USTC-ICTS/PCFT-23-01

岛相中的无主岛与部分纠缠熵

Debarshi Basu[1]*、Jiong Lin[2]、[3]*、Yizhou Lu[4]*和 Qiang Wen[5]†

1 印度理工学院坎普尔分校，印度 2080162 中国科学技术大学理论研究跨学科中心，中国安徽合肥 2300263 彭桓武基础理论研究中心，中国安徽合肥 2300264南方科技大学物理系，中国深圳 5180555 东南大学神山瞳中心与物理学院，中国南京 210096

* 这些作者贡献相同
† 通讯作者：wenqiang@seu.edu.cn

arXiv:2305.04259v3 [hep-th] 6 Dec 2023

摘要

在部分纠缠熵（PEE）的背景下，我们研究了若干二维全息设置中实现的岛相的纠缠结构。从纯粹的量子信息视角来看，纠缠岛源于系统的自编码特性，这为岛相中部分纠缠熵的构造以及扭曲算符两点函数的物理解释带来了新的见解。适当计入纠缠岛的贡献后，我们给出了构造部分纠缠熵和部分平衡纠缠熵（BPE）的一般化方案。其中，位于AB) 的岛 IsAB) 内、但在 IsA) ∪ IsB)之外的无主岛区域至关重要。值得注意的是，我们发现，对无主岛采用不同的分配方式，会得到不同的 BPE，而这些 BPE 恰好对应于$A\cup B$的纠缠楔中的纠缠楔截面（EWCS）的不同鞍点。通过选择使 BPE 最小的分配方式，即可确定分配方案。此外，在采用这一分配方式的情况下，我们研究了部分纠缠熵，并给出了全息理论中部分纠缠熵的几何图像，该图像与无岛相中的几何图像一致。

目录

1 引言 **2**

2 无岛阶段的部分纠缠熵和平衡部分纠缠简介 62.1 部分纠缠熵 62.2 平衡部分纠缠 7

3 设置与无主岛区域 93.1 设置 1：全息 Weyl 变换后的共形场论 93.2 全息 Weyl 变换后的共形场论中的岛 113.3 岛相与无主岛的部分纠缠熵结构 123.4 广义 ALC 提议与广义平衡条件 15

4 岛相中的纠缠楔截面 174.1 纠缠楔截面的分类 174.2 对含无主岛的平衡部分纠缠进行朴素计算 19

5 岛相中的平衡部分纠缠2 **1**
5.1 *AB* 无岛 215.2 相邻*AB* 有岛 235.2.1 A2a 相位 235.2.2 A2b 阶段 255.2.3 岛相中消失的 PEE 265.2.4 A2c 阶段 275.2.5 最小化 A2 相中的 BPE 28

5.3 不相交*AB* 且有岛 285.3.1 D2a 相 295.3.2 D2b 相 305.3.3 D2c 相 325.3.4 最小化 D2 相中的平衡部分纠缠 335.4 不相交*AB* 且有不连通纠缠楔 335.5 通过最小化交叉部分纠缠熵得到平衡部分纠缠 36**6 岛相中的部分纠缠熵及其几何图像 37**6.1 相邻*AB* 且有岛 386.2 不相交*AB* 且有岛 38

7 讨论
407.1 总结 407.2 关于自编码性质的更多讨论 417.3 平衡部分纠缠与反射熵 42**A 设置2：AdS 的广义版本/边界共形场论 43**A.1 AdS 边界共形场论$_3$/边界共形场论$_2$ 与 DES 模型的简要回顾 43A.2 平衡部分纠缠的计算 45**参考文献 47**

---

1 引言

过去几十年来，我们对黑洞量子信息方面的理解取得了重大进展，这对我们理解黑洞信息悖论颇有助益 [1]。在 AdS/CFT 对应 [2], 冯·诺伊曼熵 S_A 对于边界共形场论中的区域 A，被认为与体 AdS 几何中一张与 A $\mathcal{E}_A$ 同调的极小曲面面积对偶 [3,4],

$$S_A = \frac{\text{Area}(\mathcal{E}_A)}{4G_N}. \tag{1}$$

这种几何与纠缠之间的关系就是著名的 Ryu-Takayanagi（RT）公式。该公式进一步完善为量子极值表面（QES）公式 [5,6]，其中纳入了来自体场的一阶量子修正。

在 [7,8] 佩奇时间之后，QES 公式被用于计算蒸发黑洞的霍金辐射的纠缠熵。黑洞处于二维JT引力中，并在边界处与非引力共形场论热浴耦合。新的发现是，佩奇时间之后，视界后方一个新的QES成为主导，而QES后方的区域被纳入霍金辐射的纠缠楔。这些新见解进一步发展为所谓的岛公式 [9–11]。岛相和纠缠岛的提出，不仅为我们理解黑洞的量子信息方面开启了一扇新窗口，也为量子系统引入了新颖的物质相和纠缠结构。

岛公式指出，在计算非引力浴中的区域A的纠缠熵时，我们应考虑将引力区域内的区域Is(A)纳入其中的可能性，并按以下方式计算纠缠熵，

$$Island\ formula\ I: \quad S_A = \min \mathrm{ext}_{\mathrm{Is}(A)} \left\{ \frac{\mathrm{Area}(\partial \mathrm{Is}(A))}{4G_N} + S_{\mathrm{bulk}}(A \cup \mathrm{Is}(A)) \right\} . \tag{2}$$

更明确地说，我们考虑所有可能的岛区域 Is(A)，并选择使（2）中括号内各项之和最小的区域。如果按照（2）计算出的纠缠熵小于不考虑岛时按通常方法计算出的纠缠熵，那么该构型就进入岛相，此时（2）便是计算纠缠熵的正确方法。佩奇时间之后，与共形场论浴耦合的 JT 引力进入岛相，从而恰好产生佩奇曲线中下降的部分。此外，岛公式已通过引力路径积分推导得出，其中允许虫洞连接复制技巧中不同构型副本里的黑洞 [10, 11]。事实证明，这种虫洞构型在计算复制流形上的配分函数时构成一个新的鞍点。后来人们发现，即使没有黑洞，岛相也可以在 AdS/边界共形场论设置中以简单的方式实现 [12] 。关于引力中岛公式的最新进展及其应用，更多参考文献见 [13–48] 。

近期， [49], 人们从纯粹的量子信息论视角研究了岛公式。当量子系统受到某种约束，使其希尔伯特空间大幅缩减，且某个子集的状态 Is(A)完全编码在另一个子集 A [1] , 的状态中时，我们称其为**自编码**系统。值得注意的是，对于自编码系统，A的纠缠熵应由一个与（2）非常相似的公式计算，我们称之为岛公式 II [49],

$$Island\ formula\ II: \quad S_A = \frac{\mathrm{Area}(\partial \mathrm{Is}(A))}{4G_N} + \tilde{S}(A \cup \mathrm{Is}(A)), \quad |A\rangle \Rightarrow |\mathrm{Is}(A)\rangle . \tag{3}$$

在岛公式 II 中，第一项与 Is(A) 的边界面积成正比；如果 Is(A) 位于引力背景中，这一项便会出现。第二项 $\tilde{S}(A \cup \mathrm{Is}(A))$ 表示约化密度矩阵的冯·诺伊曼熵，它通过在固定几何背景下对 $A \cup \mathrm{Is}(A)$ 的补集中的自由度进行迹运算来计算。正如 [49]，中所指出的，由于 Is(A) 的状态完全由 A 的状态决定，当我们为 A 设置边界条件以计算约化密度矩阵 ρ_A 的矩阵元时，也应依据 A 与 Is(A) 之间的编码关系，同时为 Is(A) 设置边界条件。因此，无法对 Is(A) 中的自由度进行迹运算，因为它们

[1]这类限制可以理解为从希尔伯特空间中投影掉某些状态，使得对于约化希尔伯特空间中所有剩余状态，子区域 $Is(A)$的状态由子区域 A的状态通过编码关系决定。最简单的例子是一个双自旋系统：其四维希尔伯特空间 $\mathcal{H} = \{|00\rangle , |01\rangle , |10\rangle , |11\rangle \}$ 缩减为二维空间 $\mathcal{H}_{reduced} = \{|00\rangle , |11\rangle \}$，使得约化希尔伯特空间中一个自旋的状态完全由另一个自旋的状态决定。更多详情请参见 [49]。

与 A 并非相互独立。更重要的是，由于自编码性质，Is(A) 的边界处会出现额外的扭曲算符，这意味着在这种情形下，纠缠岛并不需要引力。尽管如此，由于这里考虑的编码关系 $|A\rangle \Rightarrow |\text{Is}(A)\rangle$ 十分简单，上述岛公式 II 中并不存在优化。

从纯粹的量子信息视角来看，自编码性质或许是纠缠岛出现的唯一合理解释。在 [49], 中，作者大胆猜想，岛公式 I 确实是岛公式 II 在引力系统中的一种特殊应用。这表明，具有纠缠岛的引力系统是通过一种复杂的编码关系进行自编码的[2], ，使得岛公式II成为一种优化过程，并且其结果与岛公式 I完全一致。文献 [49] 还进一步指出，引力重整化可能是希尔伯特空间大幅缩减的原因，从而导致自编码性质的出现。

受这一猜想启发，文献 [49] 提出，在一种特殊的 Weyl 变换下，一个不含引力的全息共形场论$_2$ 能够支持纠缠岛。这就是设置 1，我们将在其中分析其岛构型和纠缠结构。采用这一设置的主要原因是，在有效理论描述中，即使扭曲算符的两点函数关于$x = 0$ 点不对称，该设置下这些函数仍有良好定义。对于不认同将岛公式应用于非引力系统的读者，我们强调，本文的讨论同样适用于将共形场论经过 Weyl 变换的部分与引力耦合的情形（引力设定 1）。此外，在附录中，我们还介绍了设定 2；这是 AdS/边界共形场论设置的一个推广版本，在其中也可以定义扭曲算符的非对称两点函数。

基于上述设置，我们关注处于岛相的边界态在引力对偶中的所谓纠缠楔截面（EWCS），以及与之对偶的量子信息量。两个不重叠区域的纠缠楔截面$AB \equiv A \cup B$是衡量A与B之间混合态关联的一种自然方式。由于量子信息理论中对混合态关联的度量也尚未得到充分研究，因此从量子信息的角度研究 EWCS 也颇有意义。在 [50, 51],中，有人提出，与 EWCS 对应的量子信息量是纯化纠缠，因为它满足一组与 EWCS 类似的不等式。此后，人们提出了一系列可作为 EWCS 对偶的量子信息量，包括纠缠负性 [52–54], 反射熵 [55], “奇熵” [56], “微分纯化” [57], 纠缠蒸馏 [58,59]。关于这些方向的更多探索，参见 [60–67] 。然而，这些量中的大多数都是通过优化问题来定义的，因此极难计算，而且它们与 EWCS 相对应的证据也不够充分。反射熵定义为在一种特殊的典范纯化下的纠缠熵，因此通常可在量子系统中计算。此外， [68, 69]明确研究了岛相中 EWCS 与反射熵之间的对应关系

在本文中，我们将特别研究平衡部分纠缠熵（BPE）[70–72], ，该量也被提出可与纠缠楔截面对偶。对于混合态 ρ_{AB} 的一种纯化 A_1B_1AB ，BPE 是一种特殊的部分纠缠熵（PEE）$s_{AA_1}(A)$，满足一定的平衡条件。BPE 易于计算，因为我们有多种强大的方法，可以在二维中构造 PEE [73–75] 。此外，不同于定义在某些特殊纯化上的反射熵和纯化纠缠，BPE 可以定义在一般纯化中，并被认为与纯化无关。BPE 的纯化无关性及其与纠缠楔截面的对应关系，已经在经过任意 Weyl 变换的全局和 Poincaré AdS$_3$ [71], 全息共形场论$_2$ 中得到检验，具有引力反常的全息共形场论

[2]尽管如此，我们仍不清楚这种复杂的编码关系。

变换 [71], 全息共形场论$_2$ 具有引力反常 [72] 和 BMS$_3$ 对偶于三维渐近平坦时空的对称场论 [71]。特别地，BPE 可被视为反射熵的一种推广，因为在典范纯化这一特殊情形下，BPE 会退化为反射熵。

本文的主要任务是研究二维全息理论中岛相的平衡部分纠缠，并将其与纠缠楔截面对应起来。这是一项极具挑战性的任务。首先，纠缠楔截面的相结构比纠缠熵（或 RT 曲面）的相结构更复杂，而我们需要从平衡部分纠缠中重现这一相结构；平衡部分纠缠完全由场论侧计算得出，不依赖任何几何图像。其次，在岛相中计算某一区域 A 的纠缠熵时，可能会涉及 A 之外的其他自由度——存在一个纠缠岛 $\mathrm{Is}(A)$。这实质上改变了我们计算纠缠熵和部分纠缠熵的方式，因此需要将构造部分纠缠熵和平衡部分纠缠的方法推广到存在纠缠岛的情形。我们发现，这种推广涉及对无主岛区域贡献的分配。对于两个不重叠区域 A 和 B，当 AB 的纠缠岛大于 A 和 B 的纠缠岛并集时，即

$$\mathrm{Is}(AB) \supset \mathrm{Is}(A) \cup \mathrm{Is}(B)\,, \tag{4}$$

那么，位于 $\mathrm{Is}(AB)/($ 内部、但位于 $\mathrm{Is}(A)\cup\mathrm{Is}(B))$ 外部的区域 $\mathrm{Is}(AB)\,\mathrm{Is}(A)\cup\mathrm{Is}(B)$，称为无主岛区域。无主岛区域与所谓的反射岛 [68] 密切相关。正确计算 BPE(A,B) 的关键，是将无主岛区域的贡献分配给正确的 PEE。我们将看到，对无主岛区域进行不同的分配，对应着 BPE 的不同平衡点，以及 EWCS 的不同鞍点。我们应当选择能够给出最小 BPE 的平衡点，或面积最小的 EWCS 鞍点。最终，我们得到 BPE 与 EWCS 之间的匹配关系。

本文结构安排如下。在第2节，我们将简要介绍通常不含岛的量子系统中的部分纠缠熵和平衡部分纠缠熵。接着在第3节，我们将介绍实现岛构型的设置，并引入无主岛区域这一新概念，讨论它如何改变岛相中部分纠缠熵和 BPE 的计算方式。在考虑纠缠岛和无主岛的贡献后，我们将部分纠缠熵和 BPE 的计算方法推广到存在纠缠岛的情形。在第4 节，我们将对二维岛相中的纠缠楔截面进行分类。我们还将按照无岛相中部分纠缠熵和 BPE 的标准构造，对 BPE 进行朴素计算，并发现结果与纠缠楔截面不符。在第5节中，利用广义版 ALC 提案（见（8））和广义平衡条件，我们计算岛相中各种构型的 BPE。我们发现，对无主岛区域采用不同的分配会得到不同的 BPE，它们对应于纠缠楔截面的不同鞍点。最小部分纠缠熵与最小纠缠楔截面完全吻合。在第6节中，对于使 BPE 最小的无主岛分配，我们计算各种构型下的贡献 $s_{AB}(A)$ 和 $s_{AB}(B)$，并发现结果与几何图像一致。最后，在第7节中，我们总结研究结果，讨论其物理意义，并展望未来研究方向。

2 无岛阶段中部分纠缠熵与平衡部分纠缠简介

2.1 部分纠缠熵

纠缠轮廓 是量子信息中的一个概念，最初在 [76], 中被猜想提出。它是一个函数 $s_A(\mathbf{x})$ ，描述子系统 $\mathbf{x}$ 中的每个格点 A对 A的纠缠熵所作的贡献。这可以看作 A内部纠缠熵的密度函数，它不仅取决于格点 $\mathbf{x}$ ，还取决于区域 A。根据定义，纠缠轮廓函数应满足

$$S_A = \int_A s_A(\mathbf{x}) d\sigma_{\mathbf{x}}, \tag{5}$$

其中，$d\sigma_{\mathbf{x}}$ 是A的无穷小面积元。随后， [73–75, 77]对部分纠缠熵（PEE）进行了系统研究。部分纠缠熵定义为A的子集 α 对纠缠熵S_A的贡献，可表示为

$$s_A(\alpha) = \int_\alpha s_A(\mathbf{x}) d\sigma_{\mathbf{x}}. \tag{6}$$

纠缠轮廓是部分纠缠熵的微分形式，已在凝聚态物理理论中得到广泛研究，用于测量纠缠在演化过程中的扩散 [77–81]。在 AdS_3/CFT_2，中，部分纠缠熵对应于体几何测地弦 [73, 82] ，这是纠缠与几何之间更精细的对应关系 [73, 74]。关于部分纠缠熵的更多细节，尤其是纠缠轮廓类第一定律及其在近期提出的岛屿提案中的作用，可见 [80, 83]。

表达式$s_A(\alpha)$展示了子区域的贡献信息，因此称为部分纠缠熵的贡献表示。后来人们发现，部分纠缠熵可以解释为一种可加的二体关联 [75], ，通常用以下形式表示会更加方便

$$\mathcal{I}(\alpha, \bar{A}) \equiv s_A(\alpha), \tag{7}$$

其中A 是A 的补集，而$A \cup A$ 构成一个纯态。我们将左侧的记法称为部分纠缠熵的二体关联表示，将右侧的记法称为部分纠缠熵的贡献表示。在通常不含岛的量子系统中，这两种表示彼此等价。

部分纠缠熵应满足一组物理要求 [75, 76] ，其中包括互信息$I(A、B)$[3] 所满足的要求，以及另一项要求，即可加性。对于互不重叠的区域A、B 和C，部分纠缠熵的物理要求可分为以下几类：

1. 可加性： $\mathcal{I}(A, B \cup C) = \mathcal{I}(A,B) + \mathcal{I}(A, C)$;2. 置换对称性： $\mathcal{I}(A, B) = \mathcal{I}(B,A)$;3. 归一化： $\mathcal{I}(A,A) = S_A$;4. 正性： $\mathcal{I}(A,B) > 0$;5. 上界性：$\mathcal{I}(A, B) \leq \min\{S_A, S_B\}$;6. $\mathcal{I}(A,B)$ 在 A 或 B 内部的局域幺正变换下应保持不变

;

[3]注意，我们不应混淆互信息$I(A、B)$ 与部分纠缠熵 $\mathcal{I}(A、B)$。

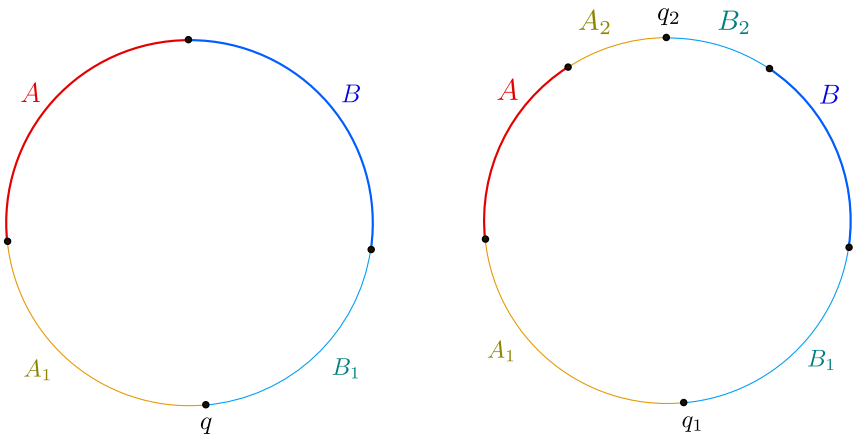


图 1：共形场论真空态中相邻和不相交区间的平衡部分纠缠。q，q和q是平衡点。

7. 对称性： 对于任意对称变换 $\mathcal{T}$，若其作用使 $\mathcal{T}A = A'$ 以及 $\mathcal{T}B = B'$发生变化，则有 $\mathcal{I}(A,B) = \mathcal{I}(A', B')$。

关于部分纠缠熵定义良好（或唯一确定）的范围，以及在不同情况下构造部分纠缠熵的方法，读者可参阅 [73–75，77，84–86]。这些细节也总结在 [71,72]的背景介绍部分。这里我们只介绍一种特定方案，用于在所有自由度都按唯一顺序排列（例如排列在线或圆周上）的二维一般理论中构造部分纠缠熵，我们称之为加性线性组合（ALC）方案 [73,75,77]。

- **ALC 提案**：考虑一个区域A，其按以下方式划分，$A = \alpha_L \cup \alpha \cup \alpha_R$，其中 α 是A 内的某个子区域，而 α_L （α_R）表示其左侧（右侧）的区域。该提案指出：

$$s_A(\alpha) = \mathcal{I}(\alpha, \bar{A}) = \frac{1}{2}\left(S_{\alpha_L \cup \alpha} + S_{\alpha \cup \alpha_R} - S_{\alpha_L} - S_{\alpha_R}\right). \tag{8}$$

部分纠缠熵的可加性和置换对称性表明，任意部分纠缠熵$\mathcal{I}(A、B)$ 都可以通过对所有两点PEE $\mathcal{I}(\mathbf{x}、\mathbf{y})$ 求和来计算，其中$\mathbf{x}$ 和$\mathbf{y}$分别位于A和B 内部 [75]，，即

$$\mathcal{I}(A,B) = \int_A d\sigma_{\mathbf{x}} \int_B d\sigma_{\mathbf{y}}\, \mathcal{I}(\mathbf{x},\mathbf{y}). \tag{9}$$

请注意，两点部分纠缠熵是系统固有的纠缠结构，即它不依赖于区域A和B的选择。

2.2 平衡部分纠缠

与纠缠熵相比，纠缠轮廓或部分纠缠熵对量子系统的纠缠结构有更精细的描述。因此，可以从部分纠缠熵中提取其他量子信息量。本文聚焦于所谓的平衡部分纠缠熵（BPE），它是一种满足特定平衡条件的特殊部分纠缠熵，也可视为混合态一般纯化中反射熵的推广。BPE 在 [70] 中被提出，并被认为与纠缠楔截面（EWCS）对偶。此外， [71]，提出 BPE 恰好刻画了混合态中的反射熵，且与纯化方式无关。这些观点已通过多种

协变情形下的检验 [72], 全息共形场论2 具有引力反常的 [72], 共形场论2采用不同纯化方式的 [71] 以及三维平直全息 [71,87][4]。

对于处于混合态 ρ_{AB} 的双分系统 $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$，可以引入辅助系统 A_1B_1，将 AB 纯化，使整个系统 ABA_1B_1 处于纯态 $|\psi\rangle$，且 $\mathrm{Tr}_{A_1B_1} |\psi\rangle\langle\psi| = \rho_{AB}$。纯化 ρ_{AB} 的方式并不唯一。A 与 B 之间的平衡部分纠缠定义为

$$\mathrm{BPE}(A:B) = \mathcal{I}(A,BB_1)|_{balanced} = \mathcal{I}(B,AA_1)|_{balanced} = s_{AA_1}(A)|_{balanced}\,, \tag{10}$$

其中，下标 *balanced* 表示满足平衡条件和最小化条件，具体如下：

1. **平衡条件**：在 A_1B_1，的所有可能划分构型中，应选择满足以下条件的构型

$$s_{AA_1}(A) = s_{BB_1}(B) \quad or \quad \mathcal{I}(A,B_1) = \mathcal{I}(A_1,B). \tag{11}$$

当 A与 B 相邻时，（11）足以确定 A_1B_1，的划分，或者等价地说，确定平衡点。

然而，当 A与 B 不相邻时（见图 1右图），补集AB 是非连通的，因此需要两个分割点（见图 1）来划分 AB。在这种情况下，平衡条件推广为以下两个条件

$$s_{AA_1A_2}(A_1) = s_{BB_1B_2}(B_1), \quad s_{AA_1A_2}(A) = s_{BB_1B_2}(B), \tag{12}$$

or

$$\mathcal{I}(A_1,BB_2) = \mathcal{I}(B_1,AA_2), \quad \mathcal{I}(A,B_1B_2) = \mathcal{I}(B,A_1A_2)\,. \tag{13}$$

如果满足上述两个条件，则$S_{AA_1A_2} = S_{BB_1B_2}, s_{AA_1A_2}(A_2) = s_{BB_1B_2}(B_2)$ 会自动满足。

2. **最小化条件**：通常，满足平衡条件的A_1B_1 划分构型并不唯一。当存在多个平衡点时，应选择使平衡部分纠缠$(A:B)$最小的那个。之后提到平衡条件时，应将最小化条件包括在内。

因此，对于A和B 非相邻的构型，平衡部分纠缠$(A、B)$ 的定义推广为

$$\mathrm{BPE}(A:B) = \mathcal{I}(A,BB_1B_2)|_{balanced} = s_{A_1AA_2}(A)|_{balanced}\,. \tag{14}$$

由于在平衡点 $\mathcal{I}(A、B_1B_2) = \mathcal{I}(A_1A_2,B)$处，平衡部分纠缠也可以表示为

$$\mathrm{BPE}(A:B) = \mathcal{I}(A,B) + \frac{(\mathcal{I}(A,B_1B_2) + \mathcal{I}(A_1A_2,B))|_{balanced}}{2}. \tag{15}$$

最小交叉部分纠缠熵：在上述平衡部分纠缠的表达式中，第一项是内禀的，因此只有第二项取决于划分。在 [71] 中，研究者发现求和$\mathcal{I}(A、B_1B_2) + \mathcal{I}(A_1A_2,B)$，称为交叉部分纠缠熵，与纯化方式无关，并在平衡点取最小值。这一发现已在 AdS [71] 中的静态 [72]和协变构型[3]/共形场论2中得到检验。在这些情况下，平衡条件可以由一个优化问题取代，即最小化交叉部分纠缠熵。这一点很重要，因为寻找纠缠楔截面同样是一个优化问题。有趣的是，在共形场论2 中，当A和B相邻时，最小化后的交叉部分纠缠熵等于一个普适常数，它是一个称为马尔可夫间隙的量的下界 [70,92,93]。

[4]在三维平直全息中，[88,89] 基于平直全息中的全息纠缠熵几何图像，研究了纠缠楔和纠缠楔截面。[91]

3 设置与无主岛区域

岛公式已在 Jackiw–Teitelboim（JT）引力与平直背景中的共形场论$_2$ 热浴耦合的模型中得到广泛研究 [5–8]。结合膜世界全息 [94–96], , 在 AdS/边界共形场论 [12, 97的有效二维描述中也出现了纠缠岛100]。此外，部分纠缠熵也在这一背景下得到探讨；例如， [80, 83] 的作者基于在岛相中直接应用部分纠缠熵的 ALC 提案，研究了霍金辐射的纠缠轮廓。在 [101], 中，也讨论了特定霍金辐射区域A) 对应的岛A所作的贡献。

本节将首先介绍两个具有岛相的设置。随后，我们研究存在纠缠岛时的部分纠缠熵结构及其对纠缠熵的贡献，这方面此前尚未得到深入研究。此外，我们还引入一个名为无主岛区域的新概念，它对计算平衡部分纠缠至关重要。

3.1 设置1：全息韦尔变换共形场论

第一个具有岛相的设置是全息韦尔变换共形场论$_2$ ，由 [49]提出。我们从欧几里得平直空间上全息共形场论的真空态$_2$ 开始，其度规为$ds^2 = \frac{1}{\delta^2}\left(d\tau^2 + dx^2\right)$ [5]。这里 δ 是一个无穷小常数，表示边界共形场论的紫外截断。我们可以对度规施加 Weyl 变换，

$$ds^2 = e^{2\varphi(x)}\left(\frac{d\tau^2 + dx^2}{\delta^2}\right), \tag{16}$$

这实际上会使截断尺度变为 $\delta \Rightarrow e^{-\varphi(x)}\delta$，其中 $\varphi(x)$ 通常为负。经过 Weyl 变换后，共形场论中任意区间 $A = [a、b]$ 的纠缠熵会获得来自标量场 $\varphi(x)$ 的额外贡献，如下所示 [71,102,103]

$$S_A = \frac{c}{3}\log\left(\frac{b-a}{\delta}\right) + \frac{c}{6}\varphi(a) + \frac{c}{6}\varphi(b). \tag{17}$$

该公式可通过对扭曲算符的两点函数进行 Weyl 变换得到。

然后，我们对$x < 0$ 区域进行依赖于紫外截断的 Weyl 变换，使该区域中的度规与 AdS$_2$ 度规成正比，

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & ,\text{if} \quad x \geq 0, \\ -\log\left(\frac{2|x|}{\delta}\right) + \kappa. & ,\text{if} \quad x < 0, \end{cases} \tag{18}$$

其中 κ 是一个未确定的常数。经过 Weyl 变换后，$x < 0$ 处的度规变为

$$ds^2 = \frac{e^{2\kappa}}{4}\left(\frac{d\tau^2 + dx^2}{x^2}\right), \qquad x < 0. \tag{19}$$

这种特殊的 Weyl 变换从根本上改变了共形场论，并且在 $x < 0$处的截断尺度不再与 δ相关，而是由坐标 x表征。需要注意的是，标量场（18）在 $x = 0$处并不光滑，甚至是不连续的。由于熵（17）只依赖于端点处的标量场，因此只要我们不

[5]这里的整体因子 $\frac{1}{\delta^2}$ 受到AdS/CFT 的启发，其中度规正是对偶 AdS$_3$ 几何的边界度规 $ds^2 = \frac{\ell^2}{z_2}(-dt^2 + dx^2 + dz^2)$，半径坐标取为 $z = \delta$。

讨论终止于界面上的区间在$x = 0$处的情形。我们还可以重新定义$x = 0$ 邻域内的标量场，以保持其光滑性。这不会影响我们接下来的讨论。

在 [49], 中，纠缠熵公式 (17) 中的项 $|\varphi(x)|$ 被解释为在半径为 $|\varphi(x)|$ 、中心位于 (δ, x) 的 AdS_3 背景中放置一个截断球面。基于这一解释，对于特定的 Weyl 变换 (18)，我们在所有满足 $x < 0$ 的点处放置半径为 $|\varphi(x)|$ 的截断球面。在这种情况下，所有这些截断球面的公切线在 AdS 空间中构成一条直线（见图 2），我们称之为截断膜。正如 [49]，中所强调的，在这一构型中，RT 曲面可以锚定在截断膜上，也就是说，对称区间$[-a, a]$ 对应的 RT 曲面会在此处被截断。这表明，截断膜在 AdS/BCFT 设置中发挥着与世界末端膜类似的作用 [12]（简要介绍见附录）。此外，参数 κ 发挥着类似于世界末端膜张力的作用，因为截断膜恰好位于 $\rho = \kappa$，其中坐标 ρ 定义见参考文献 [49]的附录。另一方面，与 AdS/BCFT 设置不同，此处 $x < 0$ 处的自由度仍位于渐近边界，而非截断膜上，并且我们并未假设截断膜上存在引力理论。尽管如此，稍后我们会将岛公式 (2) 直接应用于这一系统[6]。关于这一构型的更多详情，见 [49] 。

对于不认同将岛公式应用于非引力理论的读者，我们可以相应地修改这一设定。具体而言，我们假设 AdS_2 背景中的左侧共形场论与诱导引力耦合，而完整的引力作用量则通过对物质共形场论的自由度积分得到。左侧的 AdS_2 背景也被视为由执行由（18）所刻画的 Weyl 变换而产生。这正是 [99], 第 2 节中介绍的设定，主要区别在于，本文对标量场（18）的选择包含了新的参数κ。在这一设定中，扭曲算符的关联函数与全息 Weyl 变换后的共形场论中的（17）完全相同$_2$, , 其全息图景也被猜想为带有一个位于$_3$ 处的世界末端膜的 AdS $\rho = \kappa$ [49, 99]。尽管这两种设定的诠释可能不同，但熵、部分纠缠熵和 BPE 的计算完全相同。我们将这一修改后的设定称为引力设定 1。

在继续之前，我们也在附录中提供了另一种设定 2 A。这种设定是 AdS 的一个推广版本/边界共形场论 [9, 97–99, 104], 在标准 AdS/边界共形场论设定 [12]中，我们将共形物质加入世界末端膜。我们将重点讨论一种典型模型，即文献 [97], 提出的缺陷极值曲面（DES）模型；该模型将世界末端膜视为缺陷，并假设世界末端膜上存在一个缺陷理论。DES 模型的二维有效理论描述，是膜上的引力共形场论$_2$ 与一个浴共形场论$_2$ 耦合，并满足透明边界条件，因此可以定义非对称区间的扭曲算符两点函数。与此前的设定一样，我们在相同的 Weyl 变换下得到扭曲算符的两点函数。在这一设定中，DES 模型中膜上的共形物质会在平衡部分纠缠或反射熵中引入一个额外的缺陷项；这应被理解为含量子修正的 RT公式中体纠缠熵的贡献 [105]。我们将看到

[6]如果 RT 曲面可以在 AdS 体深处截断，那么按照 Lewkowycz-Maldacena 处方在 AdS 体中应用复制技巧时，就会出现新的极小鞍点 [5][7]。这是 [49] 的作者提出岛公式可应用于这种全息韦尔变换共形场论的主要原因之一$_2$。第二个原因是，非引力系统中存在具有自编码性质的纠缠岛 [49]。这为我们在这种非引力的韦尔变换后共形场论中应用岛公式打开了一扇窗口，前提是自编码性质由 Weyl 变换产生，尽管先前关于 [10, 11] 通过复制虫洞实现纠缠岛的论证依赖于引力。第三个原因是，在这种设定下，在某些情形中，岛公式给出的纠缠熵会小于不含岛的通常公式所给出的结果，这一点我们将在下一小节中看到。

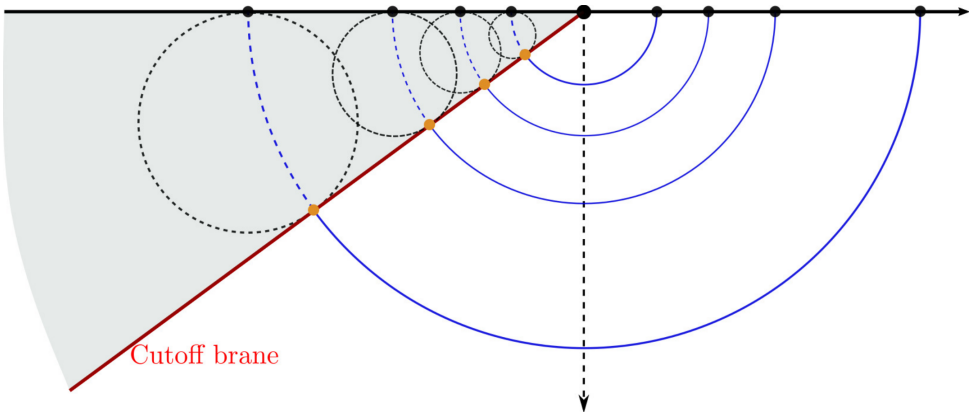


图 2：摘自 [49], , 根据 CC-BY 4.0 许可。当我们只考虑对称区间时 $[-a, a]$, 所有位于 $\rho = \kappa$处的截断球面的公共切面，可与 AdS$\rho = \rho_0$BCFT 场景中的世界末端膜（/）进行比较。然而，非对称区间的 RT 曲面将在截断膜后方的某个截断球面处被截断，见图19。

当满足 $\kappa = \rho_0$ （其中 ρ_0 是 DES 模型中世界末端膜的倾斜角）时，平衡部分纠缠的计算结果与文献 [106], 中给出的反射熵完全一致；后者由纠缠楔截面项和一个额外的缺陷项组成，该缺陷项源自 DES 模型中膜上的共形物质。

<escape>在本文后续部分，对于所有图，我们将收缩截断膜后方的区域（图 2 中的灰色区域），使其与广泛使用的 AdS/边界共形场论（BCFT）设置保持一致。</escape>

3.2 全息 Weyl 变换共形场论中的岛

让我们将岛公式（2）应用于（引力）设置 1。我们考虑将A视为半无限区域$x > a$。通过岛公式计算得到的纠缠熵为

$$S_{\mathcal{R}} = \min\left\{\frac{c}{3}\log\frac{a+a'}{\delta} - \frac{c}{6}\log\left(\frac{2a'}{\delta}\right) + \frac{c}{6}\kappa\right\}, \tag{20}$$

其中，我们将区域 $I = (-\infty, -a']$ 作为 Is(A) 的一个可能选择。容易验证，当 $a = a'$ 时，上述表达式达到其最小值[8]:

$$S_{\mathcal{R}} = \frac{c}{6}\log\left(\frac{2a}{\delta}\right) + \frac{c}{6}\kappa, \qquad a' = a, \tag{21}$$

这始终小于通过常规方法计算得到的纠缠熵。类似地，当我们将 A 视为区域 x 内的一个区间 $[a,b]$ ，且$[-b', -a']$ 是 Is(A) 的任意可能选择时，岛公式将给出[9]

$$S_A = \min\left\{\frac{c}{3}\log\frac{a+a'}{\delta} + \frac{c}{3}\log\frac{b+b'}{\delta} - \frac{c}{6}\log\left(\frac{2a'}{\delta}\right) - \frac{c}{6}\log\left(\frac{2b'}{\delta}\right) + \frac{c}{3}\kappa\right\}, \tag{22}$$

[8] 注意，在设置 1 中，式（21）中的两项由区间 $[-a、a]$对应的 Weyl 变换后的扭曲算符两点函数给出。在引力设定 1 中，常数项 $_{c6}\kappa$ 被解释为面积项 $_{Area\ (\ )XG}$，因为与左侧共形场论耦合的引力是由对 AdS$_3$时空进行简单的部~~分约~~化所诱导的，详见附录或 [97,99] ,[4] 了解更多详情。

[9]这里我们需要假设，在体谱和体算符及边界算符的 OPE 系数满足一定稀疏性条件且 c 趋于无穷大的极限下，全息韦尔变换共形场论中两个不相交区间的纠缠熵会表现出与 RT公式类似的相变。我们将这一问题留待未来进一步研究。 [107,108],

其中有鞍点

$$S_A = \frac{c}{6}\log\left(\frac{4ab}{\delta^2}\right) + \frac{c}{3}\kappa\,, \qquad a' = a\,, \quad b' = b\,. \tag{23}$$

正如在 [49], 上述结果小于通常计算得到的纠缠熵 $S_A = {}_c 3\log\left({}_{\delta}^{b-}\right)^a$，当

$$a/b < r^* \equiv 1 - 2\sqrt{e^{2\kappa} + e^{4\kappa}} + 2e^{2\kappa}\,. \tag{24}$$

换句话说，对于任意区间 $[a、b]$，其中 $a/b < r^*$，该区间都存在一个岛，纠缠熵应通过岛公式计算。

在 AdS/边界共形场论的背景下，我们可以考虑没有岛的区域，也可以考虑具有反射对称岛的区域$[a、b]\,(b > a > 0)$，其中反射对称岛为 $[-b、-a]$。在具有岛的构型中，纠缠熵通过位于反射对称位置的扭曲算符的两点函数计算。在全息韦尔变换后的共形场论[2]，中，这些构型同样是良定义的，因为 RT 曲面也可以锚定在共同的垂直切线上。此外，在全息韦尔变换后的共形场论[2]，中，扭曲算符的韦尔变换后的两点函数可以推广到非对称构型。更明确地说，我们可以将两个扭曲算符分别置于 $-b$ 和 a 处，其中 $a、b > 0$ 且 $a \neq b$。

这两个两点函数的物理解释目前尚不明确。我们很容易将这些两点函数解释为无反射对称性的区间 $[-b, a]$ 的纠缠熵。尽管如此，接下来我们将论证这种解释并不正确，并在第 3.4 节给出更合适的解释。对于 $b < a$，尽管仍可根据岛公式 I I 计算两点函数，但区域 $(0, a]$ 决定了其岛区域 $[-a, 0)$ 的状态。为 $(0, a]$, 设定边界条件时，我们也同时为 $[-a, 0)$ 设定了边界条件，这意味着我们只能对 $[-a, a]$, 之外的自由度进行迹运算，而这是一个涵盖 $[-b, a]$ 的更大区域。这意味着，当 $b < a$ 时，$[-b, a]$ 的纠缠熵定义不明确。对于区域 $(-\infty, -b] \cup [a, \infty)$，当 $b > a$ 时也会出现类似问题。

上述问题不会出现在 $b > a$ 的情形中，此时区域 $[-b, 0)$ cov- 覆盖了岛 $[-a, 0)$。然而，在这些情形中，$[-b, a]$ 的纠缠熵同样没有明确定义，这是由于系统的自编码性质，使得这种情况不同于通常的系统：不同位置的自由度彼此独立。当我们计算 $[-b, a]$, 上的约化密度矩阵时，会在 $[-b, -a) \cup [-a, a]$ 上设置边界条件，以计算约化密度矩阵的元素。尽管确定区域 $[-b, -a)$ 的状态并不能完全确定 $[-b, a]$, 之外任何自由度的状态，但它会以某种方式限制补集 $(-\infty, -b] \cup [a, \infty)$的状态空间。因此，在对 $[-b, a]$, 之外的自由度进行迹运算时，我们不应遍历补集的希尔伯特空间中的所有状态。另一个证据是，补集区域$(-\infty, -b] \cup [a, \infty)$ 的纠缠熵也没有明确定义，因为 $(-\infty, -b]$ 是区域 $[a, \infty)$的岛的子区域。

3.3 岛相与无主岛的部分纠缠熵结构

此前我们介绍了部分纠缠熵的两种表示，即贡献表示和二体关联表示。贡献表示需要输入区域A及其子集 α，而二体关联表示是态的一种内禀结构，不依赖于对区域及其子集的选择。正如我们所展示的，给定区域A及其一个子集 α，我们可以生成所有

通过积分（或求和）得到的来自 $\mathcal{I}(x、y$ 的贡献$s_A(\alpha)$。因此，我们可以认为这两种表示彼此等价。

在岛相中，二体关联结构仍然是态的内禀结构，而贡献表示在岛相中则发生了很大变化。原因在于，在岛相中，当我们讨论某个区域 A 时，还会涉及 A 之外的其他自由度（这些自由度位于岛区域 $\mathrm{Is}(A)$ 中），前提是该区域存在一个岛。在这种情况下，不仅 A 内部的自由度，其岛中的自由度也会对S_A作出贡献。态的自编码性质表明，不同位置的自由度彼此之间不再相互独立，并从根本上改变了我们评估区域A的纠缠熵以及来自子集 α 的贡献 $s_A(\alpha)$ 的方式。在本文后续部分，我们的讨论将主要基于二体关联表示展开，并且我们仅将 $\mathcal{I}(A,B)$ 称为部分纠缠熵（PEE）。

更明确地说，考虑一个包含岛的区域A。纠缠熵S_A 由岛公式$S_A = \tilde{S}^{A\cup \mathrm{Is}(A)}$计算得出，它是通过对$A\cup \mathrm{Is}(A)$之外的自由度进行偏迹得到的约化密度矩阵 $\tilde{\rho}_{A\cup \mathrm{Is}(A)}$ 的冯·诺伊曼熵。这强烈表明，我们应分别收集所有两点部分纠缠熵 $\mathcal{I}(x、y)$，其中x和y 分别位于$A\cup \mathrm{Is}(A)$ 及其补集中，即：

$$S_A = \tilde{S}_{A\cup \mathrm{Is}(A)} = \int_{x\in A\cup \mathrm{Is}(A)} dx \int_{y\in \overline{A\cup \mathrm{Is}(A)}} dy\, \mathcal{I}(x,y). \tag{25}$$

一个直接推论是，在无岛阶段，归一化要求 $S_A = s_A(A) = \mathcal{I}(A,A)$ 不再成立，因为岛也会对S_A作出贡献。

- 换句话说，$Is(A)$ 与 $A\cup Is(A)$ 之间的部分纠缠熵应计入 SA，因为 $Is(A)$ 的状态完全由 A 决定，应被视为一个窗口，A 可通过它与 $A\cup Is(A)$发生纠缠。

上述方程也可以写成

$$S_A = \mathcal{I}(A, \overline{A\cup \mathrm{Is}(A)}) + \mathcal{I}(\mathrm{Is}(A), \overline{A\cup \mathrm{Is}(A)}), \tag{26}$$

这与无岛阶段的归一化性质 $S_A = \mathcal{I}(A,A)$ 截然不同。在上述公式（26）中，区域 A既可以是连通的，也可以是非连通的[10]。

- 我们得出结论：在岛相中，两种表示之间的关系 $sA^{(\alpha)} = \mathcal{I}(\alpha,A)$ 以及 ALC 提案都不再成立。当我们计算来自二体关联 $\mathcal{I}(x，y)$的贡献 $sA^{(\alpha)}$时，应仔细考虑岛构型。

现在，我们根据二体关联表示中的部分纠缠熵，讨论两个不重叠区域$AB \equiv A\cup B$ 的并集的纠缠熵，以及贡献$s_{AB}(A)$ 和$s_{AB}(B)$。在存在岛的情况下，这些构型的结构更为复杂。下面，我们将这些构型的岛构型分为三类，并明确讨论岛结构如何影响各项贡献。

第1类

在第一类中，区域AB以及A和B都不存在岛。在这种情况下，由于所有区域都不涉及AB之外的自由度，因此$s_{AB}(A)$和$s_{AB}(B)$可以通过无岛阶段中针对部分纠缠熵的 ALC 提案计算，

$$\begin{aligned} s_{AB}(A) &= \frac{1}{2}(S_{AB} + S_A - S_B) = \mathcal{I}(A, \overline{AB}), \\ s_{AB}(B) &= \frac{1}{2}(S_{AB} + S_B - S_A) = \mathcal{I}(B, \overline{AB}). \end{aligned} \tag{27}$$

[10]另请参阅 [101] 此前关于公式（26）在A为一个连通区间时的讨论。

类别 2

在第二类中，三个区域 AB、A 和 B 均存在岛，并且

$$\mathrm{Is}(AB) = \mathrm{Is}(A) \cup \mathrm{Is}(B). \tag{28}$$

我们将 $C \equiv AB \cup \overline{\mathrm{Is}(AB)}$记作。在这种情况下，纠缠熵 $S_{AB} = \mathcal{I}(AB \cup \mathrm{Is}(AB), C)$包含来自 Is(AB)的岛贡献 $\mathcal{I}(\mathrm{Is}(AB), C)$。由于 Is(AB) 只是 Is(A) 和 Is(B)的并集，因此该岛贡献可以分解为 $\mathcal{I}(\mathrm{Is}(A), C) + \mathcal{I}(\mathrm{Is}(B), C)$，其中这两项应分别归属于 $s_{AB}(A)$ 和 $s_{AB}(B)$。更明确地说，我们有

$$s_{AB}(A) = \mathcal{I}(A, C) + \mathcal{I}(\mathrm{Is}(A), C), \tag{29}$$
$$s_{AB}(B) = \mathcal{I}(B, C) + \mathcal{I}(\mathrm{Is}(B), C). \tag{30}$$

这些部分纠缠熵可以通过将其写成 $\tilde{S}_\alpha$ 的线性组合来计算。例如，

$$\begin{aligned} s_{AB}(A) &= \mathcal{I}(A\,\mathrm{Is}(A), C) = \frac{1}{2}\left(\tilde{S}_{AB\cup \mathrm{Is}(AB)} + \tilde{S}_{A\cup \mathrm{Is}(A)} - \tilde{S}_{B\cup \mathrm{Is}(B)}\right), \\ s_{AB}(B) &= \mathcal{I}(B\,\mathrm{Is}(B), C) = \frac{1}{2}\left(\tilde{S}_{AB\cup \mathrm{Is}(AB)} + \tilde{S}_{B\cup \mathrm{Is}(B)} - \tilde{S}_{A\cup \mathrm{Is}(A)}\right). \end{aligned} \tag{31}$$

根据公式（26），显然，贡献项 $s_{AB}(A)$和 $s_{AB}(B)$仍然可以按照 ALC 提案，写成纠缠熵（包括岛贡献）的线性组合。

类别 3

在第三类中，区域AB 有一个岛 $\mathrm{Is}(AB)$，但 $\mathrm{Is}(A) \cup \mathrm{Is}(B)$ 并未覆盖整个 $\mathrm{Is}(AB)$，即

$$\mathrm{Is}(AB) \supset (\mathrm{Is}(A) \cup \mathrm{Is}(B)). \tag{32}$$

这里不要求两个子区域 A和 B 各自都存在岛。若 A（或 B）不存在岛，那么在式（$(A) = \emptyset$（或 $\mathrm{Is}(B) = \emptyset$）中（32。在这种情况下，存在一些属于 $\mathrm{Is}(AB)$、但位于 $\mathrm{Is}(A) \cup$ 和 $\mathrm{Is}(B)$之外的自由度。我们称这些自由度为无主岛区域，并将其记为 $\mathrm{Io}(AB)$，即

$$\textit{Ownerless island region}: \ \mathrm{Io}(AB) = \mathrm{Is}(AB)/(\mathrm{Is}(A) \cup \mathrm{Is}(B)). \tag{33}$$

也可能是，A和B 都不存在岛，因此总岛 $\mathrm{Is}(AB)$ 是无主的。我们再次将AB ∪的补集 $\mathrm{Is}(AB)$记为

$$C \equiv \overline{AB \cup \mathrm{Is}(AB)}. \tag{34}$$

显然 无主岛区域会对纠缠熵S_{AB}有所贡献，因为 e

$$S_{AB} = \mathcal{I}(AB \cup \mathrm{Is}(AB), C) = \mathcal{I}(\mathrm{Io}(AB), C) + \mathcal{I}(AB \cup \mathrm{Is}(A) \cup \mathrm{Is}(B), C). \tag{35}$$

然而，目前尚不清楚是否应将这一贡献 $\mathcal{I}(\mathrm{Io}(AB),C)$ 归于$s_{AB}(A)$、$s_{AB}(B)$，还是同时归于二者。

无主岛区域贡献的分配此前尚未被讨论过。让我们将 $\mathrm{Io}(AB)$ 分成两部分

$$\mathrm{Io}(AB) = \mathrm{Io}(A) \cup \mathrm{Io}(B), \tag{36}$$

其中假设 Io(A)对 $s_{AB}(A)$有贡献，而 Io(B)对 $s_{AB}(B)$有贡献，即

$$s_{AB}(A) = \mathcal{I}(A \cup \mathrm{Is}(A), C) + \mathcal{I}(\mathrm{Io}(A), C), \tag{37}$$
$$s_{AB}(B) = \mathcal{I}(B \cup \mathrm{Is}(B), C) + \mathcal{I}(\mathrm{Io}(B), C). \tag{38}$$

可以检查出，如果我们直接套用 ALC 提案，那么来自无主岛区域的贡献将会缺失，从而导致错误的答案。因此，在这些情况下，ALC 提案不再成立，我们应当谨慎处理无主岛区域。

稍后我们将看到，不同的分配会产生不同的 BPE，它们对应于纠缠楔截面的不同鞍点。此外，当存在多个平衡点时，我们应选择产生最小部分纠缠熵的那个，这有助于我们进一步确定无主岛的分解。最终我们将看到，区域 Io(A) ∪ Is(A)(或 Io(B) ∪ Is(B)) 将与文献 A (或 B) 中定义的所谓 [68]反射熵岛重合。为简单起见，我们定义

$$\mathrm{Ir}(A) \equiv \mathrm{Is}(A) \cup \mathrm{Io}(A), \qquad \mathrm{Ir}(B) \equiv \mathrm{Is}(B) \cup \mathrm{Io}(B), \tag{39}$$

这可以理解为在计算子集的贡献时，将无主岛区域考虑在内的岛的广义版本。(37) 中的贡献因此可表示为

$$s_{AB}(A) = \mathcal{I}(A \cup \mathrm{Ir}(A), C), \qquad s_{AB}(B) = \mathcal{I}(B \cup \mathrm{Ir}(B), C). \tag{40}$$

3.4 广义 ALC 提案与广义平衡条件

在上一小节中，我们证明了对于AB，若不存在任何岛，其贡献仍由 ALC 提案给出。当AB 包含一个岛且没有出现无主岛时，ALC 提案同样适用，只需用岛公式计算线性组合中的纠缠熵。然而，在第 3 类中情况有所不同，因为 Ir(A)并非A的岛。无法用子集的纠缠熵来表示部分纠缠熵 $\mathcal{I}(A\mathrm{Ir}(A),C)$。为了明确计算部分纠缠熵，我们需要找到一种方法，用其他可计算的量来表示它。

正如我们所讨论的，在二维有效场论中，我们可以计算扭曲算符的两点关联函数。当两个点的位置具有反射对称性时，该关联函数计算的是包含岛的纠缠熵。而当不存在反射对称性时，由于系统的自编码性质，两点函数的物理意义并不明确。我们在此提出，这些两点函数确实给出了由这两个点围成的区域与该区域补集之间的部分纠缠熵。更具体地说，设扭曲算符位于a 和b ($b > a$)处，并将连通区域 $[a,b]$ 记作 γ。那么，我们提出如下方程：

$$\begin{aligned} \textit{Basic proposal } 1: \quad \mathcal{I}(\gamma, \bar{\gamma}) &= \tilde{S}_{[a,b]} = \tilde{S}_{(-\infty,a]\cup[b,\infty)} \\ &= \frac{c}{3}\log\left(\frac{b-a}{\delta}\right) + \frac{c}{6}\varphi(a) + \frac{c}{6}\varphi(b). \end{aligned} \tag{41}$$

在非岛相中，上述方程成立，因为 $\mathcal{I}(\gamma,\bar{\gamma})$ 和二点函数都给出了区域 γ的纠缠熵。而在岛相中，部分纠缠熵 $\mathcal{I}(\gamma,\bar{\gamma})$ 可分为以下三类。

- 当$a > 0$ 和 γ 不包含岛时，两点函数给出了无岛阶段中 γ的纠缠，

$$\mathcal{I}(\gamma, \bar{\gamma}) = S_\gamma. \tag{42}$$

- 当$a = -b$ 和$b > 0$时，两点函数给出了区域$A = [0, b]$,的纠缠熵

$$\mathcal{I}(\gamma, \bar{\gamma}) = \tilde{S}_\gamma = S_A, \tag{43}$$

其中 $\mathrm{Is}(A) = [-b, 0)$并且 $\gamma = A \cup \mathrm{Is}(A)$。

- 当 $a \neq -b$ 和 $a < 0$ 时， $\mathcal{I}(\gamma, \bar{\gamma})$ 不是任何区域的纠缠熵。根据定义，它只是两点PEE的积分（或求和）

$$\mathcal{I}(\gamma, \bar{\gamma}) = \int_{x \in \gamma} \int_{y \in \bar{\gamma}} \mathcal{I}(x, y) dx dy. \tag{44}$$

尽管在第三类中， $\mathcal{I}(\gamma, \bar{\gamma})$ 不是纠缠熵，但也可以按照（41）进行计算。这一点至关重要，因为所有的部分纠缠熵 $\mathcal{I}(A、B)$ 都可以表示为任意两个不重叠区域之间的部分纠缠熵与某个区域及其补集之间的特殊类型部分纠缠熵的线性组合，即 $\mathcal{I}(\gamma, \bar{\gamma})$。我们将看到，如果我们将 $\mathcal{I}(\gamma, \bar{\gamma})$ 也记作 $\mathcal{I}(\gamma, \bar{\gamma})$ ，那么这种

$$\mathcal{I}(\gamma, \bar{\gamma}) \equiv \tilde{S}_\gamma \equiv \tilde{S}_{[a,b]}. \tag{45}$$

稍后我们还将遇到非连通的 $\gamma = A \cup \mathrm{Ir}(A)$的情形，其中 $\mathrm{Ir}(A) = [-d、 -c], A = [a、 b]$ 以及 a 、 b 、 c 、 $d > 0$。对于这些情形，我们提出

$$Basic\ proposal\ 2: \quad \mathcal{I}(A\,\mathrm{Ir}(A), \overline{A\,\mathrm{Ir}(A)}) = \tilde{S}_{[-d,-c] \cup [a,b]} = \tilde{S}_{[-c,a]} + \tilde{S}_{[-d,b]}. \tag{46}$$

这类似于非连通区间的 RT公式，在大c极限下应当可以得到这一结果。不过，在这里我们无需比较 $S_{[-c,a]} + S_{[-d,b]}$与 $S_{[-d,-c]} + S_{[a,b]}$并选取较小者。

请注意，根据可加性， $\mathcal{I}(A\mathrm{Ir}(A)、A\mathrm{Ir}(A))$ 可以写成由连通 γ对应的部分纠缠熵 $\mathcal{I}(\gamma, \bar{\gamma})$ 构成的线性组合，这些量可以通过基本方案*1*计算。我们将$A\mathrm{Ir}(A) = E \cup F$ 记作，其中区间$E = [-c、 a]$ 夹在A和 $\mathrm{Ir}(A)$之间。于是我们有

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(A\,\mathrm{Ir}(A), \overline{A\,\mathrm{Ir}(A)}) =& \mathcal{I}(A\,E\,\mathrm{Ir}(A), F) + \mathcal{I}(A\,F\,\mathrm{Ir}(A), E) - 2\mathcal{I}(E, F) \\ =& \tilde{S}_{[-d,b]} + \tilde{S}_{[-c,a]} - 2\mathcal{I}(E, F), \end{aligned} \tag{47}$$

其中第二行用到了基本方案*1*。上面的方程表明，除非 $\mathcal{I}(E、 F) = 0$，否则这两个基本假设并不一致。这是可能的，因为E和F 被区域A及其广义岛 $\mathrm{Ir}(A)$隔开，这表明$E \cup F$ 的纠缠楔是非连通的。稍后我们将给出证明来支持这一说法。因此，本文中用于计算部分纠缠熵的唯一猜想就是式（41）中给出的基本方案*1*。

接下来，我们基于基本假设 1 和 2 计算一般的部分纠缠熵。例如，考虑两个相邻区间 A和B 及其广义岛（或反射岛）$\mathrm{Ir}(A)$ 和 Ir(B)。同样，我们记$C = A\mathrm{Ir}(A)B\,\mathrm{Ir}(B)$。根据可加性，部分纠缠熵 $\mathcal{I}(A\mathrm{Ir}(A), C)$ 可以写成

$$\begin{aligned} s_{AB}(A) =& \mathcal{I}(A\,\mathrm{Ir}(A), C) \\ =& \frac{1}{2}\Big[\mathcal{I}(A\,\mathrm{Ir}(A)\,B\,\mathrm{Ir}(B), C) + \mathcal{I}(A\,\mathrm{Ir}(A), B\,\mathrm{Ir}(B)\,C) - \mathcal{I}(B\,\mathrm{Ir}(B), A\,\mathrm{Ir}(A)\,C)\Big] \\ =& \frac{1}{2}\Big[\tilde{S}_{A\,\mathrm{Ir}(A)\,B\,\mathrm{Ir}(B)} + \tilde{S}_{A\,\mathrm{Ir}(A)} - \tilde{S}_{B\,\mathrm{Ir}(B)}\Big]. \end{aligned} \tag{48}$$

这是公式（31）的一种推广，其中岛 Is(A) 和 Is(B)被反射岛 Ir(A)和 Ir(B)取代。有趣的是，上述线性组合与 ALC 提案（27）具有相同的结构。唯一的区别是，线性组合中出现的每个区域都有一个与之对应的广义岛，

$$S_\gamma \Rightarrow \tilde{S}_{\gamma\,\mathrm{Ir}(\gamma)}\,. \tag{49}$$

对于非相邻情形，我们需要考虑A被两个区间A_1 和A_2 夹在中间的情况，并计算其贡献

$$s_{A_1AA_2}(A) = \mathcal{I}(A\,\mathrm{Ir}(A), C), \tag{50}$$

其中C 是$A_1\mathrm{Ir}(A_1)A\mathrm{Ir}(A)A_2\mathrm{Ir}(A_2)$的补集。根据可加性，我们可以将贡献写成如下形式

$$\begin{aligned} s_{A_1AA_2}(A) = \frac{1}{2}\Big[&\mathcal{I}(A\,\mathrm{Ir}(A)A_1\mathrm{Ir}(A_1), A_2\mathrm{Ir}(A_2)C) + \mathcal{I}(A\,\mathrm{Ir}(A)A_2\mathrm{Ir}(A_2), A_1\mathrm{Ir}(A_1)C) \\ &- \mathcal{I}(A_2\mathrm{Ir}(A_2), \mathcal{I}(A\,\mathrm{Ir}(A)A_1\mathrm{Ir}(A_1)C) - \mathcal{I}(A_1\mathrm{Ir}(A_1), A\,\mathrm{Ir}(A)A_2\mathrm{Ir}(A_2)C)\Big], \end{aligned} \tag{51}$$

它还可以进一步写成

$$s_{A_1AA_2}(A) = \frac{1}{2}\Big[\tilde{S}_{A\,\mathrm{Ir}(A)A_1\mathrm{Ir}(A_1)} + \tilde{S}_{A\,\mathrm{Ir}(A)A_2\mathrm{Ir}(A_2)} - \tilde{S}_{A_2\mathrm{Ir}(A_2)} - \tilde{S}_{A_1\mathrm{Ir}(A_1)}\Big]. \tag{52}$$

显然，上述公式与 ALC 提案（8）一致，只需将（49）代入。

我们将新的公式（48）和（52）称为岛相中的广义 *ALC* 提案。当 $\mathrm{Ir}(\gamma) = \emptyset$时，它退化为（8）；当不存在无主岛，即 $\mathrm{Ir}(\gamma) = \mathrm{Is}(\gamma)$时，它退化为（31）。

由于我们计算贡献的方式已推广到岛相，平衡条件也应相应修改为以部分纠缠熵表示的新版本。对于相邻的情形，推广后的平衡条件为

$$\mathcal{I}(A\,\mathrm{Ir}(A), B_1\,\mathrm{Ir}(B_1)) = \mathcal{I}(A_1\,\mathrm{Ir}(A_1), B\,\mathrm{Ir}(B)). \tag{53}$$

对于不相邻的情形，两个平衡条件推广为

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(A_1\mathrm{Ir}(A_1), B\,\mathrm{Ir}(B)B_2\mathrm{Ir}(B_2)) &= \mathcal{I}(B_1\mathrm{Ir}(B_1), A\,\mathrm{Ir}(A)A_2\mathrm{Ir}(A_2)), \\ \mathcal{I}(A\,\mathrm{Ir}(A), B_1\mathrm{Ir}(B_1)B_2\mathrm{Ir}(B_2)) &= \mathcal{I}(B\,\mathrm{Ir}(B), A_1\mathrm{Ir}(A_1)A_2\mathrm{Ir}(A_2)). \end{aligned} \tag{54}$$

4 岛相中的纠缠楔截面

4.1 纠缠楔截面的分类

本节我们转而讨论岛相中的平衡部分纠缠，并检验其与纠缠楔截面的对应关系。在明确求解平衡条件并计算平衡部分纠缠之前，本节先对 AdS_3 体内纠缠楔的纠缠楔截面进行分类，其中一张世界末端膜位于 $\rho = \kappa$。区间$A\cup B$ 定义为A和B：

$$A:\,[b_1, b_2], \qquad B:\,[b_3, b_4], \qquad 0 \le b_1 < b_2 \le b_3 < b_4\,. \tag{55}$$

当$b_2 = b_3$ 两个区间相邻时，而当$b_2 < b_3$ 它们不相邻时。对于相邻和不相邻这两种情况，我们将在下文对纠缠楔截面进行分类。

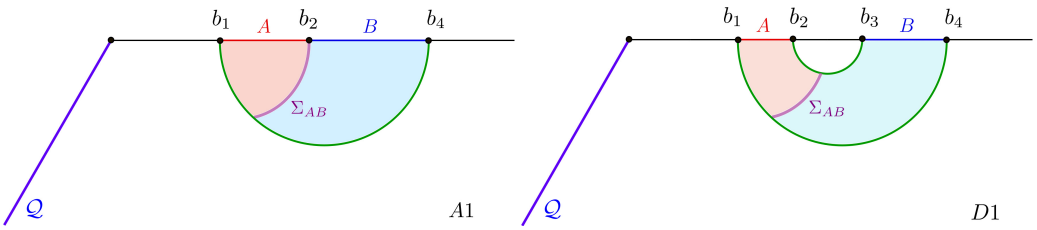


图 3：不包含岛的$A\cup B$ 的纠缠楔截面。

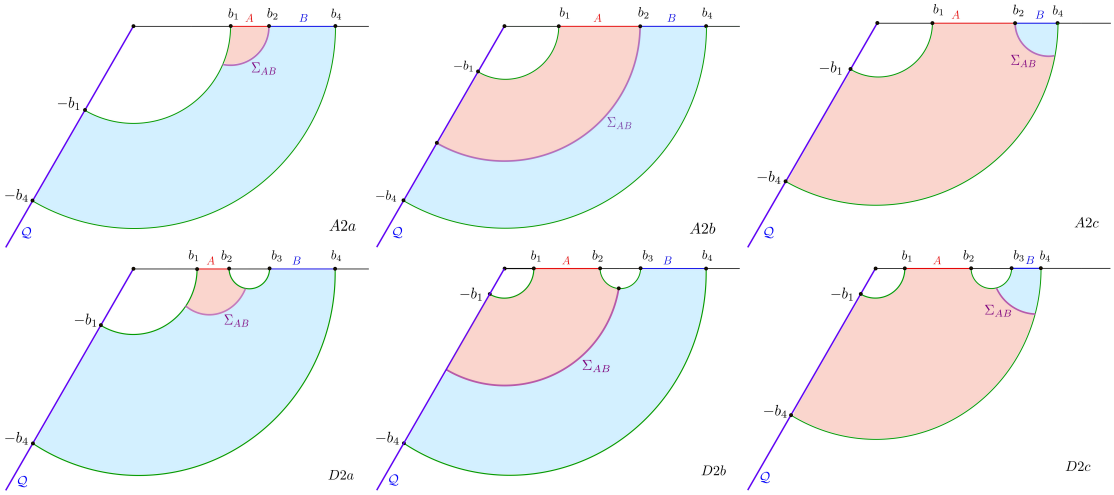


图 4：包含岛的$A\cup B$ 的纠缠楔截面。

阶段 A1 和 D1：当$A\cup B$ 或 $[b_1,b_4]$ 不允许存在岛时的构型。

在此阶段，AB 的纠缠楔与无岛阶段中的相同，纠缠楔截面也如此 Σ_{AB} （见图3）。此外，文献 [50] 研究了纠缠楔截面的面积，其表达式为：

$$\textbf{Phase-A1}: \frac{\text{Area}[\Sigma_{AB}]}{4G_N} = \frac{c}{6}\log\frac{2(b_2-b_1)(b_4-b_2)}{\delta(b_4-b_1)}. \tag{56}$$

$$\textbf{Phase-D1}: \frac{\text{Area}[\Sigma_{AB}]}{4G_N} = \frac{c}{6}\log\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}},\ x=\frac{(b_4-b_3)(b_2-b_1)}{(b_3-b_1)(b_4-b_2)}. \tag{57}$$

阶段 A2 和 D2：AB 或 $[b_1,b_4]$ 包含岛的构型。

在这些构型中，与 $\mathcal{E}_{AB}$ 对应的 $[b_1,b_4]$ RT 曲面变为非连通[11]（见图4），并分解为两部分

$$\mathcal{E}_{AB} = RT(b_1)\cup RT(b_4), \tag{58}$$

例如，$RT(b_1)$ 表示从$x = b_1$ 出发并延伸至体（截断）膜的部分。请注意，纠缠楔截面的面积存在三个鞍点，因为 Σ_{AB} 的一个端点可以锚定在三种选择之一上：$RT(b_1)$、膜，以及$RT(b_2)$。应选择面积最小的纠缠楔截面。不过，只要适当调整四个参数b_i，三种选择中的任何一种都可能成为最小值。因此，这些构型还可以进一步划分为三个不同的相，其纠缠楔截面的面积已在 [50, 106, 109] 中研究，具体如下：

[11]N注意，对于不相交的A 和B，RT 曲面的另一部分 $\mathcal{E}_{AB}$ 与 $[b_2,b_3]$ 同调，仍然保持连通接于图4所示。

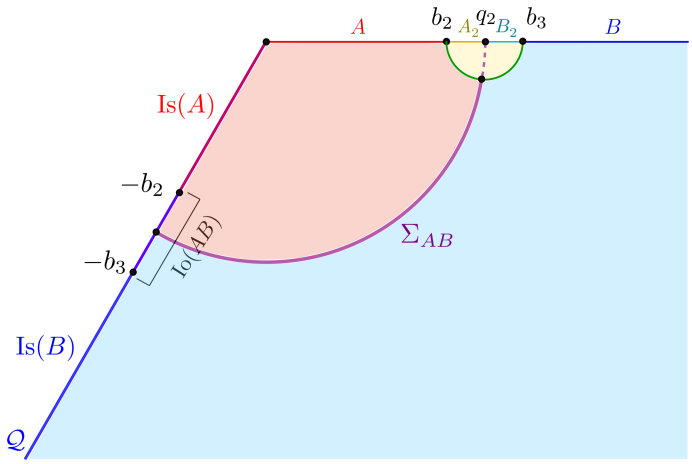


图5：一种典型构型：$A=[0,b_2], B=[b3,+\infty]$ 及其夹心区间 $[b_2,b_3]$ 不允许存在岛。存在一个无主岛 $\mathrm{Io}(AB)=[-b3,-b_2]$。

1. Σ_{AB} 锚定在 RT(b_1) 上，即连接b_1 与膜的 RT 曲面：

$$\textbf{Phase A2a}: \frac{\mathrm{Area}[\Sigma_{AB}]}{4G_N}=\frac{c}{6}\log\frac{b_2^2-b_1^2}{b_1\delta}. \tag{59}$$

$$\textbf{Phase D2a}: \frac{\mathrm{Area}[\Sigma_{AB}]}{4G_N}=\frac{c}{6}\log\frac{b_2b_3-b_1^2+\sqrt{(b_2^2-b_1^2)(b_3^2-b_1^2)}}{b_1(b_3-b_2)}. \tag{60}$$

2. Σ_{AB} 锚定在膜上：

$$\textbf{Phase A2b}: \frac{\mathrm{Area}[\Sigma_{AB}]}{4G_N}=\frac{c}{6}\log\frac{2b_2}{\delta}+\frac{c}{6}\kappa. \tag{61}$$

$$\textbf{Phase D2b}: \frac{\mathrm{Area}[\Sigma_{AB}]}{4G_N}=\frac{c}{6}\log\frac{\sqrt{b_3}+\sqrt{b_2}}{\sqrt{b_3}-\sqrt{b_2}}+\frac{c}{6}\kappa. \tag{62}$$

3. Σ_{AB} 锚定在 RT(b_4) 上：

$$\textbf{Phase A2c}: \frac{\mathrm{Area}[\Sigma_{AB}]}{4G_N}=\frac{c}{6}\log\frac{b_4^2-b_2^2}{b_4\delta}. \tag{63}$$

$$\textbf{Phase D2c}: \frac{\mathrm{Area}[\Sigma_{AB}]}{4G_N}=\frac{c}{6}\log\frac{b_2b_3-b_4^2+\sqrt{(b_2^2-b_4^2)(b_3^2-b_4^2)}}{b_4(b_3-b_2)}. \tag{64}$$

4. 纠缠楔AB 变为非连通的构型，因此纠缠楔截面消失，即

$$\textbf{Phase D3}: \frac{\mathrm{Area}[\Sigma_{AB}]}{4G_N}=0. \tag{65}$$

4.2 使用无主岛计算平衡部分纠缠的朴素计算

现在我们证明，对于存在无主岛的构型，如果坚持采用 ALC 提案来计算 PEE，那么得到的 BPE 与 EWCS 不一致。具体来说，考虑一种典型构型（见图5），其中 $A=[0,b_2], B=[b3,+\infty]$

且它们的夹心区间不包含岛。在这种情况下，Is(AB) 覆盖了整个 $x < 0$区域，并出现了一个无主岛

$$\mathrm{Io}(AB) = [-b_3, -b_2]. \tag{66}$$

分割点 $x = q_2$ 将夹心区间划分为 $A_2 = [b_1, q_2]$ 和 $B_2 = [q_2, b_3]$。如前所述，无主岛的出现使得来自各个纠缠熵的贡献变得复杂，而直接套用 ALC 提案并不足以解决问题。若我们直接套用 ALC 提案来计算部分纠缠熵，则有

$$s_{AA_2}(A) = \frac{1}{2}(S_{AA_2} + S_A - S_{A_2}) = \frac{c}{12}\log\frac{4q_2 b_2}{(q_2 - b_2)^2} + \frac{c}{6}\kappa, \tag{67}$$

$$s_{BB_2}(B) = \frac{1}{2}(S_{BB_2} + S_B - S_{B_2}) = \frac{c}{12}\log\frac{4q_2 b_3}{(b_3 - q_2)^2} + \frac{c}{6}\kappa. \tag{68}$$

解平衡条件 $s_{AA_2}(A) = s_{BB_2}(B)$，可得

$$q_2 = \sqrt{b_2 b_3}. \tag{69}$$

将上述 q_2 代入部分纠缠熵，可得平衡部分纠缠为

$$\begin{aligned} \mathrm{BPE} = \mathrm{s}_{\mathrm{AA}_2}(\mathrm{A})|_{\mathrm{balanced}} &= \frac{c}{6}\log\frac{2\sqrt{\sqrt{b_2 b_3}}}{\sqrt{b_3} - \sqrt{b_2}} + \frac{c}{6}\kappa \\ &< \frac{c}{6}\log\frac{\sqrt{b_3} + \sqrt{b_2}}{\sqrt{b_3} - \sqrt{b_2}} + \frac{c}{6}\kappa = \frac{\mathrm{Area}[\Sigma_{AB}]}{4G_N}. \end{aligned} \tag{70}$$

显然，这样计算得到的平衡部分纠缠与纠缠楔截面的面积并不一致。

让我们深入考察由 ALC 提案构造的 $s_{AA_2}(A)$，并用二体关联表示将其写出。我们得到

$$\begin{aligned} s_{AA_2}(A) =& \frac{1}{2}(S_{AA_2} + S_A - S_{A_2}) \\ =& \frac{1}{2}\Big[\mathcal{I}(AA_2\mathrm{Is}(AA_2), BB_2\mathrm{Is}(BB_2)) + \mathcal{I}(A\mathrm{Is}(A), BB_2A_2\,\mathrm{Is}(BB_2A_2)) \\ & - \mathcal{I}(A_2, AB\,\mathrm{Is}(AB) \cup B_2)\Big] \\ =& \mathcal{I}(A\mathrm{Is}(A), BB_2\,\mathrm{Is}(BB_2)) + \frac{1}{2}\left[\mathcal{I}(\mathrm{Io}(A_2), BB_2\mathrm{Is}(BB_2) \cup A) - \mathcal{I}(A_2, \mathrm{Io}(A))\right], \end{aligned} \tag{71}$$

其中我们使用了 PEE 的可加性以及 $\mathrm{Is}(AB) = \mathrm{Is}(A)\mathrm{Is}(B)\mathrm{Io}(A)\mathrm{Io}(B)$。这一结果怎么看都不像是 A对熵S^{AA_2} 的贡献。无主岛的贡献并未得到恰当考虑。

这里我们简要介绍在出现无主岛区域时计算$s_{AA_2}(A)$的正确方法。首先，我们按以下方式分解岛 Is(AA_2)和 Is(BB_2)

$$\mathrm{Is}(AA_2) = \mathrm{Is}(A) \cup \mathrm{Io}(A), \qquad \mathrm{Is}(BB_2) = \mathrm{Is}(B) \cup \mathrm{Io}(B), \tag{72}$$

其中无主岛区域分别归属于 $s_{AA_2}(A)$和 $s_{BB_2}(B)$，并选取为

$$\mathrm{Io}(B) = [-b_3, -q_2], \qquad \mathrm{Io}(A) = [-q_2, -b_2]. \tag{73}$$

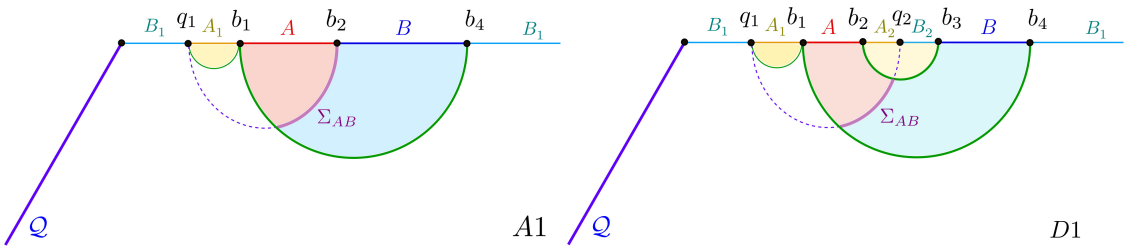


图6：A1 相和 D1相中平衡部分纠缠的几何图像。在这种情况下，分割点 $x = q_1$ 位于区域 $x < b_1$ （包括岛区域 $x < 0$）或区域 $x > b_4$内。

上述无主岛区域 Io(A)和 Io(B)由使平衡部分纠缠达到最小值的平衡条件确定。后续章节将对此进行说明。然后，利用广义 ALC 公式，我们得到

$$\begin{aligned} s_{AA_2}(A) &= \frac{1}{2}\left[\tilde{S}_{AIs(A)Io(A)A_2} + \tilde{S}_{AIs(A)Io(A)} - \tilde{S}_{A_2}\right] \\ &= \frac{c}{6}\log\frac{\sqrt{b_3}+\sqrt{b_2}}{\sqrt{b_3}-\sqrt{b_2}} + \frac{c}{6}\kappa, \end{aligned} \tag{74}$$

<escape>这与纠缠楔截面（EWCS）完全一致。可以验证，通过选择（$s_{AA_2}(A) = s_{BB_2}(B)$即可满足平衡条件（73）。</escape>

5 岛相中的平衡部分纠缠

本节我们讨论岛相中的平衡部分纠缠及其与纠缠楔截面的对应关系。与无岛阶段相比，岛相中纠缠楔截面的相空间更为复杂，因为存在更多鞍点。此外，纠缠楔截面还会出现新的相变。这表明平衡部分纠缠的相空间也应当更为复杂，因此在岛相中检验其与纠缠楔截面的对应关系会更具挑战性。

对于每种构型，无主岛区域的贡献都有不同的分配方式。我们考虑无主岛区域的所有可能分配方式，并分别求解每种分配方式的平衡条件。对于所有解，我们计算相应的 BPE；如果平衡条件有多个解，则选择最小值。值得注意的是，我们发现，根据无主岛区域的不同分配方式计算出的 BPE，恰好对应于纠缠楔截面的不同鞍点。此外，最小部分纠缠熵与最小纠缠楔截面完全一致，因此在岛相中，BPE 与纠缠楔截面之间的对应关系成立。接下来，我们将分析上一节中分类的所有构型下的 BPE。

5.1 *AB* 无岛

我们首先考虑相位-A1，其中 A 和 B 相邻，且 A∪B 不包含岛。在这种情况下，A 和 B 以及 A∪B 均不包含岛或其广义对应物，因此 AB 之外没有自由度会对 A 和 B 之间的混合态关联产生贡献。我们将 AB 的补集划分为 $A_1 \cup B_1$，分割点为 $x = q_1$ （见图6左图）。注意，在这种情况下，岛区域 $x < 0$ 包含在 A_1B_1中。基于此

part在相位-A1中，平衡条件与无岛相中的（11）相同，其中 e

$$\mathcal{I}(A,BB_1)=\frac{1}{2}[\mathcal{I}(AA_1,BB_1)+\mathcal{I}(A,BB_1A_1)-\mathcal{I}(A_1,BB_1A)]=\frac{c}{6}\log\frac{(b_2-q_1)(b_2-b_1)}{\delta(b_1-q_1)}, \quad (75)$$

$$\mathcal{I}(B,AA_1)=\frac{1}{2}[\mathcal{I}(AA_1,BB_1)+\mathcal{I}(B,AA_1B_1)-\mathcal{I}(B_1,AA_1B)]=\frac{c}{6}\log\frac{(b_2-q_1)(b_4-b_2)}{\delta(b_4-q_1)}. \quad (76)$$

求解平衡条件 $\mathcal{I}(A、BB_1)=\mathcal{I}(B,AA_1)$ 后，我们得到一个唯一解

$$q_1=\frac{2b_1b_4-b_1b_2-b_2b_4}{b_1+b_4-2b_2}. \quad (77)$$

相应的平衡部分纠缠为

$$\mathrm{BPE}(A:B)=\mathcal{I}(A,BB_1)|_{balanced}=\frac{c}{6}\log\frac{2(b_2-b_1)(b_4-b_2)}{\delta(b_4-b_1)}, \quad (78)$$

这恰好是式（56）中给出的纠缠楔截面面积。

对于 D1相，存在两个分割点 q_1 和 q_2，它们将 AB的补集划分为四个区域 $A_1B_1\cup A_2B_2$（见图6右侧面板）。同样在这种情况下，AB 不包含岛。利用二体关联表示，我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(A,BB_1B_2)=&\frac{1}{2}[\mathcal{I}(A_1A,A_2BB_1B_2)-\mathcal{I}(A_1,AA_2BB_1B_2)+\mathcal{I}(A_2A,A_1BB_1B_2)-\mathcal{I}(A_2,AA_1BB_1B_2)]\\=&\frac{c}{6}\log\frac{(b_2-q_1)(q_2-b_1)}{(b_1-q_1)(q_2-b_2)},\end{aligned} \quad (79)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(B,AA_1A_2)=&\frac{1}{2}[\mathcal{I}(B_1B,B_2AA_2A_1)-\mathcal{I}(B_1,BB_2AA_2A_1)+\mathcal{I}(B_2B,B_1AA_2A_1)-\mathcal{I}(B_2,BB_1AA_2A_1)]\\=&\frac{c}{6}\log\frac{(b_3-q_1)(b_4-q_2)}{(b_4-q_1)(b_3-q_2)}.\end{aligned} \quad (80)$$

and

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(A_2,BB_1B_2)=&\frac{1}{2}[\mathcal{I}(A_1AA_2,BB_1B_2)-\mathcal{I}(A_1A,A_2BB_1B_2)+\mathcal{I}(A_2,A_1ABB_1B_2)]\\=&\frac{c}{6}\log\frac{(q_2-q_1)(q_2-b_2)}{\delta(b_2-q_1)},\end{aligned} \quad (81)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(B_2,AA_1A_2)=&\frac{1}{2}[\mathcal{I}(B_1BB_2,AA_2A_1)-\mathcal{I}(B_1B,B_2AA_2A_1)+\mathcal{I}(B_2,B_1BAA_2A_1)]\\=&\frac{c}{6}\log\frac{(q_2-q_1)(b_3-q_2)}{\delta(b_3-q_1)}.\end{aligned} \quad (82)$$

求解两个平衡条件 $\mathcal{I}(A、BB_1B_2)=\mathcal{I}(A、BB_1B_2)$ 以及 $\mathcal{I}(A_2,BB_1B_2)=\mathcal{I}(B_2,AA_1A_2)$后，我们得到两个分割点如下

$$\begin{aligned}q_1=&\frac{b_1b_4-b_2b_3-\sqrt{Y}}{b_4-b_3-b_2+b_1},\qquad q_2=\frac{b_1b_4-b_2b_3+\sqrt{Y}}{b_4-b_3-b_2+b_1},\\Y\equiv&(b_1-b_2)(b_1-b_3)(b_2-b_4)(b_3-b_4).\end{aligned} \quad (83)$$

然后，将上述平衡划分点代入相应的部分纠缠熵，即可计算平衡部分纠缠:

$$\mathrm{BPE}(A:B)=\mathcal{I}(A,BB_1B_2)|_{balanced}=\frac{c}{6}\log\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}},\ x=\frac{(b_4-b_3)(b_2-b_1)}{(b_3-b_1)(b_4-b_2)}, \quad (84)$$

这也等于纠缠楔截面（57）的面积。

在继续讨论之前，我们想对本例中通过贡献表示计算的平衡部分纠缠做些说明。例如，在 A1 相中，我们可以计算 s_{AA_1}(A)和 s_{BB_1}(B)，然后应用平衡条件 $s_{AA_1}(A) = s_{BB_1}(B)$ 来确定 q_1。可以从某个接近 b_1 的 b_2 开始，此时 AA_1 也不存在岛。在这种情况下，岛 $Is(BB_1)$覆盖整个 $x < 0$ 区域，并且 BB_1存在一个无主岛区域 $Io(BB_1) = [-b_4, q]$。若将无主岛区域分配给 B_1，使得 $Ir(B_1) = (-\infty, 0)$ 和 $Ir(B) = \emptyset$，我们便能找到满足平衡条件的解。值得注意的是，这样计算得到的平衡点和平衡部分纠缠与我们先前的结果一致。

然而，当b_2 离b_1，更远时，AA_1不存在无岛情况下的平衡解，因此我们应考虑存在岛的 AA_1。结果得到 $Ir(A_1) \neq \emptyset$。在这种情况下，无论如何分配来自无主岛区域 $Io(AA_1)$ 和 $Io(BB_1)$的贡献，都不存在满足平衡条件的解。因此，我们先前的结果是平衡条件的唯一解。这也与以下观察一致：对于任何存在岛的AA_1，纠缠楔截面都不是 RT 曲面的一部分。因此，我们可以得出结论：平衡条件的二体关联表示包含了无法用贡献表示描述的划分构型。

5.2 相邻的AB 与岛

在本小节中，我们考虑 A2 相，其中 $A = [b_1, b_2]$ 和 $B = [b_2, b_4]$，且AB具有纠缠岛。这里，区域A或B 单独来看，可能有自己的岛，也可能没有。对于无主岛区域 $Io(AB)$，我们考虑以下三种具有给定分配的构型：

1. A2a: $Ir(A) = \emptyset, \quad Ir(B) = [-b_4, -b_1]$,
2. A2b: $Ir(A) = [-q, -b_1], \quad Ir(B) = [-b_4, -q]$,
3. A2c: $Ir(A) = [-b_4, -b_1], \quad Ir(B) = \emptyset$.

请注意，对于某些 q 的取值，当 $Is(A) \neq \emptyset$（或 $Is(B) \neq \emptyset$）时，存在 $Ir(A) \subset Is(A)$（或 $Ir(B) \subset Is(B)$）这样的构型。如果我们认真考虑这些构型，并求解平衡条件以得到一个 BPE，那么得到的结果就是无岛相的结果。而且，这个 BPE 也不是最小的。为简单起见，我们只考虑通过适当选择分割点 $x = -q$，使 $Is(A) \subset Ir(A)$、$Is(B) \subset Ir(B)$成立的情形。不过，正如我们将看到的，这些额外的构型无法给出最小的 BPE。接下来，我们将系统地求解每种分配对应的平衡条件，并得到相应的 BPE。

5.2.1 A2a 相位

对于 $Ir(A) = \emptyset$ 和 $Ir(B) = [-b4, -b_1]$,，A 没有岛贡献，而整个岛 $Is(AB)$ 都对B有贡献。假设分割点q_1 位于 $0 < q_1 < b_1$，使得$A_1 = [q_1, b_1], B_1 = [0, q_1] \cup [b4, \infty)$。此外，我们假设 AA_1 不允许存在岛，因此A_1 也不会获得任何岛贡献，即

$$Ir(A_1) = \emptyset, \quad Ir(B_1) = [-b_1, 0] \cup (-\infty, -b_4]. \tag{85}$$

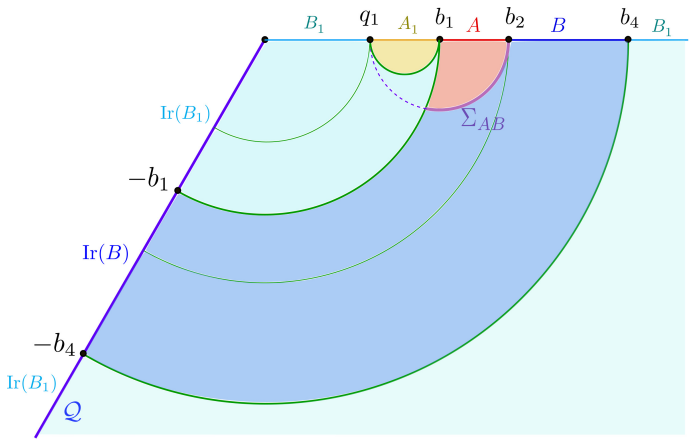


图 7：A2a 相位：$\mathrm{Ir}(A)=\emptyset,\mathrm{Ir}(B)=\mathrm{Is}(AB)=[-b4,-b_1]$。

该设置的示意图如图所示。7在此构型中，我们通过广义 ALC 提案计算以下两个部分纠缠熵

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(A,B\mathrm{Ir}(B)\cup B_1\mathrm{Ir}(B_1)) &= \frac{1}{2}\left[\tilde{S}_{AA_1}+\tilde{S}_A-\tilde{S}_{A_1}\right]\\ &= \frac{1}{2}(\tilde{S}_{[q_1,b_2]}+\tilde{S}_{[b_1,b_2]}-\tilde{S}_{[q_1,b_1]})\\ &= \frac{c}{6}\log\frac{(b_2-q_1)(b_2-b_1)}{\delta(b_1-q_1)},\end{aligned} \tag{86}$$

and

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(B\mathrm{Ir}(B),AA_1) &= \frac{1}{2}\left[\tilde{S}_{B\mathrm{Ir}(B)B_1\mathrm{Ir}(B_1)}+\tilde{S}_{B\mathrm{Ir}(B)}-\tilde{S}_{B_1\mathrm{Ir}(B_1)}\right]\\ &= \frac{1}{2}(\tilde{S}_{[q_1,b_2]}+\tilde{S}_{[-b_4,-b_1]\cup[b_2,b_4]}-\tilde{S}_{[-\infty,-b_4]\cup[-b_1,q_1]\cup[b_4,\infty]})\\ &= \frac{c}{6}\log\frac{(b_2-q_1)(b_2+b_1)}{(q_1+b_1)\delta}.\end{aligned} \tag{87}$$

在（87）中，我们使用了基本方案*2* 来得到：

$$\tilde{S}_{[-b_4,-b_1]\cup[b_2,b_4]}=\tilde{S}_{[-b_1,b_2]}+\tilde{S}_{[-b_4,b_4]}, \tag{88}$$

$$\tilde{S}_{[-\infty,-b_4]\cup[-b_1,q_1]\cup[b_4,\infty]}=\tilde{S}_{[-b_4,-b_1]\cup[q_1,b_4]}=\tilde{S}_{[-b_1,q_1]}+\tilde{S}_{[-b_4,b_4]}. \tag{89}$$

求解平衡条件 $\mathcal{I}(A,B\mathrm{Ir}(B)\cup B1\mathrm{Ir}(B_1))=\mathcal{I}(B\mathrm{Ir}(B),AA_1)$，我们得到条件

$$q_1=\frac{b_1^2}{b_2}. \tag{90}$$

将 $q_1=b_1^2/b2$ 代回（86）或（87），即可得到如下平衡部分纠缠

$$\mathrm{BPE}(A,B)=\mathcal{I}(A,B\mathrm{Ir}(B)\cup B_1\mathrm{Ir}(B_1))|_{balanced}=\frac{c}{6}\log\frac{b_2^2-b_1^2}{b_1\delta}. \tag{91}$$

这个结果与（59）中的纠缠楔截面鞍点的面积相同。

于是可以考虑 $AA1$ 存在岛的可能性。在这种情况下，$\mathrm{Ir}(A_1)\neq\emptyset$，我们应考虑 $\mathrm{Ir}(A_1)$和 $\mathrm{Ir}(B_1)$的其他构型。然而，这种构型下不存在满足平衡条件的解。因此，结果（91）是构型 A2a 的唯一解。

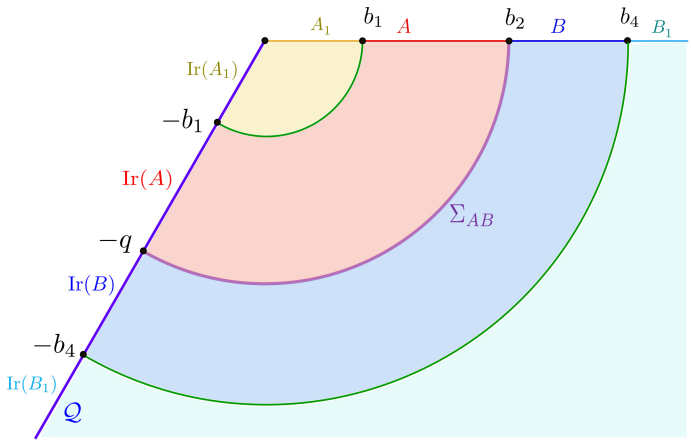


图 8：A2b 阶段：$\mathrm{Ir}(A)=[-q,\,-b_1],\mathrm{Ir}(B)=[-b4,-q]$。

5.2.2 A2b 阶段

在这种情况下，如图8所示，我们有广义岛 $\mathrm{Ir}(A)=[-q,-b_1]$ 和 $\mathrm{Ir}(B)=[-b4,-q]$,，其中 $x=-q$ 是 $\mathrm{Is}(AB)=\mathrm{Ir}(A)\cup\mathrm{Ir}(B)$ 的分割点。此外，我们还可以选择

$$A_1=[0,b_1],\quad B_1=[b_4,\infty]. \tag{92}$$

在此构型中，我们有 $\mathrm{Is}(A_1)\cup\mathrm{Is}(B_1)=\mathrm{Is}(A_1B_1)$，因此$A_1B_1$ 和不存在无主岛区域

$$\mathrm{Ir}(A_1)=\mathrm{Is}(A_1)=[-b_1,0),\qquad \mathrm{Ir}(B_1)=\mathrm{Is}(B_1)=[-\infty,-b_4]. \tag{93}$$

接下来，我们通过广义 ALC 提案计算以下部分纠缠熵

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(A\mathrm{Ir}(A),B\mathrm{Ir}(B)B_1\mathrm{Ir}(B_1))=&\frac{1}{2}\left[\tilde{S}_{A\mathrm{Ir}(A)A_1\mathrm{Ir}(A_1)}+\tilde{S}_{A\mathrm{Ir}(A)}-\tilde{S}_{A_1\mathrm{Ir}(A_1)}\right]\\=&\frac{1}{2}\left[\tilde{S}_{[-q,b_2]}+\tilde{S}_{[-q,-b_1]\cup[b_1,b_2]}-\tilde{S}_{[-b_1,b_1]}\right]\\=&\tilde{S}_{[-q,b_2]},\\ \mathcal{I}(B\mathrm{Ir}(B),A\mathrm{Ir}(A)A_1\mathrm{Ir}(A_1))=&\frac{1}{2}\left[\tilde{S}_{B\mathrm{Ir}(B)B_1\mathrm{Ir}(B_1)}+\tilde{S}_{B\mathrm{Ir}(B)}-\tilde{S}_{B_1\mathrm{Ir}(B_1)}\right]\\=&\frac{1}{2}\left[\tilde{S}_{[-q,b_2]}+\tilde{S}_{[-b_4,-q]\cup[b_2,b_4]}-\tilde{S}_{[-b_4,b_4]}\right]\\=&\tilde{S}_{[-q,b_2]}.\end{aligned} \tag{94}$$

有趣的是，平衡条件

$$\mathcal{I}(A\mathrm{Ir}(A),B\mathrm{Ir}(B)B_1\mathrm{Ir}(B_1))=\mathcal{I}(B\mathrm{Ir}(B),A\mathrm{Ir}(A)A_1\mathrm{Ir}(A_1)) \tag{95}$$

对于所有满足q 的选择，若$b_1<q<b_4$，则该条件成立。由于q 的不同选择会得到不同的平衡部分纠缠，我们应根据最小化条件选择其中最小的一个。更明确地说，我们选择满足以下条件的q

$$\partial_q\tilde{S}_{[-q,b_2]}=\partial_q\left[\frac{c}{3}\log\left(\frac{b_2+q}{\delta}\right)+\frac{c}{6}(\kappa-\log\frac{2q}{\delta})\right]=0, \tag{96}$$

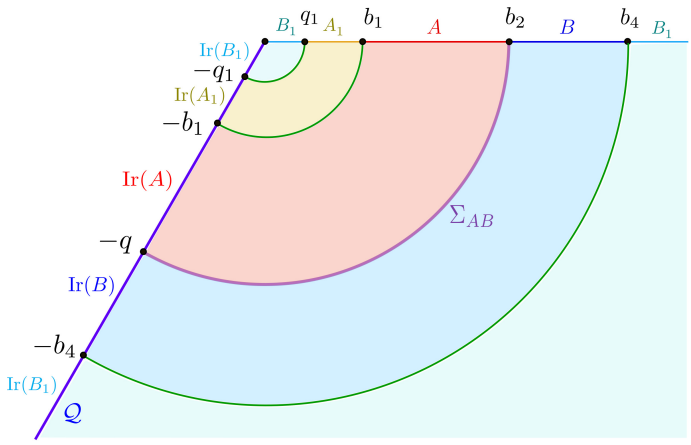


图 9：A2b 阶段的另一种可能构型：$\mathrm{Ir}(A_1) = [-b1, -q_1]$,$\mathrm{Ir}(B_1) = [-q1, 0] \cup (-\infty, -b_4]$.

其具有一个简单的解，

$$q = b_2, \tag{97}$$

选择 $q = b_2$ 得到了预期的最小部分纠缠熵

$$\mathrm{BPE}(A,B) = \tilde{S}_{[-q,b_2]}|_{minimal} = \frac{c}{6}\log\frac{2b_2}{\delta} + \frac{c}{6}\kappa, \tag{98}$$

其与锚定在世界末端膜上的纠缠楔截面鞍点（61）重合。

5.2.3 岛相中的部分纠缠熵消失

还可以考虑相的其他构型A2b，例如将一部分A_1 转移到B_1 ，与先前的构型相比（见图9），

$$A_1 = [q_1, b_1], \qquad B_1 = [0, q_1] \cup [b_4, \infty]. \tag{99}$$

如果A_1 有岛，即$q_1 \leq r^* b_1$，，那么我们有

$$\mathrm{Ir}(A_1) = \mathrm{Is}(A_1) = [-b_1, -q_1], \qquad \mathrm{Ir}(B_1) = \mathrm{Is}(B_1) = [-q_1, 0] \cup [-\infty, -b_4]. \tag{100}$$

在这些构型中，我们也可以设置$q = b_2$ ，使得 $\mathrm{Ir}(A)$ 和 $\mathrm{Ir}(B)$ 保持不变。随后，我们发现部分纠缠熵为

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(A\mathrm{Ir}(A), B\mathrm{Ir}(B)B_1\mathrm{Ir}(B_1)) =& \frac{1}{2}\left[\tilde{S}_{A\mathrm{Ir}(A)A_1\mathrm{Ir}(A_1)} + \tilde{S}_{A\mathrm{Ir}(A)} - \tilde{S}_{A_1\mathrm{Ir}(A_1)}\right] \\
=& \frac{1}{2}\left[\tilde{S}_{[-b_2,q_1]\cup[q_1,b_2]} + \tilde{S}_{[-b_2,-b_1]\cup[b_1,b_2]} - \tilde{S}_{[-b_1,-q_1]\cup[q_1,b_1]}\right] \\
=& \tilde{S}_{[-b_2,b_2]}, \\
\mathcal{I}(B\mathrm{Ir}(B), A\mathrm{Ir}(A)A_1\mathrm{Ir}(A_1)) =& \frac{1}{2}\left[\tilde{S}_{B\mathrm{Ir}(B)B_1\mathrm{Ir}(B_1)} + \tilde{S}_{B\mathrm{Ir}(B)} - \tilde{S}_{B_1\mathrm{Ir}(B_1)}\right] \\
=& \frac{1}{2}\left[\tilde{S}_{[q_1,b_3]\cup[-b_3,-q_1]} + \tilde{S}_{[-b_4,-b_2]\cup[b_2,b_4]} - \tilde{S}_{[q_1,b_4]\cup[-b_4,-q_1]}\right] \\
=& \tilde{S}_{[-b_2,b_2]}.
\end{aligned} \tag{101}$$

显然，这类具有 $q = b_2$ 和 A_1 且包含岛的构型满足平衡条件，并给出与式（98）相同的部分纠缠熵。这意味着平衡点

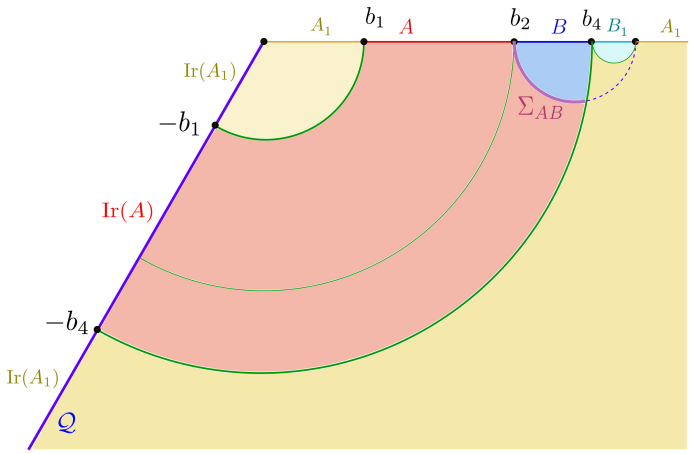


图 10：A2c 阶段：$\mathrm{Ir}(A) = \mathrm{Is}(AB) = [-b4, -b_1], \mathrm{Ir}(B) = \emptyset$.

使最小部分纠缠熵取得最小值的构型并非唯一。换言之，无论将区域 $E = [-q_1, q_1]$ 指定给 $A_1\mathrm{Ir}(A_1)$ 还是 $B_1\mathrm{Ir}(B_1)$，部分纠缠熵都不会改变。这表明区域 E 与 $A\mathrm{Ir}(A)B\mathrm{Ir}(B)$之间的部分纠缠熵为零，

$$\mathcal{I}(E, AB\mathrm{Ir}(AB)) = 0\,. \tag{102}$$

注意，当$q = b_2$ 构型具有反射对称性且不存在无主岛时。此外，该计算仅涉及带有岛的区域的纠缠熵，因此结果并不依赖于关于部分纠缠熵的两个基本假设（41）和（46）。这很重要，因为它表明，岛相中的部分纠缠熵为零（102）可以独立于关于部分纠缠熵的基本假设推导出来。

此外，我们可以取极限 $b_4 \to \infty$ 并记作 $F = AB\mathrm{Ir}(AB) = [-\infty, -b_1] \cup [b_1, \infty]$。在此极限下，只要为 b_2，选择适当的值，构型始终处于 A2b 阶段，且方程（102）仍然成立。因此，我们可以作出如下的一般性陈述：

- 对于任意两个区域 E 和 F，若它们被区域 A及其（广义）岛 $\mathrm{Ir}(A)$隔开，则有

$$\mathcal{I}(E, F) = 0\,, \tag{103}$$

这对我们从（46）推导出（41）至关重要。根据可加性和正性，E 与F 的任意子集之间的部分纠缠熵也为零。

5.2.4 A2c 阶段

对于分配 $\mathrm{Ir}(A) = [-b4, -b_1]$ 和 $\mathrm{Ir}(B) = \emptyset$，交换$A$和$B$后，其分析与 A2a 相位的情况对称。在此情况下，假设BB_1 不包含岛，我们应求解平衡条件 $\mathcal{I}(A\mathrm{Ir}(A), BB_1) = \mathcal{I}(B, A\mathrm{Ir}(A)A_1\mathrm{Ir}(A_1)$。我们可以找到一个同时满足平衡条件和最小化条件的解，由此得到分割点$x = q_1 > b_4$ 如下：

$$q_1 = \frac{b_4^2}{b_2}. \tag{104}$$

在这种情况下，平衡部分纠缠由下式给出

$$\mathrm{BPE}(A:B) = \frac{c}{6} \log \frac{b_4^2 - b_2^2}{b_4 \delta}, \tag{105}$$

这与锚定在 RT 曲面片段上的纠缠楔截面鞍点（63）完全一致 $\mathcal{E}_{AB}$ 该曲面片段从 $x = b_4$发出。

5.2.5 在 A2 相中最小化平衡部分纠缠

现在我们比较 A2 相中的三个 BPE，它们分别对应三个鞍点纠缠楔截面，并选出其中最小的一个。计算 A2a 相位中的 BPE 时，我们假设AA_1不包含岛，因此没有考虑AA_1 包含岛时可能存在平衡点的情况。这里我们可以排除这种可能性：当 A2a 相位的 BPE 小于 A2b 阶段的 BPE 时，AA_1 不应包含岛。类似的结论也适用于 A2c 阶段中的BB_1 。

对于 A2a 相位，我们知道 A不允许存在岛，因此 $b_1/b_2 > r^*$。由于解 $q_1 = b_1^2/b_2$ 可以写成

$$\frac{q_1}{b_1} = \frac{b_1}{b_2} > r^*, \tag{106}$$

我们得出结论，A_1 也不存在岛。不过，AA_1 不存在岛这一假设可能并不成立。现在我们比较 A2a 相和 A2b 相中的平衡部分纠缠，并发现这两个相之间的临界点为

$$b_1 = (\sqrt{1+e^{2\kappa}} - e^{\kappa})b_2 = \sqrt{r^*}b_2\,. \tag{107}$$

当$b_2 < b_1/\sqrt{r^*}$ 时，A2a 相位的 BPE 更小，而且我们还有

$$q_1 = b_1^2/b_2 > r^* b_2\,, \tag{108}$$

这证实了我们的假设，即AA_1 不包含岛。

同样，可以比较 A2b 阶段和 A2c 阶段中的平衡部分纠缠，并确定临界点为

$$b_2 = \sqrt{r^*}b_4\,. \tag{109}$$

当 $b_4 < b_2/\sqrt{r^*}$ A2c 阶段的平衡部分纠缠更小，而且我们还有

$$q_1 = b_4^2/b_2 < r^* b_4\,, \tag{110}$$

这证实了我们的假设，即 BB_1 不允许存在岛。

当 AB 存在岛时，我们要求 $b_1 \le r^* b_4$，并且总能在 (b_1, b_4)内找到一个 b_2，满足以下不等式

$$b_1/\sqrt{r^*} \le b_2 \le \sqrt{r^*}b_4\,. \tag{111}$$

换言之，我们可以确认，当AB 存在岛时，总存在一个b_2，使得平衡部分纠缠或纠缠楔截面处于 A2b 阶段。

5.3 带岛的不相邻AB

当$A = [b_1, b_2]$ 与$B = [b_3, b_4]$ 不相邻时，只有当它们的夹心区间 $[b_2, b_3]$ 没有岛时，纠缠楔截面 $\Sigma_{AB} \neq 0$ 才存在。我们将该夹心区间内的分割点记作$x = q_2$，它将 $[b_2, b_3]$ 划分为$A_2 \cup B_2$。与相邻相类似，根据 $\mathrm{Ir}(A)$和 $\mathrm{Ir}(B)$是否存在，我们有三个子相：

1. D2a：$\mathrm{Ir}(A) = \emptyset$、$\mathrm{Ir}(B) = [-b4, -b_1]$,2. D2b：$\mathrm{Ir}(A) = [-q, -b_1], \mathrm{Ir}(B) = [-b4, -q]$,3. D2c：$\mathrm{Ir}(A) = [-b4, -b_1]$,$\mathrm{Ir}(B) = \emptyset$。

下面我们将系统地研究这些子相，求解每种情况下的平衡要求，并进一步得到相应的 BPE。

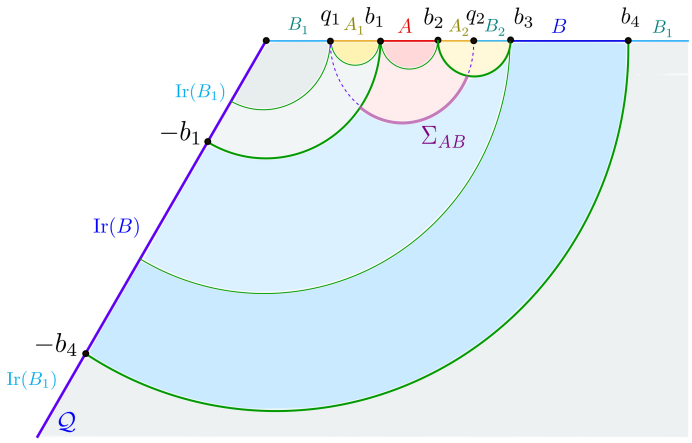


图 11：D2a 相：$\mathrm{Ir}(A)=\emptyset$ 和 $\mathrm{Ir}(B)\neq\emptyset$

5.3.1 D2a 相

对于 $\mathrm{Ir}(A)=\emptyset$ 和 $\mathrm{Ir}(B)=[-b4,-b_1]$,，我们假设 AA_1A_2 没有岛，因此有 $\mathrm{Ir}(A_1)=\mathrm{Ir}(A_2)=\emptyset$, 且两个平衡点 q_1 和q_2 位于

$$0<q_1<b_1,\quad b_2<q_2<b_3. \tag{112}$$

岛区域 $(-\infty,0]$被划分为 $\mathrm{Ir}(B)=[-b_4,-b_1]$和 $\mathrm{Ir}(B_1)=(-\infty,b_4)\cup(-b_1,0]$。此外，我们有 $\mathrm{Ir}(B_2)=\emptyset$，因为 A_2B_2 不允许存在岛。构型示意图见图11。

此情形下的平衡条件由以下两个方程给出

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(B\mathrm{Ir}(B),A_1A_2A)=&\mathcal{I}(A,B\mathrm{Ir}(B)B_1\mathrm{Ir}(B_1)B_2),\\ \mathcal{I}(B_2,A_1A_2A)=&\mathcal{I}(A_2,B\mathrm{Ir}(B)B_1\mathrm{Ir}(B_1)B_2),\end{aligned} \tag{113}$$

其中，上述方程中的四个部分纠缠熵计算如下:

$$\begin{aligned}&\mathcal{I}(B\mathrm{Ir}(B),A_1A_2A)\\ =&\frac{1}{2}\left[\tilde{S}_{B\mathrm{Ir}(B)B_1\mathrm{Ir}(B_1)}+\tilde{S}_{B\mathrm{Ir}(B)B_2}-\tilde{S}_{B_2}-\tilde{S}_{B_1\mathrm{Ir}(B_1)}\right]\\ =&\frac{1}{2}\left[\tilde{S}_{[q_1,b_3]}+\tilde{S}_{[-b_4,-b_1]\cup[q_2,b_4]}-\tilde{S}_{[q_2,b_3]}-\tilde{S}_{(\infty,-b_4)\cup[-b_1,q_1]\cup(b_4,\infty)}\right]\\ =&\frac{c}{6}\log\frac{b_3-q_1}{b_3-q_2}\frac{q_2+b_1}{q_1+b_1},\end{aligned} \tag{114}$$

$$\begin{aligned}&\mathcal{I}(A,B\mathrm{Ir}(B)B_1\mathrm{Ir}(B_1)B_2)\\ =&\frac{1}{2}\left[\tilde{S}_{AA_1}+\tilde{S}_{AA_2}-\tilde{S}_{A_1}-\tilde{S}_{A_2}\right]\\ =&\frac{1}{2}\left[\tilde{S}_{[q_1,b_2]}+\tilde{S}_{[b_1,q_2]}-\tilde{S}_{[q_1,b_1]}-\tilde{S}_{[b_2,q_2]}\right]\\ =&\frac{c}{6}\log\frac{b_2-q_1}{q_2-b_2}\frac{q_2-b_1}{b_1-q_1},\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
&\mathcal{I}(B_2, A_1A_2A)\\
=&\frac{1}{2}\left[\tilde{S}_{B\mathrm{Ir}(B)B_1\mathrm{Ir}(B_1)B_2}+\tilde{S}_{B_2}-\tilde{S}_{B\mathrm{Ir}(B)B_1\mathrm{Ir}(B_1)}\right]\\
=&\frac{1}{2}\left[\tilde{S}_{[q_1,q_2]}+\tilde{S}_{[q_2,b_3]}-\tilde{S}_{[q_1,b_3]}\right]\\
=&\frac{c}{6}\log\frac{(q_2-q_1)(b_3-q_2)}{\delta(b_3-q_1)},
\end{aligned}\tag{115}$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{I}(A_2, B\mathrm{Ir}(B)B_1\mathrm{Ir}(B_1)B_2)\\
=&\frac{1}{2}\left[\tilde{S}_{AA_1A_2}+\tilde{S}_{A_2}-\tilde{S}_{AA_1}\right]\\
=&\frac{1}{2}\left[\tilde{S}_{[q_1,q_2]}+\tilde{S}_{[b_2,q_2]}-\tilde{S}_{[q_1,b_2]}\right]\\
=&\frac{c}{6}\log\frac{(q_2-q_1)(q_2-b_2)}{(b_2-q_1)\delta}.
\end{aligned}$$

这两个平衡条件的解为

$$q_1=\frac{b_1^2+b_2b_3}{b_3+b_2}-\frac{\sqrt{(b_2^2-b_1^2)(b_3^2-b_1^2)}}{b_3+b_2},\qquad q_2=\frac{b_1^2+b_2b_3}{b_3+b_2}+\frac{\sqrt{(b_2^2-b_1^2)(b_3^2-b_1^2)}}{b_3+b_2}.\tag{116}$$

相应的平衡部分纠缠$(A\colon B)$ 可按如下方式得到

$$\mathrm{BPE}(A:B)=\frac{c}{6}\log\frac{b_2b_3-b_1^2+\sqrt{(b_2^2-b_1^2)(b_3^2-b_1^2)}}{b_1(b_3-b_2)},\tag{117}$$

这与式（60）中给出的 D2a 相下纠缠楔截面的面积完全一致。有趣的是，在全息几何图像中，这两个平衡分割点恰好位于从纠缠楔截面延伸出的 RT 曲面与渐近边界相交的位置，如图11所示。

5.3.2 D2b 相

在此构型中，分割点 x $=-$q 将岛区域 Is(AB) 划分为 Ir(A) $=[-$q$,-$b$_1]$和 Ir(B) $=[-$b4$,-$q$]$, , 如图 12 所示。此外，我们有 Ir(B_2) $=$ Ir(A_2) $=\emptyset$, 因为 A2B2 不包含任何岛。我们可以平凡地选择另一种划分如下

$$A_1=[0,b_1],\quad B_1=[b_4,\infty].\tag{118}$$

在这种情况下，A_1 和B_1都没有无主岛。因此，我们有 Ir(A_1) $=(-b1,0)$和 Ir(B_1) $=[-\infty,-b_4)$。平衡条件由以下两个方程给出

$$\begin{aligned}
&\mathcal{I}(B\mathrm{Ir}(B), A\mathrm{Ir}(A)A_1\mathrm{Ir}(A_1)A_2)=\mathcal{I}(A\mathrm{Ir}(A), B\mathrm{Ir}(B)B_1\mathrm{Ir}(B_1)B_2),\\
&\mathcal{I}(B_2, A\mathrm{Ir}(A)A_1\mathrm{Ir}(A_1)A_2)=\mathcal{I}(A_2, B\mathrm{Ir}(B)B_1\mathrm{Ir}(B_1)B_2),
\end{aligned}\tag{119}$$

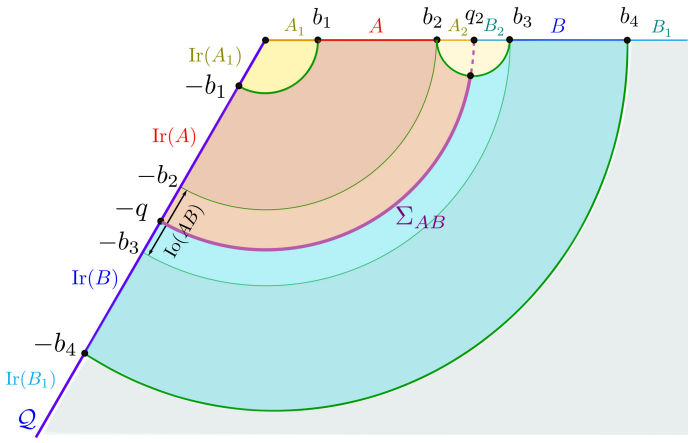


图 12：D2b 相：$\mathrm{Ir}(A)\neq\emptyset$ 和 $\mathrm{Ir}(B)\neq\emptyset$

上述方程中的四个部分纠缠熵计算如下

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{I}(B\mathrm{Ir}(B),A\mathrm{Ir}(A)A_1\mathrm{Ir}(A_1)A_2)\\
=&\frac{1}{2}[\tilde{S}_{B\mathrm{Ir}(B)B_1\mathrm{Ir}(B_1)}+\tilde{S}_{B_2B\mathrm{Ir}(B)}-\tilde{S}_{B_2}-\tilde{S}_{B_1\mathrm{Ir}(B_1)}]\\
=&\frac{1}{2}(\tilde{S}_{[-\infty,-q]\cup[b_3,+\infty]}+\tilde{S}_{[-b_4,-q]\cup[q_2,b_4]}-\tilde{S}_{[q_2,b_3]}-\tilde{S}_{[-\infty,-b_4]\cup[b_4,+\infty]})\\
=&\frac{c}{6}\log\frac{(b_3+q)(q+q_2)}{2q(b_3-q_2)}+\frac{c}{6}\kappa,
\end{aligned}
\tag{120}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{I}(A\mathrm{Ir}(A),B\mathrm{Ir}(B)B_1\mathrm{Ir}(B_1)B_2)\\
=&\frac{1}{2}[\tilde{S}_{A\mathrm{Ir}(A)A_1\mathrm{Ir}(A_1)}+\tilde{S}_{A_2A\mathrm{Ir}(A)}-\tilde{S}_{A_1\mathrm{Ir}(A_1)}-\tilde{S}_{A_2}]\\
=&\frac{1}{2}(\tilde{S}_{[-q,b_2]}+\tilde{S}_{[-q,-b_1]\cup[b_1,q_2]}-\tilde{S}_{[-b_1,b_1]}-\tilde{S}_{[b_2,q_2]})\\
=&\frac{c}{6}\log\frac{(b_2+q)(q_2+q)}{2q(q_2-b_2)}+\frac{c}{6}\kappa,
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{I}(B_2,A\mathrm{Ir}(A)A_1\mathrm{Ir}(A_1)A_2)\\
=&\frac{1}{2}[\tilde{S}_{BB_1\mathrm{Ir}(BB_1)B_2}+\tilde{S}_{B_2}-\tilde{S}_{BB_1\mathrm{Ir}(BB_1)}]\\
=&\frac{1}{2}(\tilde{S}_{[-\infty,-q]\cup[q_2,\infty]}+\tilde{S}_{[q_2,b_3]}-\tilde{S}_{[-\infty,-q]\cup[b_3,+\infty]})\\
=&\frac{c}{6}\log\frac{(q_2+q)(b_3-q_2)}{\delta(b_3+q)},
\end{aligned}
\tag{121}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{I}(A_2,B\mathrm{Ir}(B)B_1\mathrm{Ir}(B_1)B_2)\\
=&\frac{1}{2}[\tilde{S}_{A\mathrm{Ir}(A)A_1\mathrm{Ir}(A_1)A_2}+\tilde{S}_{A_2}-\tilde{S}_{A\mathrm{Ir}(A)A_1\mathrm{Ir}(A_1)}]\\
=&\frac{1}{2}(\tilde{S}_{[-q,q_2]}+\tilde{S}_{[b_2,q_2]}-\tilde{S}_{[-q,b_2]})\\
=&\frac{c}{6}\log\frac{(q_2+q)(q_2-b_2)}{\delta(b_2+q)}.
\end{aligned}
$$

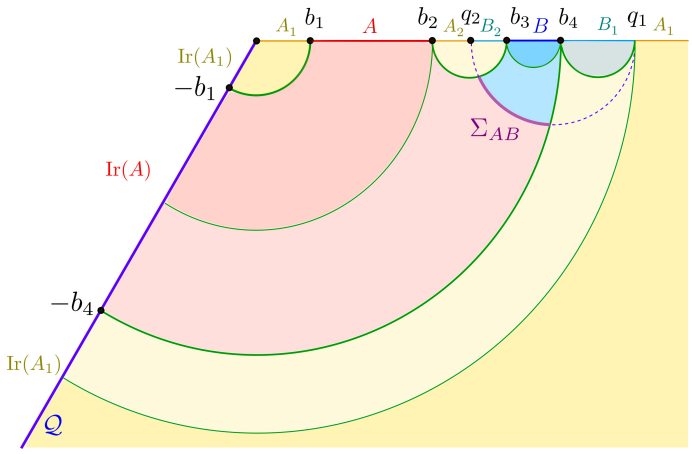


图 13：D2c 相：$\mathrm{Ir}(A)\neq\emptyset$ 和 $\mathrm{Ir}(B)=\emptyset$

与相邻情形类似，这里的上述两个平衡条件重合，并且可表示为

$$\frac{b_3+q}{b_3-q_2}=\frac{b_2+q}{q_2-b_2}. \tag{122}$$

这意味着平衡条件有无穷多个解。再次将平衡条件与最小化条件结合起来，平衡点还应满足以下极值条件，

$$\partial_q[\mathcal{I}(B\mathrm{Ir}(B),A\mathrm{Ir}(A)A_1\mathrm{Ir}(A_1)A_2)]=\partial_q\left[\frac{c}{6}\log\frac{(b_3+q)(q+q_2)}{2q(b_3-q_2)}+\frac{c}{6}\kappa\right]=0. \tag{123}$$

求解这些约束后，我们得到

$$q=q_2=\sqrt{b_2b_3}. \tag{124}$$

因此，该相的平衡部分纠缠为

$$\mathrm{BPE}(A:B)=\frac{c}{6}\log\frac{\sqrt{b_3}+\sqrt{b_2}}{\sqrt{b_3}-\sqrt{b_2}}+\frac{c}{6}\kappa. \tag{125}$$

这与 D2b 相中纠缠楔截面的面积（62）相一致。

与 A2b 阶段类似，我们可以将 $A_1\mathrm{Ir}(A$ 的一部分（例如 $[-q_1,q_1]$）转移到$B_1\mathrm{Ir}(B_1)$，只要A_1 允许岛。在这类构型中，平衡部分纠缠与上述结果相同。

5.3.3 D2c 相

对于 $\mathrm{Ir}(A)=[-b_4,\ -b_1],\mathrm{Ir}(B)=\emptyset$，该构型在交换$A$和 B 后与 D2a 相对称（见图13）。按照 D2a 相中的相同论证，我们得到两个平衡点

$$q_1=\frac{b_4^2+b_2b_3}{b_3+b_2}+\frac{\sqrt{(b_2^2-b_4^2)(b_3^2-b_4^2)}}{b_3+b_2},\quad q_2=\frac{b_4^2+b_2b_3}{b_3+b_2}-\frac{\sqrt{(b_2^2-b_4^2)(b_3^2-b_4^2)}}{b_3+b_2}, \tag{126}$$

相应的平衡部分纠缠 $\mathrm{BPE}(A:\ B)$ 为

$$\mathrm{BPE}(A:B)=\frac{c}{6}\log\frac{b_2b_3-b_4^2+\sqrt{(b_2^2-b_4^2)(b_3^2-b_4^2)}}{b_4(b_3-b_2)}, \tag{127}$$

这与（64）中给出的 D2c 相的纠缠楔截面面积相匹配。

5.3.4 最小化 D2 相中的平衡部分纠缠

现在我们比较上述三个 BPE，它们分别对应三个鞍点纠缠楔截面，并选择其中最小的一个。

D2a 相与 D2b 相之间的临界点由下式给出

$$f(b_1,b_2,b_3)\equiv\frac{c}{6}\log\frac{\left(b_3b_2-b_1^2+\sqrt{\left(b_3^2-b_1^2\right)\left(b_2^2-b_1^2\right)}\right)^2}{b_1^2\left(\sqrt{b_3}+\sqrt{b_2}\right)^4}=\frac{c}{3}\kappa. \tag{128}$$

当$f\ <_{c\,3}\kappa$时，D2a 相给出的平衡部分纠缠较小。现在我们证明，在这种情况下，A_1AA_2 不存在岛。我们比较A_1AA_2 在岛鞍点和无岛鞍点下的纠缠熵，

$$\begin{aligned}S_{\text{no-island}}(A_1AA_2)-S_{\text{island}}(A_1AA_2)&=\frac{c}{6}\log\frac{(q_2-q_1)^2}{4q_1q_2}-\frac{c}{3}\kappa\\&=\frac{c}{6}\log\frac{\left(b_2^2-b_1^2\right)\left(b_3^2-b_1^2\right)}{b_1^2(b_2+b_3)^2}-\frac{c}{3}\kappa\\&\equiv g(b_1,b_2,b_3)-\frac{c}{3}\kappa.\end{aligned} \tag{129}$$

注意，差值

$$g(b_1,b_2,b_3)-f(b_1,b_2,b_3)=\frac{c}{6}\log\frac{(b_3^2-b_1^2)(b_2^2-b_1^2)(\sqrt{b_2}+\sqrt{b_3})^4}{(b_2+b_3)^2\left(b_3b_2-b_1^2+\sqrt{\left(b_3^2-b_1^2\right)\left(b_2^2-b_1^2\right)}\right)^2} \tag{130}$$

随着$b_2\to b_3$ 增大，因此我们有

$$g(b_1,b_2,b_3)-f(b_1,b_2,b_3)<g(b_1,b_3,b_3)-f(b_1,b_3,b_3)=0, \tag{131}$$

t也就是说，$g(b_1,b_2,b_3)$ 始终小于$f\ (b_1,b_2,b_3)$。于是我们得到条件

$$S_{\text{no-island}}(A_1AA_2)-S_{\text{island}}(A_1AA_2)<f(b_1,b_2,b_3)-\frac{c}{3}\kappa<0, \tag{132}$$

这证实了我们的假设：A_1AA_2 不允许存在岛。

类似地，通过比较 D2b 相与 D2c 相之间的 BPE，我们得出结论：当.....时，D2c 相对应的 BPE 更小。

$$\frac{c}{6}\log\frac{\left(b_3b_2-b_4^2+\sqrt{\left(b_3^2-b_4^2\right)\left(b_2^2-b_4^2\right)}\right)^2}{b_4^2\left(\sqrt{b_3}+\sqrt{b_2}\right)^4}<\frac{c}{3}\kappa. \tag{133}$$

按照同样的论证，我们可以确认，当 D2c 相对应的 BPE 更小时，B_1BB_2 不允许存在岛。

5.4 非连通纠缠楔中的不相交AB

在岛相中，随着纠缠楔变为非连通，纠缠楔 $\mathcal{E}_{AB}$ 的纠缠楔截面消失。当A与B之间的区间拥有自己的岛时，就会发生这种情况。这立即表明 $\mathcal{I}(A,B)=0$。然而，这并非 BPE$(A:B)=0$ 的充分条件，因为 BPE 被定义为平衡点处的部分纠缠熵 $\mathcal{I}(A,B_1BB_2)$。由于 BPE 非负，我们可以通过找到一个 BPE 为零的构型，证明此情形下 BPE 与纠缠楔截面之间的对应关系。

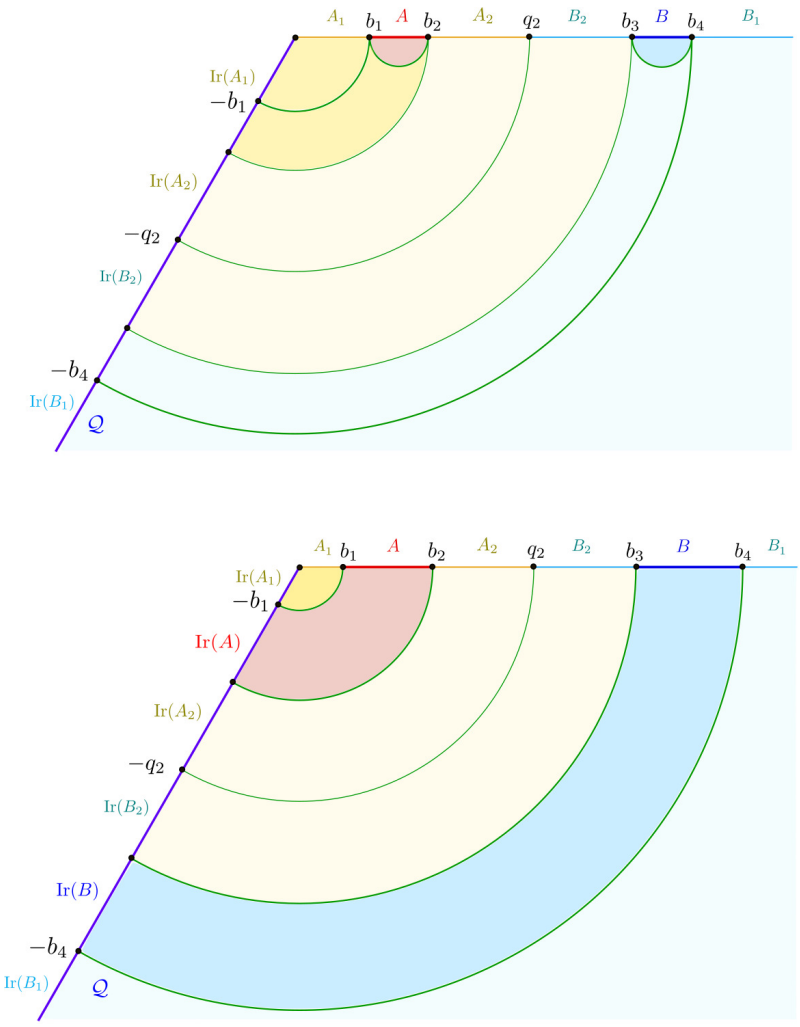


图 14：AB 的纠缠楔非连通相。在这种情况下，夹在A和B 之间的区间A_2B_2 存在一个岛。上图：当A和B 没有岛时；下图：当A 和B 都有岛时。

<escape>让我们考虑图 14 所示的构型，其中 A_2B_2 存在岛。在这种情况下，根据我们在第 5.2.5 节中的讨论，总能找到一个分割点 q_2 ，使得 A_2B_2 处于 A2b 阶段，因此我们可以选择 </escape>

$$\mathrm{Ir}(A_2)=[-q_2,-b_2],\quad \mathrm{Ir}(B_2)=[-b_3,-q_2]. \tag{134}$$

同样，在这种情况下，我们选择了

$$A_1=[0,b_1],\quad B_1=[b_4,\infty]. \tag{135}$$

当 A 存在岛时，我们设定

$$\mathrm{Ir}(A)=\mathrm{Is}(A)=[-b_2,-b_1],\quad \mathrm{Ir}(A_1)=\mathrm{Is}(A_1)=[-b_1,0), \tag{136}$$

否则，我们设定

$$\mathrm{Ir}(A)=\emptyset,\quad \mathrm{Ir}(A_1)=[-b_2,0). \tag{137}$$

此外，我们还应用类似的处方来设定 $\mathrm{Ir}(B)$ 和 $\mathrm{Ir}(B_1)$。

根据我们对 A2b 阶段的讨论，平衡条件

$$\mathcal{I}(A_2\mathrm{Ir}(A_2),B_2BB_1\mathrm{Ir}(B_1BB_2))=\mathcal{I}(B_2\mathrm{Ir}(B_2),A_2AA_1\mathrm{Ir}(A_1AA_2)), \tag{138}$$

始终成立，并且

$$\mathcal{I}(A_2\mathrm{Ir}(A_2),B_2BB_1\mathrm{Ir}(B_1BB_2))=\mathrm{BPE}(A_2:B_2)=\frac{c}{6}\log\frac{2q_2}{\delta}+\frac{c}{6}\kappa. \tag{139}$$

接着我们检验另一个平衡条件

$$\mathcal{I}(A\mathrm{Ir}(A),B_2BB_1\mathrm{Ir}(B_1BB_2))=\mathcal{I}(B\mathrm{Ir}(B),A_2AA_1\mathrm{Ir}(A_1AA_2)). \tag{140}$$

我们先考虑 A和 B 都不存在岛，因此 $\mathrm{Ir}(A)=\mathrm{Ir}(B)=\emptyset$ 的情况。我们发现，

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(A,B_2BB_1\mathrm{Ir}(B_1BB_2))=&\frac{1}{2}\left[\tilde{S}_{AA_2\mathrm{Ir}(A_2)}+\tilde{S}_{A_1\mathrm{Ir}(A_1)A_2}-\tilde{S}_{A_1\mathrm{Ir}(A_1)}-\tilde{S}_{A_2\mathrm{Ir}(A_2)}\right]\\
=&\frac{1}{2}\left(\tilde{S}_{[-q_2,-b_2]\cup[b_1,q_2]}+\tilde{S}_{[-b_2,b_2]}-\tilde{S}_{[-b_2,b_1]}-\tilde{S}_{[-q_2,-b_2]\cup[b_2,q_2]}\right)\\
=&0,\\
\mathcal{I}(B,A_2AA_1\mathrm{Ir}(A_1AA_2))=&\frac{1}{2}\left[\tilde{S}_{BB_2\mathrm{Ir}(B_2)}+\tilde{S}_{B_1\mathrm{Ir}(B_1)B_2}-\tilde{S}_{B_1\mathrm{Ir}(B_1)}-\tilde{S}_{B_2\mathrm{Ir}(B_2)}\right]\\
=&\frac{1}{2}\left(\tilde{S}_{[-b_3,-q_2]\cup[q_2,b_4]}+\tilde{S}_{[-b_3,b_3]}-\tilde{S}_{[-b_3,b_4]}-\tilde{S}_{[-b_3,-q_2]\cup[q_2,b_3]}\right)\\
=&0,
\end{aligned} \tag{141}$$

这里我们使用了基本方案2。显然，第二个平衡条件也成立。因此，A和 B 之间的平衡部分纠缠消失，

$$\mathrm{BPE}(A:B)=0. \tag{142}$$

由于 BPE 应为非负值，上述 BPE 即为最小值。进一步可以检验A或B 存在岛的情形，并得到同样为零的 BPE。于是，BPE 为零恰好对应于 EWCS 为零。

5.5 通过最小化交叉部分纠缠熵得到平衡部分纠缠

在真空态共形场论中，平衡点处的交叉部分纠缠熵已被证明是最小值 [71]。现在我们证明这一结论在岛相中同样成立。我们以 A2a 相位和 D2a 相为例。

对于 A2a 相位，交叉部分纠缠熵为

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(A,B_1\mathrm{Ir}(B_1)) &= \frac{1}{2}\left(\tilde{S}_{AA_1}+\tilde{S}_{AB\mathrm{Ir}(B)}-\tilde{S}_{A_1}-\tilde{S}_{B\,\mathrm{Ir}(B)}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\tilde{S}_{[q_1,b_2]}+\tilde{S}_{[-b_4,-b_1]\cup[b_1,b_4]}-\tilde{S}_{[q_1,b_1]}-\tilde{S}_{[-b_4,-b_1]\cup[b_2,b_4]}\right)\\ &= \frac{c}{6}\log\left[\frac{2b_1(b_2-q_1)}{(b_1+b_2)(b_1-q_1)}\right],\end{aligned} \tag{143}$$

and

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(B\,\mathrm{Ir}(B),A_1) &= \frac{1}{2}\left(\tilde{S}_{B\,\mathrm{Ir}(B)\cup B_1\,\mathrm{Ir}(B_1)}+\tilde{S}_{AB\mathrm{Ir}(B)}-\tilde{S}_{A}-\tilde{S}_{B_1\mathrm{Ir}(B_1)}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\tilde{S}_{(-\infty,q_1]\cup[b_2,\infty)}+\tilde{S}_{[-b_4,-b_1]\cup[b_1,b_4]}-\tilde{S}_{[b_1,b_2]}-\tilde{S}_{[-b_1,q_1]\cup(-\infty,-b_4,]\cup[b_4,\infty)}\right)\\ &= \frac{c}{6}\log\left[\frac{2b_1(b_2-q_1)}{(b_2-b_1)(b_1+q_1)}\right].\end{aligned} \tag{144}$$

于是，总交叉部分纠缠熵为

$$\frac{1}{2}\Big[\mathcal{I}(A,B_1\mathrm{Ir}(B_1))+\mathcal{I}(B\,\mathrm{Ir}(B),A_1)\Big]=\frac{c}{12}\log\left[\frac{4b_1^2(b_2-q_1)^2}{(b_2^2-b_1^2)(b_1^2-q_1^2)}\right]. \tag{145}$$

容易得出，交叉部分纠缠熵的极值点q_1 为

$$q_1=b_1^2/b_2 \quad \text{and} \quad q_1=b_2. \tag{146}$$

由于 $0<q_1<b_1$，，我们有$q_1=b_1^2/b_2$ 作为使总交叉部分纠缠熵最小的点。这正是平衡点，最小化后的总交叉部分纠缠熵为

$$\Big[\mathcal{I}(A,B_1\mathrm{Ir}(B_1))+\mathcal{I}(B\,\mathrm{Ir}(B),A_1)\Big]\Big|_{minimal}=\frac{c}{3}\log 2, \tag{147}$$

可将其视为马尔可夫间隙 $h(A\colon B)$ [109] 的下界。在相邻区间的无岛阶段，BPE 中的非交叉部分纠缠熵部分恰好等于互信息的一半，因此 BPE 中的交叉部分纠缠熵部分给出马尔可夫间隙 [71]。然而，在岛相中，BPE 中的非交叉部分纠缠熵部分永远不等于互信息的一半。对于 A2a 相位，我们有非交叉部分纠缠熵 pineq

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(A,B\,\mathrm{Ir}(B)) &= \frac{1}{2}\left(\tilde{S}_{A}+\tilde{S}_{B_1\mathrm{Ir}(B_1)A_1A)}-\tilde{S}_{B_1\mathrm{Ir}(B_1)A_1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\tilde{S}_{[b_1,b_2]}+\tilde{S}_{[-\infty,-b_4]\cup[-b_1,b_2]\cup[b_4,\infty]}-\tilde{S}_{[-\infty,-b_4]\cup[-b_1,b_1]\cup[b_4,\infty]}\right)\\ &= \frac{c}{6}\log\left(\frac{b_2-b_1}{\delta}\frac{b_1+b_2}{2b_1}\right),\end{aligned} \tag{148}$$

而互信息的一半为

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}I(A:B) &= \frac{1}{2}(S_A+S_B-S_{AB})\\ &= \frac{1}{2}(\tilde{S}_A+\tilde{S}_{B\,\mathrm{Is}(B)}-\tilde{S}_{AB\,\mathrm{Is}(AB)})\\ &= \frac{c}{6}\log\left(\frac{b_2-b_1}{\delta}\sqrt{\frac{b_2}{b_1}}\right).\end{aligned} \tag{149}$$

因此，A2a 相位的交叉部分纠缠熵不应恰好等于马尔可夫间隙。

现在我们来考虑一个不相交相的例子，即 D2a 相。该相中的交叉部分纠缠熵为

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(A,B_1\mathrm{Ir}(B_1)) &= \frac{1}{2}\left(\tilde{S}_{AA_1}+\tilde{S}_{AA_2B_2B\mathrm{Ir}(B)}-\tilde{S}_{A_1}-\tilde{S}_{A_2B_2B\,\mathrm{Ir}(B)}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\tilde{S}_{[q_1,b_2]}+\tilde{S}_{[-b_4,-b_1]\cup[b_1,b_4]}-\tilde{S}_{[q_1,b_1]}-\tilde{S}_{[-b_4,-b_1]\cup[b_2,b_4]}\right)\\
&= \frac{c}{6}\log\frac{2b_1(b_2-q_1)}{(b_1+b_2)(b_1-q_1)},\\
\mathcal{I}(A,B_2) &= \frac{1}{2}\left(\tilde{S}_{AA_2}+\tilde{S}_{B\mathrm{Ir}(B)B_1\mathrm{Ir}(B_1)A_1A}-\tilde{S}_{A_2}-\tilde{S}_{B\mathrm{Ir}(B)B_1\mathrm{Ir}(B_1)A_1}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\tilde{S}_{[b_1,q_2]}+\tilde{S}_{[b_2,b_3]}-\tilde{S}_{[b_2,q_2]}-\tilde{S}_{[b_1,b_3]}\right)\\
&= \frac{c}{6}\log\frac{(b_3-b_2)(q_2-b_1)}{(b_3-b_1)(q_2-b_2)},\\
\mathcal{I}(B\mathrm{Ir}(B),A_1) &= \frac{1}{2}\left(\tilde{S}_{AA_2B_2B\mathrm{Ir}(B)}+\tilde{S}_{B\mathrm{Ir}(B)B_1\mathrm{Ir}(B_1)}-\tilde{S}_{AA_2B_2}-\tilde{S}_{B_1\mathrm{Ir}(B_1)}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\tilde{S}_{[-b_4,-b_1]\cup[b_1,b_4]}+\tilde{S}_{[q_1,b_3]}-\tilde{S}_{[b_1,b_3]}-\tilde{S}_{[-\infty,-b_4]\cup[-b_1,q_1]\cup[b_4,\infty]}\right)\\
&= \frac{c}{6}\log\frac{2b_1(b_3-q_1)}{(b_1+q_1)(b_3-b_1)},\\
\mathcal{I}(B\mathrm{Ir}(B),A_2) &= \frac{1}{2}\left(\tilde{S}_{B_2B\mathrm{Ir}(B)}+\tilde{S}_{B\mathrm{Ir}(B)B_1\mathrm{Ir}(B_1)A_1A}-\tilde{S}_{B_2}-\tilde{S}_{B_1\mathrm{Ir}(B_1)A_1A}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\tilde{S}_{[-b_4,-b_1]\cup[q_2,b_4]}+\tilde{S}_{[b_2,b_3]}-\tilde{S}_{[q_2,b_3]}-\tilde{S}_{[-b_4,-b_1]\cup[b_2,b_4]}\right)\\
&= \frac{c}{6}\log\frac{(q_2+b_1)(b_3-b_2)}{(b_1+b_2)(b_3-q_2)}.
\end{aligned}\tag{150}$$

那么，总交叉部分纠缠熵为

$$\begin{aligned}
&\mathcal{I}(A,B_1\mathrm{Ir}(B_1))+\mathcal{I}(A,B_2)+\mathcal{I}(B\mathrm{Ir}(B),A_1)+\mathcal{I}(B\mathrm{Ir}(B),A_2)\\
=&\frac{c}{6}\log\left[\frac{4b_1^2(b_3-b_2)^2(q_2^2-b_1^2)(b_2-q_1)(b_3-q_1)}{(b_2+b_1)^2(b_3-b_1)^2(b_1^2-q_1^2)(q_2-b_2)(b_3-q_2)}\right].
\end{aligned}\tag{151}$$

同样可以发现，总交叉部分纠缠熵在以下点处达到最小值

$$q_1=\frac{b_1^2+b_2b_3}{b_3+b_2}-\frac{\sqrt{(b_2^2-b_1^2)(b_3^2-b_1^2)}}{b_3+b_2},\qquad q_2=\frac{b_1^2+b_2b_3}{b_3+b_2}+\frac{\sqrt{(b_2^2-b_1^2)(b_3^2-b_1^2)}}{b_3+b_2},\tag{152}$$

这些点恰好就是平衡点。

6 岛相中的部分纠缠熵及其几何图像

在本节中，我们利用广义 ALC 公式，在使 BPE 最小的无主岛分配下，计算各种部分纠缠熵的贡献。我们将看到，贡献$s_{AB}(A)$和$s_{AB}(B)$ 分别对应于AB的 RT 曲面的两部分，这两部分由纠缠楔截面 Σ_{AB} 锚定在 RT 曲面 $\mathcal{E}_{AB}$上的点分隔。

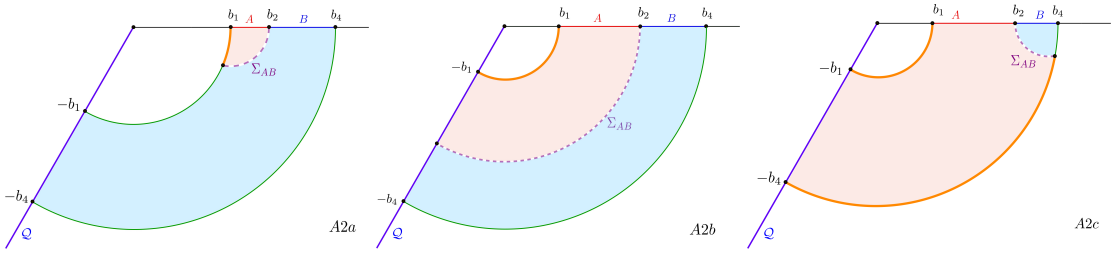


图 15：相 A2 中 RT($A\cup B$) 上的测地弦（橙色线）与 A 到 AB 的部分纠缠熵之间的对应关系。

6.1 与岛相邻的 AB

当 A2a 相位的 BPE 取最小值时，我们有 $\mathrm{Ir}(A)=\emptyset$ 和 $\mathrm{Ir}(B)=[-b4,-b_1]$ 和

$$\begin{aligned} s_{AB}(A) &= \frac{1}{2}(\tilde{S}_{A\,\mathrm{Ir}(A)\,B\,\mathrm{Ir}(B)}+\tilde{S}_A-\tilde{S}_{B\,\mathrm{Ir}(B)}) \\ &= \frac{1}{2}(\tilde{S}_{[-b_4,-b_1]\cup[b_1,b_4]}+\tilde{S}_{[b_1,b_2]}-\tilde{S}_{[-b_4,-b_1]\cup[b_2,b_4]}) \\ &= \frac{c}{6}\log\frac{2b_1(b_2-b_1)}{\delta(b_2+b_1)}. \end{aligned} \tag{153}$$

这正是 RT(15) 上测地弦的面积（见图 b_1 中的橙色线），它由纠缠楔截面 Σ_{AB} 决定。

当 A2b 阶段的平衡部分纠缠最小时，我们有 $\mathrm{Ir}(A)=[-b2,-b_1]$,$\mathrm{Ir}(B)=[-b4,-b_2]$ 且

$$\begin{aligned} s_{AB}(A) &= \frac{1}{2}(\tilde{S}_{A\,\mathrm{Ir}(A)\,B\,\mathrm{Ir}(B)}+\tilde{S}_{A\,\mathrm{Ir}(A)}-\tilde{S}_{B\,\mathrm{Ir}(B)}), \\ &= \frac{1}{2}(\tilde{S}_{[-b_4,-b_1]\cup[b_1,b_4]}+\tilde{S}_{[-b_2,-b_1]\cup[b_1,b_2]}-\tilde{S}_{[-b_4,-b_2]\cup[b_2,b_4]}) \\ &= \frac{c}{6}\log\frac{2b_1}{\delta}+\frac{c}{6}\kappa, \end{aligned} \tag{154}$$

这正是 RT(b_1) 的面积。

当 A2c 阶段的平衡部分纠缠取最小值时，我们有 $\mathrm{Ir}(A)=[-b4,-b_1]$,$\mathrm{Ir}(B)=\emptyset$ 和

$$\begin{aligned} s_{AB}(A) &= \frac{1}{2}(\tilde{S}_{A\,\mathrm{Ir}(A)\,B\,\mathrm{Ir}(B)}+\tilde{S}_{A\,\mathrm{Ir}(A)}-\tilde{S}_B) \\ &= \frac{1}{2}(\tilde{S}_{[-b_4,-b_1]\cup[b_1,b_4]}+\tilde{S}_{[-b_4,-b_1]\cup[b_1,b_2]}-\tilde{S}_{[b_2,b_4]}) \\ &= \left(\frac{c}{6}\log\frac{2b_1}{\delta}+\frac{c}{6}\kappa\right)+\left(\frac{c}{6}\log\frac{b_4+b_2}{b_4-b_2}+\frac{c}{6}\kappa\right), \end{aligned} \tag{155}$$

其中第一项是 RT(b_1) 的面积，第二项是 RT(15) 上测地线弦的面积（见图中的橙色线条）$b4$), 它由纠缠楔截面 Σ_{AB}确定。

6.2 不相交的 AB 带岛

当 D2a 相的平衡部分纠缠最小时，我们有 $\mathrm{Ir}(A)=\emptyset$ 和 $\mathrm{Ir}(B)=[-b4,-b_1]$ 和

$$\begin{aligned} s_{AB}(A) &= \frac{1}{2}(\tilde{S}_{A\,\mathrm{Ir}(A)\,B\,\mathrm{Ir}(B)}+\tilde{S}_A-\tilde{S}_{B\,\mathrm{Ir}(B)}) \\ &= \frac{1}{2}(\tilde{S}_{[-b_4,-b_1]\cup[b_1,b_2]\cup[b_3,b_4]}+\tilde{S}_{[b_1,b_2]}-\tilde{S}_{[-b_4,-b_1]\cup[b_3,b_4]}) \\ &= \frac{c}{6}\log\frac{2b_1(b_3-b_2)(b_2-b_1)}{\delta^2(b_3+b_1)}, \end{aligned} \tag{156}$$

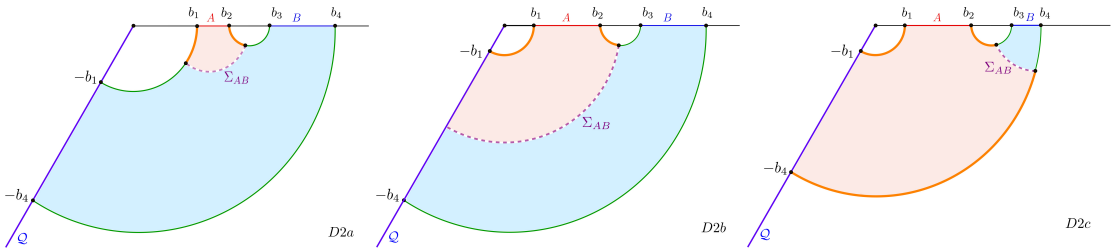


图 16：D2 相中，RT($A\cup B$) 上的测地弦（橙色线段）与从 A 到 AB 的部分纠缠熵之间的对应关系。

这可以进一步改写为

$$s_{AB}(A)=\frac{c}{6}\log\frac{2b_1(q_2-b_1)}{(b_1+q_2)\delta}+\frac{c}{6}\log\frac{(b_3-b_2)(q_2-b_2)}{(b_3-q_2)\delta}, \tag{157}$$

其中平衡点q_2 由下式给出

$$q_2=\frac{b_1^2+b_2b_3+\sqrt{(b_2^2-b_1^2)(b_3^2-b_1^2)}}{b_3+b_2}. \tag{158}$$

式（157中的两项分别是 RT(b_1) 上的测地弦面积（见图 16左图中的橙色线段），以及夹心区间 $[b_2,b_3]$,对应的 RT 曲面面积；它们分别由纠缠楔截面 Σ_{AB}决定。

当 D2b 相的平衡部分纠缠熵达到最小时，我们有 $\mathrm{Ir}(A)=[-q2,-b_1],\mathrm{Ir}(B)=[-b4,-q_2]$，并且

$$\begin{aligned}s_{AB}(A)=&\frac{1}{2}(\tilde{S}_{A\,\mathrm{Ir}(A)\,B\,\mathrm{Ir}(B)}+\tilde{S}_{A\,\mathrm{Ir}(A)}-\tilde{S}_{B\,\mathrm{Ir}(B)}),\\ =&\frac{1}{2}(\tilde{S}_{[-b_4,-b_1]\cup[b_1,b_2]\cup[b_3,b_4]}+\tilde{S}_{[-q_2,-b_1]\cup[b_1,b_2]}-\tilde{S}_{[-b_4,-q_2]\cup[b_3,b_4]})\\ =&\left(\frac{c}{6}\log\frac{2b_1}{\delta}+\frac{c}{6}\kappa\right)+\frac{c}{6}\log\frac{(b_3-b_2)(b_2+q_2)}{(b_3+q_2)\delta},\end{aligned} \tag{159}$$

其中 $q_2=\sqrt{b2b3}$。第一项就是 RT(b_1) 的面积，第二项则是与夹心区间 $[b_2,b_3]$, 相对应的 RT 曲面上的测地弦面积（见图 16中图中的橙色线段）；该面积也由纠缠楔截面 Σ_{AB}决定。

当 D2c 相的 BPE 最小时，我们有 $\mathrm{Ir}(A)=[-b4,-b_1],\mathrm{Ir}(B)=\emptyset$ 和

$$\begin{aligned}s_{AB}(A)=&\frac{1}{2}(\tilde{S}_{A\,\mathrm{Ir}(A)\,B\,\mathrm{Ir}(B)}+\tilde{S}_{A\,\mathrm{Ir}(A)}-\tilde{S}_{B})\\ =&\frac{1}{2}(\tilde{S}_{[-b_4,-b_1]\cup[b_1,b_2]\cup[b_3,b_4]}+\tilde{S}_{[-b_4,-b_1]\cup[b_1,b_2]}-\tilde{S}_{[b_3,b_4]})\\ =&\frac{c}{6}\log\frac{2b_1(b_3-b_2)(b_2+b_4)}{\delta^2(b_4-b_3)}+\frac{c}{3}\kappa,\end{aligned} \tag{160}$$

可进一步写为

$$s_{AB}(A)=\left(\frac{c}{6}\log\frac{2b_1}{\delta}+\frac{c}{6}\kappa\right)+\left(\frac{c}{6}\log\left(\frac{q_2+b_4}{b_4-q_2}\right)+\frac{c}{6}\kappa\right)+\frac{c}{6}\log\frac{(b_3-b_2)(q_2-b_2)}{(b_3-q_2)\delta}, \tag{161}$$

其中平衡点为

$$q_2=\frac{b_4^2+b_2b_3-\sqrt{(b_2^2-b_4^2)(b_3^2-b_4^2)}}{b_3+b_2}. \tag{162}$$

式（161）中的第一项恰好是 RT（b_1）的面积，（161）中的第二项和第三项分别是 RT（b_4）上的测地弦面积（见图16右图中的橙色线段）以及夹心区间的 RT 曲面 $[b_2,b_3]$, 的面积，它们由纠缠楔截面 Σ_{AB}决定。

7 讨论

7.1 总结

本文从部分纠缠熵的角度探讨了岛相中的纠缠结构。尽管已有一些初步尝试，[80,83,101]，这仍然是纠缠岛中一个相当未被探索的方面。根据以下主张，[49] 即岛相中的系统具有自编码性质，我们得出结论：计算区域A的纠缠熵，涉及岛区域 Is(A)中的自由度，而该区域位于S_A 之外。这一性质从根本上改变了我们评估来自A子集的纠缠熵贡献的方式。首先，岛区域 Is(A) 应被理解为一个窗口，透过它，A 可以与$A\cup$ Is(A)之外的自由度发生纠缠。其次，在考虑某个子区域的贡献时，α我们也应纳入 Is(α)的贡献；如果存在无主岛区域，还应纳入广义岛区域（或反射岛区域）Ir(α) 的贡献。将岛贡献考虑在内后，我们发现，可以将 ALC 提案推广，以构造岛相中的部分纠缠熵；也可以推广平衡条件，以定义岛相中的平衡部分纠缠。

对于没有无主岛的构型，岛区域分配给各子集的方式明确无歧义。然而，在包含无主岛区域的构型中，并没有内在规则来明确这种分配。对于任意一种分配方式，我们都可以求解广义平衡条件并计算 BPE。值得注意的是，我们发现，无主岛采用不同分配方式所得到的 BPE 对应于纠缠楔截面的不同鞍点。因此，自然应选择能使 BPE 最小的分配方式。此外，在确定无主岛的分配方式后，我们计算s_{AB}(A)和s_{AB}(B) 的贡献，并探讨其几何图像；该图像与无岛相中的几何图像一致。

我们强调，对于引力设定 1和设定 2，以下三条关于岛相的提案足以得出我们的结果。

1. 与无岛相一样，岛相的部分纠缠熵结构也由两点部分纠缠熵 $\mathcal{I}(x,\ y)$ 描述，且不受系统划分方式的影响。2. 当考虑两个类空分离区域A和B之间任何类型的关联时，我们也应适当计入它们各自岛区域以及无主岛的贡献。3. 二维有效场论中非对称区间的扭曲算符两点函数定义良好，并且根据基本方案*1*，它们表示部分纠缠熵。

本文具有多方面的物理意义。一方面，我们的结果为平衡部分纠缠与纠缠楔截面之间的对应关系，以及平衡部分纠缠对纯化过程的独立性，提供了一项非平凡的检验。另一方面，结果表明上述提议高度一致。这些提议对岛相中的纠缠结构作出了更精细的描述。从其他角度检验并证明上述提议或猜想，将是未来重要的研究方向。

利用部分纠缠熵（PEE）结构研究引力理论的幺正演化，尤其是黑洞蒸发过程，将会非常有趣。这一问题已在 [80,83], 中得到部分探索。

其中，他们遵循 ALC 提案计算了辐射区域的纠缠轮廓函数[12] 并发现某些区域的部分纠缠熵为零。根据 [80]这是体岛区域对边界态擦除操作具有保护作用的一种体现。未来深入研究这一问题将会非常有趣。

7.2 进一步讨论自编码性质

实际上，如果直接从上述三个方案出发，在引力设定中并不需要自编码性质。当我们考虑设置 1 中的全息韦尔变换共形场论$_2$ 时，由于该系统是非引力的，我们应当假设：如果岛公式 I 在这个非引力玩具模型 [49]中给出更小的纠缠熵，那么自编码性质就会出现。尽管如此，自编码性质为我们得出上述三个方案提供了指导。它告诉我们，在计算部分纠缠熵和部分纠缠熵时，如何明确处理来自岛区域的贡献。更重要的是，它告诉我们，韦尔变换后的共形场论$_2$ 中扭曲算符的二点函数并不总能给出定义良好的纠缠熵，这有助于我们得到基本方案*1*。

自编码性质本质上是指，某些类空分离的自由度彼此并不独立。类空分离自由度之间的这种依赖关系非常特殊，因为它超越了因果性。这一性质源于对整个系统施加的某些约束，而这些约束会产生高度非局域的影响。相应的约束不仅施加于单个状态，还施加于希尔伯特空间。换句话说，这些约束应确保约化希尔伯特空间中的任意状态在演化过程中都被限制在约化空间内。在任何玩具模型中明确构造此类约束都极具挑战性，同时也是一个非常有趣的探索课题。这或许能让我们实现非引力系统中的纠缠岛，并在实验室中制备这些系统。

在具有纠缠岛的引力系统中，自编码性质不过是这样一种表述：可以从霍金辐射中重构纠缠岛的状态。编码关系涉及同一系统的两个不同子集。这不同于全息中从边界对偶子区域重构纠缠楔，在后者中，编码关系涉及对偶两侧的两个子系统。正如 [10, 11], 中所指出的，基于副本虫洞构型推导岛公式并不依赖于全息的存在。自编码性质只有在双重全息设定中才具有全息描述；在这些设定中，岛区域被视为另一个区域的纠缠楔的一部分。

除了 [49], 中原有的讨论之外，关于引力系统中的自编码性质，还有许多极具吸引力、值得进一步探索的未来方向。例如，是什么编码关系引导我们在引力系统中得到岛公式I？引力系统中又有哪些约束大幅缩减了希尔伯特空间，从而导出相应的编码关系？消除紫外物理的依赖截断的 Weyl 变换，能否很好地模拟引力理论中的希尔伯特空间缩减？探讨 Weyl 变换的其他构型将会非常有趣，因为这些构型会产生不同的体截断膜，并在其中涌现纠缠岛。我们可以研究这些情形下的纠缠岛、纠缠楔截面和 BPE，并将其与其他广义的 AdS/BCFT 构型进行比较，例如具有两个边界的全息 BCFT [12], 、楔形全息 [110–112], , 以及带有微扰的体膜 [113–115]。

[12]正如我们的结果所指出的，ALC 提案在岛相中应当进行修改。因此， [80, 83] 中的结果需要进一步考虑。

7.3 平衡部分纠缠与反射熵

BPE 和纠缠楔截面与反射熵密切相关。在全息设置中，[55] 给出了纠缠楔截面与反射熵之间对应关系的证据。此外，[70] 表明，典范纯化中的 BPE 会简化为反射熵，因为典范纯化中的反射对称性自动满足平衡条件。换言之，典范纯化中的反射对称性本身就是平衡条件。然而，寻找纠缠楔截面是一个优化问题，这与平衡条件截然不同。因此，有理由认为，纠缠楔截面对应于某种在优化条件下定义的量子信息量，而非反射熵或 BPE。此外，[116], 给出了一个明确的例子，其中反射熵在偏迹下并非单调递减。这表明反射熵并非衡量混态关联的物理量。鉴于已有观点认为，BPE 是反射熵向一般纯化的推广，这一批评同样适用于 BPE。

这里我们澄清一下 BPE 为何与优化问题相关，以及研究 BPE 和反射熵为何仍然重要。在 [55] 中，沿 RT 曲面粘合的纠缠楔双重副本被视为全息中的一种典范纯化情形。考虑一个一般的混合态 AB 及其典范纯化 ABA_1B_1。在这些构型中，平衡条件，即相对于 AB 的 RT 曲面 $\mathcal{E}_{AB}$ 的反射对称性，要求 $\mathcal{E}_{AA_1}$ 与 $\mathcal{E}_{AB}$ 垂直。这种法向关系通常是优化问题解的必要条件。因此，我们很容易认为，典范纯化构型之外满足平衡条件的解也刻画了该优化问题的鞍点。如果找到了所有鞍点，就应选择使取值最小的那个。换言之，我们提出，在许多构型中，求解平衡条件恰好就能解决优化问题。本文中我们遇到了许多这样的例子：平衡条件的解不止一个，甚至有无穷多个；它们对应于纠缠楔截面的不同鞍点。而最小部分纠缠熵恰好与最小纠缠楔截面相符。这些观察为我们提供了将 BPE 与优化问题联系起来的线索，而对这一论断进行全面论证将是未来的重要研究方向。

另一个更重要的线索来自 [71,72] 以及本文第5.5节，作者在其中发现，交叉部分纠缠熵的最小化是一个纯粹的优化问题，而其结果与平衡部分纠缠以及纠缠楔截面的计算相一致。这一观察已经通过了数个非平凡检验，因此表明，最小化后的交叉部分纠缠熵可能是全息理论中与纠缠楔截面相对应的更恰当的量子信息量。此外，最小化后的交叉部分纠缠熵也可以在非全息构型中定义。需要指出的是，交叉部分纠缠熵的最小化在先验上独立于平衡条件，因此平衡部分纠缠与最小化后的交叉部分纠缠熵在一般情况下可能并不等价。同样也有可能的是，最小化后的交叉部分纠缠熵在一般情况下会随偏迹单调递减，而反射熵或平衡部分纠缠则未必如此。我们将这一问题留待未来研究。

致谢

我们谨向缪荣鑫、高柳匡、王华佳和周洋致以诚挚感谢，感谢他们富有帮助的讨论。我们也感谢 SciPost Physics 的审稿人，感谢他们提出有益的建议，以澄清本文中的设置以及自编码性质所发挥的作用。J. Lin 受到国家自然科学基金委员会资助，资助编号为 12247117、12247103 和 12047502。Y. Lu 受到中国博士后科学基金会资助，资助编号为 2022TQ0140，以及国家自然科学基金委员会

资助编号 12247161。Q. Wen 感谢中国科学院理论物理研究所以及燕栖湖北京数学与应用数学研究院在本项目开展期间提供的热情接待。Q. Wen 感谢东南大学“至善学者”计划的支持。

设置2：AdS//边界共形场论的广义版本

在附录中，我们研究广义 AdS_3/边界共形场论$_2$ [9,97–99,104], 设置中的平衡部分纠缠，其中左侧的理论 $x < 0$ 与引力耦合，因此我们可以直接应用岛公式（2）。然而，在标准的 AdS_3/边界共形场论$_2$ 对应关系中， [12]有效描述中只有扭曲算符的对称两点函数才是良定义的。我们进行推广的目的，是能够计算扭曲算符的非对称两点函数。这可以通过在世界末端膜上添加额外的物质场来实现，使得膜上的理论不再仅仅是边界共形场论边界点的引力对偶。将二维有效理论图景描述为一个与浴共形场论$_2$ 耦合的引力共形场论$_2$ 并满足透明边界条件，或许更为恰当。下文将聚焦于一个具体模型，即文献中提出的缺陷极值曲面（DES）模型 [97]。

A.1 AdS_3/／边界共形场论$_2$ 与DES模型简述

全息对偶提出，具有边界的共形场论（边界共形场论）对应于一个AdS_3 时空，其中存在一张施加诺伊曼边界条件的余维一膜 [12]。体时空的作用量为

$$I_{\text{AdS}} = \frac{1}{16\pi G_N}\int_{\mathcal{N}} \mathrm{d}^3x\sqrt{-g}(R-2\Lambda) + \frac{1}{8\pi G_N}\int_{\mathcal{Q}} \mathrm{d}^2x\sqrt{-h}(K-T), \tag{163}$$

其中， $\mathcal{N}$ 和 $\mathcal{Q}$ 分别表示体时空和膜。T 是膜的张力，它决定膜在体时空中的位置。在坐标系

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\rho^2 + \ell^2\cosh^2\frac{\rho}{\ell}\frac{-\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}w^2}{w^2} \tag{164}$$

$$= \frac{\ell^2}{z^2}\left(-\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2\right), \tag{165}$$

其中， ℓ是AdS_3，的半径，膜位于

$$\rho = \rho_0\,, \tag{166}$$

其中， ρ_0 由张力$T = \frac{1}{\ell}\tanh\frac{\rho_0}{\ell}$决定。注意，在设置1 中，体时空中的截断膜位于 $\rho = \kappa$ [49]，这意味着当$\kappa = \rho_0$时，两种设置重合。极坐标 θ与 ρ之间的关系为 $(\cos\theta)^{-1} = \cosh(\rho/\ell)$。可见，当且仅当$T = 0$时，膜与边界正交，即 $\theta(\rho_0) = 0$。施加张力或在膜上添加其他物质会使 $\theta(\rho_0)$ 偏离零。对于一个包含边界共形场论边界的区间$A = [0, L]$，区间A的纠缠熵也由RT公式计算： [12]

$$S_A = \frac{\text{Area}[\gamma_A]}{4G_N} = \frac{c}{6}\log\frac{2L}{\delta} + \frac{c}{6}\text{arctanh}(\sin\theta_0), \tag{167}$$

其中，第二项 $\frac{c}{6}\text{arctanh}(\sin\theta_0)$是边界共形场论的边界熵。

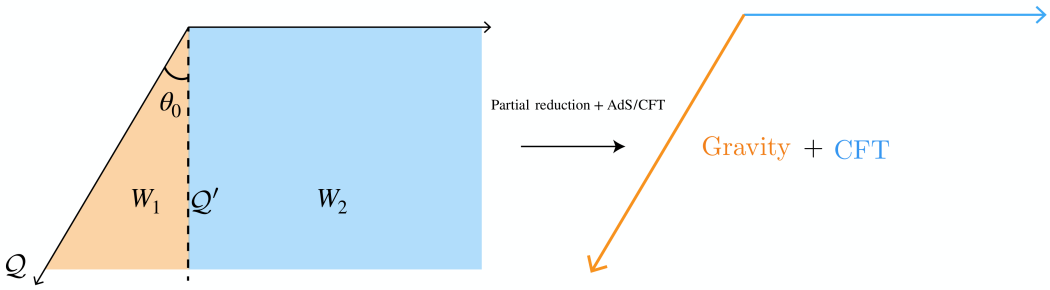


图 17：此图摘自 [109]。通过对W_1 进行部分约化得到 DES 模型的二维有效理论描述，以及W_2的全息对偶。

[97] 中提出的 DES 模型考虑了生活在膜上的共形物质（例如，缺陷理论），相应地，作用量中包含一个针对共形物质的附加项，

$$I_{\text{AdS}} = \frac{1}{16\pi G_N}\int_{\mathcal{N}} \mathrm{d}^3x\sqrt{-g}(R-2\Lambda) + \frac{1}{8\pi G_N}\int_{\mathcal{Q}} \mathrm{d}^2x\sqrt{-h}(K-T) + I_{\text{CFT},\mathcal{Q}}. \tag{168}$$

场方程，或者等价地说，膜上的诺伊曼边界条件是

$$K_{ab} - (K-T)h_{ab} = 8\pi G_N \chi h_{ab}\,, \tag{169}$$

其中 h_{ab} 是膜上的诱导度规。在上述方程中，χ 刻画了共形场论物质，并与其中心荷 c'相关。接着，通过求解（169），可确定膜上物质的中心荷 c'

$$c' = 2\cosh^2\frac{\rho_0}{\ell}\left(\tanh\frac{\rho_0}{\ell} - \ell T\right)c, \tag{170}$$

其中，$c = \frac{3\ell}{2}G_N$ 是与体W_2 楔形区对偶的共形场论的中心荷。下文中，我们选择张力 T 使得 $c' = c$ 如 [97] 所示。

DES 模型的二维有效描述可以通过部分维度约化获得。我们将体区分解为两部分 W_1 和 W_2，沿着由 $\mathcal{Q}'$ 定义的（虚）曲面 $(t, x, y) = (t, 0, y)$（示意见图 17）。然后，我们沿 W_1 上的 ρ 方向进行 Randall-Sundrum 约化，从而得到一个二维拓扑引力理论，以及生活在膜上的共形场论物质。膜上的引力完全由 W_1体区的约化诱导产生。共形场论热浴是通过与 W_2 楔形区域对偶的方式获得的。最终，我们得到 DES 模型的二维有效描述：一种二维拓扑引力与共形场论缺陷物质，二者生活在膜上，并沿 $x = 0$ 曲面与平直共形场论热浴耦合。

从 AdS$_3$ 体视角来看，根据类 RT 的 DES 提案 [97],，边界共形场论区间的纠缠熵$A = [0, L]$ 由 RT 曲面的面积给出 Γ，该曲面连接边界点$x = L$ 与膜，此外还要加上缺陷项

$$\begin{aligned} S_A &= \frac{\text{Area}(\Gamma)}{4G_N} + S_{\text{defect}} \\ &= \frac{c}{6}\log\frac{2L}{\delta} + \frac{c}{6}\text{arctanh}(\sin\theta_0) + \frac{c}{6}\log\left(\frac{2\ell}{\delta_y\cos\theta_0}\right), \end{aligned} \tag{171}$$

其中，δ_y 是膜上的紫外调节器。缺陷项由膜上的扭曲算符单点函数计算得出，

$$S_{\text{defect}} = \frac{c}{6}\log\left(\frac{2\ell}{\delta_y\cos\theta_0}\right). \tag{172}$$

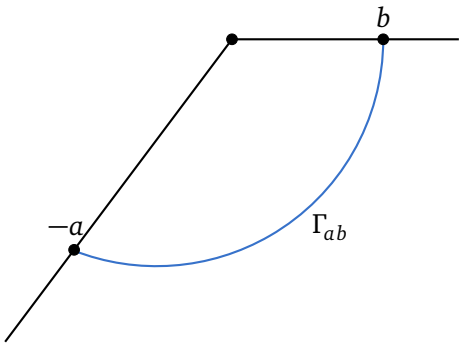


图 18：蓝色曲线表示在 DES 设置中连接边界点$x = b$ 与膜上点$y = -a$ 的测地线 Γ_{ab}。

应将其理解为带有量子修正的 RT公式中的体区半经典纠缠熵 [6, 105]。

从二维有效场论的角度来看，我们可以应用岛公式来计算纠缠熵。例如，区间[0,L] 的纠缠熵可以通过最小化广义熵来计算

$$S_{gen}([-a, L]) = S_{\text{area}}(-a) + \tilde{S}_{[-a,L]}, \tag{173}$$

其中，$\tilde{S}_{[y_1,y_2]}$ 是从这一二维视角来看共形场论物质场的有效熵 [8, 11],

$$\tilde{S}_{[y_1,y_2]} = \frac{c}{6}\log\left(\frac{|y_1 - y_2|^2}{\delta_{y_1}\delta_{y_2}\Omega(y_1,\bar{y}_1)\Omega(y_2,\bar{y}_2)}\right),\ ds^2 = \Omega^{-2}dyd\bar{y}, \tag{174}$$

with

$$\Omega(y) = \begin{cases} \left|\frac{y\cos\theta_0}{\ell}\right|, & \text{for } y < 0 \text{ on the brane,} \\ 1, & \text{for } y > 0 \text{ on the flat CFT.} \end{cases} \tag{175}$$

很容易看出，公式（174）也是共形场论的一个 Weyl 变换后的二点函数[13]，与（17）类似。面积项为 [97]

$$S_{\text{area}} = \frac{1}{4G_N^{\text{brane}}} = \frac{\rho_0}{4G_N} = \frac{c}{6}\operatorname{arctanh}(\sin\theta_0). \tag{176}$$

容易发现，广义熵在 $a = L$ 处取最小值，结果与方程（171）完全一致。

A.2 平衡部分纠缠的计算

首先，让我们计算 DES 模型二维有效描述中的部分纠缠熵。对于连通区间 $\gamma = [-a、b]$，其中a、$b > 0$ 以及点$x < 0$ 位于膜上，部分纠缠熵为

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\gamma,\bar{\gamma}) &= S_{gen}([-a,b]) = S_{\text{area}}(-a) + \tilde{S}_{[-a,b]} \\ &= \frac{c}{6}\operatorname{arctanh}(\sin\theta_0) + \frac{c}{6}\log\frac{(b+a)^2 l}{a\cos\theta_0\delta\delta_y}. \end{aligned} \tag{177}$$

当 $a = b$时，式（177）变为

$$\mathcal{I}(\gamma,\bar{\gamma}) = \frac{c}{6}\log\frac{2b}{\delta} + \frac{c}{6}\operatorname{arctanh}(\sin\theta_0) + \frac{c}{6}\log\frac{2l}{\delta_y\cos\theta_0}. \tag{178}$$

[13]请注意，在这种情况下，韦尔因子 $\Omega(y)$ 在界面 $y = 0$处也不光滑。

这只是 $\mathcal{I}(\gamma,\tilde{\gamma})$ 在设置 1 中的 $\gamma=[-b、b]$，再加上共形物质贡献的额外缺陷项。请注意，当 $a>b$，$\mathcal{I}(\gamma,\tilde{\gamma})$ 与体几何测地线的长度不同 Γ_{ab} 该测地线连接边界点$x\,b$ =和点y =$-a$（位于膜上，见图18），再加上缺陷项。具体而言，

$$\begin{aligned}\frac{\text{Area}(\Gamma_{ab})}{4G_N}+S_{\text{defect}} =&\frac{c}{6}\log\left[\frac{b^2+a^2+2ab\sin\theta_0}{a\cos\theta_0\delta}\right]+\frac{c}{6}\log\frac{2l}{\delta_y\cos\theta_0}\\ \neq&\frac{c}{6}\log\left[\frac{(b^2+a^2+2ab)(1+\sin\theta_0)}{2a\cos\theta_0\delta}\right]+\frac{c}{6}\log\frac{2l}{\delta_y\cos\theta_0}\\ =&\mathcal{I}(\gamma,\tilde{\gamma}).\end{aligned}\tag{179}$$

这也发生在设置 1 中。对于区间 $\gamma=[-a,\ b]$ 其中 $a\neq b$ 在 Weyl 变换后的共形场论中，其 RT 曲面在截断面处被截断，而不是在截断膜处（见图 19）。

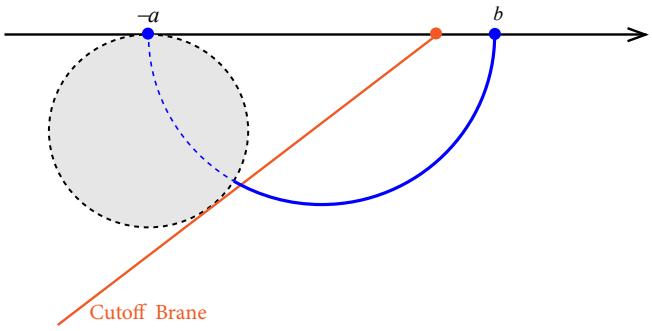


图 19：对于 Weyl 变换后的共形场论中的区间 $\gamma=[-a,b]$，其中 $a>b$，相应的 RT 曲面（蓝色实线）延伸至截断膜后方。

现在我们计算 DES 模型中典型构型的 BPE（见图 5）。对于 A = [0, b_2]和 B = [b3, +∞], 广义岛分别为 Ir(A) = [−q, −b_2]和 Ir(B) = [−b3, −q],，其中 x = −q 是 Is(AB) = Ir(A) ∪ Ir(B) 的分割点。另一方面，平衡点 q_2 将 A 和 B 之间的夹心区间划分为 $A_2\cup B_2$，其中 A_2 = [b_2, q_2]，B_2 = [q_2, b_3]。现在我们求解平衡条件 $\mathcal{I}(\text{BIr(B)},\text{AIr(A)A}_2)=\mathcal{I}(\text{AIr(A)},\text{BIr(B)B}_2)$。利用广义 ALC 公式和式（177），我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(B\text{Ir}(B),A_2A\text{Ir}(A)) =&\frac{1}{2}[\tilde{S}_{B\text{Ir}(B)}+\tilde{S}_{B_2B\text{Ir}(B)}-\tilde{S}_{B_2}]\\ =&\frac{1}{2}(\tilde{S}_{[-\infty,-q]\cup[b_3,+\infty]}+\tilde{S}_{[-\infty,-q]\cup[q_2,+\infty]}-\tilde{S}_{[q_2,b_3]})\\ =&\frac{c}{6}\log\frac{(b_3+q)(q+q_2)l}{q(b_3-q_2)\cos\theta_0\delta_y}+\frac{c}{6}\text{arctanh}(\sin\theta_0),\end{aligned}\tag{180}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(A\text{Ir}(A),B\text{Ir}(B)B_2) =&\frac{1}{2}[\tilde{S}_{A\text{Ir}(A)}+\tilde{S}_{A_2A\text{Ir}(A)}-\tilde{S}_{A_2}]\\ =&\frac{1}{2}(\tilde{S}_{[-q,b_2]}+\tilde{S}_{[-q,q_2]}-\tilde{S}_{[b_2,q_2]})\\ =&\frac{c}{6}\log\frac{(b_2+q)(q_2+q)l}{q(q_2-b_2)\cos\theta_0\delta_y}+\frac{c}{6}\text{arctanh}(\sin\theta_0).\end{aligned}$$

那么，平衡条件可表示为

$$\frac{b_3+q}{b_3-q_2}=\frac{b_2+q}{q_2-b_2}.\tag{181}$$

结合平衡条件和最小化条件，也就是说，

$$\partial_q[\mathcal{I}(B\mathrm{Ir}(B),A_2A\mathrm{Ir}(A))]=\partial_q\left[\frac{c}{6}\log\frac{(b_3+q)(q+q_2)l}{q(b_3-q_2)\delta_y}+\frac{c}{6}\operatorname{arctanh}(\sin\theta_0)\right]=0, \tag{182}$$

我们得到

$$q=q_2=\sqrt{b_2b_3}. \tag{183}$$

请注意，平衡点与在 Weyl 变换后的共形场论模型中得到的平衡点完全相同。最后，平衡部分纠缠为

$$\begin{aligned}\mathrm{BPE}(A:B)=&\mathcal{I}(B\mathrm{Ir}(B),A_2A\mathrm{Ir}(A))\\=&\frac{c}{6}\log\frac{\sqrt{b_3}+\sqrt{b_2}}{\sqrt{b_3}-\sqrt{b_2}}+\frac{c}{6}\operatorname{arctanh}(\sin\theta_0)+\frac{c}{6}\log\frac{2l}{\delta_y\cos\theta_0}\\=&\frac{\mathrm{Area}(\Sigma_{AB})}{4G_N}+S_{\mathrm{defect}},\end{aligned} \tag{184}$$

这恰好是在 [106]中计算得到的反射熵。尽管在这两种设定中我们选择的 Weyl 变换方式不同，但计算过程和结果本质上相同。

参考文献

[1] S. W. Hawking, 《引力坍缩中的可预测性失效》, Phys. Rev. D 14, 2460 (1976), doi:10.1103/PhysRevD.14.2460.[2] J. M. Maldacena, 《超共形场论与超引力的大 N 极限》, Adv. Theor. Math. Phys. 2, 231 (1998), doi:10.1023/A:1026654312961, hep-th/9711200.[3] S. Ryu 和 T. Takayanagi, 《从 AdS/CFT 全息推导纠缠熵》, Phys. Rev. Lett. 96, 181602 (2006), doi:10.1103/PhysRevLett.96.181602, hep-th/0603001.[4] V. E. Hubeny、M. Rangamani 和 T. Takayanagi, 《协变全息纠缠熵猜想》, JHEP 07, 062 (2007), doi:10.1088/1126-6708/2007/07/062, 0705. 0016.[5] A. Lewkowycz 和 J. Maldacena, 《广义引力熵》, JHEP 08, 090 (2013), doi:10.1007/JHEP08(2013)090, 1304.4926.[6]N. Engelhardt 和 A. C. Wall, 《量子极值曲面：超越经典范围的全息纠缠熵》, JHEP 01, 073 (2015), doi:10.1007/JHEP01(2015)073, 1408.3203.[7] G. Penington, 《纠缠楔重构与信息悖论》, JHEP 09, 002 (2020), doi:10.1007/JHEP09(2020)002, 1905.08255.[8] A. Almheiri、N. Engelhardt、D. Marolf 和 H. Maxfield, 《体量子场的熵与蒸发黑洞的纠缠楔》, JHEP 12, 063 (2019), doi:10.1007/JHEP12(2019)063, 1905.08762.[9] A. Almheiri、R. Mahajan、J. Maldacena 和 Y. Zhao, 《半经典几何中的霍金辐射佩奇曲线》, JHEP 03, 149 (2020), doi:10.1007/JHEP03(2020)149, 1908.10996。

[10] G. Penington、S. H. Shenker、D. Stanford 和 Z. Yang, 《复制虫洞与黑洞内部》, JHEP 03, 205 (2022), doi:10.1007/JHEP03(2022)205, 1911.11977.[11]A. Almheiri、T. Hartman、J. Maldacena、E. Shaghoulian 和 A. Tajdini, 《复制虫洞与霍金辐射熵》, JHEP 05, 013 (2020), doi:10.1007/JHEP05(2020)013, 1911.12333.[12] T. Takayanagi, 《BCFT 的全息对偶》, Phys. Rev. Lett. 107, 101602 (2011), doi:10.1103/PhysRevLett.107.101602, 1105.5165.[13] A. Almheiri、R. Mahajan 和 J. Maldacena, 《视界外的岛》（2019）, 1910. 11077.[14] T. J. Hollowood 和 S. P. Kumar, 《JT引力中蒸发黑洞的岛与佩奇曲线》, JHEP 08, 094 (2020), doi:10.1007/JHEP08(2020)094, 2004.14944.[15] F. F. Gautason、L. Schneiderbauer、W. Sybesma 和 L. Thorlacius, 《蒸发黑洞的佩奇曲线》, JHEP 05, 091 (2020), doi:10.1007/JHEP05(2020)091, 2004.00598.[16] K. Goto、T. Hartman 和 A. Tajdini, 《蒸发二维黑洞的复制虫洞》, JHEP 04, 289 (2021), doi:10.1007/JHEP04(2021)289, 2011.09043.[17] K. Hashimoto、N. Iizuka 和 Y. Matsuo, 《史瓦西黑洞中的岛》, JHEP **06**, 085 2020 10 1007/ 06 2020 085, 2004 05863 ( ), doi: . JHEP ( ) . .[18] X. Wang、R. Li 和 J. Wang, 《赖斯纳-诺德斯特伦黑洞中的岛与佩奇曲线》, JHEP 04, 103 (2021), doi:10.1007/JHEP04(2021)103, 2101.06867.[19] Y. Lu 和 J. Lin, 《卡鲁扎-克莱因黑洞中的岛》, 《欧洲物理杂志C辑》 82(2), 132 (2022), doi:10.1140/epjc/s10052-022-10074-w, 2106.07845.[20] H. Geng 和 A. Karch, 《有质量岛》, JHEP 09, 121 (2020), doi:10.1007/JHEP09(2020)121, 2006.02438.[21] H. Geng、A. Karch、C. Perez-Pardavila、S. Raju、L. Randall、M. Riojas 和 S. Shashi, 《长程引力理论中岛的不一致性》, JHEP 01, 182 (2022), doi:10.1007/JHEP01(2022)182, 2107.03390.[22] H. Geng、A. Karch、C. Perez-Pardavila、S. Raju、L. Randall、M. Riojas 和 S. Shashi, 《黑洞背景下全息 BCFT 的纠缠相结构》, JHEP 05, 153 (2022), doi:10.1007/JHEP05(2022)153, 2112.09132.[23] S. He、Y. Sun、L. Zhao 和 Y.-X. Zhang, 《视界外岛的普适性》, JHEP 05, 047 (2022), doi:10.1007/JHEP05(2022)047, 2110.07598.[24] J. Tian, 《广义膨胀子理论中的岛》（2022）, 2204.08751.[25] J. Chu、F. Deng 和 Y. Zhou, 《来自高维缺陷极值曲面与岛的佩奇曲线》, JHEP 10, 149 (2021), doi:10.1007/JHEP10(2021)149, 2105.09106.[26] M. Alishahiha、A. Faraji Astaneh 和 A. Naseh, 《存在高阶导数项时的岛》, JHEP 02, 035 (2021), doi:10.1007/JHEP02(2021)035, 2005.08715.[27] H. Z. Chen、R. C. Myers、D. Neuenfeld、I. A. Reyes 和 J. Sandor, 《轻松求解量子极值岛，第一部分：膜上的纠缠》, JHEP 10, 166 (2020), doi:10.1007/JHEP10(2020)166, 2006.04851。

[28] H. Z. Chen、R. C. Myers、D. Neuenfeld、I. A. Reyes 和 J. Sandor，《轻松求解量子极值岛，第二部分：膜上的黑洞》，《高能物理学杂志》12，025（2020），doi:10.1007/JHEP12(2020)025，2010.00018。[29] J. Hernandez、R. C. Myers 和 S.-M. Ruan，《轻松求解量子极值岛，第三部分：膜上的复杂度》，《高能物理学杂志》 **02**, 173 2021 10 1007/ 02 2021 173, ( ), 2010 16398 doi: . JHEP ( ) . .[30]G. Grimaldi、J. Hernandez 和 R. C. Myers，《轻松求解量子极值岛，第四部分：膜上的大质量黑洞》，《高能物理学杂志》03，136（2022年），doi:10.1007/JHEP03(2022)136，2202.00679。[31] S. A. Hosseini Mansoori、O. Luongo、S. Mancini、M. Mirjalali、M. Rafiee 和 A. Tavanfar，《全息轴子引力中的平面黑洞：岛、佩奇时间与扰乱时间》，《物理评论D辑》106(12)，126018（2022年），doi:10.1103/PhysRevD.106.126018，2209. 00253。[32] D. S. Ageev、I. Y. Aref'eva、A. I. Belokon、A. V. Ermakov、V. V. Pushkarev 和 T. A. Rusalev，《史瓦西黑洞中的纠缠岛与红外反常》（2022年），2209. 00036。[33] K. Goswami 和 K. Narayan，《小型史瓦西-德西特黑洞、量子极值面与岛》，《高能物理学杂志》10，031（2022年），doi:10.1007/JHEP10(2022)031，2207. 10724。[34] Y. Ling、Y. Liu 和 Z.-Y. Xian，《带电黑洞中的岛》，《高能物理学杂志》03，251（2021），doi:10.1007/JHEP03(2021)251，2010.00037。[35] D.-H. Du、W.-C. Gan、F.-W. Shu 和 J.-R. Sun，《存在岛时半经典史瓦西黑洞的幺正性约束》（2022年），2206.10339。[36] M.-H. Yu 和 X.-H. Ge，《带电膨胀子黑洞中的岛与佩奇曲线》，《欧洲物理杂志C辑》82(1)，14（2022年），doi:10.1140/epjc/s10052-021-09932-w，2107.03031。[37] A. Bhattacharya、A. Bhattacharyya、P. Nandy 和 A. K. Patra，《双重全息模型中永恒黑洞与辐射子系统的岛和复杂度》，《高能物理学杂志》 **05**, 135 2021 10 1007/ 05 2021 135, 2103 15852 ( ), doi: . JHEP ( ) . .[38] G. Yadav 和 N. Joshi，《多事件视界时空中的宇宙学岛与黑洞岛》，《物理评论D辑》 **107** 2 026009 2023 10 1103/ 107 026009, ( ), ( ), 2210 00331 doi: . PhysRevD. . .[39] C. Krishnan，《临界岛》，《高能物理学杂志》 **01**, 179 2021 10 1007/ 01 2021 179, ( ), 2007 06551 doi: . JHEP ( ) . .[40] C. Krishnan、V. Patil 和 J. Pereira，《平直时空中的佩奇曲线与信息悖论》（2020年），2005.02993。[41] K. Ghosh 和 C. Krishnan，《狄利克雷热浴与并非那么精细粒化的佩奇曲线》，《高能物理学杂志》08，119（2021），doi:10.1007/JHEP08(2021)119，2103.17253。[42] C. F. Uhlemann，《源自IIB型弦理论的四维岛与佩奇曲线》，《高能物理学杂志》08，104（2021），doi:10.1007/JHEP08(2021)104，2105.00008。[43] B. Ahn、S.-E. Bak、H.-S. Jeong、K.-Y. Kim 和 Y.-W. Sun，《带电线性膨胀子黑洞中的岛》，《物理评论D辑》 **105** 4 046012 2022 10 1103/ 105 046012, ( ), ( ), 2107 07444 doi: . PhysRevD. . . .

[44] A. Karch、H. Sun 和 C. F. Uhlemann，《弦理论中的双重全息》，《高能物理学杂志》10，012（2022年），doi:10.1007/JHEP10(2022)012，2206.11292。[45] C. Akers、N. Engelhardt、D. Harlow、G. Penington 和 S. Vardhan，《从非等距编码与复杂度看黑洞内部》（2022年），2207.06536。[46] R.-X. Miao，《楔形全息中的无质量纠缠岛》（2022年），2212.07645。[47] R.-X. Miao，《楔形全息中的纠缠岛与佩奇曲线》，《高能物理学杂志》03，214（2023），doi:10.1007/JHEP03(2023)214，2301.06285。[48] D. Li 和 R.-X. Miao，《锥形全息中的无质量纠缠岛》（2023），2303. 10958。[49] D. Basu、Q. Wen 和 S. Zhou，《希尔伯特空间约化产生的纠缠岛》（2022年），2211.17004。[50] T. Takayanagi 和 K. Umemoto，《通过全息对偶实现纯化纠缠》，《自然·物理》14(6)，573（2018），doi:10.1038/s41567-018-0075-2，1708.09393。[51]P. Nguyen、T. Devakul、M. G. Halbasch、M. P. Zaletel 和 B. Swingle，《纯化纠缠：从自旋链到全息》，《高能物理学杂志》01，098（2018），doi:10.1007/JHEP01(2018)098，1709.07424。[52]J. Kudler-Flam 和 S. Ryu，《全息理论中的纠缠负性与最小纠缠楔截面》，《物理评论D辑》99(10)，106014（2019），doi:10.1103/PhysRevD.99.106014，1808.00446。[53] Y. Kusuki、J. Kudler-Flam 和 S. Ryu，《AdS_3/CFT中全息负性的推导》，《物理评论快报》123(13)，131603（2019），doi:10.1103/PhysRevLett.123.131603，1907. 07824。[54] P. Chaturvedi、V. Malvimat 和 G. Sengupta，《全息量子纠缠负性》，《高能物理学杂志》05，172（2018），doi:10.1007/JHEP05(2018)172，1609.06609。[55] S. Dutta 和 T. Faulkner，《纠缠楔截面的典范纯化》，《高能物理学杂志》03，178（2021），doi:10.1007/JHEP03(2021)178，1905.00577。[56] K. Tamaoka，《从对偶密度矩阵得到纠缠楔截面》，《物理评论快报》122(14)，141601（2019），doi:10.1103/PhysRevLett.122.141601，1809.09109。[57] R. Espíndola、A. Guijosa 和 J. F. Pedraza，《纠缠楔重构与纯化纠缠》，《欧洲物理杂志C辑》78(8)，646（2018），doi:10.1140/epjc/s10052- 018-6140-2，1804.05855。[58] C. A. Agón、J. De Boer 和 J. F. Pedraza，《全息比特线的几何方面》，《高能物理学杂志》05，075（2019），doi:10.1007/JHEP05(2019)075，1811.08879。[59] J. Levin、O. DeWolfe 和 G. Smith，《关联度量与 AdS / CFT中的可蒸馏纠缠》，《物理评论D辑》( )，( )，doi: . PhysRevD. . . .[60] C. Akers 和 P. Rath，《纠缠楔截面需要三方纠缠》，《高能物理学杂志》04，208（2020），doi:10.1007/JHEP04(2020)208，1911.07852。[61] Y. Ling、P. Liu、Y. Liu、C. Niu、Z.-Y. Xian 和 C.-Y. Zhang，《双重全息中的反射熵》，《高能物理学杂志》02，037（2022年），doi:10.1007/JHEP02(2022)037，2109.09243。

101 4 046015 2020 10 1103/ 101 046015, 1909 04727

[62] B. Chen、Y. Liu 和 B. Yu，《AdS_3/WCFT 中的反射熵》，《高能物理学杂志》12，008（2022），doi:10.1007/JHEP12(2022)008，2205.05582。[63]D. Basu、H. Parihar、V. Raj 和 G. Sengupta，《纠缠负性、反射熵与反常引力》，《物理评论D》105(8)，086013（2022），doi:
10 1103/ 105 086013， [105，129902 2022]，。
2202 00683
PhysRevD.。勘误：Phys.Rev.D（）。。[64] M. J. Vasli、M. R. Mohammadi Mozaffar、K. Babaei Velni 和 M. Sahraei，《各向异性理论中反射熵的全息研究》，《物理评论D》107(2)，026012（2023），doi:10.1103/PhysRevD.107.026012，2207.14169。[65] P. Jain、N. Jokela、M. Jarvinen 和 S. Mahapatra，《纠缠楔截面的界限》，《高能物理学杂志》03，102（2023），doi:10.1007/JHEP03(2023)102，2211.07671。[66] K. Babaei Velni、M. R. Mohammadi Mozaffar 和 M. H. Vahidinia，《热化过程中纠缠楔截面的增长》（2023），2302.12882。[67] P. Liu、Z. Yang、C. Niu、C.-Y. Zhang 和 J.-P. Wu，《AdS Born-Infeld 理论中的混合态纠缠》（2023），2301.04854。[68]V. Chandrasekaran、M. Miyaji 和 P. Rath，《将纠缠岛的贡献纳入反射熵》，《物理评论D》102(8)，086009（2020），doi:10.1103/PhysRevD.102.086009，2006.10754。[69] T. Li、J. Chu 和 Y. Zhou，《蒸发黑洞的反射熵》，《高能物理学杂志》11，155（2020），doi:10.1007/JHEP11(2020)155，2006.10846。[70] Q. Wen，《平衡部分纠缠与纠缠楔截面》，《高能物理学杂志》04，301（2021），doi:10.1007/JHEP04(2021)301，2103.00415。[71]H. A. Camargo、P. Nandy、Q. Wen 和 H. Zhong，《平衡部分纠缠与混合态关联》，SciPost Phys. 12(4)，137（2022），doi:10.21468/SciPostPhys.12.4.137，2201.13362。[72] Q. Wen 和 H. Zhong，《协变纠缠楔截面、平衡部分纠缠与引力反常》，SciPost Phys. 13(3)，056（2022），doi:10.21468/SciPostPhys.13.3.056，2205.10858。[73] Q. Wen，《全息纠缠与纠缠轮廓中的精细结构》，《物理评论D》98(10)，106004（2018），doi:10.1103/PhysRevD.98.106004，1803.05552。[74] Q. Wen，《基于子集纠缠熵的纠缠轮廓与模流》，《高能物理学杂志》05，018（2020），doi:10.1007/JHEP05(2020)018，1902.06905。[75] Q. Wen，《部分纠缠熵公式》，《物理评论研究》2(2)，023170（2020），doi:10.1103/PhysRevResearch.2.023170，1910.10978。[76] Y. Chen 和 G. Vidal，《纠缠轮廓》，《统计力学杂志：理论与实验》p. P
10011 2014 // /10 48550/ 1406 1471，（），
1406 1471
doi:https: doi.org 。arXiv.。。。[77]J. Kudler-Flam、I. MacCormack 和 S. Ryu，《全息纠缠轮廓、比特线与纠缠海啸》，J. Phys. A 52(32)，325401（2019），doi:10.1088/1751-8121/ab2dae，1902.04654。

[78] Y. Chen 和 G. Vidal，《纠缠轮廓》，《统计力学杂志：理论与实验》2014(10)，P10011（2014），1406.1471。[79] G. Di Giulio、R. Arias 和 E. Tonni，《全局量子淬火后的一维自由格点模型中的纠缠哈密顿量》，J. Stat. Mech. 1912(12)，123103（2019），doi:10.1088/1742-5468/ab4e8f，1905.01144。[80] A. Rolph，《黑洞与共形场论中的纠缠局域度量》，SciPost Phys. 12(3)，079（2022），doi:10.21468/SciPostPhys.12.3.079，2107.11385。[81] I. MacCormack、M. T. Tan、J. Kudler-Flam 和 S. Ryu，《非热化系统中的算符增长与纠缠增长：多体局域化和随机单态相》，《物理评论B》104(21)，214202（2021），doi:10.1103/PhysRevB.104.214202，2001.08222。[82] Q. Wen，《面向具有非洛伦兹不变对偶的时空的广义引力熵》，《高能物理学杂志》01，220（2019），doi:10.1007/JHEP01(2019)220，1810.11756。[83] D. S. Ageev，《边界共形场论中纠缠岛轮廓的塑造》，《高能物理学杂志》03，033（2022），doi:10.1007/JHEP03(2022)033，2107.09083。[84] M. Han 和 Q. Wen，《由纠缠轮廓得到的纠缠熵：高维情形》，SciPost Phys. Core **5**, 020 2022 10 21468/ 5 2 020, （），1905 05522 doi: 。SciPostPhysCore. 。 。 。[85] M. Han 和 Q. Wen，《全息纠缠轮廓的第一定律与量子修正》，SciPost Phys. 11(3)，058（2021），doi:10.21468/SciPostPhys.11.3.058，2106. 12397。[86]S. Singha Roy、S. N. Santalla、J. Rodríguez-Laguna 和 G. Sierra，《作为几何与流的纠缠》，《物理评论B》101(19)，195134（2020），doi:10.1103/PhysRevB.101.195134，1906.05146。[87] D. Basu，《平直全息中的平衡部分纠缠》（2022），2203.05491。[88]A. Bagchi，《渐近平直时空与非相对论共形场论之间的对应关系》，《物理评论快报》105，171601（2010），doi:10.1103/PhysRevLett.105.171601，1006.3354。[89] A. Bagchi 和 R. Fareghbal，《BMS/GCA 再探：从非相对论对称性出发探寻平直时空全息》，《高能物理学杂志》10，092（2012），doi:10.1007/JHEP10(2012)092，1203. 5795。[90]D. Basu、A. Chandra、V. Raj 和 G. Sengupta，《平直全息中的纠缠楔与纠缠负性》，SciPost Phys. Core 5，013（2022），doi:10.21468/SciPostPhysCore.5.1.013，2106.14896。[91] H. Jiang、W. Song 和 Q. Wen，《平直全息中的纠缠熵》，《高能物理学杂志》07，142（2017），doi:10.1007/JHEP07(2017)142，1706.07552。[92] Y. Zou、K. Siva、T. Soejima、R. S. K. Mong 和 M. P. Zaletel，《一维多体系统中的普适三方纠缠》，《物理评论快报》126(12)，120501（2021），doi:10.1103/PhysRevLett.126.120501，2011.11864。[93] P. Hayden、O. Parrikar 和 J. Sorce，《几何反射熵的马尔可夫间隙》，《高能物理学杂志》10，047（2021），doi:10.1007/JHEP10(2021)047，2107.00009。

[94] L. Randall 和 R. Sundrum，《由微小额外维度产生的大质量层级》，《物理评论快报》83，3370（1999），doi:10.1103/PhysRevLett.83.3370，hep-ph/9905221。[95] L. Randall 和 R. Sundrum，《紧致化的另一种选择》，《物理评论快报》83，4690（1999），doi:10.1103/PhysRevLett.83.4690，hep-th/9906064。[96]A. Karch 和 L. Randall，《局域化引力》，《高能物理学杂志》05，008（2001），doi:10.1088/1126-6708/2001/05/008，hep-th/0011156。[97] F. Deng、J. Chu 和 Y. Zhou，《作为岛公式全息对应物的缺陷极值曲面》，《高能物理学杂志》03，008（2021），doi:10.1007/JHEP03(2021)008，2012.07612。[98] I. Akal、Y. Kusuki、N. Shiba、T. Takayanagi 和 Z. Wei，《全息移动镜》，《经典与量子引力》38(22)，224001（2021），doi:10.1088/1361-6382/ac2c1b，2106.11179。[99] K. Suzuki 和 T. Takayanagi，《二维中的边界共形场论与岛》，《高能物理学杂志》06，095（2022），doi:10.1007/JHEP06(2022)095，2202.08462。[100] Y.-k. Suzuki 和 S. Terashima，《关于 AdS/边界共形场论对应中的动力学》，《高能物理学杂志》09，103（2022），doi:10.1007/JHEP09(2022)103，2205.10600。[101] Y.-Y. Lin、J.-R. Sun、Y. Sun 和 J.-C. Jin，《比特线视角下纠缠岛的部分纠缠熵》，《高能物理学杂志》07，009（2022），doi:10.1007/JHEP07(2022)009，2203.03111。[102] P. Caputa、N. Kundu、M. Miyaji、T. Takayanagi 和 K. Watanabe，《通过优化共形场论中的路径积分得到反德西特空间》，《物理评论快报》119(7)，071602（2017），doi:10.1103/PhysRevLett.119.071602，1703.00456。[103] P. Caputa、M. Miyaji、T. Takayanagi 和 K. Umemoto，《共形场论中的全息纯化纠缠》，《物理评论快报》122(11)，111601（2019），doi:10.1103/PhysRevLett.122.111601，1812.05268。[104] I. Akal、Y. Kusuki、N. Shiba、T. Takayanagi 和 Z. Wei，《全息移动镜中的纠缠熵与佩奇曲线》，《物理评论快报》126(6)，061604（2021），doi:10.1103/PhysRevLett.126.061604，2011.12005。[105] T. Faulkner、A. Lewkowycz 和 J. Maldacena，《全息纠缠熵的量子修正》，《高能物理学杂志》11，074（2013），doi:10.1007/JHEP11(2013)074，1307.2892。[106] T. Li、M.-K. Yuan 和 Y. Zhou，《反射熵的缺陷极值曲面》，《高能物理学杂志》 **01**，018 2022 10 1007/ 01 2022 018, 2108 08544 ( )，

doi: 。JHEP ( ) 。 。[107] T. Hartman，《大中心荷下的纠缠熵》（2013），1303.6955。[108]J. Sully、M. Van Raamsdonk 和 D. Wakeham，《大中心荷下的边界共形场论纠缠熵与黑洞内部》，《高能物理学杂志》03，167（2021），doi:10.1007/JHEP03(2021)167，2004.13088。[109] Y. Lu 和 J. Lin，《存在纠缠岛时的马尔可夫间隙》，《高能物理学杂志》03，043（2023），doi:10.1007/JHEP03(2023)043，2211.06886。[110]A. Mollabashi、N. Shiba 和 T. Takayanagi，《两个相互作用的共形场论之间的纠缠与广义全息纠缠熵》，《高能物理学杂志》04，185（2014），doi:10.1007/JHEP04(2014)185，1403.1393。

[111] I. Akal、Y. Kusuki、T. Takayanagi 和 Z. Wei，《楔形区域的余维二全息》，《物理评论D》102(12)，126007（2020），doi:10.1103/PhysRevD.102.126007，2007. 06800。[112] R.-X. Miao，《余维二全息的精确构造》，《高能物理学杂志》01，150（2021），doi:10.1007/JHEP01(2021)150，2009.06263。[113] H. Geng、A. Karch、C. Perez-Pardavila、S. Raju、L. Randall、M. Riojas 和 S. Shashi，《从 Karch-Randall 膜世界得到 Jackiw-Teitelboim 引力》，《物理评论快报》129(23)，231601（2022），doi:10.1103/PhysRevLett.129.231601，2206.04695。[114] F. Deng、Y.-S. An 和 Y. Zhou，《通过部分约化得到 JT 引力与缺陷极值曲面》，《高能物理学杂志》02，219（2023），doi:10.1007/JHEP02(2023)219，2206.09609。[115] J. Lin、Y. Lu 和 Q. Wen，即将发表。[116] P. Hayden、M. Lemm 和 J. Sorce，《反射熵不是一种关联度量》（2023），2302.10208。