (3.20)。

然而，设定 $\mathscr{M}^{-1}y^s = q^*(r/y) = \delta(r/y-1)$ 也适用于借助 δ 函数的性质求解该积分，并且与梅林卷积的解释以及公式 $\mathscr{M}q^* = y^s$ 一致。因此，在我们的情况下，通过设定 $y=1$，函数 $\varphi_2(r)$ 的另一种合适选择是$\varphi_2(r) = \delta(r-1)$。此外，若不考虑梅林卷积的解释，设定 $\mathscr{M}^{-1}y^s = q'(r,y) = y\delta(r-y)$ 或 $\mathscr{M}^{-1}y^s = q''(r,y) = r\delta(r-y)$ 也同样适用，且与公式 $\mathscr{M}q' = \mathscr{M}q'' = y^s$ 一致。实际上，这一处理并未解决由 δ 函数的不同重排方式所产生的歧义，例如 $a\delta(r-a)$ 和 $r\delta(r-a)$，其中 $a>0$，它们给出相同的梅林变换。文献 $[50,51]$ 中对梅林变换和 δ 函数有更详尽的分析。

致谢 作者谨向 F. Mainardi 教授和 S. Vitali 博士致谢，感谢他们提供的有益讨论和提示，这些内容蕴藏于本研究的字里行间。GP 得到巴斯克政府通过 BERC 2022–2025 计划提供的支持，以及科学与创新部的支持：BCAM Severo Ochoa 认证 CEX2021-001142-S / MICIN / AEI / 10.13039/501100011033。

利益冲突

GP 是期刊 *Fractional Calculus and AppliedAnalysis* 编委会成员。同行评审流程由一位独立编辑指导。作者声明不存在其他利益冲突。

参考文献

1. Bardaro, C., Butzer, P.L., Mantellini, I.：梅林变换框架下分数阶微积分的基础及其应用。《傅里叶分析及其应用杂志》21，961–1017（2015） 2. Bayın, S.S.：Riesz 导数的定义及其在空间分数阶量子力学中的应用。《数学物理杂志》57，123501（2016） 3. Bochner, S.：扩散方程与随机过程。《美国国家科学院院刊》35(7)，368–370（1949） 4. Bochner, S., Chadrasekharan, K.：《傅里叶变换》，《数学年鉴研究》，第19卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州（1949） 5. Bouchaud, J.P., Georges, A.：无序介质中的反常扩散：统计机制、模型与物理应用。《物理学报告》195，127–293（1990） 6. Bucur, C., Valdinoci, E.：《非局部扩散及其应用》，《意大利数学联合会讲义》，第20卷。施普林格，瑞士（2016）

7. Cai, M., Li, C.P.：关于 Riesz 导数。《分数阶微积分与应用分析》22(2)，287–301（2019） 8. Chechkin, A.V., Metzler, R., Klafter, J., Gonchar, V.Y.：L´évy 飞行理论导论。载于：R. Klages, G. Radons, I.M. Sokolov（编）：《反常输运：基础与应用》，第5章，第129–162页。Wiley–VCH Verlag GmbH & Co. KGaA，魏因海姆（2008） 9. Cusimano, N., Del Teso, F., Gerardo-Giorda, L., Pagnini, G.：一般区域上谱分数阶拉普拉斯算子的离散化及其狄利克雷、诺伊曼和罗宾边界条件。《SIAM 数值分析杂志》56，1243–1272（2018） 10. Diethelm, K., Garrappa, R., Giusti, A., Stynes, M.：为什么不应使用具有非奇异核的分数阶导数。《分数阶微积分与应用分析》23(3)，610–634（2020） 11. Diethelm, K., Kiryakova, V., Luchko, Y., Tenreiro Machado, J.A., Tarasov, V.E.：分数阶微积分的趋势、进一步研究方向及若干开放问题。《非线性动力学》107，3245–3270（2022） 12. Dipierro, S., Savin, O., Valdinoci, E.：所有函数在局部意义下都是 s-调和的，且误差很小。《欧洲数学学会杂志》19(4)，957–966（2017） 13. Dipierro, S., Savin, O., Valdinoci, E.：用非局部方程的解局部逼近任意函数。《几何分析杂志》29，1428–1455（2019） 14. Duo, S., Wang, H., Zhang, Y.：与分数阶拉普拉斯算子相关的非局部扩散算子的比较研究。《离散与连续动力系统》，B辑 24(1)，231–256（2019） 15. Feller, W.：关于 Marcel Riesz 势及其生成的半群的一般化。载于：《隆德大学数学研讨会公报》（《隆德大学数学研讨会通讯》），第73–81页。隆德（1952）。增刊卷，题献给 M. Riesz，专卷由´题献´给 `M. Riesz 16. Gorenflo, R., Iskenderov, A., Luchko, Y.：分数阶扩散波动方程解之间的映射。《分数阶微积分与应用分析》3(1)，75–86（2000） 17. Gorenflo, R., Mainardi, F.：空间分数阶扩散过程的随机游走模型。《分数阶微积分与应用分析》1(2)，167–191（1998） 18. Hanyga, A.：空间分数阶扩散方程的多维解。《伦敦皇家学会会刊 A 辑》457，2993–3005（2001） 19. Hanyga, A.：关于一个有争议问题的评论：广义分数阶导数不可能具有正则核。《分数阶微积分与应用分析》23(1)，211–223（2020） 20. Hilfer, R.：Bochner–L´évy–Riesz 扩散的实验含义。《分数阶微积分与应用分析》18(2)，333–341（2015） 21. Hilfer, R., Luchko, Y.：分数阶导数与积分的期望性质。《数学》7，149（2019） 22. Khan, T.U., Khan, M.A., Chu, Y.：一种新的广义 Hilfer 型分数阶导数及其在时空扩散方程中的应用。《物理学成果》22，103953（2021） 23. Klafter, J., Sokolov, I.M.：《随机游走入门：从工具到应用》。牛津大学出版社（2011）

24. Krylov, N.V.：所有函数在局部意义下都是 s-调和函数，误差很小。《函数分析杂志》277，2728–2733（2019） 25. Kwa´śnicki, M.：分数阶拉普拉斯算子的十种等价定义。《分数阶微积分与应用分析》20(1)，7–51（2017） 26. Lischke, A., Pang, G., Gulian, M., Song, F., Glusa, C., Zheng, X., Mao, Z., Cai, W., Meerschaert, M.M., Ainsworth, M., Karniadakis, G.E.：什么是分数阶拉普拉斯算子？一篇附有新结果的比较综述。《计算物理学杂志》404，109009（2020） 27. Luchko, Y.：任意阶的一般分数阶积分与导数。《对称性》13，755（2021） 28. Luchko, Y.：具有 Sonine 核的一般分数阶积分与导数。《数学》9，594（2021） 29. Luchko, Y.：具有 Sonine 核的一般分数阶导数的运算演算。《分数阶微积分与应用分析》24(2)，338–375（2021） 30. Luchko, Y., Kiryakova, V.：梅林积分变换在分数阶微积分中的应用。《分数阶微积分与应用分析》16(2)，405–430（2013） 31. Mainardi, F., Luchko, Y., Pagnini, G.：时空分数阶扩散方程的基本解。《分数阶微积分与应用分析》4(2)，153–192（2001） 32. Mainardi, F., Pagnini, G., Gorenflo, R.：分数阶扩散过程中的梅林变换与从属定律。《分数阶微积分与应用分析》6(4)，441–459（2003） 33. Marichev, O.I.：《高阶超越函数积分变换手册：理论与算法表》。Ellis Horwood，奇切斯特（1983）。 [译自俄文版（1978）]34. Meerschaert, M.M., Sikorskii, A.：《分数阶微积分的随机模型》。德古意特出版社（2012） 35. Metzler, R., Klafter, J.：反常扩散随机游走指南：一种分数阶动力学方法。《物理报告》339(1)，1–77（2000） 36. Metzler, R., Klafter, J.：随机游走的终点餐厅：反常动力学过程分数阶动力学描述的最新进展。《物理学杂志 A：数学与一般物理》37(31)，R161–R208（2004） 37. Ormerod, N.：关于径向函数傅里叶变换的一个定理。《数学分析与应用杂志》69，559–562（1979） 38. Ortigueira, M.D.：双侧及正则化黎曼–费勒导数。《数学方法与应用科学》44，8057–8069（2021） 39. Ott, A., Bouchaud, J., Langevin, D., Urbach, W.：“活性聚合物”中的反常扩散：是真正的 L´evy 飞行吗？《物理评论快报》65，2201–2204（1990） 40. Pagnini, G., Vitali, S.：我该留下还是离开？L´evy 飞行随机游走中的零尺寸跳跃。《分数阶微积分与应用分析》24(1)，137–167（2021） 41. Paris, R.B., Kaminski, D.：《渐近分析与梅林–巴恩斯积分》。剑桥大学出版社（2001） 42. Podlubny, I.：《分数阶微分方程》。学术出版社，圣迭戈（1999）

43. Riesz, M.：《黎曼–刘维尔积分与柯西问题》。《数学学报》81，1–222（1949） 44. Rubin, B.：关于黎斯势和 k-平面变换的一些反演公式。《分数阶微积分与应用分析》15(1)，34–43（2012） 45. Samko, S.G.：黎斯势算子反演的一种新方法。《分数阶微积分与应用分析》1(3)，225–245（1998） 46. Servadei, R., Valdinoci, E.：关于两种不同分数阶算子的谱。《爱丁堡皇家学会学报 A 辑：数学》144(4)，831–855（2014） 47. Shlesinger, M.F., Klafter, J., Wong, Y.M.：具有无限空间矩和时间矩的随机游走。《统计物理学杂志》27，499–512（1982） 48. Stein, E.M., Weiss, G.：《欧几里得空间上的傅里叶分析导论》，普林斯顿数学丛书，第82卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州（1972） 49. Stinga, P.R.：分数阶拉普拉斯算子与半群方法使用指南。载于：A. Kochubei, Y. Luchko（编），《分数阶微分方程》，第2卷，第235–266页。德古意特出版社，柏林、波士顿（2019） 50. S¨udland, N., Baumann, G.：关于狄拉克 δ 函数、豪斯多夫维数函数及梅林定理的梅林变换。《分数阶微积分与应用分析》7，409–420（2004） 51. S¨udland, N., Volkmann, J., Kumar, D.：应用：给出布莱克–斯科尔斯方程的解析解。《积分变换与特殊函数》30(3)，205–230（2019） 52. Tarasov, V.E.：多维空间中的一般分数阶微积分：黎斯形式。《数学》11，1651（2023） 53. Temme, N.M.：《特殊函数：数学物理经典函数导论》。威利出版社，纽约（1996） 54. Valdinoci, E.：从长跳随机游走到分数阶拉普拉斯算子。《西班牙应用数学学会通报》49，33–44（2009） 55. Valdinoci, E.：所有函数（局部）都是 s-调和函数（误差很小）——及其应用。载于：A. Farina, E. Valdinoci（编），《偏微分方程与几何测度论》，《数学讲义》第2211卷，第197–214页。施普林格国际出版股份公司（2018） 56. Whittaker, E.T., Watson, G.N.：《现代分析课程》。剑桥大学出版社，剑桥（1952）。第四版，重印本 57. Yakubovich, S.B., Luchko, Y.F.：《积分变换与卷积的超几何方法》，《数学及其应用》第287卷。施普林格科学与商业媒体，B.V.，多德雷赫特（1994） 58. Zaburdaev, V., Denisov, S., Klafter, J.：L´evy 行走。《现代物理学评论》87，843–530（2015）

出版商说明：Springer Nature 对已出版地图中的管辖权主张和机构隶属关系保持中立。