arXiv:2305.04272v1 [math.GT] 7 May 2023

二维轨形的映射类群

Jonas Flechsig
2023年5月7日

摘要

我们定义轨形映射类群（带有标记点），并通过研究它们在弧和简单闭曲线的某些轨形类似物上的作用来考察这些群。此外，我们为轨形映射类群的适当子群建立了一个 Birman正合列。这个短正合列使我们能够推导出这些群的有限表示。这为 [6] 中对轨形辫群的类似讨论奠定了基础。

1. 引言

本文的研究动机来自 [6] 中对轨形辫群的研究。轨形辫群是 Artin辫群或更一般的曲面辫群的类似物。轨形辫并非在圆盘或曲面内移动，而是在二维轨形内移动。Allcock [1] 的工作表明，某些轨形辫群包含球面型和仿射型 Artin 群 D_n, B_n and $\tilde{D}_n$ 作为有限指数子群，因此引起了人们的兴趣。对于这些 Artin 群，轨形辫群为我们提供了辫子图示。Roushon 发表了数篇关于轨形辫群 [12, 13, 14, 15] 及其所包含的 Artin 群 [11] 的结构的文章。此外，Crisp–Paris [3] 研究了轨形辫群的外自同构群。

所研究的轨形辫群与以下轨形所关联的轨形映射类群有关。设 Σ_Γ 为使用以下数据定义的轨形：群 Γ 是有限多个有限循环群的自由积。因此， Γ 作用于一个具有边界的平面可缩曲面 Σ ，该曲面通过加厚 Bass–Serre 树得到（详细信息参见例 2.3 ）。如果我们加入L个穿孔点，就会得到一个与 Roushon 在 [14], 中研究的类似轨形，我们将其记为 $\Sigma_\Gamma(L)$。与他的论文不同，我们考虑具有非空边界的轨形（这不会影响轨形辫群的结构）。轨形 $\Sigma_\Gamma(L)$ 中的唯一奇点是锥点，它们对应于自由积中的有限循环因子 Γ。

相对于 n 标记点的关联轨形映射类群记为 $\mathrm{Map}_n^{orb}(\Sigma_\Gamma(L))$ ，对应于带删点的轨形 $\Sigma_\Gamma(L)$。$\Sigma_\Gamma(L)$ 的一个映射类由 Γ-等变同胚 $\Sigma(L)$ 表示，该同胚固定锥点和边界 $\partial\Sigma(L)$。如果该同胚将 n 标记点的 Γ-轨道作为一个集合保持不变，则称其保持 n 标记点。该等价关系由固定锥点、标记点和边界的 Γ-等变环境同伦所诱导。

曲面的映射类群是通过其在弧和简单闭曲线上的作用来研究的。一个基本工具是双边形判据，参见 [5, 命题 1。7]特别是，双边形判据意味着同伦弧以及同伦的简单闭曲线是环境同痕的。为了研究映$^{orb}(\Sigma_\Gamma)$，我们引入弧和简单闭曲线的轨形类似物，称为 Γ-弧和简单闭Γ-曲线（见定义3.11 和3.13）。此外，我们为这些类似物建立了双边形判据（见命题3.25 和3.21）。与经典情形一样，这

使我们能够推导出，同伦的 Γ-弧以及同伦的简单闭 Γ-曲线是环境同痕的（见命题3.28）。

此外，轨形映射类群存在一个同态

$$\mathrm{Forget}_n^{orb}:\mathrm{Map}_n^{orb}(\Sigma_\Gamma(L))\to\mathrm{Map}^{orb}(\Sigma_\Gamma(L))$$

通过遗忘标记点。令 $\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$，为 Forget_n^{orb} 的核。

由于锥点是固定的，我们可以将映射类限制在子曲面上，该子曲面 $\Sigma(L,\ N)$ 也在锥点处删点。利用商空间$\Sigma(L,\ N)/\Gamma$ 是一个圆盘 $D(L,\ N)$ 带有 $L+N$ 个穿孔点这一事实，我们可以构造一个同构，将$\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$，映射到映射类群 $\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}}(D(L,\ N))$ 的一个类似子群$\mathrm{Map}_n(D(L,\ N))$（详情见命题4.3）。此外，回顾一下，Birman正合列给出了关于$\mathrm{Map}_n(D(L,\ N))$的如下结果：

$1\to\pi_1(\text{配置空间}_n(D(L,\ \cancel{N)))\text{映射}}_n(D(L,\ N))\text{映射}\cancel{(D(L,}\ N))\to 1$，推送$_n$遗忘$_n$

例如参见，[5, 定理 9。1]。根据命题 4.3，我们可以据此推导出群 $\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$，的一个类似的短正合列：

定理 A（轨形映射类群的 Birman正合列）。下图是一个短正合列：

$$1\to\pi_1(\mathrm{Conf}_n(D(L,N)))\xrightarrow{\mathrm{Push}_n^{orb}}\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id},orb}(\Sigma_\Gamma(L))\xrightarrow{\mathrm{Forget}_n^{orb}}\underbrace{\mathrm{Map}^{\mathrm{id},orb}(\Sigma_\Gamma(L))}_{=1}\to 1,$$

详情请参见定理 4.10。

令 $\mathrm{PMap}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$，为 $\mathrm{InMap}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$ 中那些在标记点轨道上诱导平凡置换的映射类所构成的子群。对于这些子群，我们得到：

定理 B。下图是一个可分裂的短正合列：

$$1\to F_{n-1+L+N}\xrightarrow{\mathrm{Push}_{\mathrm{PMap}_n}^{orb}}\mathrm{PMap}_n^{\mathrm{id},orb}(\Sigma_\Gamma(L))\xrightarrow{\mathrm{Forget}_{\mathrm{PMap}_n}^{orb}}\mathrm{PMap}_{n-1}^{\mathrm{id},orb}(\Sigma_\Gamma(L))\to 1,$$

详情请参见推论 4.13。

特别地，由定理 $\mathrm{PMap}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$、和$\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$ 的有限表示，我们可以推出B（参见推论 4.19 和命题 4.22）。

正如 [6, 定理 A], 所证明的，某些轨形辫群是群 $\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$的商空间。结合 $\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$及其纯子群 $\mathrm{PMap}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$的表示，我们得到了相关轨形辫群 $\mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 和 $\mathrm{PZ}_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 的表示，见 [6] 中的定理 B 和推论 5.6。这些结果对于推导轨形辫群的结构性结果至关重要。特别地，我们为纯轨形辫群得到了类似的 Birman正合列，见 [6, 定理 C]。在这种情况下，我们意外地发现，点推动映射 $\mathrm{Push}_{\mathrm{PMap}_n}^{orb}$ 的对应映射并非单射。

致谢

我谨向我的导师 Kai-Uwe Bux 致谢，感谢他的支持和多次富有帮助的讨论。也要感谢 José Pedro Quintanilha 和 Xiaolei Wu 在本项目不同阶段给予的宝贵建议。此外，我还要感谢 Elisa Hartmann 和 José Pedro Quintanilha 对本文早期版本提出的意见。

作者获得了德国研究联合会（Deutsche Forschungsgemeinschaft，DFG）的资助，项目编号为426561549。此外，作者还获得了比勒费尔德青年基金的部分资助。

2. 轨形与路径

在本文中，我们只考虑由流形（通常是曲面）在适当群作用下取商空间得到的轨形。回想一下，一个作用、】【

$$\phi : G \to \mathrm{Homeo}(M), g \mapsto \phi_g$$

在流形上， M 若对每个紧集 $K \subseteq M$ ，集合*proper*

$$\{g \in G \mid \phi_g(K) \cap K \neq \varnothing\}$$

是紧致的。由于我们赋予 G 离散拓扑，即上述集合是有限的。作为流形的适当商空间出现的轨形，按照 Bridson–Haefliger 的术语称为可发展，按照 Thurston 的术语则称为 [2] 和良好 [16]。

上文及下文中，所有流形均为可定向的，所有同胚均保持定向。

定义2.1 （轨形， [2, 第三章 G，1.3]）。设 M 为一个流形（可能带有边界）， G 为一个群，并带有单同态

$$\phi : G \to \mathrm{Homeo}(M)$$

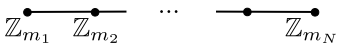
使得 G 在 M上适当地作用。在这些条件下，三元组 $(M,\ G,\ \varphi)$ 称为一个轨形，记作 M_G。若点 $c \in M$的稳定子群 $\mathrm{Stab}_G(c) \neq \{1\}$ ，则称点 c 为 M_G的奇点。若点 $c \in M$ 的稳定子群 $\mathrm{Stab}_G(c)$ 是有限阶 m的循环群，则称点 c 为 M_G 中阶数为 m的锥点。

下面是轨形的第一个例子：

例 2.2. 设 $\mathbb{Z}_m$ 是一个阶为 m的循环群。群 $\mathbb{Z}_m$ 通过绕圆盘 D 的中心旋转来作用于该圆盘。该作用通过等距变换实现，且作用群有限，即该作用是适当的。因此，$D_{\mathbb{Z}_m}$ 是一个轨形，其中恰有一个位于 D中心的奇点，该点是一个锥点。

例 2.2 启发我们为有限多个有限循环群的自由积构造一个更一般的形式，下面简要介绍这一构造。更多细节请参阅作者的博士论文 [7, 第 2 节。1]。本文将始终采用这一轨形 $D_{\mathbb{Z}_m}$ 的推广形式。

例 2.3。 令 Γ 为有限循环群 $\mathbb{Z}_{m_1}$、……、$\mathbb{Z}_{m_N}$ 的自由积。群 Γ 是边群平凡的群图的基本群。



因此， Γ 作用于其 Bass–Serre 树 T。该作用的基本域是一条含有 $N-1$ 条边的路径。该作用在边上是自由的，顶点稳定子是共轭的 $\gamma\mathbb{Z}_{m_\nu}\gamma^{-1}$，其中有 $\gamma \in \Gamma$ 和 $1 \leqslant \nu \leqslant N$。通过为每个 $\mathbb{Z}_{m_\nu}$ 选择一个生成元γ_ν，其中 $1 \leqslant \nu \leqslant N$，每个顶点的链接都带有一个循环序。

考虑将 Bass–Serre 树 T 嵌入到 $\mathbb{C}$ 中，并使其尊重每个链接上的局部循环序。若我们在 T中选取 $\mathbb{C}$的一个正则邻域，就会得到一个可缩的平面曲面 Σ (带边界)，示例见图 2.1 。

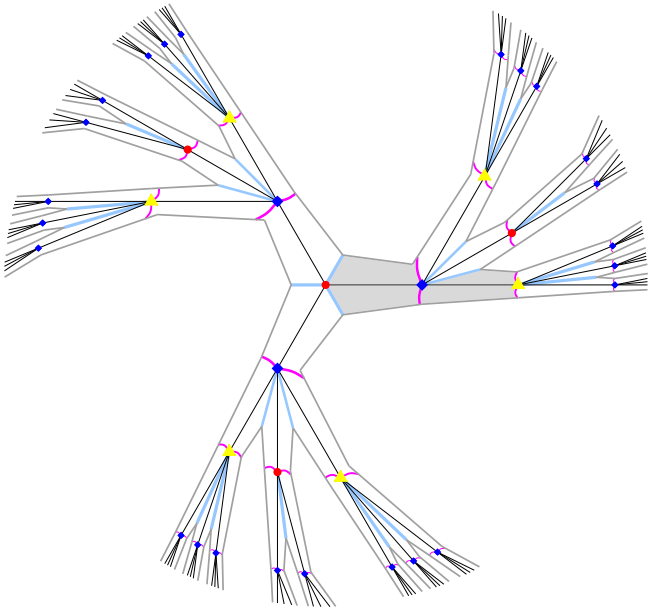


图 2.1。 对于 $\Gamma = \mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_4$ 的加厚 Bass–Serre 树，其中基本域以灰色阴影标示。红色的 ●、蓝色的 ♦ 和黄色的 ▲ 分别是自由因子的共轭$\mathbb{Z}_3$、 $\mathbb{Z}_2$ 和 $\mathbb{Z}_4$。

曲面 Σ 从 Bass–Serre 树继承了一个适当的 Γ-作用，使得顶点稳定子按照被稳定顶点的链接上的循环序作用。此外，该作用存在一个基本域，与 T中的基本域相对应。特别地，我们得到一个轨形结构 Σ_Γ。

当且仅当 Σ_Γ 中的点对应于 T 的一个顶点时，它是一个奇点。因此， Σ_Γ 中的奇点都是锥点，并分解为 N 个轨道。商空间 Σ/Γ 是一个圆盘，其中有 N 个特殊点，分别对应于锥点的轨道。

一般来说，我们可以选择一个基本域 F，它是一个圆盘，如图 2.2 所示，并且恰好包含 N个锥点 c_1，……， c_N这些锥点位于边界上，使得每个锥点恰有两条相邻的边界弧属于同一个 Γ-轨道。

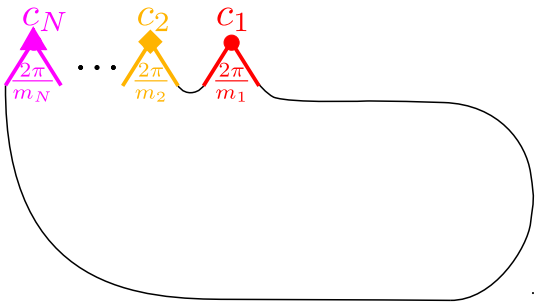


图 2.2。基本域 F。

在这一特定情况下，我们还可以在 Σ 上找到一个度量，使得 Γ 对 Σ 的作用是等距的。对于每个 $\gamma \in \Gamma$，令

$$\lambda_{\gamma^{-1}} : \gamma(F) \to F, \gamma(x) \mapsto x.$$

这使我们能够定义

(1) $$d : \Sigma \times \Sigma \to \mathbb{R}_{>0},$$

$$(x, y) \mapsto \inf_{(x_0, x_1, \ldots, x_k) \in P(x,y)} \sum_{i=1}^{k} d_{\mathbb{C}}(\lambda_{\gamma_i^{-1}}(x_{i-1}), (\lambda_{\gamma_i^{-1}}(x_i)).$$

这里，$P(x,\ y)$ 表示由任意长度的折线链构成的集合 $(x_0,\ x_1,\ \ldots\ldots,\ x_k)$ 位于 $k \in \mathbb{N}_0$ 内部 Σ，连接 x 与 y，并且相邻点 x_{i-1}和 x_i 均属于 $\gamma_i(F)$，其中 $\gamma_i \in \Gamma$ 且 $1 \leqslant i \leqslant k$，详见 [7, 第 2.1 节。7] 关于 d 的良定义性。

如果我们移除 Σ 的边界，商空间 Σ°/Γ 与具有 N 个特定点及其对应循环群 $\mathbb{Z}_{m_\nu}$ 的复平面$1 \leqslant \nu \leqslant N$同胚。添加 Γ 个删点的轨道 $\Gamma(r_\lambda)$，使其对应于 $1 \leqslant \lambda \leqslant L$，并满足 Σ，使得 $\Gamma(r_\theta) \neq \Gamma(r_\lambda)$ 对于 $1 \leqslant \theta,\ \lambda \leqslant L,\ \theta \neq \lambda$，我们得到称为以下名称的轨形。

$$\mathbb{C}(L, N, \mathbf{m}) \text{ with } \mathbf{m} = (m_1, ..., m_N)$$

在 [12] 中。在 [1]，中，Allcock 研究了这些轨形上的辫子。

$$(L, N, \mathbf{m}) = (0, 2, (2, 2)), (0, 1, (2)) \text{ and } (1, 1, (2)).$$

由于我们想研究映射类群，而这需要固定边界，因此我们将考虑带边界的轨形 Σ_Γ。此外，我们用记号 $\Sigma_\Gamma(L)$ 表示底层曲面（带边界）的轨形

(2) $$\Sigma(L) := \Sigma \backslash \Gamma(\{r_1, ..., r_L\}).$$

我们将考虑 [2, 第三章 G 中介绍的轨形路径及其同伦类，3]其中，轨形被更一般地视为一个*étale*群胚 $(\mathcal{G},\ X)$参见 [2, 第三章 G，2]。如果 M_G 是定义2.1意义下的轨形，则其对应的 étale 群胚为

$$(\mathcal{G}, X) = (G \times M, M).$$

下面我们将使用 G 代替 $\mathcal{G} = G \times M$来简化记号。特别地，我们引入 G-路径。这些就是 $\mathcal{G}$在 [2]中的路径。

定义2.4 (G-路径，[2, 第三章 G，3.1])。A G-路径 $\xi = (g_0,\ c_1,\ g_1,\ \ldots,\ c_p,\ g_p)$在 M_G 中，以 $x \in M$ 为起点、以 $y \in M$ 为终点，且基于区间 $[a,\ b]$ 的一个细分$a = t_0 \leqslant ... \leqslant t_p = b$，由以下部分组成

(1) 连续映射 $c_i :\ [t_{i-1},\ t_i] \to M$ 对于 $1 \leqslant i \leqslant p$ 以及 **(2)** 群元素 $g_i \in G$ 使得 $g_0(c_1(t_0)) = x,\ g_i(c_{i+1}(t_i)) = c_i(t_i)$ 对于$1 \leqslant i < p$ 以及 $g_p(y) = c_p(t_p)$（见图 2.3）。

为简洁起见，如果 $g_p = 1$，我们将 $(g_0、\ c_1、\ g_1 \ldots\ldots c_p、\ g_p)$ 简写为 $(g_0、\ c_1、\ g_1 \ldots\ldots c_p)$。我们称 G-路径为连续 的，如果它具有 $(g、\ c)$ 的形式。

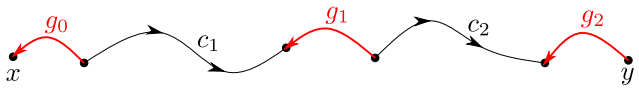


图2.3. A G-路径。

以下等价关系将连续部分具有相同 G-轨道的某些 G-路径视为等同。

定义 2.5（等价类 G-路径，[2, 第三章 G，3.2]）。设

$$\xi = (g_0, c_1, g_1, ..., c_p, g_p)$$

是一个关于 $a = t_0 \leqslant ... \leqslant t_p = b$ 的 G-路径。

（1） ξ 的 细分是通过选择 $t' \in [t_{i-1},\ t_i]$（其中 $1 \leqslant i \leqslant p$），并将条目 c_i 替换为以下序列而从 ξ 得到的 G-路径

$$(c_i|_{[t_{i-1},t']}, 1, c_i|_{[t',t_i]}).$$

(2) ξ 的移位 是一个 G-路径，它由 ξ 通过选择 $h \in G$ 并替换一个子序列 (g_{i-1}, c_i, g_i) 得到，其中某个 $1 \leqslant i \leqslant p$ 满足

$$(g_{i-1}h^{-1}, h \cdot c_i, hg_i).$$

如果一个 G-路径可以通过一系列细分、细分的逆操作和移位从另一个 G-路径得到，我们就称这两个 G-路径等价 。

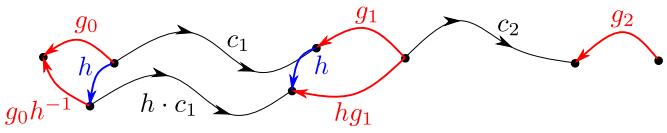


图 2.4. 两条通过移位而等价的 G-路径。

利用这个等价关系，我们仿照拓扑空间中路径的同伦关系，为 G-路径定义同伦关系。

定义 2.6（ G-路径的同伦， [2, 第三章 G，3.5]）。两个 G-路径 ξ和 ξ之间的一个初等˜同伦，是由细分 $0 = t_0 \leqslant t_1 \leqslant ... \leqslant t_p = 1$上的一族 G-路径 $\xi_s = (g_0$、 c_1^s、 ....、 $g_p)$组成的。该族 ξ_s 由 $s \in [s_0$、 $s_1]$ 参数化，使得 c_i^s 连续地依赖于参数，并且 $\xi^{s_0} = \xi$、 $\xi^{s_1} = \xi$。

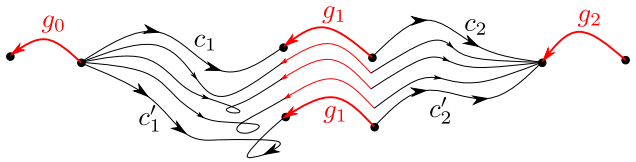


图 2.5。 G-路径的一个初等同伦。

如果可以通过以下操作的某个序列将一条 G-路径变为另一条同伦（相对于它们的端点），则称这两条 G-路径同伦（相对于它们的端点）：

（1） G-路径的等价；（2）

初等同伦。

G-以固定点为基点的环路 $x \in M$ 的同伦类引出了轨形基本群的概念，详见 [2,第三章 G， 3] 。

我们以一个引理结束本节，该引理使我们在许多情况下可以限制为连续G-路径。对于固定的指标 $1 \leqslant j \leqslant p$，定义 2.5 中定义的移位2.5 允许作出如下选择：元素 h<style id='14'}移位 c_j为 c_j'：$= h \cdot c_j$， $g_{j-1}' = g_{j-1}h^{-1}$ 并且 $g_j' = hg_j$。因此，路径 ξ 等价于

(3) $$\xi' = (g_0, c_1, g_1, ...c_{j-1}, g_{j-1}', c_j', g_j', c_{j+1}, ..., c_p, g_p).$$

如果选择 $h = g_j^{-1}$，元素 g_j'是平凡的。将 c_j'， 1， c_{j+1}替换为 $c_j' \cup c_{j+1}$，我们得到路径

(4) $$\tilde{\xi}' = (g_0, c_1, g_1, ...c_{j-1}, g_{j-1}', c_j' \cup c_{j+1}, g_{j+1}, c_{j+1}, g_{j+2}, ..., c_p, g_p)$$

这等价于 ξ，并且具有更短的细分长度。

引理 2.7 ([2, 第三章 G, 3.9(1)])。 每条 G-路径连接 x 与 y 在 M_G 中都等价于唯一一条连续的 G-路径 $(g,\ c)$ 满足 $c:\ I \to M$ 连接 $g^{-1}(x)$与 y。

关于引理 2.7 的证明，请参见 [7, 引理 2。12]。

3. 轨形映射类群

关于 Artin辫群，一个重要的研究方法是将其与带 puncture 的圆盘的映射类群联系起来，例如参见 [5, 第 9.1 节。3]对于圆盘和其他曲面，可以通过研究映射类群在弧和简单闭曲线上的作用来研究映射类群。这基于这样一个事实：同伦弧和同伦简单闭曲线是环境同痕的。例如，这可由命题 3.9 中陈述的双边形判据推出。

本节为轨形情形下的类似讨论奠定基础：它引入了 轨形映射类群 的概念（见定义3.3），并建立了弧和简单闭曲线的轨形类似物，分别称为 Γ-弧 和 简单闭Γ-曲线 （见定义 3.11 和 3.13）。类比曲面情形，我们为 双边形判据 证明了适用于 Γ-弧和简单闭 Γ-曲线的判据（见命题 3.25和 3.21）。

与曲面情形一样，双边形判据表明，同伦的 Γ-弧以及同伦的简单闭 Γ-曲线是环境同痕的（见引理 3.28）。这使我们能够通过考察轨形映射类群在 Γ-弧和简单闭 Γ-曲线上的作用来理解轨形映射类群。特别地，我们将证明，在没有标记点和穿孔点的情况下， Σ_Γ 的欧几里得轨形映射类群是平凡的（见引理 3.32）。这将作为第 4 节的基础情形；该节将研究带有标记点的轨形映射类群的子群。

3.1. 定义与初步示例

给定一个轨形 M_G，我们希望将其映射类群定义为 M 上某些同胚所成的群，再对等价关系取商。这推广了流形映射类群的概念。如果作用群 G 是平凡群，那么下文定义的 $M_{\{1\}}$ 的欧几里得轨形映射类群与 M 的映射类群一致。

与流形的通常情形一样，我们考虑逐点固定 M 边界的同胚。此外，轨形映射类群应反映 M上的 G-作用结构。因此，我们将范围限制为 G-等变同胚。在该群上的同痕关系下，我们定义轨形映射类群。

定义 3.1 (G-等变性)。 设 X, Y 为拓扑 G-空间。若映射 $\psi: X \to Y$ 满足以下条件，则称其为 G-等变的。

$$\psi(g(x)) = g(\psi(x)) \text{ for all } g \in G, x \in X.$$

如果 M_G 是一个轨形，那么将逐点固定边界的 M 上的 G-等变自同胚群记为 $\mathrm{Homeo}^{orb}(M_G,\ \partial M)$。作为 M 的同胚群的一个子群，在赋予紧开拓扑后，它具有拓扑群的结构。

定义 3.2 （环境同痕）。 一个环境同痕 是一个连续映射

$$I \to \mathrm{Homeo}^{orb}(M_G, \partial M).$$

两个 G-等变同胚 H, H' 是环境同痕的，记作 $H \sim H'$，若存在一个环境同痕 H_t，满足 $H_0 = H$ 和 $H_1 = H'$。

定义 3.3（欧几里得轨形映射类群）。逐点固定边界的 G-等变同胚群模去环境同痕

$$\mathrm{Map}^{orb}(M_G) := \mathrm{Homeo}^{orb}(M_G, \partial M)/\sim$$

称为 M_G的映射类群。

基于 $\mathrm{Homeo}^{orb}(M_G, \partial M)$ 是一个拓扑群这一事实，映射类群也具有拓扑群的结构。下面给出一个特别基础的例子：

例 3.4（$\mathrm{Map}^{orb}(D_{\mathbb{Z}_m})$ 与亚历山大技巧）。设 H 是 D 的一个自同胚，它表示 $\mathrm{Map}^{orb}(D_{\mathbb{Z}_m})$ 中的一个元素，并且

$$H_t : D \to D, x \mapsto \begin{cases} (1-t)H\left(\frac{x}{1-t}\right) & 0 \leqslant |x| \leqslant 1-t, \\ x & 1-t \leqslant |x| \leqslant 1. \end{cases}$$

对于每个 $t \in I$，映射 H_t 都是 $\mathbb{Z}_m$-等变的，并且固定边界。此外，$H_0 = H$ 和 $H_1 = \mathrm{id}_D$。由于映射

$$I \to \mathrm{Homeo}^{orb}(D_{\mathbb{Z}_m}, \partial D), t \mapsto H_t$$

是连续的，因此它给出了一个环境同痕，称为 亚历山大技巧，见[5, 引理 2。1]。这表明 $\mathrm{Map}^{orb}(D_{\mathbb{Z}_m})$ 是平凡的。

如果我们给 M_G 赋予一个有限的标记点集，就可以在轨形映射类群中编码额外信息。

定义 3.5（带标记点的欧几里得轨形映射类群）。设 M_G 是一个轨形，并固定一组非奇异标记点 $P = \{p_1, \ldots\ldots, p_n\}$，它们位于 M 中，且满足 $G(p_i) \neq G(p_j)$，对 $1 \leqslant i, j \leqslant n, i \neq j$。用 $\mathrm{Homeo}_n^{orb}(M_G, \partial M)$ 表示保持标记点轨道 $G(P)$ 作为集合不变的同胚所构成的子群：

$$\{H \in \mathrm{Homeo}^{orb}(M_G, \partial M) \mid H(G(P)) = G(P)\}.$$

我们将这些同胚视为在环境同伦 $I \to \mathrm{Homeo}_n^{orb}(M_G, \partial M)$ 下等价。相应的等价关系记作 $\sim_n$。用

$$\mathrm{Map}_n^{orb}(M_G) := \mathrm{Homeo}_n^{orb}(M_G, \partial M)/\sim_n,$$

我们将 M_G 关于这些 n 标记点 的欧几里得轨形映射类群称为。

我们强调，标记点的轨道 $G(P)$ 是一个离散集合。因此，经过 $\mathrm{Homeo}_n^{orb}(M_G, \partial M)$ 的同伦 H_t 在标记点处保持不变，即对每个 $1 \leqslant j \leqslant n$ 和 $t \in I$，都有 $H_t(p_j) = H_0(p_j) = H_1(p_j)$。

群 $\mathrm{Map}^{orb}(D_{\mathbb{Z}_m})$ 是平凡的，而对于具有一个标记点轨道的群 $\mathrm{Map}_1^{orb}(D_{\mathbb{Z}_m})$，我们得到：

例 3.6. 映射$_1^{orb}(D_{\mathbb{Z}_m})$ 是无限循环群。其生成元由一个$\frac{2\pi}{m}$ -扭转 U 绕中心 c 表示（见图 3.1）。

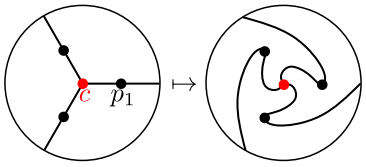


图 3.1。 $\frac{2\pi}{m}$ -扭转 U，对应于 $m = 3$。

我们将在下一节给出例3.6 的证明。它将作为命题 4.3 的推论得出，证明中将使用亚历山大技巧。

将每个标记点映射到其所在的 G 轨道内的同胚，生成所谓的纯轨形映射类群：

定义 3.7 （纯轨形映射类群）。令 $\mathrm{PHomeo}_n^{orb}(M_G,\ \partial M)$ 为由纯同胚构成的群

$$\{H \in \mathrm{Homeo}_n^{orb}(M_G, \partial M) \mid H(p_j) = g_j(p_j) \text{ with } g_j \in G \text{ for all } 1 \leqslant j \leqslant n\}.$$

由纯同胚诱导的 $\mathsf{Map}_n^{orb}(M_G)$ 子群称为纯轨形映射类群

$$\mathrm{PMap}_n^{orb}(M_G) := \mathrm{PHomeo}_n^{orb}(M_G, \partial M)/\sim_n .$$

此处我们回顾一下：流形的纯映射类群中的同胚会固定每个标记点。相比之下，我们只要求 $\mathsf{PMap}_n^{orb}(M_G)$ 中的同胚保持每个标记点的轨道，但不要求固定这些点本身。此外，我们强调，允许对不同的标记点轨道采用不同的群作用，即 $H(p_i) = g_i(p_i)$ 和 $H(p_j) = g_j(p_j)$，其中 $g_i \neq g_j$ 对于 $i \neq j$。

3.2. 弧与简单闭曲线

研究弧和简单闭曲线是推导映射类群相关信息的有效工具。这是基于这样一个事实：弧或简单闭曲线的每个同伦都可以由环境同痕实现。例如，这可由以下针对弧和简单闭曲线的所谓双边形判据得出，我们将在下文回顾该判据。更多信息请参阅 [5, 第 1.2.2 节和第 1.2 节。7]。

设 S 是一个边界非空的连通紧曲面。从其内部移除有限多个点后，我们得到一个连通曲面 S。此外，我们在 S 上赋予两个有限的标记点集 P 和 Q。集合 P 包含于内部，而 Q 中的点位于边界上 ∂S。

连续映射 $b\colon I \to S$ 称为一条路径。我们称 b 将 $b(0)$ 连接到 $b(1)$。下文中，我们将路径限制为满足 $b(0) \in P$ 和 $b(1) \in Q$的情形。若路径 $b\colon I \to S$的像与 P，Q 和 ∂S 的交恰好为其端点，则称其为真 路径。对于每条路径，我们都将 b 与其在 S中的像等同。若路径 b 将 I 嵌入到 S中，则称其为一条弧。本文讨论的所有路径都是真路径。我们主要研究弧。我们考虑端点相对同伦下的真路径。用 $[b]_S$表示 S中路径 b 的同伦类。

连续映射 $c\colon S^1 \to S$ 称为闭曲线。如果 c 的像不与任何标记点或边界 ∂S 相交，我们就称闭曲线真 。对于每条闭曲线 c，我们将 c 与其在 S 中的像等同。简单闭曲线 是指闭曲线 $c\colon S^1 \to S$，它嵌入 S^1 到 S中。与路径一样，我们只考虑真闭曲线在真闭曲线类中的同伦，并用 $[c]_S$ 表示闭曲线 c 的同伦类。

对于集合 T，令 $|T|$ 表示其基数。如果 b，b' 是 S 中的弧，令

$$i_S([b]_S, [b']_S) = \min\{|\tilde{b} \cap \tilde{b}'| \mid \tilde{b} \in [b]_S, \tilde{b}' \in [b']_S \text{ arcs}\}$$

称为 $[b]_S$ 和 $[b']_S$ 的交数。如果代表弧 b 和 b' 处于最简位置，则 $|b \cap b'| = i_S([b]_S,\ [b']_S)$。

同样，简单闭曲线同伦类的交数和最简位置也有相应的定义。

定义 3.8 （双边形，[5, 第 1.2 节4]）。若存在一个圆盘 $D \subseteq S$，使得路径 b 和 b' 构成一个双边形，则称这两条路径构成双边形：

(1) D的内部不包含任何标记点；(2) ∂D中至多有一个标记点；(3) $D \cap (b \cup b') = \partial D$；(4) $\partial D \cap b$ 和 $\partial D \cap b'$ 非空；(5) $\partial D \cap b$ 和 $\partial D \cap b'$ 连通。

同样，我们也为简单闭曲线定义双边形。由于适当性，闭曲线自动满足(2) 中的条件。图3.2列举了一些双边形的例子和反例。

如果两条弧或两条简单闭曲线构成一个双边形，那么它们在 ∂D 中恰好相交两次。我们称这些交点为双边形的端点 。

显然，对于这个定义， S 不必源自紧曲面。特别地，我们也可以考虑树形曲面$\Sigma(L)$中的双边形。

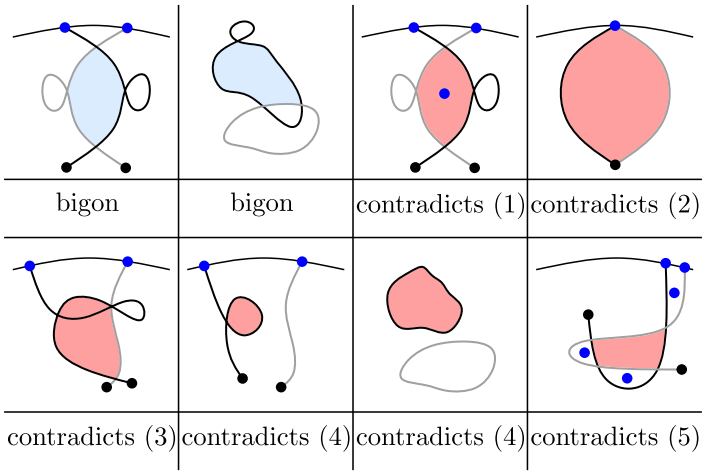


图 3.2. 双边形的例子和反例。

对于弧和简单闭曲线，以下结论众所周知：

命题 3.9 (双边形判据， [5, 命题 1。7])。曲面 S 中的两条横截弧或两条横截简单闭曲线处于最简位置，当且仅当它们不构成双边形。

树形曲面中的弧和简单闭曲线也满足类似的判据 $\Sigma(L)$ ，由（2）得出。

推论 3.10 (双边形判据 $\Sigma(L)$)。 树形曲面 $\Sigma(L)$ 中的两条横截弧或两条横截简单闭曲线处于最简位置，当且仅当它们不构成双边形。

由于我们要考虑 $\Sigma(L)$ 的紧子曲面，在证明中以及下文中，考虑带有标记点的曲面 Σ（而不是在 $\Gamma(\{r_1、...、r_L\})$ 中的穿孔点）通常更为方便。我们也将使用记号 $\Sigma(L)$ 表示带有这些标记点的曲面 Σ 。

推论的证明 3.10。 一方面，很明显，在 $\Sigma(L)$ 中构成双边形的两条弧不处于最简位置。

另一方面，如果两条弧 b 和 b' 不构成双边形，那么它们在任何同时包含这两条弧的紧致子曲面中都处于最简位置。假设˜ ˜这些弧在 $\Sigma(L)$中不处于最简位置，则存在同伦弧 b 和 b'

与 b 和 b' 相交次数较少。由于连接同伦是紧支撑的，它们的像只与有限多个 Γ 平移的 $F(L)$ 相交。这些 Γ 平移的 $\tilde{}$ $\tilde{}$ 并集构成一个紧子曲面 Σ'，使得 b 和 b' 包含在 Σ' 中。此外，在此曲面 Σ' 中，弧 b 和 b' 分别与 b 和 b' 同伦。这与 b 和 b' 在 Σ' 中处于最简位置这一事实矛盾。因此，b 和 b' 在 $\Sigma(L)$ 中处于最简位置。

简单闭曲线判据的证明完全相同。 □

3.3. Γ-弧和简单闭 Γ-曲线

类似地，我们希望讨论弧和简单闭曲线的轨形类似物，称为 Γ-弧 和 简单闭 Γ-曲线。本节的主要目标是为 Γ-弧和简单闭 Γ-曲线建立双边形判据。

为此，我们考虑树形曲面 $\Sigma(L)$，其在 $\Gamma(\{r_1, \dots r_L\})$ 中带有标记点，以及诱导的轨形 $\Sigma_\Gamma(L)$。

现在，我们赋予曲面 $\Sigma(L)$ 两组标记点：$P = \{p_1, \dots p_n\}$ 位于基本域 $F(L)$ 的内部，其中 $p_i \neq p_j$ 对应于 $i \neq j$；以及 $Q = \{q_1, \dots q_{n'}\}$ 位于 $\partial\Sigma(L) \cap F(L)$ 中，其中 $q_k \neq q_l$ 对应于 $k \neq l$，使得所有点 q_j 都位于 $\partial\Sigma(L) \cap F(L)$ 的同一连通分支中。

下文中，我们考虑连接 Γ 中的点与 P 中的点的路径 Q（见定义 2.4）。回顾引理 2.7 指出，每条 Γ-路径都等价于唯一一条连续的 Γ-路径。考虑没有自交的 Γ-路径，便得到弧的一个轨形类比：

定义 3.11 (Γ-弧)。设 (γ, b) 是一条连续的 Γ-路径。记 $\Gamma(b)$ 为 b 的所有 Γ-平移的并。若 Γ-路径 (γ, b) 是适当的，即 b 与 $\Gamma(P)$ 的交集恰好是其端点，且 $\partial\Sigma(L)$ 与 $\Gamma(P)$ 的交集也恰好是其端点。如果 b 将 I 嵌入树形曲面，且 b 的 Γ-平移两两不交，则称 (γ, b) 为一条 Γ-弧。给定两条 Γ-弧 (γ, b) 和 (γ', b')，若轨道 $\Gamma(b)$ 与 $\Gamma(b')$ 不相交，则称它们不相交。

如果唯一等价的连续Γ-路径 (γ, b) 是 Γ-弧，那么 Γ-路径 $\beta = (\gamma_0, b_1, \gamma_1, \dots, b_p, \gamma_p)$ 就是 Γ-弧。如果唯一等价的连续 Γ-路径互不相交，我们就称两个 Γ-弧 β 和 β' 互不相交。

图 3.3 展示了一个 Γ-弧的例子和一个反例。上排从左到右依次描绘了一个 $\mathbb{Z}_3$-弧、与其等价的唯一连续 $\mathbb{Z}_3$-弧及其 $\mathbb{Z}_3$-轨道。下排则给出了一个$\mathbb{Z}_3$-路径的对应图例，该路径不是 $\mathbb{Z}_3$-弧。

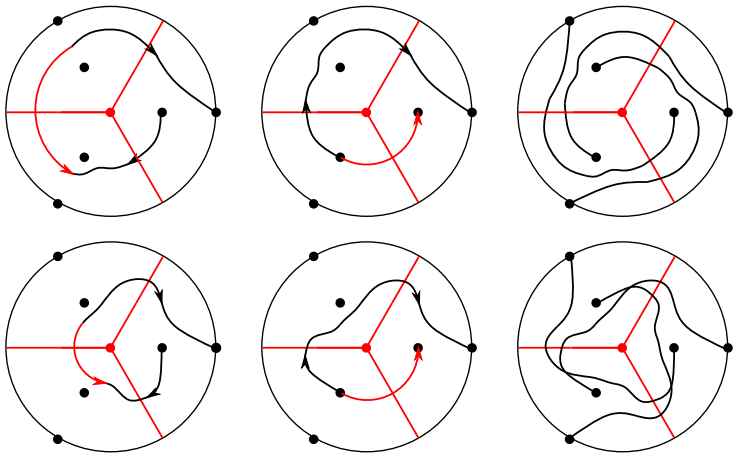


图 3.3. Γ-弧的一个示例（上排）和一个反例（下排）。

与弧的情形一样，我们通过相对于端点的适当 Γ-路径对 Γ-弧作同伦变形：

定义 3.12 （Γ弧的同伦与同痕，[2, 第三章 G，3.5]）。若两个Γ弧 β 和 β' 能够通过以下操作的有限序列从一个变为另一个，则称它们同伦：

（1）Γ路径的等价（见定义 2.5）；（2）初等同伦 β_t （见定义2.6），且 β_t 对所有 t 都是适当的。

如果在有限序列中的每个初等同伦里，对于每个 t， Γ-路径 β_t都是 Γ-弧，我们就称 β 和 β' 同痕。用 $[\beta]$ 表示 β的同伦类。对于连续的 Γ-弧 (γ, b)，我们用 $[\gamma, b]$表示其同伦类。

此外，我们引入简单闭曲线的一个轨形类比。

定义 3.13 （简单闭 Γ-曲线）。若简单闭曲线 $c : S^1 \to \Sigma(L)$ 的简单闭 Γ-曲线 的 Γ-平移彼此不相交或重合，则称其为简单闭曲线。若简单闭 Γ-曲线 c 与 $\Gamma(P)$ 和 $\partial\Sigma(L)$均不相交，则称其是适当的。给定两条简单闭 Γ-弧 c 和 c'，若轨道 $\Gamma(c)$ 和 $\Gamma(c')$ 不相交，则称它们不相交。

一个简单闭 Γ曲线的例子和反例如图 3.4 所示。上排从左到右依次展示了一条简单闭$\mathbb{Z}_3$曲线及其 $\mathbb{Z}_3$轨道。下排则展示了不属于简单闭 $\mathbb{Z}_3$曲线的一条简单闭曲线及其对应情况。

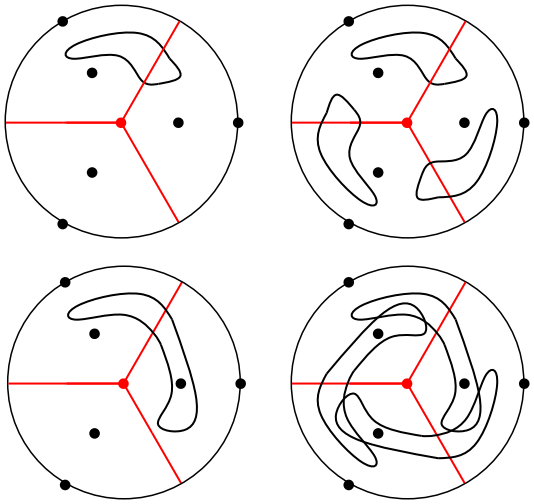


图 3.4. 简单闭 Γ曲线的一个例子（上排）和一个反例（下排）。

定义 3.14 （简单闭 Γ曲线的同伦与同痕）。 如果两条简单闭 Γ曲线作为$\Sigma(L)$中的简单闭曲线同伦，则称它们同伦。如果两条简单闭曲线通过同痕 h_t 同痕，其中 h_t 在每个时刻 $t \in I$ 都是一条简单闭 Γ 曲线，则称它们同痕。

受弧和简单闭曲线的同伦类的交数启发，我们为 Γ-弧和简单闭 Γ-曲线的同伦类定义交数和最简位置。

定义 3.15（Γ-弧和简单闭 Γ-曲线的最简位置）。设 β和 β' 是 $\Sigma_\Gamma(L)$中的 Γ-弧。同伦类 $[\beta]$ 和 $[\beta']$ 具有交数

$$i([\beta],[\beta']) = \min\{|\tilde{\beta} \cap \Gamma(\tilde{\beta}')| \mid \tilde{\beta} \in [\beta] \text{ and } \tilde{\beta}' \in [\beta'] \ \Gamma\text{-arcs}\}.$$

在上文中，我们将一个 Γ-弧 $(\gamma_0, b_1, \gamma_1, ..., b_p, \gamma_p)$ 与由诱导连续函数 $\bigcup_{i=1}^{p}[t_{i-1}, t_i] \to \Sigma(L)$, $s \mapsto b_i(s)$（其中 $s \in [t_{i-1}, t_i]$）的像等同起来。

若 $i([\beta],[\beta']) = 0$，对于 $[\beta]$ 和 $[\beta']$，存在代表元 β 和 β'，它们是 Γ-弧，且 β 与 β'不相交。若代表 Γ-弧 β 和 β' 处于最简位置，则 $|\beta \cap \Gamma(\beta')| = i([\beta],[\beta'])$。

同样，我们定义简单闭Γ-曲线同伦类的交数，以及简单闭 Γ-曲线的最简位置。

对于 Γ-弧，我们进一步观察到：

注记 3.16。由引理 2.7，每个 Γ-弧都等价于唯一的连续 Γ-弧。由于等价关系保持-弧的 Γ-轨道，交数满足：

$$i([\beta],[\beta']) = \min\{|b \cap \Gamma(b')| \mid (\gamma, b) \in [\beta], (\gamma', b') \in [\beta'] \text{ continuous } \Gamma\text{-arcs}\}$$

下面给出一个充分条件，使 Γ-弧与简单闭 Γ-曲线处于最简位置：

引理 3.17. 设 (γ, b) 和 (γ', b') 是 $\Sigma_\Gamma(L)$中的连续 Γ-弧。若 b 与 b'的每个 Γ-平移都处于最简位置，则 (γ, b) 和 (γ', b') 这两条 Γ-弧处于最简位置。

证明. 若 b 与 b'的每个 Γ-平移都处于最简位置，则有

$$i_{\Sigma(L)}([b]_{\Sigma(L)}, [\tilde{\gamma}'(b')]_{\Sigma(L)}) = |b \cap \tilde{\gamma}'(b')| \tag{5}$$

对每个 $\tilde{\gamma}' \in \Gamma$均成立。此外，回想一下，$[\gamma, b]$ 与 $[\gamma', b']$ 的交数为

$$i([\gamma, b], [\gamma', b']) = \min\{|\tilde{b} \cap \Gamma(\tilde{b}')| \mid (\gamma, \tilde{b}) \in [\gamma, b], (\gamma', \tilde{b}') \in [\gamma', b'] \ \Gamma\text{-arcs}\}.$$

对于 $(\gamma, b) \in [\gamma, b]$ 和 $(\gamma', b') \in [\gamma', b']$，我们观察到：

$$\begin{aligned} |\tilde{b} \cap \Gamma(\tilde{b}')| &= \sum_{\tilde{\gamma}' \in \Gamma} |\tilde{b} \cap \tilde{\gamma}'(\tilde{b}')| \geqslant \sum_{\tilde{\gamma}' \in \Gamma} i_{\Sigma(L)}([b]_{\Sigma(L)}, [\tilde{\gamma}'(b')]_{\Sigma(L)}) \\ &\overset{(5)}{=} \sum_{\tilde{\gamma}' \in \Gamma} |b \cap \tilde{\gamma}'(b')| = |b \cap \Gamma(b')|. \end{aligned} \tag{6}$$

这里，第一个等式源于以下事实：(γ', b') 是一个 Γ-弧。$i_{\Sigma(L)}$ 的定义给出以下 $\geqslant$-估计，接着我们应用（5），最后一个等式与第一个等式同理得出。最后，上述估计意味着

$$i([\gamma, b], [\gamma', b']) \geqslant |b \cap \Gamma(b')|.$$

另一方面，交数的定义给出了

$$i([\gamma, b], [\gamma', b']) \leqslant |b \cap \Gamma(b')|.$$

因此，$i([\gamma, b], [\gamma', b']) = |b \cap \Gamma(b')|$，即 (γ, b) 和 (γ', b') 处于最简位置。 □

为了刻画处于最简位置的 Γ-弧和简单闭合 Γ-曲线，我们引入双边形的轨形类似物：

定义 3.18（Γ-路径和简单闭合 Γ-曲线的伪双边形和双边形）。如果存在 Γ-平移 $\tilde{\gamma}(b)$ 和 $\tilde{\gamma}'(b')$，使得路径 $\tilde{\gamma}(b)$ 和 $\tilde{\gamma}'(b')$构成一个双边形（按照定义 3.8 的含义），则称两个连续的 Γ-路径 (γ, b) 和 (γ', b') 构成一个伪双边形。如果没有其他 Γ-平移 b 或 b' 与由 $\tilde{\gamma}(b)$ 和 $\tilde{\gamma}'(b')$张成的双边形相交，则称 (γ, b) 和 (γ', b') 构成一个双边形。图 3.5 展示了双边形和伪双边形的示例。

同样，我们定义简单闭合 Γ-曲线的伪双边形和双边形。

若两条 Γ-路径 β 和 β' 所对应的唯一等价连续 Γ-路径 $(\gamma、 b)$ 和 $(\gamma'、 b')$ 分别构成伪双边形或双边形，则称这两条路径构成一个伪双边形 或一个双边形 。

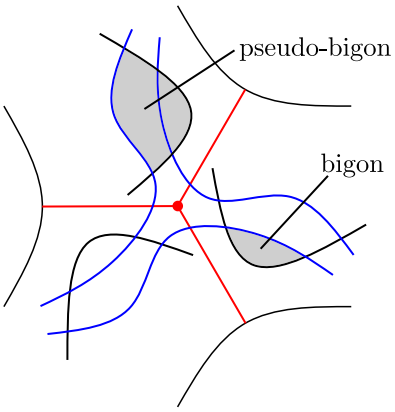


图 3.5. 双边形和伪双边形的示例。

对于 Γ-弧和简单闭合 Γ-曲线，双边形和伪双边形的关系如下：

引理 3.19. 设 (γ, b) 和 (γ', b') 是围成一个伪双边形的 Γ-弧，且其 Γ-平移所围成的双边形不包含锥点。则 (γ, b)和 (γ', b') 围成一个双边形。

简单闭合 Γ-曲线也有同样的结论。

证明。考虑两个 Γ-平移，设为 b 和 b'，它们围成一个不含锥点的双边形。接下来，我们可以考虑所有与该伪双边形相交的 Γ-平移的 b 和 b'。由于 $(\gamma、 b)$ 是一条 Γ-弧，其 Γ-平移仅在 b' 处与双边形的边界相交。这意味着，每个相交的 Γ-平移 $\tilde{\gamma}(b)$ 都与 b' 围成一个双边形。由于双边形内部没有锥点，有界圆盘具有曲面的结构。因此，我们可以选取一个不与任何其他 Γ-平移的 b 相交的双边形。对 $(\gamma'、 b')$ 应用同样的思路，我们得到一个不与任何其他 Γ-平移相交的最内层双边形（见图 3.6）。这表明 $(\gamma、 b)$ 和 $(\gamma'、 b')$ 围成一个双边形。□

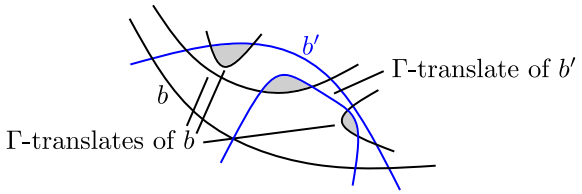


图 3.6. 不含锥点的伪双边形，最内层双边形以灰色阴影标出。

根据例 2.3，树形曲面 $\Sigma(L)$ 嵌入复平面。形式上，这个映射产生一个图册，为 $\Sigma(L)$ 赋予可微结构。基于这一可微结构，我们定义：

定义 3.20 （ Γ-弧与简单闭合 Γ-曲线的横截性）. 设 (γ, b)和 (γ', b') 是两条在一点 x 相交的连续 Γ-弧，即 $\tilde{\gamma}(b)$ 和 $\tilde{\gamma}'(b')$在 x处相交。若弧 $\tilde{\gamma}(b)$ 和 $\tilde{\gamma}'(b')$ 作为 $\Sigma(L)$ 中的弧横截相交，则称该交点是横截的 。若每一对 Γ- 平移 $\tilde{\gamma}(b)$ 和 $\tilde{\gamma}'(b')$ 的交点都是横截的，则称 (γ, b) 和 (γ', b') 横截。

同样地，我们定义简单闭 Γ-曲线的横截性。

如果唯一的等价连续Γ-弧彼此横截，则称两个 Γ-弧 β 和 β' 为横截的。

现在我们将命题 3.9 中的双边形判据推广为适用于Γ-弧和简单闭合 Γ-曲线的判据。由于简单闭合 Γ-曲线的证明较为容易，我们先从这里开始。我们要证明：

命题 3.21 （简单闭 Γ-曲线的双边形判据）。 设 c, c' 是 $\Sigma_\Gamma(L)$ 中两条横截相交的简单闭 Γ-曲线。当且仅当它们不构成双边形时，这些简单闭 Γ-曲线处于最简位置。

我们先从一个对伪双边形有重要影响的观察开始。

引理 3.22. 如果曲面 $\Sigma_\Gamma(L)$ 中一条简单闭 Γ-曲线的两个 Γ-平移围成相交的圆盘，则这两个 Γ-平移重合。

证明。 设 c 是一条简单闭 Γ-曲线，并设 $\gamma(c)$ ，其中 $\gamma \neq 1$ 是一个 Γ-平移，使得 c 和 $\gamma(c)$ 围成相交的圆盘。根据 Jordan 曲线定理 [4,第 XVII 章，定理 5。4], ，曲线 c 和 $\gamma(c)$ 都将曲面Σ 分为两个连通分支，即内部区域和外部区域。内部区域是一个有界圆盘，而外部区域无界。特别地， γ 将圆盘 D_c（由 c围成）映射到圆盘 $D_{\gamma(c)}$（由 $\gamma(c)$围成）。

根据定义 3.13， c 和 $\gamma(c)$ 要么重合，要么交集为空。在第一种情况下即可得证。第二种情况意味着 $\gamma(c)$ 位于由 c 界定的圆盘内，或者同样地， c 位于由 $\gamma(c)$界定的圆盘内。我们证明这是不可能的，因为 Γ 相对于（1）中定义的度量是等距作用的。

假设 $\gamma(c)$ 位于由 c界定的圆盘内。这意味着有界圆盘 D_c 和 $D_{\gamma(c)}$ 的直径满足

$$\sup_{x,y\in D_c} d(x,y) > \sup_{x,y\in D_{\gamma(c)}} d(x,y).$$

由于 D_c 和 $D_{\gamma(c)}$ 是紧致的，且该度量是连续的，两个上确界都是最大值。因此，存在 x_0， $y_0 \in D_c$ 满足 $d(x_0, y_0) = \sup_{x,\ y\in D_c} d(x,\ y)$。利用最大值之间的关系以及 $\gamma(D_c) = D_{\gamma(c)}$，这尤其意味着$d(x_0, y_0) \neq d(\gamma(x_0), \gamma(y_0))$。这与 Γ 在 $\Sigma(L)$上等距作用的事实矛盾。因此， $\gamma(c)$ 和 c 重合，引理得证。□

推论 3.23. 如果两个简单闭合的 Γ-曲线 c 和 c' 在 $\Sigma_\Gamma(L)$ 中围成一个伪双边形，那么它就是一个双边形。

证明. 假设 c 和 c' 围成一个伪双边形，且存在一个 Γ-平移，记作 $\gamma(c)$，与该伪双边形相交。那么 c 和 $\gamma(c)$围成的圆盘相交。由引理 3.22，这意味着 $c = \gamma(c)$。因此，没有任何Γ-平移与该伪双边形相交，即它是一个双边形。 □

此外，引理3.22 使我们能够推导出引理 3.17 对于简单闭 Γ-曲线的类似结论。

引理 3.24。 设 c 和 c' 是 $\Sigma_\Gamma(L)$中的简单闭 Γ-曲线。若 c 与 c'的每个 Γ-平移都处于最简位置，则简单闭 Γ-曲线 c 和 c' 处于最简位置。

证明。 引理 3.17的证明基于计数论证。要将相同的论证应用于简单闭 Γ-曲线，我们必须考虑到简单闭曲线可能具有非平凡稳定子。我们通过区分两种情况来处理这一点。

首先，设 c 不包含任何标记点或删点。由于每个 Γ-平移 $\gamma'(c')$均与 c处于最简位置，因此推论 3.10 表明 $\gamma'(c')$ 和 c 不构成双边形。因此，没有任何 Γ-平移 $\gamma'(c')$ 与 c相交。因此，

$$0 \leqslant i([c],[c']) \leqslant |c \cap \Gamma(c')| = 0$$

这意味着 $i([c],\ [c'])=|c\cap\Gamma(c')|=0$。

如果 c 围住一组标记点和穿孔点 $S \subseteq \Gamma(\{p_1,\ \ldots\ldots,\ p_n,\ r_1,\ \ldots\ldots,\ r_L\})$，我们观察到每条曲线 $\tilde{c} \in [c]$ 围住相同的一组标记点 S。我们证明：

断言。 元素 $\gamma \in \Gamma$ 保持简单闭曲线 $\tilde{c} \in [c]$ 不变，当且仅当 γ 保持集合 S 不变。

如果 $\gamma(\tilde{c})=\tilde{c}$，元素 γ 保留有界圆盘 $D_{\tilde{c}}$。由于标记点和穿孔点的 Γ-不变性，这意味着 $\gamma(S)=S$。

对于逆向蕴含，令 $\gamma \in \Gamma$ 使得 $\gamma(S)=S$。我们注意到：

$$S=\gamma(S)\subseteq\gamma(D_{\tilde{c}})=D_{\gamma(\tilde{c})},$$

即 $\gamma(\tilde{c})$ 界定 S。根据引理 3.22，这意味着 $\gamma(\tilde{c})=\tilde{c}$。这证明了该断言。

现在令 $\Gamma_c \subseteq \Gamma$ 为满足 $\Gamma_c(c)=\Gamma(c)$的一个极小子集。上述断言表明，$\Gamma_c \subseteq \Gamma$ 也是满足 $\Gamma_c(\tilde{c})=\Gamma(\tilde{c})$ 的一个极小集合，对每条简单闭 Γ曲线 $\tilde{c}\in[c]$均成立。现在，将方程（3.17 中的指标集 Γ 替换为 Γ_c，引理的证明便与引理6中的证明完全相同。□

命题 3.21 的证明。 我们使用逆否命题，即证明：c 和 c' 不处于最简位置，当且仅当它们构成一个双边形。

如果 c，c' 构成一个双边形（定义 3.18 的意义下），我们可以沿着该双边形进行同伦变形，从而减少交点的数量。因此，c和 c' 不处于最简位置。

另一方面，假设简单闭 Γ-曲线 c 和 c' 不处于最简位置。根据引理 3.24，这一假设意味着存在一个 Γ-平移 $\tilde{\gamma}'(c')$，使得 c 和 $\tilde{\gamma}'(c')$ 不处于最简位置。根据推论 3.10，我们得到 c 和 $\tilde{\gamma}'(c')$ 构成一个双边形，即简单闭 Γ-曲线 c 和 c'围成一个伪双边形。因此，根据推论 3.23，c 和 c' 构成一个双边形。这就证明了：如果 c 和 c' 不处于最简位置，那么它们构成一个双边形。简单闭 Γ-曲线的双边形判据随之得证。□

对于 Γ-弧，类比命题3.21 我们要证明：

命题 3.25 (Γ-弧的双边形判据)。设 β 和 β' 是 $\Sigma_\Gamma(L)$ 中两条横截的 Γ-弧。若且唯若它们不构成双边形，这两条 Γ-弧处于最简位置。

对于 Γ-弧的 $\Sigma_\Gamma(L)$ 双边形判据的证明同样基于推论3.10。然而，与简单闭 Γ-曲线的情形相比，证明更加复杂，因为我们没有推论3.23的直接类似结果。相反，我们将证明形成包含一个锥点的伪双边形的 Γ-路径所满足的一个必要条件：

引理 3.26. 设 (γ, b) 和 (γ', b') 是连续的 Γ-路径。若 (γ, b) 和 (γ', b')不围成任何双边形，却围成一个伪双边形，且有界圆盘 $D \subseteq \Sigma(L)$包含一个锥点，那么这些 Γ-路径中至少有一条不是 Γ-弧。

在证明中，我们考虑边界中不包含于 $\partial F(L)$ 的部分， $\partial\Sigma(L)$这些部分的例子是图 3.5中的红色弧段。这些部分是Γ-弧的平移像，我们将其记为 s_ν，其中 $1 \leqslant \nu \leqslant N$。弧 s_ν 连接锥点 c_ν 与边界 $\partial\Sigma(L)$。令 s_ν 以如下方式参数化： I 从锥点 c_ν 出发，并终止于 $\partial\Sigma(L)$。

引理 3.26 的证明。假设 (γ, b) 和 (γ', b') 是 Γ-弧，它们不围成任何双边形，而是围成一个包含锥点 $\rho(c_\mu)$ 的伪双边形，其中 $\rho \in \Gamma$。此外，对于 $1 \leqslant i \leqslant m_\mu$，令 $\gamma_i(s_\mu)$ 为连接锥点 $\rho(c_\mu)$ 与边界的 Γ-平移像。

为简化记号，假设 Γ-平移像 b 和 b' 围成该伪双边形。此外，例如通过分段线性逼近，我们可以假设 b 和 b' 与 $1 \leqslant \nu \leqslant N$所对应的 Γ-平移像仅有有限个交点。利用 (γ, b) 是一条 Γ-弧这一点，我们可以通过一个 Γ-等变的 Hatcher 流，将弧 $\Gamma(s_\mu)$从 b 处推开。关于经典 Hatcher 流的更多细节，见 [9]；其 Γ-等变版本的示例见图 3.7。由此可假设 b 与 $\Gamma(s_\mu)$不相交，即 b 包含于 $F(L)$。特别地，(γ, b) 是一条 Γ-弧。

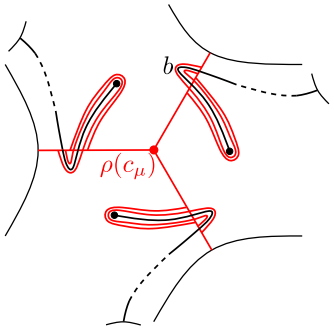


图 3.7. Γ-等变 Hatcher 流。

利用 b 和 b' 围成一个圆盘 D，其中包含 $\rho(c_\mu)$，可知弧 b' 与每个 Γ-平移像 $\gamma_i(s_\mu)$的交点代数交数 $i_\pm(b', \gamma_i(s_\mu))$ 对每个 $1 \leqslant i \leqslant m_\mu$ 都具有相同的符号（见图 3.8）。不失一般性，假设代数交数为负，即 b' 逆时针环绕 $\gamma_i(s_\mu)$。

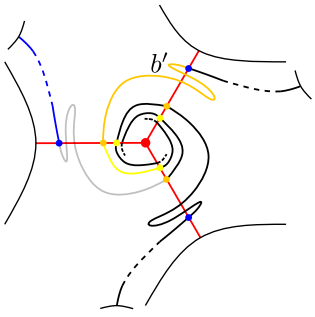


图 3.8。 一个 Γ-弧 (γ', b') 逆时针环绕一个锥点。

令 T_0 为满足 $b'(T_0) \in b \cap \partial D$的最大时刻，也就是说， $b'(T_0)$ 是伪双边形的一个端点；并考虑由所有满足条件$t_j \in$ [0的时刻组成的严格递减序列 $(t_j)_{j\in N}$， T_0) 其中 $b'(t_j) \in \bigcup_{i=1}^{m_\mu} \gamma_i(s_\mu)$，且对于某个 $J \in \mathbb{N}$，有 $N = \{0, \ldots\ldots, J\}$。 $(t_j)_{j\in N}$ 的定义还给出一个时刻 $t_j^{(\mu)}$ 和一个 Γ-平移像 $\gamma_{i_j}(s_\mu)$，使得对每个 $j \in N$都有 $b'(t_j) = \gamma_{i_j}(s_\mu)(t_j^{(\mu)})$。

现在我们可以选取以下元素子序列 t_{j_k}：令 t_{j_1} 为 b' 与 $\gamma_{j_k}(s_\mu)$ 逆时针相交的最大时刻。此外，令 t_{j_k} 为最大时刻 $t_{j_k} < t_{j_{k-1}}$，使得

- b' 在时刻 t_{j_k} 以 $\rho_\mu \in \Gamma$与 $\gamma_{j_k}(s_\mu) = \rho_\mu \gamma_{j_{k-1}}(s_\mu)$ 发生逆时针相交，并绕 $\rho(c_\mu)$ 旋转角度为 $\frac{2\pi}{m_\mu}$ 的逆时针旋转。• 存在一个 $\varepsilon > 0$，满足 $[t_{j_{k-1}} + \varepsilon,\ t_{j_k} - \varepsilon]$ 包含所有来自 $[t_{j_{k-1}}$的 $t_j,\ t_{j_k}]$以及 $i_\pm(b'|_{[t_{j_{k-1}}+\varepsilon,\ t_{j_k}-\varepsilon]},\ \gamma_i(s_\mu)) = 0$ 对所有 $1 \leqslant i \leqslant m_\mu$均成立。

这定义了 $(t_{j_k})_{k\in N'}$ 的一个子序列。由于 b 和 b' 围成一个包含 $\rho(c_\mu)$ 的双边形，因此该子序列至少有 m_μ 项。

断言。 序列 $(t_{j_k}^{(\mu)})_{k\in N'}$ 严格递减。

我们对 k 采用归纳法证明该断言。其思想是，Γ-平移后的 b' 彼此不相交，这迫使这些 Γ-平移后的对象像蜗牛壳一样缠绕在 $\rho(c_\mu)$周围（见图 3.8）。

如果对于某个 $k,\ k' \in N',\ k \neq k',$ Γ-平移后的 b'相交。这与 $(\gamma',\ b')$ 是一条 Γ-弧的假设矛盾。

对于 $k = 1,$ Γ-平移后的 $\rho_\mu(b')|_{[t_{j_1},\ 1]}$ （即图 3.8中的蓝色弧）连接到 $\rho_\mu(b')(t_{j_1}) = \gamma_{i_{j_2}}(s_\mu)(t_{j_1}^{(\mu)})$ 边界。因此， $\rho_\mu(b')$ 迫使弧 b' （ b' 的相关部分在图 3.8中以橙色绘出）与 $\gamma_{i_{j_2}}(s_\mu)|_{[t_{j_1}^{(\mu)},\ 1]}$ 在时刻 t_{j_2} 相交，使得 $t_{j_1}^{(\mu)} > t_{j_2}^{(\mu)}$ 。在图 3.8 中，这一点体现为橙色交点比蓝色点更靠近锥点。

现在我们可以假设 $(t_{j_k}^{(\mu)})_{k\in N'}$ 在到达固定的 l之前严格递减。回想一下，$\gamma_{i_{j_{l+1}}}(s_\mu)(t_{j_l})$ 通过 Γ-平移$\rho_\mu(b')|_{[t_{j_l}$连接到边界$,\ 1]}$。因此，$\rho_\mu(b')|_{[t_{j_l},\ 1]}$ 迫使$b'|_{[0$与$t_{j_l}]}$ 下一个 Γ-平移 $\gamma_{i_{j_{l+1}}}(s_\mu)$ 在一点$\gamma_{i_{j_{l+1}}}(s_\mu)(t_{j_{k+1}}^{(\mu)})$ 相交，且 $t_{j_l}^{(\mu)} > t_{j_{l+1}}^{(\mu)}$。对于 $l = 2,$ 图3.8也直观地展示了这一点：灰色部分迫使黄色弧线与下一个 Γ-平移的s_μ 相交，且交点比灰色部分更靠近锥点。因此，黄色交点比橙色交点更靠近锥点。对 k作归纳法，即可推出该断言。

现在考虑由以下内容围成的伪双边形 b 和 b'，其中包含锥点 $\rho(c_\mu)$。图 3.9中灰色阴影部分给出了一个例子。此外，考虑 Γ平移 $\rho_\mu^{-1}(b')$。对于此 Γ平移，存在一个时刻 t_{j_k} 使得$\rho_\mu^{-1}(b')(t_{j_k}) = \rho_\mu^{-1}\gamma_{i_{j_k}}(s_\mu)(t_{j_k}^{(\mu)})$，即图 3.9中的蓝色点。由于序列$(t_{j_k}^{(\mu)})_{k\in N'}$严格递减，因此 $\rho_\mu^{-1}\gamma_{i_{j_k}}(s_\mu) = \gamma_{i_{j_{k-1}}}(s_\mu)$ 上的这个交点比点 $b'(t_{j_{k-1}}) = \gamma_{i_{j_{k-1}}}(s_\mu)(t_{j_{k-1}}^{(\mu)})$更靠近锥点，即图 3.9中的黄色点。这意味着蓝色点 $\rho_\mu^{-1}\gamma_{i_{j_k}}(s_\mu)(t_{j_k}^{(\mu)})$ 位于伪双边形内部。

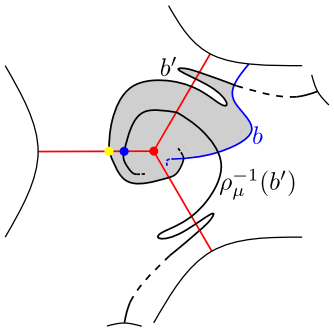


图3.9. 包含一个锥点的伪双边形。

现在我们考虑这一部分 $\rho_\mu^{-1}(b')([0,\ t_{j_k}])$。

如果片段 $\rho_\mu^{-1}(b')([0,\ t_{j_k}])$ 完全包含在伪双边形所围成的圆盘内，那么该圆盘尤其包含 $\rho_\mu^{-1}(b')$ 的起点。由于这个点是标记点，这与伪双边形的定义矛盾。

如果片段 $\rho_\mu^{-1}(b')([0,\ t_{j_k}])$ 与弧 b'相交，那么 Γ 对 b'的平移彼此不相交这一条件不成立。这与 $(\gamma',\ b')$ 是一个 Γ-弧的假设矛盾。

如果片段 $\rho_\mu^{-1}(b')([0,\ t_{j_k}])$ 与弧 b相交，那么我们得到，Γ 对 $\rho_\mu^{-1}(b')$ 的平移与弧 b 相交两次——分别发生在它进入和离开伪双边形时。由于伪双边形围成一个圆盘，这意味着 $\rho_\mu^{-1}(b')$ 和 b 围成一个双边形。

如果这个双边形不包含锥点，引理 3.19 便推出 $(\gamma、\ b)$ 和$(\gamma'、\ b')$ 构成一个双边形。这与我们的假设矛盾。

如果由 $\rho_\mu^{-1}(b')$ 和 b 构成的双边形包含一个锥点（见图 3.10中深灰色阴影部分），我们便会得到另一个由 $(\gamma、\ b)$ 和 $(\gamma'、\ b')$ 围成的伪双边形，其中包含一个锥点。这个围住锥点的伪双边形的存在，要求 $\rho_\mu^{-1}(b')$ 与 $\langle\rho_\mu\rangle(s_\mu)$ 之间还存在一个交点，该交点计入序列 $(t_{j_k})_{k\in N'}$。在图 3.10 中，这个额外交点以黄色点标出。

给定新的伪双边形后，我们可以迭代地应用前述某种情形，或构造新的伪双边形。如上所述，每个新的伪双边形都要求在序列 $(t_{j_k})_{k\in N'}$ 中增加一项。由于序列 $(t_{j_k})_{k\in N'}$ 的指标集 N' 是有限的，经过有限步后便无法再得到新的伪双边形。因此，我们最终会遇到前述某种情形，并由此得到矛盾。故此，我们关于 $(\gamma,\ b)$ 和 $(\gamma',\ b')$ 都是 Γ-弧的假设是错误的，引理得证。□

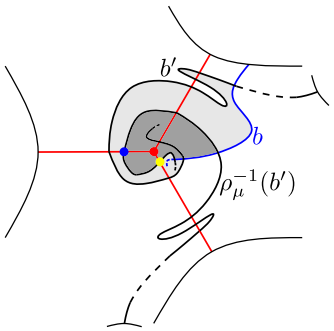


图 3.10. 另一个包含锥点的伪双边形。

命题 3.25 的证明。 根据注记 3.16， Γ-弧 β 与 β' 处于最简位置，当且仅当与之等价的连续弧 $(\gamma,\ b)$ 与 $(\gamma',\ b')$ 处于最简位置。因此，只需证明连续 Γ-弧的断言。我们使用逆否命题，即证明： $(\gamma,\ b)$ 与 $(\gamma',\ b')$ 不处于最简位置，当且仅当它们构成一个双边形。

如果 Γ-弧 (γ, b) 和 (γ', b') 构成一个双边形，那么通过双边形进行同伦变形会减少交点数量。

对于反向蕴含，首先，设 (γ, b) 和 (γ', b') 是未处于最简位置的 Γ-弧。其次，假设 (γ, b) 和 (γ', b') 不构成任何双边形。根据第一个假设，引理 3.17 表明存在一个 Γ-平移 $\tilde{\gamma}'(b')$ ，使得 b 和 $\tilde{\gamma}'(b')$ 未处于最简位置。由推论 3.10 可知，这意味着 b 和 $\tilde{\gamma}'(b')$ 作为 $\Sigma(L)$中的弧构成一个双边形。根据定义 3.18，这意味着 (γ, b) 和 (γ', b') 构成一个伪双边形。由引理 3.26 及第二个假设可知，这个伪双边形不包含锥点。因此，引理 3.19 表明 (γ, b) 和 (γ', b') 也围成一个双边形，这与我们的假设矛盾。因此，任意两个未处于最简位置的 Γ-弧都构成一个双边形。□

对于弧和简单闭曲线，我们希望运用双边形判据来说明，任意两个 Γ-弧之间或任意两条简单闭 Γ-曲线之间的同伦都可以通过环境同痕实现。因此，我们证明：

引理 3.27。 设 C 是一个紧集，群 Γ 通过在第一个因子上相乘作用于 $\Gamma \times C$。此外，设 $\lambda\colon\ \Gamma \times C \to \Sigma(L)$ 是一个连续的 Γ-等变映射。如果对于所有 γ、$\gamma' \in \Gamma$、$\gamma \neq \gamma'$， $\lambda(\{\gamma\} \times C)$ 和 $\lambda(\{\gamma'\} \times C)$ 或者不相交或者相等，那么存在 $\varepsilon > 0$，使得 $\lambda(\{\gamma\} \times C)$ 的 ε-邻域对于 $\gamma \in \Gamma$ 两两或者不相交或者相等。

特别地，给定一个由 Γ-弧 (γ, b) 和 (γ', b') 围成的双边形，该引理将使我们能够构造由 Γ 对 b 和 b' 的平移所围成的圆盘的不相交的 ε-邻域。为此，我们选择引理 3.27 中的紧集 C 为一个圆盘，并赋予 Γ 离散拓扑。此外，我们考虑一个映射 λ，对于每个 $\gamma \in \Gamma$，该映射将圆盘 $\{\gamma\} \times C$ 嵌入 $\Sigma(L)$，使得 λ 的像中的每个圆盘都由某些 Γ 对 b 和 b' 的平移围成。

为了得到互不相交的 ε-邻域，我们测量 Γ对 $\lambda(\{\gamma\}\times C)$的平移之间的距离。利用将 Σ 铺砌为 Γ 对 F的平移所得的铺砌，我们通过考察有限多个 Γ平移来确定这一距离，并由此推出该距离为正。

引理 3.27 的证明。 C 的紧致性意味着，对于每个 $\gamma \in \Gamma$， $\lambda(\{\gamma\}\times C)$ 都是紧致的。因此，每个 $\lambda(\{\gamma\}\times C)$ 只与基本域 $F(L)$的有限多个 Γ平移相交。令 $\{\gamma_1, ..., \gamma_p\}$ 为 Γ 的子集，其中 $\lambda(\{1\} \times C)$与 $\gamma_i(F(L))$ 或一个相邻的 Γ平移相交。此外， $F(L)$的紧致性意味着，只有有限多个 $\gamma \in \Gamma$使得 $\lambda(\{\gamma\} \times C)$ 与 $\gamma_i(F(L))$ 相交。对于每个 $1 \leqslant i \leqslant p$，令 $\gamma_1^{(i)}, ..., \gamma_q^{(i)}$为 Γ中的元素，使得 $\lambda(\{\gamma_j^{(i)}\} \times C)$ 与$\gamma_i(F(L))$相交。于是，利用 λ的 Γ-等变性，我们得到：

$$\begin{aligned}
&\inf\{d(\lambda(\{\gamma\} \times C), \lambda(\{\gamma'\} \times C)) \mid \gamma, \gamma' \in \Gamma, \gamma \neq \gamma'\} \\
&= \inf\{d(\lambda(\{\gamma\} \times C), \lambda(\{1\} \times C)) \mid \gamma \in \Gamma, \gamma \neq 1\} \\
&= \min\{d(\lambda(\{\gamma_j^{(i)}\} \times C), \lambda(\{1\} \times C)) \mid 1 \leqslant i \leqslant p, 1 \leqslant j \leqslant q \text{ with } \gamma_j^{(i)} \neq 1\}.
\end{aligned}$$

最小值是不相交紧集之间的距离。因此，它具有正值，我们可以定义

$$\varepsilon := \frac{1}{3} \min\{d(\lambda(\{\gamma_j^{(i)}\} \times C), \lambda(\{1\} \times C)) \mid 1 \leqslant i \leqslant p, 1 \leqslant j \leqslant q \text{ with } \gamma_j^{(i)} \neq 1\}.$$

□

命题 3.28 (同伦蕴含环境同痕)。 设 β 和 β' 是 $\Sigma_\Gamma(L)$ 中的同伦 Γ-弧，且连续 Γ- 弧 $(\gamma、b)$ 与 $(\gamma'、b')$ 等价。存在一个环境同痕

$$I \to \mathrm{Homeo}_n^{orb}(\Sigma_\Gamma(L), \partial\Sigma(L))$$

对所有 $s \in I$，均有 $H_0 = \mathrm{id}^{\Sigma(L)}$, $H_1(b(s)) = b'(s)$ 。若 c 和 c' 是同伦的简单闭 Γ-曲线，结论也成立。

证明。设 β 和 β' 为上文所述的 Γ-弧。根据引理3.25， β 和 β' 要么处于最简位置，要么构成一个双边形。

若 β 和 β' 构成一个双边形，则可找到一个由 $\tilde{\gamma}(b)$ 和 $\tilde{\gamma}'(b')$ 围成的圆盘，使得它们的 Γ-平移互不相交。应用引理 3.27 可知，该有界圆盘有一个紧致的 ε-邻域，其 Γ-轨道是其 Γ-平移的互不相交并集。因此，亚历山大技巧（见例 3.4）可应用于该 ε-邻域的每个 Γ-平移。由此可得到一个环境同痕，将 $\mathrm{id}^{\Sigma(L)}$ 连接到一个同胚；该同胚固定 Γ-平移的 ε-邻域以外的每一点，并消去 $\tilde{\gamma}(b)$ 和 $\tilde{\gamma}'(b')$ 的选定双边形及其 Γ-平移。这样便减少了交点数。重复这一过程，我们可以不断减少 β 和 β' 的交点数，直到它们处于最简位置。

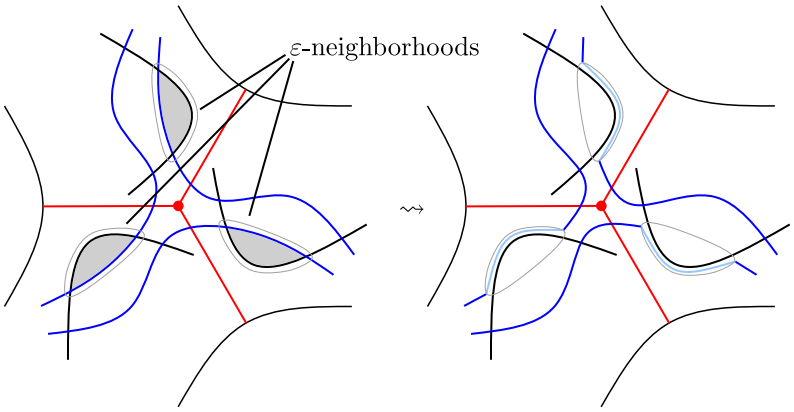


图 3.11。移除灰色阴影双边形。

如果 β 和 β' 处于最简位置，那么它们的连续代表元 $(\gamma、b)$ 和 $(\gamma'、b')$ 也处于最简位置。由于 β 和 β' 同伦，我们有 $\gamma = \gamma'$ 和 b 以及 b' 同伦。因此， b 和 b' 恰好共有它们的端点，并围成一个圆盘，使得没有任何 Γ- 平移的 b 或 b' 与之相交。根据引理 3.27，我们再次找到一个紧致的 ε-邻域，其 Γ-平移彼此不相交。对每个 Γ-平移应用亚历山大技巧后，我们便可构造一个环境同痕，将 $\mathrm{id}^{\Sigma(L)}$ 连至一个把 b 映射到 b' 的同胚。

每当由 $\tilde{\gamma}(b)$ 和 $\tilde{\gamma}'(b')$ 围成的圆盘包含一个或两个端点时，我们都可以扰动上文选取的 ε-邻域，使其边界包含该端点。这样，我们可以假定所构造的环境同痕固定了 b 和 b' 的端点。

此外，同样的证明也适用于同伦的简单闭合 Γ-曲线。 □

推论 3.29。 如果 $\Sigma_\Gamma(L)$ 中的两条 Γ弧或两条简单闭 Γ曲线同伦，则它们同痕。

3.4. 映射类群 $\mathrm{Map}^{orb}(\Sigma_\Gamma)$

到目前为止，我们已经确定了在没有标记点的情况下（见例 $D_{\mathbb{Z}_m}$ 以及具有一个标记点轨道的情况下（见例3.4)的映射类群3.6）。我们希望通过将其推广到无标记点情况下的轨形 Σ_Γ，来结束本节。这将作为下一节中对所有 $n \in \mathbb{N}$ 的子群 $\mathbf{PMap}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma)$ 、和 $\mathbf{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma)$ 的归纳描述的基础情形。

因此，我们将确定 Γ-等变同胚如何作用于基本域 F 的边界。朝这一方向迈出的第一步是理解其在锥点上的作用：

引理 3.30. 每个 Γ-等变同胚 $H \in \mathrm{Homeo}^{orb}(\Sigma_\Gamma(L), \partial\Sigma(L))$ 都固定每个锥点。

证明。 令 $H \in \mathbf{Homeo}^{orb}(\Sigma_\Gamma(L), \partial\Sigma(L))$ 为任意一个 Γ-等变同胚，并令 $1 \neq \gamma \in \mathbf{Stab}_\Gamma(c_\nu) = \mathbb{Z}_{m_\nu}$。那么 Γ-等变性意味着

$$\gamma(H(c_\nu)) = H(\gamma(c_\nu)) = H(c_\nu).$$

因此， $\gamma \neq 1$ 包含于 $\mathbf{Stab}_\Gamma(c_\nu)$ 和 $\mathbf{Stab}_\Gamma(H(c_\nu))$中。由于 $H(c_\nu)$ 的稳定子非平凡，点 $H(c_\nu)$ 是一个锥点 $\gamma'(c_\mu)$。在此情况下

$$\mathrm{Stab}_\Gamma(H(c_\nu)) = \mathrm{Stab}_\Gamma(\gamma'(c_\mu)) = \gamma'\mathbb{Z}_{m_\mu}\gamma'^{-1}.$$

该群与 $\mathbb{Z}_{m_\nu}$ 有非平凡交集，当且仅当 $\nu = \mu$ 且 $\gamma' \in \mathbb{Z}_{m_\nu}$，即 $H(c_\nu) = c_\nu$。由于 H具有 Γ-等变性，这还意味着 H 固定每个 Γ平移后的 c_ν。□

推论 3.31。 映射类群 $\mathrm{Map}_n^{orb}(\Sigma_\Gamma(L))$ 和 $\mathrm{Map}_n^{orb}(\Sigma_\Gamma(L\,N))$同构。

证明。 利用引理 3.30，映射 $[H] \mapsto [H|_{\Sigma(L,\ N)}]$ 诱导出一个同构。 □

此外，引理3.28 使我们可以应用亚历山大技巧来证明：

引理 3.32。 对于 $L = n = 0$，映射类群 $\mathrm{Map}^{orb}(\Sigma_\Gamma) = \mathrm{Map}_n^{orb}(\Sigma_\Gamma(L))$ 是平凡的。

证明。设 H 是一个表示 $\mathbf{Map}^{orb}(\Sigma_\Gamma)$中某个元素的同胚。根据引理 3.30， H 固定每个锥点。对于每个 $1 \leqslant \nu \leqslant N$，设 S_ν 是一个以 c_ν 为圆心、半径为 $\varepsilon_\nu > 0$ 的圆，使得这些 N 圆的 Γ-平移要么彼此不相交，要么重合。因此，对于 $1 \leqslant \nu \leqslant N$， $H(S_\nu)$ 的 Γ-平移也具有相同性质。对于每个 ν，设 D_ν 是由 S_ν围成的圆盘。利用 H 固定每个锥点这一事实，可知由 $H(S_\nu)$围成的圆盘 $H(D_\nu)$ 包含锥点 c_ν。此外， $H(S_\nu)$ 的不相交条件意味着 $H(D_\nu)$不包含其他锥点。因此， S_ν 和 $H(S_\nu)$ 是简单闭合的 Γ-曲线，且二者都恰好围住一个锥点。在这两种情况下，被围住的锥点都是 c_ν。由于树形曲面 Σ 不含穿孔点或标记点，这意味着 S_ν 和 $H(S_\nu)$ 同伦。根据引理 3.28，我们可以假设 H 逐点固定简单闭合的 Γ-曲线 S_ν 及其所有 Γ平移。

现在我们可以考虑这样的弧 s_ν：对于 $1 \leqslant \nu \leqslant N$，其 Γ-平移构成了将 Σ 镶嵌划分为 F 的 Γ-平移。对于每个 ν，沿着 S_ν 进行切割，会将弧 s_ν 分成内部部分和外部部分，其中内部部分的像包含于 D_ν 中，而外部部分的像包含于 $\Sigma\backslash D_\nu^\circ$ 中。令 s'_ν 为外部部分。如果我们将弧 s'_ν 的端点视为标记点（对应于 $1 \leqslant \nu \leqslant N$），则可以将这些弧视为 Γ-弧。由于 H 是 Γ-等变的，因此弧 $H(s'_\nu)$ 也可以视为 Γ-弧。利用 H 固定曲线 S_ν 这一性质，弧 s'_ν 和 $H(s'_\nu)$ 具有相同的端点。

根据命题 3.25，这些 Γ-弧要么处于最简位置，要么构成一个双边形。如果 s'_ν 和 $H(s'_\nu)$ 构成一个双边形，引理3.28 给出 H上的一个环境同痕，从而减少 $H(s'_\nu)$ 与 s'_ν的交点数。重复这一论证，我们可以调整 H，使得 $H(s'_\nu)$和 s'_ν 处于最简位置，即 Γ-弧$H(s'_\nu)$ 与 s'_ν 不围成任何双边形。

引理 3.26 表明， Γ-弧 $H(s'_\nu)$ 和 s'_ν 也不围成包含锥点的伪双边形。这表明，弧 $H(s'_\nu)$ 和 s'_ν 围成一个不含锥点且不与其任何一个 Γ-平移相交的圆盘。特别是，Γ由 $H(s'_\nu)$ 和 s'_ν 表示的 -弧是同伦的。因此，引理 3.28给出了一个环境同痕 H_t，使得 $H_0 = H$ 和 $H_1 = H'$，其中 H' 固定 s'_ν，并且 S_ν 逐点固定 $1 \leqslant \nu \leqslant N$。

由于 H' 保持简单闭曲线 S_ν，我们可以在 D_ν 内的圆盘 S_ν上应用亚历山大技巧。此外， H' 保持圆盘$F\setminus\bigcup_{\nu=1}^{N} D_\nu^\circ$不变；该圆盘在图 3.12中以灰色突出显示，并逐点固定其边界。这使我们可以对该圆盘的每个 Γ-平移再次应用亚历山大技巧。因此，我们得到 H' 与恒等映射同伦。□

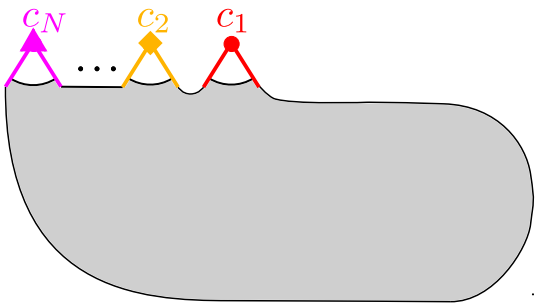


图 3.12。圆盘 $F\setminus\bigcup_{\nu=1}^{N} D_\nu^\circ$。

4. 带标记点的轨形映射类群

对于带标记点的曲面，映射类群由 Birman正合列确定。若我们考虑一个圆盘 D，则可得 [5, 定理 9。1]:

$$1 \to \pi_1(\mathrm{Conf}_n(D)) \to \mathrm{Map}_n(D) \to \underbrace{\mathrm{Map}(D)}_{=1} \to 1.$$

根据 $\Sigma(L,N)/\Gamma$ 与 $D(L,N)$ 同胚这一观察，我们在 $\mathbf{Map}_n^{orb}(\Sigma_\Gamma(L))$ 中确定一个子群 $\mathbf{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$，它同构于 $\mathbf{Map}_n(D(L,N))$ 的一个类似子群 $\mathbf{Map}_n^{\mathrm{id}}(D(L,N))$（见命题 4.3）。由此我们可以推导出 $\mathbf{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$ 的 Birman正合列（见定理 4.10）。此外，我们还推导出纯映射类群的短正合列（见推论 4.13）。特别地，我们得到 $\mathbf{PMap}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma^n(L))$ 和 $\mathbf{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma^n(L))$的表示（见推论 4.19 和命题 4.22）。

4.1. 轨形映射类群与圆盘映射类群的子群识别

设 $\Sigma_\Gamma(L)$是一个底层曲面为 Σ并在 $\Gamma(\{r_1,...,r_L\})$处打了穿孔的轨形。严格来说，正如第 3节所述，考虑在 Σ处有标记点 $\Gamma(\{r_1,...,r_L\})$的曲面通常更方便，而不是考虑穿孔点。欧几里得轨形映射类群 $\mathrm{Map}_n^{orb}(\Sigma_\Gamma(L))$ 有一个同态

$$\mathrm{Forget}_n^{orb} : \mathrm{Map}_n^{orb}(\Sigma_\Gamma(L)) \to \mathrm{Map}^{orb}(\Sigma_\Gamma(L))$$

该同态通过遗忘这些标记点定义。下文中，我们考虑 Forget_n^{orb} 的核。

定义 4.1。令 $\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$，表示 Forget_n^{orb} 的核。该子群由 Homeo 的子群诱导。

$$\mathrm{Homeo}_n^{\mathrm{id},orb}(\Sigma_\Gamma(L),\partial\Sigma(L)) := \{H \in \mathrm{Homeo}_n^{orb}(\Sigma_\Gamma(L),\partial\Sigma(L)) \mid H \sim \mathrm{id}_{\Sigma(L)}\}$$

此外，令 $\mathrm{PMap}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L)) := \mathrm{Forget}_n^{orb}|_{\mathrm{PMap}_n^{orb}(\Sigma_\Gamma(L))}$。该子群由子群 $\mathrm{PHomeo}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L), \partial\Sigma(L))$ 诱导，其中包含 $\mathrm{Homeo}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L), \partial\Sigma(L))$的纯同胚。

此外，我们考虑圆盘 $D(L, N)$ 其上在位置 $\bar{r}_1$、……、$\bar{r}_L$ 和 $\bar{c}_1$、……、$\bar{c}_N$ 处有 $L+N$ 个不同的穿孔点。若赋予 $D(L, N)$ 在 $\bar{p}_1$、……、$\bar{p}_n$ 处的 n 个不同标记点，则存在一个类似的遗忘映射

$$\mathrm{Forget}_n : \mathrm{Map}_n(D(L,N)) \to \mathrm{Map}(D(L,N)).$$

定义 4.2. 令 $\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}}(D(L,N))$ 表示 Forget_n 的核。该子群由子群诱导。

$$\mathrm{Homeo}_n^{\mathrm{id}}(D(L,N),\partial D(L,N)) := \{H \in \mathrm{Homeo}_n(D(L,N),\partial D(L,N)) \mid H \sim \mathrm{id}_{D(L,N)}\}$$

$\mathrm{Homeo}_n(D(L, N))$。此外，令 $\mathrm{PMap}_n^{\mathrm{id}}(D(L, N)) := \mathrm{Forget}_n|_{\mathrm{PMap}_n(D(L, N))}$。这个子群由子群 $\mathrm{PHomeo}_n^{\mathrm{id}}(D(L, N), \partial D(L, N))$ 诱导，该子群包含 $\mathrm{Homeo}_n^{\mathrm{id}}(D(L, N), \partial D(L, N))$的纯同胚。

与 $\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$相比，子群 $\mathrm{Map}_n(D(L,N))$ 还满足以下附加条件：同胚和环境同伦固定与锥点对应的点。根据引理 3.30，锥点会自动被 Γ-等变的 $\Sigma(L)$ 同胚固定。这将使我们能够证明：

命题 4.3. 群 $\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}}(D(L,N))$ 同构于 $\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$. 且该同构限制为$\mathrm{PMap}_n^{\mathrm{id}}(D(L,N))$ 与$\mathrm{PMap}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$之间的同构。

证明分为以下四个步骤：

- 在引理 4.5中，我们构造了一个连续同态

  $$\pi : \mathrm{Homeo}_n^{orb}(\Sigma_\Gamma(L),\partial\Sigma(L)) \to \mathrm{Homeo}_n(D(L,N),\partial D(L,N))$$

  使用从 $\Sigma(L, N)$ 到 $\Sigma(L, N)/\Gamma \cong D(L,N)$的投影。
- 由于连续性，同态 π 诱导出一个同态

  $$\pi_{\mathrm{Map}} : \mathrm{Map}_n^{\mathrm{id},orb}(\Sigma_\Gamma(L)) \to \mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}}(D(L,N)),$$

  参见引理4.6。
- 反过来，我们构造一个同态

  $$\varphi : \mathrm{Homeo}_n^{\mathrm{id}}(D(L,N),\partial D(L,N)) \to \mathrm{Homeo}_n^{orb}(\Sigma_\Gamma(L),\partial\Sigma(L))$$

  在引理 4.8中。这需要将 $D(L$ 上满足定义 $N) \cong \Sigma(L$中的条件的 $N)/\Gamma$ 自同胚提升为 $\Sigma(L$ 的自同胚 $N)$。与引理 4.5 不同，我们在此情况下不会证明 φ 的连续性。
- 然而，同态 φ 诱导出一个同态

  $$\varphi_{\mathrm{Map}} : \mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}}(D(L,N)) \to \mathrm{Map}_n^{\mathrm{id},orb}(\Sigma_\Gamma(L)),$$

  参见引理 4.9。由于 φ 不一定是连续的，与引理4.6 相比，φ_{Map} 的良定义性需要额外论证。

为了推导出 $\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}}(D(L,N))$ 和 $\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$，同构，我们最后将验证同态 π_{Map} 和 φ_{Map} 互为逆映射。

给定 $H \in \mathrm{Homeo}_n^{orb}(\Sigma_\Gamma(L))$，我们从诱导映射的定义开始

$$\bar{H} : D_n(L,N) \to D_n(L,N).$$

根据引理3.30， H 固定所有锥点。这使我们可以将 H 视为曲面 $\Sigma(L$上的同胚 $N)$。利用 Γ的 H-等变性，我们得到一个良定义的映射

$$\bar{H} : \Sigma(L,N)/\Gamma \to \Sigma(L,N)/\Gamma, \Gamma(x) \mapsto \Gamma(H(x)).$$

由于 $\Sigma(L,\ N)/\Gamma$与 $D(L,\ N)$同胚，因此这定义了标记圆盘的一个自映射。此外，我们注意到圆盘 $D(L,\ N)$与 $F(L,\ N)/\sim_\Gamma$同胚，其中 $\sim_\Gamma$ 将属于同一 Γ-轨道的边界点识别起来。因此，我们可以将 H 视为一个映射

$$F(L,N) \to F(L,N), \bar{x} \mapsto \bar{H}(\bar{x})$$

该映射在被识别的边界点处重合，固定标记点集$\{p_1,\ \ldots\ldots,\ p_n\}$，并且在 $\partial\Sigma(L,\ N) \cap F(L,\ N)$上限制为恒等映射。

为证明引理4.5，我们先观察基本域 F。

引理 4.4. 如果 $H \in$同胚$^{orb}(\Sigma_\Gamma, \partial\Sigma)$，那么 $H(F)$ 也是 Γ-作用在 Σ上的一个基本域。

证明。令 y 为 Σ中的任意一点。 H 的满射性意味着存在一个 $y' \in \Sigma$，使得 $y = H(y')$。由于 F 是一个基本域，因此存在一点 $x' \in F$ 和 $\gamma \in \Gamma$，使得 $y' = \gamma(x')$。利用 H 是 Γ-等变的这一性质，我们得到 $y = \gamma(H(x'))$，即 $\Sigma = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma(H(F))$。

此外，如果 y包含于 $\gamma(H(F)) \cap \gamma'(H(F))$，则对于 $\gamma \neq \gamma'$，这意味着 $y = \gamma(H(x')) = \gamma'(H(x''))$对于 $x',\ x'' \in F$。这等价于 $H(\gamma(x')) = H(\gamma'(x''))$。由于 H 是单射，即 $\gamma(x') = \gamma'(x'')$。利用 F是基本域这一点，这意味着 x' 和 x'' 包含于 ∂F。同胚 H 将 ∂F映射到 $\partial H(F)$，即 $H(x')$，$H(x'')$包含于 $\partial H(F)$。这证明了 $H(F)$ 是基本域。□

引理 4.5. 映射

$$\pi\colon \mathrm{Homeo}_n^{orb}(\Sigma_\Gamma(L,\ N),\ \partial\Sigma(L,\ N)) \to \mathrm{Homeo}_n(D(L,\ N),\ \partial D(L,\ N)) \qquad H \mapsto \bar{H}$$

是一个连续同态。

证明。我们将证明分为三个步骤。

步骤 1. 映射 π是一个同态。设 $H,\ H' \in \mathrm{Homeo}_n^{orb}(\Sigma_\Gamma(L,\ N),\ \partial\Sigma(L,\ N))$。那么，根据 H 和 H' 的定义可得

$$\bar{H}' \circ \bar{H}(\Gamma(x)) = \bar{H}'(\Gamma(H(x))) = \Gamma(H' \circ H(x)) = \overline{H' \circ H}(\Gamma(x)).$$

因此， π 是一个同态。

步骤 2. 映射 H 是一个同胚。由于映射 φ 是一个同态， $\bar{H}$ 的逆由 H^{-1} 在 π下的像给出。因此，只需证明对于 $\mathrm{Homeo}_n^{orb}(\Sigma_\Gamma(L)$中的每个 H， $\bar{H}$ 是连续的，$\partial\Sigma(L))$ 即可得到H 是一个同胚。

由于 F 是一个基本域， $H|_F$ 因此确定了诱导映射 H。由引理 4.4， $H^{-1}(F)$ 也同样是一个基本域。这使我们能够用 F的 Γ-平移覆盖 $H^{-1}(F)$。由此，我们得到若干部分

$$H : F \cap \gamma(H^{-1}(F)) \to \gamma(F).$$

由于定义域和陪域都包含在 F 的同一个 Γ-平移中，我们可以将上述映射视为

$$F \cap \gamma(H^{-1}(F)) \to F, x \mapsto \gamma^{-1}(H(x)).$$

此映射与 $H|_{F\cap\gamma(H^{-1}(F))}$重合。由于 H 是连续的，这意味着 $\bar{H}$ 在每个部分 $F \cap \gamma(H^{-1}(F))$上都是连续的。

接下来，我们验证这些连续部分彼此拼接成一个连续函数 $\bar{H}$。因此，我们回顾一下， F 和 $H^{-1}(F)$ 都是紧圆盘。这意味着 F 只与有限多个 Γ的平移副本相交。 $H^{-1}(F)$因此，我们将 $\bar{H}$ 分解成了有限个连续部分。设 $F \cap \gamma(H^{-1}(F))$和 $F \cap \gamma'(H^{-1}(F))$ 是这样的部分，使得它们或其适当的 Γ平移副本相交。如果我们考虑相交的平移副本，它们共有一个包含于二者边界中的集合（示例见图4.1 ）。

在图4.1的左侧，基本域 F 以不同颜色着色，这些颜色描述了上述分解成各部分的情况。其中两个部分的一个示例性交点以黄色表示。对于蓝色线段，存在相邻部分的 Γ平移副本彼此相交。在图4.1的右侧，展示了相应的部分如何覆盖 $D_n(L, N)$。

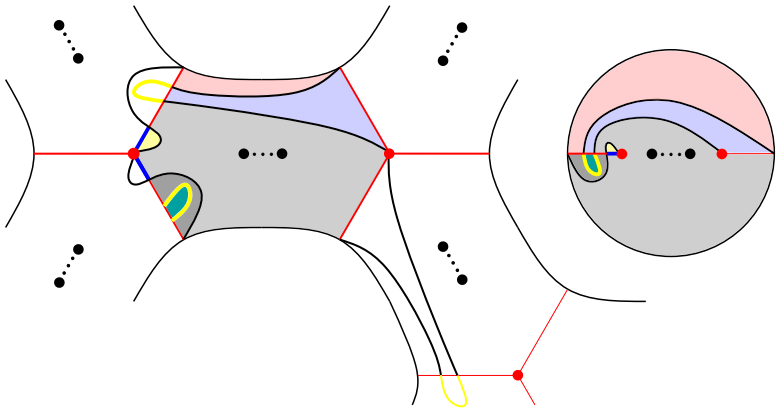


图 4.1。 H 和 H的分解。

考虑 $\Sigma(L$ 中 $N)$ 两个部分交集的一个开邻域。由于 H 在此邻域上是连续的，Γ-等变性 H 意味着映射 $H|_{F\cap\gamma(H^{-1}(F))}$ 和 $H|_{F\cap\gamma'(H^{-1}(F))}$ 在对应于交集的集合上重合。由于 H 在这些 H 部分上与 相同，因此 $H|_{F\cap\gamma(H^{-1}(F))}$和 $H|_{F\cap\gamma'(H^{-1}(F))}$在它们的交集上重合。因此，根据 [4, 第三章定理 9，4], 的有限个连续部分 $D_n(L$在 $N)$上诱导出一个连续映射。

步骤 3。的连续性。 最后，我们需要验证 π 是连续的，即对于每个同胚 $H \in \text{Homeo}^{orb}_n(\Sigma_\Gamma(L),\ \partial\Sigma(L))$ 以及每个 $\pi(H) = H$的邻域 V，都存在一个 H 的邻域 V'，使得 $\pi(V') \subseteq V$。给定 $D(L$中的一个紧集 K和一个开集 $U,\ N)$，令 $V(K,\ U)$ 表示集合

$$\{\phi \in \text{Homeo}_n(D(L,N), \partial D(L,N)) \mid \phi(K) \subseteq U\}.$$

根据 $\text{Homeo}_n(D(L,N), \partial D(L,N))$ 上紧开拓扑的定义，开集 V包含一个子集 $V(K,U) \ni \pi(H) = H$。现在我们必须找到一个合适的开子集 $V' \subseteq \text{Homeo}^{orb}_{\text{id}\ n}(\Sigma_\Gamma(L),, \partial\Sigma(L))$，使得 V'映射到$V(K,U)$。我们将为某个 $K_\Sigma, U_\Sigma \subseteq \Sigma(L)$ 选择 $V' = V'(K_\Sigma, U_\Sigma)$，使得 K_Σ是紧致的，且 U_Σ 是开集。

由于 $D(L,N)$ 与 $F(L,N)/\sim_\Gamma$ 同胚，且 $F(L,N)\subseteq\Sigma(L,N)$，我们可以将 K 和 U 视为 $\Sigma(L)$ 的子集。我们选取 $K_\Sigma=K$ 和 $U_\Sigma=\Gamma(U)$。

K_Σ 是紧致的，因为它是紧致子集 $F(L,N)$的一个紧致子集。

关于 U_Σ 的开性，我们注意到：如果 $x\in U_\Sigma$ 包含在 Γ 移位后的 $F(L,N)$ 的内部中，我们可以利用 U 在 $F(L,N)$ 中是开集这一点。这就得到一个以 x 为中心的 ε 球，它包含在 Γ 移位后的 $F(L,N)$ 和 U 的内部中。特别地，这个 ε 球包含在 U_Σ 中。如果 $x\in U_\Sigma$ 包含在 Γ 移位后的$\partial F(L,N)$中，我们可以利用 U 在 $D(L,N)$ 中的开性，找到一个环绕 $\bar{x}$ 的 ε 球，它包含在 $U\subseteq D(L,N)$ 中，其中 $\bar{x}$ 对应于 x。如果我们将这个 ε 球视为 $F(L,N)$ 中的一个子集，它会分成两个连通分支。将这两半分别通过适当的群元素移位后，得到以 x 为中心的 ε 球。由于U_Σ 覆盖了 $U\subseteq F(L,N)$ 的整个 Γ 轨道，这个 ε 球包含在 U_Σ 中。因此，U_Σ 是开集。

对于这些集合 K_Σ 和 U_Σ，我们观察到

$$H(K_\Sigma)=H(K)=H\circ\bar{H}^{-1}\circ\bar{H}(K)\subseteq H\circ\bar{H}^{-1}(U)\subseteq U_\Sigma.$$

在最后一个包含关系中，我们利用了 H 和 H 至多相差一个 Γ-平移。现在，$H(K_\Sigma)\subseteq U_\Sigma$ 意味着 $H\in V'(K_\Sigma,\ U_\Sigma)$ 此外，对于每个属于 $\mathrm{Homeo}_n^{orb}(\Sigma_\Gamma(L),\ \partial\Sigma(L))$ 的 H'，条件 $H'(K_\Sigma)\subseteq U_\Sigma$ 意味着 $\bar{H}'(K)\subseteq U$，即 $\pi(V'(K_\Sigma,\ U_\Sigma))\subseteq V(K,\ U)$。□

如果将 π 限制到子群 $\mathrm{Homeo}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L),\ \partial\Sigma(L))$，我们得到一个连续映射 $\mathrm{Homeo}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L),\ \partial\Sigma(L))\to\mathrm{Homeo}_n(D(L,\ N),\ \partial D(L,\ N))$。

引理 4.6. 受限映射诱导出一个同态

$$\pi_{\mathrm{Map}}:\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id},orb}\left(\Sigma_\Gamma(L)\right)\to\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}}\left(D(L,N)\right).$$

证明。剩下需要验证诱导映射即可。

$$\pi_{\mathrm{Map}}:\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id},orb}\left(\Sigma_\Gamma(L)\right)\to\mathrm{Map}_n\left(D(L,N)\right),[H]\mapsto[\bar{H}]$$

定义良好，且其像包含在 $\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}}\left(D(L,N)\right)$ 中。

对于 $H,\ H'\in\mathrm{Homeo}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L),\ \partial\Sigma(L))$ 满足 $H\sim_n H'$，存在一个环境同痕 $\phi:\ I\to\mathrm{Homeo}_n^{orb}(\Sigma_\Gamma(L),\ \partial\Sigma(L))$ 连接 H 与 H'。由于 π 是连续的，由引理 4.5，我们得到一个环境同痕 $\phi:=\pi\circ\phi$ 连接 H 与 H'。因此，诱导映射 π_{Map} 是良定义的。

此外，设 $H\in\mathrm{Homeo}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L),\ \partial\Sigma(L))$。如果我们忘掉标记点$\Gamma(\{p_1,\ .....,\ p_n\})$，根据定义 4.1，我们得到一个环境同痕

$$\psi:I\to\mathrm{Homeo}^{orb}(\Sigma_\Gamma(L),\partial\Sigma(L))$$

从 H 到恒等映射$_{\Sigma(L)}$。根据引理 3.30，ψ_t 对任意 $t\in I$都固定锥点。因此，所诱导的环境同痕 ψ 将 H 与恒等映射$_{D(L,N)}$ 连接起来，并相对于 $\bar{c}_1,...,\bar{c}_N$以及 $\bar{r}_1,...,\bar{r}_L$保持不变。因此，$\bar{H}$ 包含于子群 $\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}}\left(D(L,N)\right)$。□

接下来，我们将描述 π_{Map} 的一个逆同态。第一步是为每个 $H\in\mathrm{Homeo}_n(D(L,N),\partial D(L,N))$ 构造一个 $\Sigma_\Gamma(L)$ 的自同胚：

构造 4.7（$\Sigma(L)$的自同胚）。根据定义4.2，存在一个环境同痕

$$\bar{\phi}:I\to\mathrm{Homeo}(D(L,N),\partial D(L,N))$$

连接 $\mathrm{id}_{D(L,N)}$ 与 H。对于每个既非标记点也非锥点的点 $\bar{x}\in D$（这些点无论如何都是固定的），我们可以追踪它的轨迹 $\phi_t(\bar{x})$，并检测它与线段 $\bar{s}_\nu$ 之间的代数交点，得到 $1\leqslant\nu\leqslant N$。由此可得一个有限的

序列 $((\nu_1,\varepsilon_1),...,(\nu_q,\varepsilon_q))$，其中 $1\leqslant\nu_j\leqslant N$和 $\varepsilon_j=\pm1$，它诱导出一个群元素 $\gamma_{\bar{H},\bar{x}}:=\gamma_{\nu_1}^{\varepsilon_1}...\gamma_{\nu_q}^{\varepsilon_q}$。现在我们将 $\bar{x}$与 $F(L,N)$中的一个点对应，并定义

$$\bar{H}_\Sigma:\gamma(\bar{x})\mapsto\tilde{\gamma}\gamma_{\bar{H},\bar{x}}(\bar{H}(\bar{x})).$$

若 $\gamma(\bar{x})$ 是 $\gamma(F(L$中的内部元素，则元素 $\tilde{\gamma}$ 等于 γ， $N))$；或者，若存在某个 $1\leqslant\nu\leqslant N$ 使得 $\gamma(\bar{x})$ 包含于 $\gamma(s_\nu)$ 中，则亦然。若 $\gamma(\bar{x})$ 包含于 $\gamma'(s_\nu)$中，我们令$\tilde{\gamma}=\gamma'$。

为了验证 H_Σ 定义良好，我们必须检查 $\gamma_{\bar{H},\ \bar{x}}$ 不依赖于 ϕ 环境同痕的选取。

设 ψ: $I\to$Homeo$(D(L,N),\partial D(L,N))$ 是另一条将 id$_{D(L,N)}$ 与 $\bar{H}$ 连接起来的环境同痕。则 $\bar{\psi}^{-1}\circ\bar{\phi}$ 给出一条环境同痕，经由 $\bar{H}$ 将 id$_{D(L,N)}$连接到 id$_{D(L,N)}$。特别地， $(\bar{\psi}^{-1}\circ\bar{\phi})_t(\bar{x})$ 表示$\pi_1(D(L,N),\bar{x})$中的一个元素。通过点推动， $\pi_1(D(L,N),\bar{x})$ 嵌入 Map$_1(D(L,N))$，且元素 $[(\bar{\psi}^{-1}\circ\bar{\phi})_t(\bar{x})]$ 映射到 $[\text{id}_{D(L,N)}]$。因此，$(\bar{\psi}^{-1}\circ\bar{\phi})_t(\bar{x})$ 表示 $\pi_1(D(L,N),\bar{x})$中的平凡元素。由于 $\pi_1(D(L,N),\bar{x})=F_{L+N}$，这意味着 $\phi_t(\bar{x})$ 与 $\psi_t(\bar{x})$ 同线段 $\bar{s}_\nu$ 的交叉模式在插入子序列 $(\mu,\varepsilon),(\mu,-\varepsilon)$ 后重合，其中 $1\leqslant\mu\leqslant N$ 与 $\varepsilon=\pm1$。因此，$\gamma_{\bar{H},\bar{x}}$ 不依赖于环境同痕的选取。

此外，我们需要证明：如果 Γ-平移后的 $F(L、N)$在其边界处相交，则 H_Σ 的定义在这两个 Γ-平移上相同。令 $\gamma(\bar{x})=\gamma'(\bar{y})$ 为$\bar{x}$、$\bar{y}\in F(L、N)$、$\bar{x}\neq\bar{y}$、γ、$\gamma'\in\Gamma$、$\gamma\neq\gamma'$。这意味着 $\bar{x}$和 $\bar{y}$属于同一个 Γ-轨道。特别地， $\bar{x}$、$\bar{y}\in\partial F(L、N)$与 $\bar{x}$、$\bar{y}$通过 $\sim_\Gamma$得到识别。因此， $H(\bar{x})=H(\bar{y})$。不失一般性，我们可以假设 $\gamma(\bar{x})=\gamma'(\bar{y})$包含于 $\gamma(s_\nu)$，即对于 $\gamma(\bar{x})$ 和 $\gamma'(\bar{y})$，有 $\tilde{\gamma}=\gamma$。由于点 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 通过 $\sim_\Gamma$得到识别，我们进一步得到$\gamma_{\bar{H}、\ \bar{x}}=\gamma_{\bar{H}、\ \bar{y}}$，从而彩票计划

$$\bar{H}_\Sigma(\gamma(\bar{x}))=\gamma\gamma_{\bar{H},\bar{x}}(\bar{H}(\bar{x}))=\gamma\gamma_{\bar{H},\bar{y}}(\bar{H}(\bar{y}))=\bar{H}_\Sigma(\gamma'(\bar{y})).$$

下面的引理表明， H_Σ 满足预期的性质。

引理 4.8. 将 H 映射到 H_Σ 的映射 φ:Homeo$_n^{\text{id}}(D(L,N),\partial D(L,N))\to$Homeo$_n^{orb}(\Sigma_\Gamma(L),\partial\Sigma(L))$ 是一个同态。

证明。 还需证明 φ 满足同态性质，并且$\bar{H}_\Sigma$ 包含于 Homeo$_n^{\text{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L),,\partial\Sigma(L))$中。

步骤 1. 映射 φ 是一个同态。 对于每个包含在 $F(L$内部的 $\bar{x}$,$N)$或属于$\bigcup_{\nu=1}^N s_\nu$ 的 $\bar{x}$，我们有

$$\bar{x}\overset{\varphi(\bar{H})}{\mapsto}\gamma_{\bar{H},\bar{x}}(\bar{H}(\bar{x}))\overset{\varphi(\bar{K})}{\mapsto}\gamma_{\bar{K},\bar{H}(\bar{x})}\gamma_{\bar{H},\bar{x}}(\bar{K}\circ\bar{H})(\bar{x})=\gamma_{\bar{K},\bar{H}(\bar{x})}\gamma_{\bar{H},\bar{x}}(\overline{K\circ H})(\bar{x}).$$

设 $\phi_{\bar{H}}$（分别为 $\phi_{\bar{K}}$）是将 H（分别为 K）连接到恒等映射的同伦。那么，拼接得到的 $\phi_{\bar{K}}\circ\phi_{\bar{H}}$将 $\overline{K\circ H}$连接到 id$_{D(L,N)}$。这意味着

$$\gamma_{\bar{K},\bar{H}(\bar{x})}\gamma_{\bar{H},\bar{x}}=\gamma_{\overline{K\circ H},\bar{x}}.$$

因此， $\varphi(K)\circ\varphi(H)(\bar{x})=\varphi(K\circ H)(\bar{x})$，即 φ 是一个同态。

步骤 2. 映射 H_Σ 是一个同胚。 由于 φ 是一个同态， $\bar{H}_\Sigma$ 的逆映射由 $\bar{H}_\Sigma^{-1}$ 给出。因此，只需证明对于任意 $\bar{H}$， $\bar{H}_\Sigma$ 是连续的，即可得到 H_Σ 是一个同胚。

如引理2 中的步骤4.5所述，我们考虑片段 $\gamma(F(L、N))\cap\gamma'(\bar{H}_\Sigma^{-1}(F(L、N)))$对于 γ， $\gamma'\in\Gamma$ 以证明 H_Σ的连续性。由于 $F(L$是$N)$一个紧圆盘，每个 Γ-平移 $\gamma(F(L$与$N))$有限个其他 Γ-平移$\gamma'(\bar{H}_\Sigma^{-1}(F(L$相交$N)))$。由于 $F(L$是$N)$一个基本域， Γ-平移仅在边界处相交。此外，该限制的定义域和陪域

$H_\Sigma|_{\gamma(F(L,N))\cap\gamma'(\bar{H}_\Sigma^{-1}(F(L,N)))}$都包含在 Γ-平移的单个 $F(L$中，$N)$且该限制与相应的片段相对应

$$\bar{H} : F(L,N) \cap \gamma'(\bar{H}_\Sigma^{-1}(F(L,N))) \to F(L,N).$$

由于 H 是连续的，这意味着 H_Σ 在每个部分上都是连续的。如果两个部分相交，H_Σ 的良定义性意味着两个定义在交点上相同。因此，根据 [4, 第三章，定理 9。4], 这些连续的部分拼接成一个连续函数 H_Σ。□

仍需检查上述对 H_Σ 的构造是否恰当，即它是否为 π_{Map}诱导出一个逆同态。

引理 4.9。映射 $\varphi:\mathrm{Homeo}_n^{\mathrm{id}}(D(L,N),\partial D(L,N)) \to \mathrm{Homeo}_n^{orb}(\Sigma(L),\partial\Sigma(L))$诱导出一个同态 $\varphi_{\mathrm{Map}}:\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}}(D(L,N)) \to \mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$,

证明。我们证明所诱导的映射

$$\varphi_{\mathrm{Map}} : \mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}}(D(L,N)) \to \mathrm{Map}_n^{\mathrm{id},orb}(\Sigma_\Gamma(L)), [\bar{H}] \mapsto [\bar{H}_\Sigma]$$

定义良好，且其像包含于 $\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$, 中。

步骤1。映射 φ_{Map} 定义良好。对于 $\bar{H}$，$\bar{H}' \in \mathrm{Homeo}_n^{\mathrm{id}}(D(L,N),\partial D(L,N))$ 且满足 $H \sim_n H'$，我们有一个环境同痕 ϕ：$I \to \mathrm{Homeo}_n(D(L,N),\partial D(L,N))$，连接 H 和 H'。我们要证明 $\phi_\Sigma := \varphi\circ\phi$ 是一个环境同痕，连接 H_Σ 和 H'_Σ，也就是说，我们必须验证 ϕ_Σ 是连续的。我们先给出以下断言：

断言。设 $t_0 \in I$。对每个 $\varepsilon > 0$，存在一个 $\delta > 0$ 使得

$$\sup_{x\in D}\sup_{t\in(t_0-\delta,t_0+\delta)} d(\bar{\phi}_t(x),\bar{\phi}_{t_0}(x)) < \varepsilon.$$

考虑辅助函数

$$\tilde{d} : D\times I \to \mathbb{R},\quad (x,t)\mapsto d(\bar{\phi}_t(x),\bar{\phi}_{t_0}(x)).$$

首先，我们证明 d 是连续的。注意到 $d(x,t_0)=0$ 并回忆一下，ϕ：$I \to \mathrm{Homeo}_n(D(L,N),\partial D(L,N))$, $t\mapsto\phi_t$是连续的。根据函数空间的一个经典结果（例如参见 [4, 第 XII 章，定理 3.1], ），这意味着映射 $I\times D(L,N)\to D(L,N)$, $(t,x)\mapsto\phi_t(x)$是连续的。此外，d关于两个自变量都是连续的。因此，d 是连续的。

为推出该断言，令我们固定一个 $\varepsilon>0$。我们想证明存在一个$\delta>0$，使得 $d|_{D\times I_\delta}$被 ε 从上方有界，其中 $I_\delta=(t_0-\delta,\ t_0+\delta)$。若不存在这样的 δ，则对每个 $\delta>0$，交点 $D\times I_\delta\cap\tilde{d}^{-1}([\varepsilon,\ \infty))\neq\varnothing$。从这些子集中选取元素，我们得到一个序列 $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$，满足 $y_i=(x_i,\ t_i)$，且对每个 $i\in\mathbb{N}$都有$|t_i-t_0|<\frac{1}{i}$。由于 $D\times I$是紧致的，存在一个收敛子序列 $(y_{i_j})_{j\in\mathbb{N}}$。关于 t_i的条件意味着 $y=\lim_{j\to\infty}y_{i_j}$具有 $y=(x,\ t_0)$的形式。特别是，在中，$d(y)=0$。由于对所有 $j\in\mathbb{N}$都有 $d(y_{i_j})\geqslant\varepsilon$，这与 d的连续性矛盾。因此，存在 $\delta>0$，使得 $d|_{D\times I_\delta}$ 被 ε 从上方有界，断言得证。

现在设 $K\subseteq\Sigma$ 为一个紧集，$U_\varepsilon=(\phi_{\Sigma,\ t_0}(K))_\varepsilon$ 为 $\phi_{\Sigma,\ t_0}(K)$的一个开 ε-邻域。显然，$\phi_{\Sigma,\ t_0}\in V(K,\ U_\varepsilon)$。此外，该断言意味着

$$\bar{\phi}_t(\bar{x})\in B_\varepsilon(\bar{\phi}_{t_0}(\bar{x})) \text{ for } t\in(t_0-\delta,t_0+\delta) \text{ and } \bar{x}\in D. \tag{7}$$

回想一下，$\phi_{\Sigma,\ t}$将 $\gamma(\bar{x})$映射到$\tilde{\gamma}_{\bar{\phi}_t,\ \bar{x}}(\phi_t(\bar{x}))$。群元素$\gamma_{\bar{\phi}_t,\ \bar{x}}$可判断$\phi_{\Sigma,\ t}(\bar{x})$ 是否包含在与$\phi_{\Sigma,\ t_0}(\bar{x})$相同的 Γ-平移中：若环境同痕的轨迹 $\phi_s(\bar{x})$ 在 s介于 t和 t_0之间时，不与任何 Γ-平移的$\partial F(L,\ N)$相交，则它与 $\gamma_{\bar{\phi}_{t_0},\ \bar{x}}$重合。否则，$\gamma_{\bar{\phi}_t,\ \bar{x}}\neq\gamma_{\bar{\phi}_{t_0},\ \bar{x}}$描述一个相邻的

包含 $F(L,\ N)$ 的平移 $\phi_{\Sigma,\ t}(\bar{x})$。利用（7），这意味着 $\phi_{\Sigma,\ t}(\gamma(\bar{x}))=$ $\tilde{\gamma}\gamma_{\bar{\phi}_t,\ \bar{x}}(\phi_t(\bar{x}))$ 包含在 $B_\varepsilon(\phi_{\Sigma,\ t_0}(\bar{x}))$ 中，其中 $t\in(t_0-\delta,$ $t_0+\delta)$。这等价于 $\phi_{\Sigma,\ t}\in V(K,\ U_\varepsilon)$ 对于 $t\in(t_0-\delta,$ $t_0+\delta)$成立，也就是说 ϕ_Σ 是连续的。因此，诱导映射 φ_{Map} 定义良好。

步骤 2. $[\bar{H}_\Sigma]$ 包含于 $\mathsf{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$,. 这需要证明 $\bar{H}_\Sigma$ 与 $\mathsf{id}_{\Sigma(L)}$ 在相对于 $r_1,...,r_L$ 的意义下，Γ-等变同伦。根据定义，H 与 $\mathsf{id}_{D(L,N)}$ 在相对于 $\bar{r}_1,...,\bar{r}_L$ 的意义下同伦，并且 $\bar{c}_1,...,\bar{c}_N$ 通过同伦 $\psi_\circ$ 沿用上文相同的论证，诱导映射 $\psi_\Sigma:=\varphi\circ\psi$ 给出了 $\bar{H}_\Sigma$ 与 $\mathsf{id}_{\Sigma(L)}$ 之间所需的同伦。因此，$\bar{H}_\Sigma$ 包含于 $\mathsf{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$,. □

命题 4.3 的证明. 一方面，设 $\bar{H}\in\mathsf{Homeo}_n^{\mathrm{id}}(D(L,N))$。那么，根据定义，$\varphi(H)=H_\Sigma$ 将 $\gamma(x)$ 映到 $\gamma\gamma_{\bar{H},x}(H(\bar{x}))$ 上。这意味着 $\pi\circ\varphi(H)=H$，因此 $\pi_{\mathrm{Map}}\circ\varphi_{\mathrm{Map}}=\mathsf{id}_{\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}}(D(L,N))}$。

另一方面，对于每个表示 $\mathsf{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$ 中一个元素的同胚 H，都存在一个群元素 $\gamma_{H,x}$，使得对于每个 $x\in\Sigma(L)$，都有 $H(x)=\gamma_{H,x}(\bar{H}(\bar{x}))$。此外，回顾定义 4.1，若忘记标记点 $p_1,...,p_n$，我们便得到一个从 $\mathsf{id}_{\Sigma(L)}$ 到 H 的环境同痕 ϕ_t。由此诱导的环境同痕 ϕ_t 给出 $\gamma_{\bar{H},\bar{x}}$。更准确地说，$\gamma_{\bar{H},\bar{x}}$ 由 $\phi_t(\bar{x})$ 与 $\bar{s}_\nu$ 在 $1\leqslant\nu\leqslant N$ 时的代数交点序列确定。诱导的同伦 $\phi_t(\bar{x})$ 与 $\bar{s}_\nu$ 相交，当且仅当 $\phi_t(x)$ 移至 $F(L$ 的另一个 Γ-平移像，并经过 s_ν 的一个 Γ-平移像 $N)$。因此，$\gamma_{\bar{H},\bar{x}}$ 与 $\gamma_{H,x}$ 重合，即 $H_\Sigma=H$。这意味着 $\varphi\circ\pi(H)=H$，进而得到 $\varphi_{\mathrm{Map}}\circ\pi_{\mathrm{Map}}=\mathsf{id}_{\mathrm{Map}^{\mathrm{id}},_n\ ^{orb}(\Sigma_\Gamma(L))}$。

因此，群 $\mathsf{Map}_n^{\mathrm{id}}(D(L,\ N))$ 和 $\mathsf{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$, 同构。显然，所构造的同构限制在纯子群上仍成立。□

特别地，命题 4.3 给出了一个证明，说明$\mathrm{Map}_1^{orb}(D_{\mathbb{Z}_m})$ 是无限循环群，这正是例 3.6的目标。

例 3.6 的证明。 亚历山大技巧表明，群 $\mathrm{Map}^{orb}(D_{\mathbb{Z}_m})$和 $\mathrm{Map}\ (D(0,\ 1))$ 均为平凡群，见例 3.6 和 [5, 引理 2。1]由此可得

$$\mathrm{Map}_1^{orb}(D_{\mathbb{Z}_m})\cong\mathrm{Map}_1^{\mathrm{id},orb}(D_{\mathbb{Z}_m})\quad\text{and}\quad\mathrm{Map}_1(D(0,1))\cong\mathsf{Map}_1^{\mathrm{id}}(D(0,1)).$$

由命题 4.3，我们进一步得到 $\mathsf{Map}_1^{\mathrm{id}\ orb}(D_{\mathbb{Z}_m})\cong\mathsf{Map}_1^{\mathrm{id}}(D(0,\ 1))$。因此，群 $\mathsf{Map}_1^{orb}(D_{\mathbb{Z}_m})$ 与 $\mathsf{Map}_1(D(0,\ 1))$ 同构。此外，点推动映射

$$\mathrm{Push}_1:\pi_1(D(0,1),p_1)\to\mathrm{Map}_1(D(0,1))$$

在 [5, 定理 4.6] 中定义，给出了一个同构。由于带 puncture 的圆盘 $D(0,\ 1)$ 的基本群与 $\mathbb{Z}$同构，因此这意味着 $\mathrm{Map}_1^{orb}(D_{\mathbb{Z}_m})$ 是无限循环群。

一个 $\pi_1(D(0,\ 1),\ p_1)$ 的生成元由一条环绕删点的环路表示。该环路在 Push_1 下的像是 p_1 在删点 $D(0,\ 1)$中的一个绕删点的扭转。在 $\mathrm{Map}_1^{orb}(D_{\mathbb{Z}_m})$ 中，这个扭转对应于图 $\frac{2\pi}{m}$-扭转 U，见图 3.1。□

4.2. 轨形映射类群的广义 Birman 正合列

对$\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$，和$\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}}(D(L,\ N))$的识别导出了定理A中针对轨形映射类群的 Birman正合列。

定理 4.10 (Birman 正合列)。 下面的图表交换，且每一行都是正合的：

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \to & \pi_1(\mathrm{Conf}_n(D(L,N))) & \xrightarrow{\mathrm{Push}_n} & \mathrm{Map}_n(D(L,N)) & \xrightarrow{\mathrm{Forget}_n} & \mathrm{Map}(D(L,N)) & \to & 1 \\
 & & \| & & \uparrow & & & & \\
1 & \to & \pi_1(\mathrm{Conf}_n(D(L,N))) & \xrightarrow{\mathrm{Push}_n} & \mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}}(D(L,N)) & \xrightarrow{\mathrm{Forget}_n} & \mathrm{Map}^{\mathrm{id}}(D(L,N)) & = & 1 \\
 & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{\mathrm{Map}}} & & & & \\
1 & \to & \pi_1(\mathrm{Conf}_n(D(L,N))) & \xrightarrow{\mathrm{Push}_n^{orb}} & \mathrm{Map}_n^{\mathrm{id},orb}(\Sigma_\Gamma(L)) & \xrightarrow{\mathrm{Forget}_n^{orb}} & \mathrm{Map}^{orb}(\Sigma_\Gamma(L)) & = & 1
\end{array}$$

证明。 上面一行是带有$L+N$个穿孔点的圆盘的广义 Birman 正合列。映射 Forget_n 是通过忘掉标记点$\bar{p}_1,\ldots,\bar{p}_n$定义的。映射 Push_n 来自将 $\mathrm{Conf}_n(D(L$中的一条辫子 $b, N))$延拓为从 $\mathrm{id}_{D(L,N)}$ 到 H_b的环境同痕 $I\to D(L,N)$。于是，Push_n的像由 $\mathrm{Push}_n([b])=[H_b]$定义。直观地说，环境同痕是通过把手指放在 b 各股线的起点处，再沿着辫子推动而得到的。推动时，圆盘 $D(L,N)$ 也随之移动。严格地说，点推动映射由以下纤维丛诱导

$$\mathrm{Homeo}_n(D(L,N),\partial D(L,N))\to\mathrm{Homeo}(D(L,N),\partial D(L,N))\to\mathrm{Conf}_n(D^\circ(L,N)).$$

参见 [5, 第 4.2 节、第 9.1 节。4] 了解详情。

从恒等映射$_{D(L,\ N)}$到 H_b 定义 Push_n 的环境同痕是相对于 $\bar{c}_1$，…， $\bar{c}_N$以及 $\bar{r}_1$，…，$\bar{r}_L$的。因此，Push_n 的像包含于$\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}}(D(L$中，$N))$并且根据定义4.2 $\mathrm{Forget}_{|\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}}(D(L\text{的像}N))}$ 是平凡的。因此，第一行限制为第二行中的短正合列。

映射 Push_n^{orb}最后一行中的 $\varphi_{\mathrm{Map}}\circ\mathrm{Push}_n$由复合映射给出。由于它是同构的复合，因此该映射也是一个同构。因此，第三行是一个短正合列，即定理 A中的短正合列，并且该图表是交换的。□

与经典情形一样，Birman正合列限制于纯子群。证明需要以下两个引理。我们回顾一下（1），我们在 Σ 上赋予了一个度量，使得 Γ-作用是等距的。 ε-领圈是 $\partial\Sigma(L)$的子曲面 $\{x\in\Sigma(L)\mid d(x,\ y)\leqslant\varepsilon$ 其中某个 $y\in\partial\Sigma(L)\}$。

引理 4.11. 设 $\varepsilon>0$ 满足： $\Gamma(\{p_1$、…、$p_{n-1}\})$中的每个标记点以及 $\Gamma(\{r_1$、…、$r_L\})$中的每个删点到边界的距离都大于 ε。那么，任何代表$\mathrm{Map}_{n-1}^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$，中某个映射类的同胚 H，都与一个在 $\partial\Sigma(L)$的 ε 邻域上与恒等映射一致的同胚 H_ε 环境同痕（相对于 p_1、…、p_{n-1}、r_1、…、r_L）。

证明。 所述环境同痕是亚历山大技巧的一种变体：设 $\partial\Sigma(\varepsilon)^\varepsilon$是一组边界平行弧，与边界的距离为 ε。由于 ε-领圈由 $\partial\Sigma(L)^\varepsilon$ 和 $\partial\Sigma$ 围成，且其中既没有标记点，也没有穿孔点，因此我们可以沿领圈推动边界至 $\partial\Sigma(L)^\varepsilon$，并在 $\partial\Sigma(L)^\varepsilon$ 之外将 H 替换为恒等映射 $\partial\Sigma(L)^\varepsilon$ （见图4.2）。该环境同痕将 H 连接到同胚 H_ε，后者在 $\partial\Sigma(L)$-领圈上与恒等映射重合 ε。□

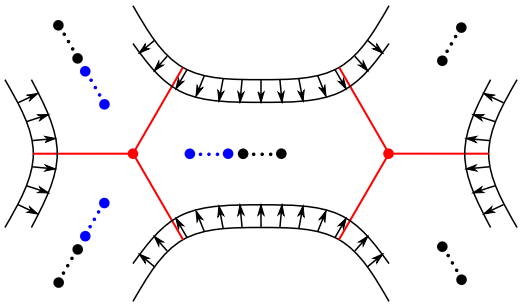


图 4.2. 亚历山大技巧的一种变体。

形式上，下面的引理独立于前一个引理。不过，给定标记点 p_1，……，p_{n-1}，我们的目标是应用它，在一个固定的 ε-领圈内添加另一个标记点。

引理 4.12. 设 $\varepsilon > 0$ 和 $p_{n(\varepsilon)}$ 是 $F^\circ(L,N)$ 中的一个点，满足 $p_{n(\varepsilon)} \neq p_j$，且到边界的距离小于 ε，其中 $1 \leqslant j < n$。关于标记点 $p_1, ..., p_n$ 的映射类群 $\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$，与关于标记点 $p_1, ..., p_{n-1}, p_{n(\varepsilon)}$ 的 $\mathrm{Map}_{n(\varepsilon)}^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$，同构。该同构限制到纯子群上仍成立。

证明。由于 p_n 和 $p_{n(\varepsilon)}$ 都包含在 $F^\circ(L,N)$ 中，因此存在一条包含于 $F^\circ(L,N)\backslash\{p_1,...,p_{n-1}\}$ 中的连接弧。沿这条弧进行点推送，我们得到一个同胚 P_n^ε，它属于 $\mathrm{Homeo}_{n-1}^{orb}(\Sigma_\Gamma(L), \partial\Sigma(L))$，并将 p_n 映射到 $p_{n(\varepsilon)}$。同胚 P_n^ε 诱导出一个同构

$$\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id},orb}(\Sigma_\Gamma(L)) \to \mathrm{Map}_{n(\varepsilon)}^{\mathrm{id},orb}(\Sigma_\Gamma(L)), [H] \mapsto [P_n^\varepsilon \circ H \circ (P_n^\varepsilon)^{-1}].$$

□

推论 4.13. 下图是一个可裂分的短正合列：

$$1 \to F_{n-1+L+N} \xrightarrow{\mathrm{Push}_{\mathrm{PMap}_n}^{orb}} \mathrm{PMap}_n^{\mathrm{id},orb}(\Sigma_\Gamma(L)) \xrightarrow{\mathrm{Forget}_{\mathrm{PMap}_n}^{orb}} \mathrm{PMap}_{n-1}^{\mathrm{id},orb}(\Sigma_\Gamma(L)) \to 1.$$

证明。对于 $n=1$，沿着 $\pi_1(\mathrm{Conf}_1(D(L \text{ 中环路的 } N)))$ 点推动，由定理 4.10 得到纯同胚，它们代表 $\mathrm{PMap}_1^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$ 中的元素。因此，轨形映射类群的短正合列限制为纯子群的短正合列：

$$1 \to \pi_1(\mathrm{Conf}_1(D(L,N)) \xrightarrow{\mathrm{Push}_1^{orb}} \mathrm{PMap}_1^{\mathrm{id},orb}(\Sigma_\Gamma(L)) \xrightarrow{\mathrm{Forget}_1^{orb}} \underbrace{\mathrm{PMap}^{\mathrm{id},orb}(\Sigma_\Gamma(L))}_{=1} \to 1.$$

由于 $\mathrm{Conf}_1(D(L, N))$ 与带有 $L+N$ 个穿孔点的圆盘同胚，因此其基本群是自由群 F_{L+N}。将 L 替换为 $n-1+L$，得到下图的第一行：

$$\begin{array}{ccccccc}
1 \to F_{n-1+L+N} & \xrightarrow{\mathrm{Push}_1^{orb}} & \mathrm{PMap}_1^{\mathrm{id},orb}(\Sigma_\Gamma(n-1+L)) & \xrightarrow{\mathrm{Forget}_1^{orb}} & \mathrm{PMap}^{\mathrm{id},orb}(\Sigma_\Gamma(n-1+L)) = 1 \\
\| & & \downarrow & & \downarrow \\
1 \to F_{n-1+L+N} & \xrightarrow{\mathrm{Push}_{\mathrm{PMap}_n}^{orb}} & \mathrm{PMap}_n^{\mathrm{id},orb}(\Sigma_\Gamma(L)) & \xrightarrow{\mathrm{Forget}_{\mathrm{PMap}_n}^{orb}} & \mathrm{PMap}_{n-1}^{\mathrm{id},orb}(\Sigma_\Gamma(L)) \to 1.
\end{array}$$

每个相对于……同伦于恒等映射的 Γ-等变同胚 $r_1, ..., r_L, p_1, ..., p_{n-1}$ 特别地，相对于……同伦于 $\mathrm{id}_{\Sigma(L)}$ 的 Γ-等变同伦 $r_1, ..., r_L$。这使我们能够将上图中的竖直映射定义为嵌入。如果我们将 Push_1^{orb}-映射与该嵌入复合

$$\mathrm{PMap}_1^{\mathrm{id},orb}(\Sigma_\Gamma(n-1+L)) \hookrightarrow \mathrm{PMap}_n^{\mathrm{id},orb}(\Sigma_\Gamma(L)),$$

我们得到 $\mathrm{Push}^{orb}_{\mathrm{PMap}_n}$。与第一行一样，$\mathrm{Forget}^{orb}_{\mathrm{PMap}_n}$ 是通过忘记标记点 p_n给出的。利用这些映射，上述图表是交换的。

还需证明底行是一个短正合列。由于 $\mathrm{Push}^{orb}_{\mathrm{PMap}_n}$ 是嵌入的复合，因此它是单射。由于图表交换，其像包含于 $\mathrm{Forget}^{orb}_{\mathrm{PMap}_n}$的核中。另一方面，若 $[H]$ 属于 $\mathrm{Forget}^{orb}_{\mathrm{PMap}_n}$的核，则 H 在相对于标记点 $r_1,...,r_L,p_1,...,p_{n-1}$的意义下同伦于恒等映射 $\mathrm{id}^{\Sigma(L)}$。这意味着 $[H]$ 属于纯子群 $\mathrm{PMap}_1^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(n-1+L))$.，而第一行的正合性意味着 $F_{n-1+L+N}$ 中的一个元素映射到 $[H]$。

此外，我们还需证明 $\mathrm{Forget}^{orb}_{\mathrm{PMap}_n}$ 是满射。为此，我们构造一个映射$\mathrm{Res}_\varepsilon:\mathrm{Map}_{n-1}^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))\to ,\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$.，它限制后构成 $\mathrm{Forget}^{orb}_{\mathrm{PMap}_n}$的一个截面。因此，我们利用引理4.12，假设标记点 $\Gamma(p_n)$ 位于 $\partial\Sigma(L)$ 的 ε-领圈内，且该领圈内不含其他标记点或删点。根据引理4.11，$\mathrm{Map}_{n-1}^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$ 中的每个映射类 $[H]$ 都由一个同胚 H_ε 表示，该同胚在 ε-领圈上是恒等映射。由于 p_n 的所有 Γ-平移都包含在 ε-领圈内，同胚 H_ε 尤其固定了第 n个标记点的 Γ-平移；也就是说，H_ε 表示 $\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$中的一个元素。我们定义

$$\mathrm{Res}_\varepsilon:\mathrm{Map}_{n-1}^{\mathrm{id},orb}(\Sigma_\Gamma(L))\to\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id},orb}(\Sigma_\Gamma(L)),\ [H]\mapsto[H_\varepsilon].$$

为使 Res_ε 定义良好，设 H 和 H' 是两个环境同痕的同胚（相对于标记点 $r_1,...,r_L,p_1,...,p_{n-1}$），其间的环境同痕为 H_t。我们可以对 H_t应用引理 4.11 中的推送操作。这将得到一个环境同痕 $(H_t)_\varepsilon$，它固定 $r_1,...,r_L,p_1,...,p_{n-1}$，并在 ε-领圈上限制为恒等映射。这个环境同痕连接 H_ε 和 H'_ε，这意味着映射 Res_ε 定义良好。显然，受限映射 $\mathrm{Res}_\varepsilon|_{\mathrm{PMap}^{\mathrm{id},}_{n-1}{}^{orb}(\Sigma_\Gamma(L))}$ 是一个截面 $\mathrm{Forget}^{orb}_{\mathrm{PMap}_n}$的截面。此外，引理 4.11 中的推送过程与群结构相容：若 H、H' 代表 $\mathrm{Map}_{n-1}^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$,中的元素，则有 $(H'\circ H)_\varepsilon=H'_\varepsilon\circ H_\varepsilon$。这意味着 Res_ε 是一个同态。因此，上述图表的第二行是一个可分裂的短正合列。□

定义 4.14. 若存在一个短正合列，使群 G 是以正规子群 N 和商空间 H 为基础的半直积，

$$1\to N\xrightarrow{\iota}G\xrightarrow{\pi}H\to 1$$

且该列存在一个截面 $s:H\to G$。此时，记作 $G=N\rtimes H$。

特别地，推论4.13表明：$\mathrm{PMap}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$. 是一个半直积

$$F_{n-1+L+N}\rtimes\mathrm{PMap}_{n-1}^{\mathrm{id},orb}(\Sigma_\Gamma(L)).$$

下文中，群的表示将是一个重要工具。特别是，根据 von Dyck 定理，表示使我们能够通过指定生成集上的映射来定义群同态，参见 [10, 第 346]。

引理 4.15 ([7, 引理 5。17]). 设 N 和 H 是由表示$N=\langle X\mid R\rangle$ 和 $H=\langle Y\mid S\rangle$给出的群。则以下结论等价：

(1) G 是一个半直积，其正规子群为 N，商空间为 H。(2) G 具有一个表示

$$G=\langle X,Y\mid R,S,y^{\pm1}xy^{\mp1}=\phi_{y^{\pm1}}(x)\ for\ all\ x\in X,y\in Y\rangle$$

使得对于所有 $x \in X$ 和 $y \in Y$， $\phi_{y^{\pm 1}}(x)$ 都是字母表 X 中的一个词。此外，对于每个 $y \in Y$，这些赋值

$$x \mapsto \phi_y(x) \tag{8}$$

诱导一个自同构 $\phi_y \in \mathrm{Aut}(N)$ 以及这些赋值

$$y \mapsto \phi_y \tag{9}$$

诱导一个同态 $H \to \mathrm{Aut}(N)$。

4.3. $\mathrm{PMap}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$**的生成集和表示.**

有了纯子群的 Birman正合列，接下来我们要推导 $\mathrm{PMap}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$, 的一个生成集和表示。因此，我们回顾图2.2中的基本域 F 的形状。这使我们能够将 F 嵌入 $\mathbb{C}$ ，使其成为以 $\frac{n-L-N}{2}$ 为中心、半径为 $\frac{n+L+N+2}{2}$ 的圆盘。对每个 $1 \leqslant \nu \leqslant N$，令 c_ν 为 ∂F 的上边界点，且 $\mathrm{Re}(c_\nu) = -L-\nu$；对每个 $1 \leqslant \lambda \leqslant L$，令 r_λ 为点 $-\lambda \in \mathbb{R}$ ；对每个 $1 \leqslant j \leqslant n$，令 p_j为 $\mathbb{R}$ 中的点 j（见图4.3）。此外，回想一下， ∂F中的每个锥点都有两条相邻的弧位于 ∂F中。出于技术原因，假设与 c_ν 相邻的弧嵌入 ∂F 时，是虚部为正且实部介于 $-L-\nu-\frac{1}{2}$和 $-L-\nu$之间，或介于$-L-\nu$和 $-L-\nu+\frac{1}{2}$之间的边界弧。

对于每个 $1 \leqslant i < j \leqslant n$，令 $D_{i,\ j} \subseteq F(L)$ 为圆盘

$$\left(B_{\frac{1}{4}}(p_i) \cup B_{\frac{1}{4}}(p_j)\right) \cap \{x \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(x) \geqslant 0\}$$
$$\cup A_{\frac{j-i}{2}-\frac{1}{4},\frac{j-i}{2}+\frac{1}{4}}\left(\tfrac{p_i+p_j}{2}\right) \cap \{x \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(x) \leqslant 0\}$$

其中 $A_{r,\ R}(x)$ 表示以 x为中心、内半径为 r 、外半径为 R 的环带。圆盘 $D_{i,\ j}$ 恰好包含标记点 p_i 和 p_j。$D_{i,\ j}$的示意图见图4.3 （左）。

此外，对于每个 $1 \leqslant k \leqslant n$ 和 $1 \leqslant \lambda \leqslant L$，令 $D_{r_\lambda,k} \subseteq F(L)$ 为圆盘。

$$\left(B_{\frac{1}{4}}(r_\lambda) \cup B_{\frac{1}{4}}(p_k)\right) \cap \{x \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(x) \geqslant 0\}$$
$$\cup A_{\frac{k+\lambda}{2}-\frac{1}{4},\frac{k+\lambda}{2}+\frac{1}{4}}\left(\tfrac{r_\lambda+p_k}{2}\right) \cap \{x \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(x) \leqslant 0\}.$$

圆盘 $D_{r_\lambda,k}$ 恰好包含标记点 r_λ 和 p_k。图 4.3 （右）展示了$D_{r_\lambda,k}$的图示。

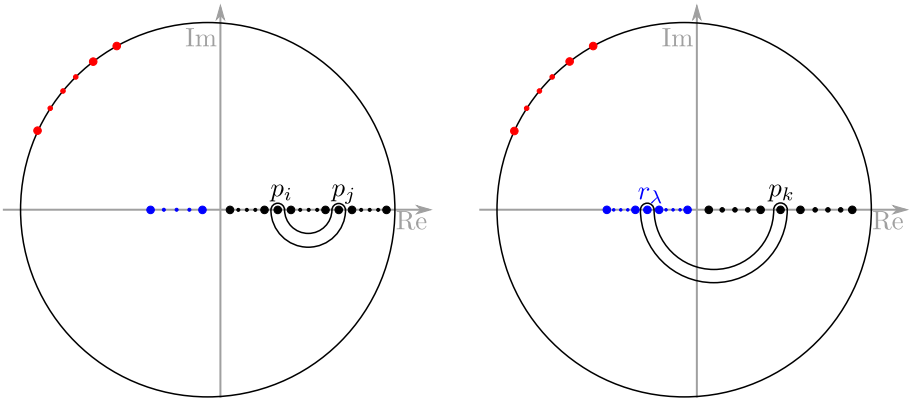


图4.3。圆盘$D_{i,\ j}$ （左）和$D_{r_\lambda,\ k}$ （右）。

同胚 A_{ji} 和 $B_{k\lambda}$ 分别在图 4.4 中所示的每个 Γ-平移的 $D_{i\text{上执行扭转，}\ j}$ 以及 $D_{r_\lambda,\ k}$。

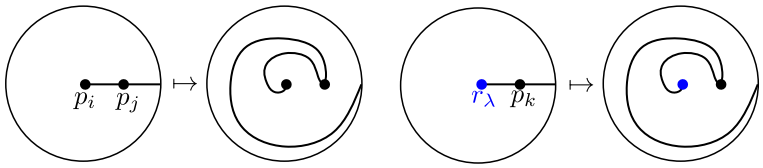
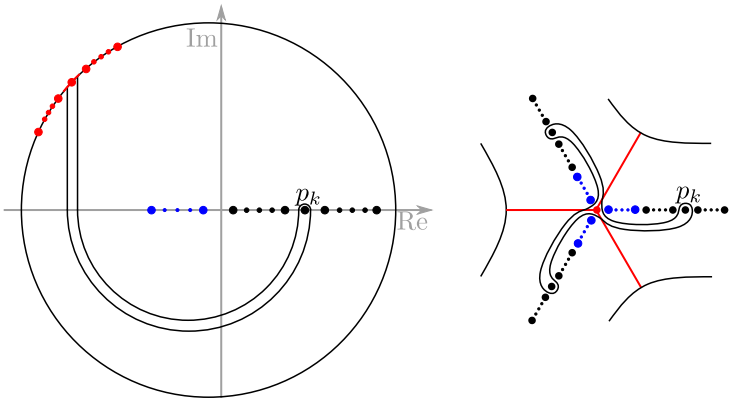


图 4.4. 由 A_{ji} （左）和 $B_{k\lambda}$ （右）诱导的扭转。

˜此外，对于每个 $1 \leqslant k \leqslant n$ 和 $1 \leqslant \nu \leqslant N$，令 $D_{c_\nu,\ k}$ 为该圆盘

$$B_{\frac{1}{4}}(p_k) \cap \{x \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(x) \geqslant 0\}$$
$$\cup A_{\frac{k+L+\nu}{2}-\frac{1}{4},\frac{k+L+\nu}{2}+\frac{1}{4}}\left(\frac{-L-\nu+p_k}{2}\right) \cap \{x \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(x) \leqslant 0\}$$
$$\cup \left\{x \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(x) \geqslant 0, \mathrm{Re}(x) \in \left[-L-\nu-\tfrac{1}{4}, -L-\nu+\tfrac{1}{4}\right]\right\} \cap F.$$

˜那么 $D_{c_\nu,\ k} := \mathbb{Z}_{m_\nu}.D_{c_\nu,\ k}$ 是一个 $\mathbb{Z}_{m_\nu}$不变圆盘，其中包含锥点 c_ν˜以及相邻的标记点 $\mathbb{Z}_{m_\nu}(p_k)$。图 4.5 展示了$D_{c_\nu,\ k}$ （左）以及圆盘 $D_{c_\nu,\ k} \subseteq \Sigma(L)$ 的一个示例（右）。



˜图 4.5. 圆盘 $D_{c_\nu,\ k} \subseteq F$ （左），以及$D_{c_\nu,\ k} \subseteq \Sigma(L)$ 在一个三阶锥点处的情形（右）。

令 $C_{k\nu}$ 为在$D_{c_\nu,\ k}$的每个 Γ平移像上执行 $\frac{2\pi}{m_\nu}$ 扭转的同胚，如图 3.1 所示。对于同胚 A_{ji}，$B_{k\lambda}$ 和 $C_{k\nu}$，我们将使用它们的名称作为相应映射类的缩写。

推论 4.16. 纯映射类群$\mathrm{PMap}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$，由以下元素生成

$$A_{ji}, B_{k\lambda} \ \ and \ \ C_{k\nu}$$

其中 $1 \leqslant i$、j、$k \leqslant n$ 满足 $i < j$、$1 \leqslant \lambda \leqslant L$ 和 $1 \leqslant \nu \leqslant N$。

证明。 证明上述元素生成 $\mathbf{PMap}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$，的方法是对 n进行归纳。

对于 $n = 0$，该群与 $\mathrm{PMap}^{\mathrm{id}\ \text{相同，}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$。根据定义 4.1，该群是平凡群。对于 $n \geqslant 1$，我们回顾推论 4.13 中的分裂短正合列：

$$1 \to F_{n-1+L+N} \xrightarrow{\mathrm{Push}^{orb}_{\mathrm{PMap}_n}} \mathrm{PMap}_n^{\mathrm{id},orb}(\Sigma_\Gamma(L)) \xrightarrow{\mathrm{Forget}^{orb}_{\mathrm{PMap}_n}} \mathrm{PMap}_{n-1}^{\mathrm{id},orb}(\Sigma_\Gamma(L)) \to 1.$$

所包含的自由群 $F_{n-1+L+N}$ 源自 $\pi_1(D(n-1+L+N))$。此群通过 $\mathrm{Push}^{orb}_{\mathrm{PMap}_n}$ 嵌入 $\mathrm{PMap}^{\mathrm{id}\ orb}_n(\Sigma_\Gamma(L))$，。回想一下，$\pi_1(D(n-1+L+N))$ 的自然生成元由环路表示，这些环路恰好环绕 $D(n-1+L+N)$ 的一个删点。这些生成元可以选取为使得 $\mathrm{Push}^{orb}_{\mathrm{PMap}_n}$ 将它们映射到由 A_{nj}，$B_{n\lambda}$ 和 $C_{n\nu}$ 表示的映射类，其中 $1\leqslant j<n$，$1\leqslant\lambda\leqslant L$ 和 $1\leqslant\nu\leqslant N$。对于 $n=1$，这意味着 $\mathrm{PMap}^{\mathrm{id}\ orb}_1(\Sigma_\Gamma(L))$，同构于$F_{L+N}$，并且元素 $B_{1\lambda}$，$C_{1\nu}$（其中 $1\leqslant\lambda\leqslant L$ 和 $1\leqslant\nu\leqslant N$）构成该自由群的一组基。

根据归纳法，我们可以假设 $\mathrm{PMap}^{\mathrm{id}\ orb}_{n-1}(\Sigma_\Gamma(L))$,由以下元素生成。

$$A_{ji}, B_{k\lambda}\ \text{ and }\ C_{k\nu}$$

与 $1\leqslant i,\ j,\ k<n,\ i<j,\ 1\leqslant\lambda\leqslant L$ 以及 $1\leqslant\nu\leqslant N$。推论4.13 中的部分将 $\mathrm{PMap}^{\mathrm{id}\ orb}_{n-1}(\Sigma_\Gamma(L))$，嵌入到 $\mathrm{PMap}^{\mathrm{id}\ orb}_n(\Sigma_\Gamma(L))$，中，并将 $\mathrm{PMap}^{\mathrm{id}\ orb}_{n-1}(\Sigma_\Gamma(L))$，的这些生成元映射为 $\mathrm{PMap}^{\mathrm{id}\ orb}_n(\Sigma_\Gamma(L))$, 中的同名生成元。此外，如上所述，$F_{n-1+L+N}$ 嵌入到 $\mathrm{PMap}^{\mathrm{id}\ orb}_n(\Sigma_\Gamma(L))$，中，作为由.....生成的子群。

$$A_{nj}, B_{n\lambda}\ \text{ and }\ C_{n\nu}$$

其中 $1\leqslant j<n,\ 1\leqslant\lambda\leqslant L$和 $1\leqslant\nu\leqslant N$。因此，推论 4.13 中的短正合列表明，上述集合生成了 $\mathrm{PMap}^{\mathrm{id}\ orb}_n(\Sigma_\Gamma(L))$, 。□

从推论4.13 推出表示的下一步，是考察上述生成元之间的关系。

引理 4.17. 设 A 是一个同胚，它表示群$\mathrm{Map}^{\mathrm{id}\ orb}_n(\Sigma_\Gamma(L))$,中的一个元素。此外，设 H 是以下同胚之一

$$A_{ji}, B_{k\lambda}\ \ and\ \ C_{k\nu}$$

对于某些 $1\leqslant i、\ j、\ k\leqslant n$，满足 $i<j、\ 1\leqslant\nu\leqslant N$ 和 $1\leqslant\lambda\leqslant L$。若 $D_H\subseteq F(L)$ 是 H 和 $A(\Gamma(D_H))=\Gamma(D_H)$ 对应的支撑圆盘，则 $[AHA^{-1}]=[H]$。

证明。 一般来说，共轭元 AHA^{-1} 与 H 之间由下列交换图联系起来

$$\begin{array}{ccc} A(\Gamma(D_H)) & \xrightarrow{AHA^{-1}|_{A(\Gamma(D_H))}} & A(\Gamma(D_H)) \\ {\scriptstyle A|_{\Gamma(D_H)}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle A|_{\Gamma(D_H)}} \\ \Gamma(D_H) & \xrightarrow{H|_{\Gamma(D_H)}} & \Gamma(D_H). \end{array}$$

由于我们还假设 $A(\Gamma(D_H))=\Gamma(D_H)$，两个元素 H 和 AHA^{-1} 分别在 $\mathrm{Map}^{orb}_{n(H)}(D_H)$ 中诱导出一个元素。

如果支撑圆盘不含锥点，那么它要么是一个圆盘 $D_{i,j}$，含有两个标记点 p_i 和 p_j；要么是一个圆盘 $D_{r_\lambda,k}$，含有一个删点 r_λ 和一个标记点 p_k。在第一种情况下，$\mathrm{Map}^{orb}_{n(H)}(D_H)$ 通过应用亚历山大技巧与二股辫子群同构，见 [5, 第 9.1 节。3]。由于亚历山大技巧同样适用于带一个删点的圆盘，第二种情况下的群与带 puncture 的圆盘的基本群同构。两种情况下，这都意味着 $\mathrm{Map}^{orb}_{n(H)}(D_H)$ 是无限循环群。

否则 D_H 含有一个锥点 c_ν 以及 m_ν 标记点的像，也就是说$(D_H)_{\mathbb{Z}_{m_\nu}}$ 是例3.6中描述的轨形。根据该例，映射类群$^{orb}_{n(H)}(D_H)$ 也是无限循环群。特别地，群映射类群$^{orb}_{n(H)}(D_H)$ 在每种情况下都是阿贝尔群。

由于 $A(\Gamma(D_H))=\Gamma(D_H)$，存在一个元素 $\gamma\in\Gamma$，使得

$$\gamma A: x\mapsto\gamma(A(x))$$

定义了 D_H 的一个同胚，该同胚表示 $\mathrm{Map}^{orb}_{n(H)}(D_H)$ 中的一个元素。利用这些群是阿贝尔群这一事实，可得 $[\gamma AH(\gamma A)^{-1}] = [H|_{D_H}]$。这等价于 $[AHA^{-1}|_{\gamma^{-1}(D_H)}] = [\gamma^{-1}H\gamma]$，其中

$$\gamma^{-1}H\gamma : \gamma^{-1}(D_H) \to \gamma^{-1}(D_H), \quad x \mapsto \gamma^{-1}(H(\gamma(x))).$$

由于 H 和 AHA^{-1} 是 Γ-等变的，这意味着 $[AHA^{-1}|_{D_H}] = [H|_{D_H}]$，进而有 $[AHA^{-1}] = [H]$。□

利用引理 4.17，我们注意到 $\mathrm{PMap}^{\mathrm{id}\ orb}_n(\Sigma_\Gamma(L))$, 中有以下关系：

引理 4.18。设 $1 \leqslant h,i,j,k,l < n$ 满足 $h < i < j < k < l$, $1 \leqslant \theta,\lambda \leqslant L$ 满足$\theta < \lambda$，且 $1 \leqslant \mu,\nu \leqslant N$ 满足 $\mu < \nu$。则有以下关系：

(1) a) $A_{lj}A_{nj}A_{lj}^{-1} = A_{nj}^{-1}A_{nl}^{-1}A_{nj}A_{nl}A_{nj}$ *and* a') $A_{lj}^{-1}A_{nj}A_{lj} = A_{nl}A_{nj}A_{nl}^{-1}$,
b) $A_{ji}A_{nj}A_{ji}^{-1} = A_{ni}^{-1}A_{nj}A_{ni}$ *and* b') $A_{ji}^{-1}A_{nj}A_{ji} = A_{nj}A_{ni}A_{nj}A_{ni}^{-1}A_{nj}^{-1}$,
c) $B_{j\lambda}A_{nj}B_{j\lambda}^{-1} = B_{n\lambda}^{-1}A_{nj}B_{n\lambda}$ *and* c') $B_{j\lambda}^{-1}A_{nj}B_{j\lambda} = A_{nj}B_{n\lambda}A_{nj}B_{n\lambda}^{-1}A_{nj}^{-1}$,
d) $C_{j\nu}A_{nj}C_{j\nu}^{-1} = C_{n\nu}^{-1}A_{nj}C_{n\nu}$ *and* d') $C_{j\nu}^{-1}A_{nj}C_{j\nu} = A_{nj}C_{n\nu}A_{nj}C_{n\nu}^{-1}A_{nj}^{-1}$,
e) $B_{j\lambda}B_{n\lambda}B_{j\lambda}^{-1} = B_{n\lambda}^{-1}A_{nj}^{-1}B_{n\lambda}A_{nj}B_{n\lambda}$ *and* e') $B_{j\lambda}^{-1}B_{n\lambda}B_{j\lambda} = A_{nj}B_{n\lambda}A_{nj}^{-1}$,
f) $C_{j\nu}C_{n\nu}C_{j\nu}^{-1} = C_{n\nu}^{-1}A_{nj}^{-1}C_{n\nu}A_{nj}C_{n\nu}$ *and* f') $C_{j\nu}^{-1}C_{n\nu}C_{j\nu} = A_{nj}C_{n\nu}A_{nj}^{-1}$,

(2) a) $[A_{ih},A_{nj}] = 1$, $[B_{i\lambda},A_{nj}] = 1$ *and* $[C_{i\nu},A_{nj}] = 1$,
b) $[A_{lk},A_{nj}] = 1$, $[A_{ji},B_{n\lambda}] = 1$, $[B_{j\theta},B_{n\lambda}] = 1$,
$[A_{ji},C_{n\nu}] = 1$, $[B_{j\lambda},C_{n\nu}] = 1$ *and* $[C_{j\mu},C_{n\nu}] = 1$,
c) $[A_{nl}A_{nj}A_{nl}^{-1},A_{li}] = 1$, $[A_{nl}A_{nj}A_{nl}^{-1},B_{l\lambda}] = 1$ *and*
$[A_{nl}A_{nj}A_{nl}^{-1},C_{l\nu}] = 1$,
d) $[A_{nj}B_{n\theta}A_{nj}^{-1},B_{j\lambda}] = 1$ *and* $[A_{nj}B_{n\theta}A_{nj}^{-1},C_{j\nu}] = 1$,
e) $[A_{nj}C_{n\mu}A_{nj}^{-1},C_{j\nu}] = 1$.

特别是，这些关系意味着：

(3) a) $A_{li}A_{nj}A_{li}^{-1} = A_{ni}^{-1}A_{nl}^{-1}A_{ni}A_{nl}A_{nj}A_{nl}^{-1}A_{ni}^{-1}A_{nl}A_{ni}$,
a') $A_{li}^{-1}A_{nj}A_{li} = A_{nl}A_{ni}A_{nl}^{-1}A_{ni}^{-1}A_{nj}A_{ni}A_{nl}A_{ni}^{-1}A_{nl}^{-1}$,
b) $B_{l\lambda}A_{nj}B_{l\lambda}^{-1} = B_{n\lambda}^{-1}A_{nl}^{-1}B_{n\lambda}A_{nl}A_{nj}A_{nl}^{-1}B_{n\lambda}^{-1}A_{nl}B_{n\lambda}$,
b') $B_{l\lambda}^{-1}A_{nj}B_{l\lambda} = A_{nl}B_{n\lambda}A_{nl}^{-1}B_{n\lambda}^{-1}A_{nj}B_{n\lambda}A_{nl}B_{n\lambda}^{-1}A_{nl}^{-1}$,
c) $C_{l\nu}A_{nj}C_{l\nu}^{-1} = C_{n\nu}^{-1}A_{nl}^{-1}C_{n\nu}A_{nl}A_{nj}A_{nl}^{-1}C_{n\nu}^{-1}A_{nl}C_{n\nu}$,
c') $C_{l\nu}^{-1}A_{nj}C_{l\nu} = A_{nl}C_{n\nu}A_{nl}^{-1}C_{n\nu}^{-1}A_{nj}C_{n\nu}A_{nl}C_{n\nu}^{-1}A_{nl}^{-1}$,
d) $B_{j\lambda}B_{n\theta}B_{j\lambda}^{-1} = B_{n\lambda}^{-1}A_{nj}^{-1}B_{n\lambda}A_{nj}B_{n\theta}A_{nj}^{-1}B_{n\lambda}^{-1}A_{nj}B_{n\lambda}$,
d') $B_{j\lambda}^{-1}B_{n\theta}B_{j\lambda} = A_{nj}B_{n\lambda}A_{nj}^{-1}B_{n\lambda}^{-1}B_{n\theta}B_{n\lambda}A_{nj}B_{n\lambda}^{-1}A_{nj}^{-1}$,
e) $C_{j\nu}B_{n\lambda}C_{j\nu}^{-1} = C_{n\nu}^{-1}A_{nj}^{-1}C_{n\nu}A_{nj}B_{n\lambda}A_{nj}^{-1}C_{n\nu}^{-1}A_{nj}C_{n\nu}$,
e') $C_{j\nu}^{-1}B_{n\lambda}C_{j\nu} = A_{nj}C_{n\nu}A_{nj}^{-1}C_{n\nu}^{-1}B_{n\lambda}C_{n\nu}A_{nj}C_{n\nu}^{-1}A_{nj}^{-1}$,
f) $C_{j\nu}C_{n\mu}C_{j\nu}^{-1} = C_{n\nu}^{-1}A_{nj}^{-1}C_{n\nu}A_{nj}C_{n\mu}A_{nj}^{-1}C_{n\nu}^{-1}A_{nj}C_{n\nu}$,
f') $C_{j\nu}^{-1}C_{n\mu}C_{j\nu} = A_{nj}C_{n\nu}A_{nj}^{-1}C_{n\nu}^{-1}C_{n\mu}C_{n\nu}A_{nj}C_{n\nu}^{-1}A_{nj}^{-1}$.

证明。式 4.18(1) 中的关系具有以下形式：$AHA^{-1} = \tilde{A}H\tilde{A}^{-1}$ 其中 H 如同引理 4.17 中的 $\tilde{A}$, A 纯 Γ-等变同胚。这等价于 $\tilde{A}^{-1}AHA^{-1}\tilde{A} = H$。因此，根据引理 4.17，只需注意到$\tilde{A}^{-1}A(\Gamma(D_H)) = \Gamma(D_H)$或等价地 $A(\Gamma(D_H)) = \tilde{A}(\Gamma(D_H))$。图 4.6 对关系 4.18(1)a)-f)作了详细说明4.18(1)a')-f') 其余关系可由类似的图得到，其中我们分别沿红色和蓝色箭头向相反方向进行扭转。

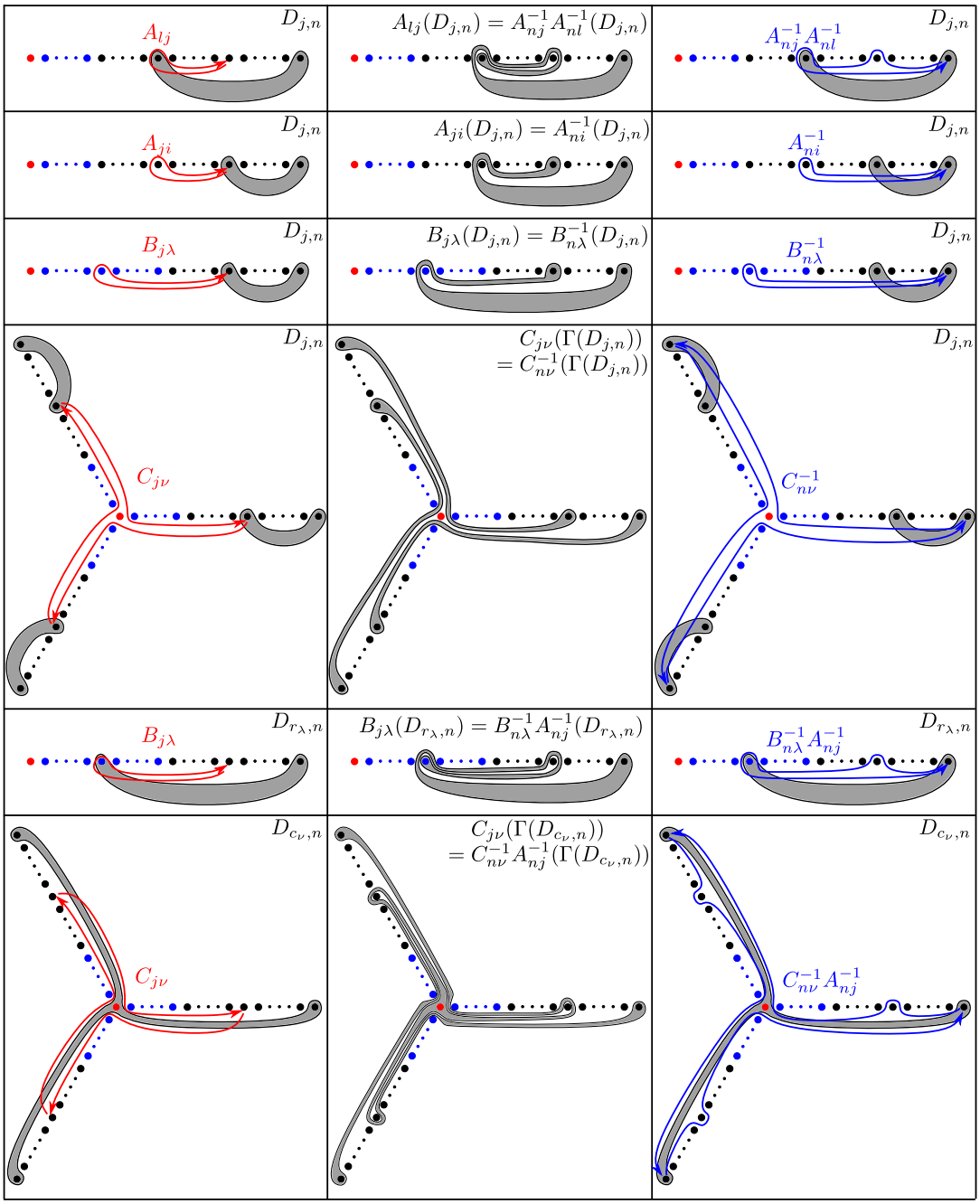


图 4.6. 关系的观察 4.18(1)a)-f) （从上到下）通过考察支撑圆盘。

对于 4.18(2) 中的交换子关系，我们验证交换映射类可以由具有不相交支撑的同胚实现。在两个生成元交换的情形下，这直接由第 34页对生成元的定义可得。此外，在图 4.7中，我们确定了$A_{nl}A_{nj}A_{nl}^{-1}$、 $A_{nj}B_{n\theta}A_{nj}^{-1}$ 和 $A_{nj}C_{n\mu}A_{nj}^{-1}$ 的支撑圆盘。对于这些圆盘中的每一个， Γ-轨道为

与对易生成元的支撑相离。因此，交换子关系成立。在图 4.7中，以灰色标出了示例性对易生成元的支撑。

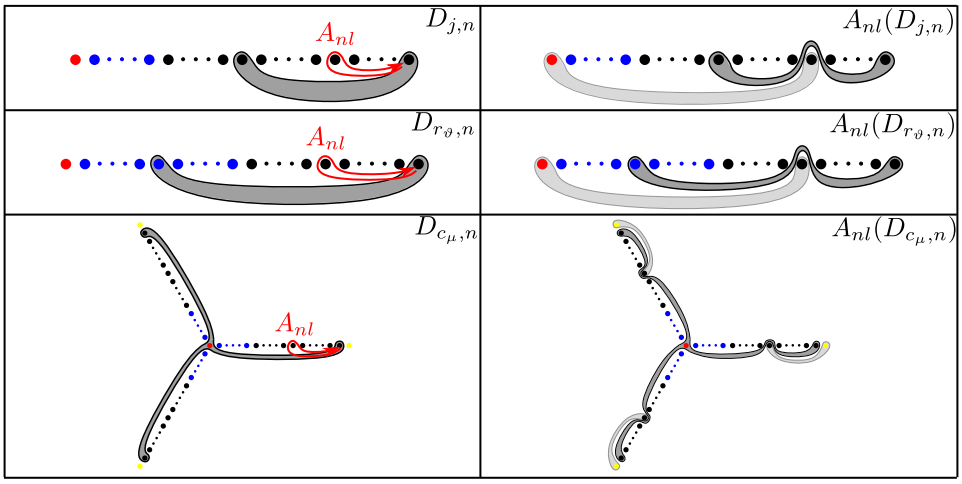


图 4.7。确定 $A_{nl}A_{nj}A_{nl}^{-1}$ 、$A_{nj}B_{n\theta}A_{nj}^{-1}$ 和 $A_{nj}C_{n\mu}A_{nj}^{-1}$ 的支撑圆盘。

对于额外的共轭关系，我们推导前两个例子。其余关系可用类似方法得出。为此，我们强调，4.18(1) 中的关系蕴含：

$$(10)\qquad A_{li}A_{nl}A_{ni} \overset{4.18(1)a')}{=} A_{ni}A_{li}A_{nl} \overset{4.18(1)b)}{=} A_{nl}A_{ni}A_{li}.$$

根据 $[A_{nl}A_{nj}A_{nl}^{-1},\ A_{li}] = 1$ 中4.18(2) 的交换子关系以及关系（10），可得出缺失关系中的第一条：

$$\begin{aligned}
& A_{li}A_{nl}A_{nj}A_{nl}^{-1} = A_{nl}A_{nj}A_{nl}^{-1}A_{li} && \mid A_{ni}\cdot\ \cdot A_{nl}\\
\Leftrightarrow\ & A_{ni}A_{li}A_{nl}A_{nj} = A_{ni}A_{nl}A_{nj}A_{nl}^{-1}A_{li}A_{nl}\\
\overset{\vee}{\Leftrightarrow}\ & A_{ni}A_{li}A_{nl}A_{nj} = A_{ni}A_{nl}A_{nj}A_{nl}^{-1}(A_{ni}^{-1}A_{ni})A_{li}A_{nl}\\
\overset{(10)}{\Leftrightarrow}\ & A_{nl}A_{ni}A_{li}A_{nj} = A_{ni}A_{nl}A_{nj}A_{nl}^{-1}A_{ni}^{-1}A_{nl}A_{ni}A_{li} && \mid A_{ni}^{-1}A_{nl}^{-1}\cdot\ \cdot A_{li}^{-1}\\
\Leftrightarrow\ & A_{li}A_{nj}A_{li}^{-1} = A_{ni}^{-1}A_{nl}^{-1}A_{ni}A_{nl}A_{nj}A_{nl}^{-1}A_{ni}^{-1}A_{nl}A_{ni}.
\end{aligned}$$

从最后一个等式中，我们还可以得到第二个共轭关系：

$$\begin{aligned}
& A_{ni}^{-1}A_{nl}^{-1}A_{ni}A_{nl}A_{nj}A_{nl}^{-1}A_{ni}^{-1}A_{nl}A_{ni} = A_{li}A_{nj}A_{li}^{-1} && \mid A_{nl}^{-1}A_{ni}^{-1}A_{nl}A_{ni}\cdot\ \cdot A_{ni}^{-1}A_{nl}^{-1}A_{ni}A_{nl}\\
\Leftrightarrow\ & A_{nj} = A_{nl}^{-1}A_{ni}^{-1}A_{nl}A_{ni}A_{li}A_{nj}A_{li}^{-1}A_{ni}^{-1}A_{nl}^{-1}A_{ni}A_{nl}\\
\overset{(10)}{\Leftrightarrow}\ & A_{nj} = A_{nl}^{-1}A_{ni}^{-1}A_{li}A_{nl}A_{ni}A_{nj}A_{ni}^{-1}A_{nl}^{-1}A_{li}^{-1}A_{ni}A_{nl}\\
\overset{\vee}{\Leftrightarrow}\ & A_{nj} = (A_{li}A_{li}^{-1})A_{nl}^{-1}A_{ni}^{-1}A_{li}A_{nl}A_{ni}A_{nj}A_{ni}^{-1}A_{nl}^{-1}A_{li}^{-1}A_{ni}A_{nl}(A_{li}A_{li}^{-1}) && \mid A_{li}^{-1}\cdot\ \cdot A_{li}\\
\Leftrightarrow\ & A_{li}^{-1}A_{nj}A_{li} = A_{li}^{-1}A_{nl}^{-1}A_{ni}^{-1}A_{li}A_{nl}A_{ni}A_{nj}A_{ni}^{-1}A_{nl}^{-1}A_{li}^{-1}A_{ni}A_{nl}A_{li}\\
\overset{4.18(1)a'),b')}{\Leftrightarrow}\ & A_{li}^{-1}A_{nj}A_{li} = A_{nl}A_{ni}A_{nl}^{-1}A_{ni}^{-1}A_{nl}^{-1}A_{nl}A_{ni}^{-1}A_{nl}^{-1}A_{nl}A_{ni}A_{nj}\\
& A_{ni}^{-1}A_{nl}^{-1}A_{nl}A_{ni}A_{nl}^{-1}A_{nl}A_{ni}A_{nl}A_{ni}^{-1}A_{nl}^{-1}\\
\Leftrightarrow\ & A_{li}^{-1}A_{nj}A_{li} = A_{nl}A_{ni}A_{nl}^{-1}A_{ni}^{-1}A_{nj}A_{ni}A_{nl}A_{ni}^{-1}A_{nl}^{-1}.
\end{aligned}$$

□

现在，$\mathbf{PMap}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$,的半直积结构使我们能够用上述生成元推导出一个有限表示。

推论 4.19. 纯映射类群 $\mathrm{PMap}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$ ，具有以下生成元表示】【。

$$A_{ji}, B_{k\lambda} \quad and \quad C_{k\nu},$$

对于 $1 \leqslant i$、j、$k \leqslant n$，其中 $i < j$、$1 \leqslant \lambda \leqslant L$ 和 $1 \leqslant \nu \leqslant N$，以及 $1 \leqslant i$、j、k、$l \leqslant n$ 在 $i < j < k < l$、$1 \leqslant \theta$、$\lambda \leqslant L$、$\theta < \lambda$ 和$1 \leqslant \mu$、$\nu \leqslant N$ 在 $\mu < \nu$时的以下定义关系：

(1) $[A_{ji}, A_{lk}] = 1$, $[B_{j\lambda}, A_{lk}] = 1$和 $[C_{j\nu}, A_{lk}] = 1$,(2) $[A_{li}, A_{kj}] = 1$, $[B_{l\lambda}, A_{kj}] = 1$, $[B_{l\lambda}, B_{k\theta}] = 1$, $[C_{l\nu}, A_{kj}] = 1$,$[C_{l\nu}, B_{k\lambda}] = 1$和 $[C_{l\nu}, C_{k\mu}] = 1$,(3) $[A_{lk}A_{lj}A_{lk}^{-1}, A_{ki}] = 1$, $[A_{kj}A_{ki}A_{kj}^{-1}, B_{j\lambda}] = 1$, $[A_{kj}B_{k\theta}A_{kj}^{-1}, B_{j\lambda}] = 1$, $[A_{kj}A_{ki}A_{kj}^{-1}, C_{j\nu}] = 1$, $[A_{kj}C_{k\mu}A_{kj}^{-1}, C_{j\nu}] = 1$和 $[A_{kj}B_{k\lambda}A_{kj}^{-1}, C_{j\nu}] = 1$,(4) $A_{ji}A_{kj}A_{ki} = A_{ki}A_{ji}A_{kj} = A_{kj}A_{ki}A_{ji}$,$A_{ji}B_{j\lambda}B_{i\lambda} = B_{i\lambda}A_{ji}B_{j\lambda} = B_{j\lambda}B_{i\lambda}A_{ji}$ 和$A_{ji}C_{j\nu}C_{i\nu} = C_{i\nu}A_{ji}C_{j\nu} = C_{j\nu}C_{i\nu}A_{ji}$.

证明。我们对 n 使用归纳法，证明所声称的 $\mathbf{PMap}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$,表示。

对于 $n = 0$ 和 $n = 1$，沿用推论 4.16证明中的相同论证可得，$\mathbf{PMap}_0^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$,是平凡群，而 $\mathbf{PMap}_1^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$,是秩为 $L + N$、以 $B_{1\lambda}, C_{1\nu}$ 为基的自由群，其中 $1 \leqslant \lambda \leqslant L$ 和 $1 \leqslant \nu \leqslant N$。也就是说，对于 $n = 0$ 和 $n = 1$，$\mathbf{PMap}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$,具有上述表示。

根据归纳假设，我们假定 $\mathbf{PMap}_{n-1}^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$ ，具有上述所声称的表示。此外，回顾推论 4.13，群 $\mathbf{PMap}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$ ，具有半直积结构 $F_{n-1+L+N} \rtimes \mathbf{PMap}_{n-1}^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$, 。应用引理 4.15，我们得到一个由生成元 A_{ji} 构成的表示，其中 $1 \leqslant i < j \leqslant n$ 和 $C_{k\nu}$，$B_{k\lambda}$ 和 $1 \leqslant k \leqslant n$，$1 \leqslant \nu \leqslant N$，$1 \leqslant \lambda \leqslant L$ 满足以下关系：由于 $F_{n-1+L+N}$ 是自由群，在此情形下，引理 4.15 中称为 R 的关系集为空。从 $\mathbf{PMap}_{n-1}^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$ ，出发，群 $\mathbf{PMap}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$ ，继承以下关系：对于 $1 \leqslant i$，j，k，$l < n$，其中 $i < j < k < l$，$1 \leqslant \theta$，以及 $\lambda \leqslant L$，其中$\theta < \lambda$，还有 $1 \leqslant \mu$，其中 $\mu < \nu$，这些关系在引理 4.15 中称为 S：

- $[A_{ji}, A_{lk}] = 1$, $[B_{j\lambda}, A_{lk}] = 1$ and $[C_{j\nu}, A_{lk}] = 1$,
- $[A_{li}, A_{kj}] = 1$, $[B_{l\lambda}, A_{kj}] = 1$, $[B_{l\lambda}, B_{k\theta}] = 1$, $[C_{l\nu}, A_{kj}] = 1$, $[C_{l\nu}, B_{k\lambda}] = 1$ and $[C_{l\nu}, C_{k\mu}] = 1$,
- $[A_{lk}A_{lj}A_{lk}^{-1}, A_{ki}] = 1$, $[A_{kj}A_{ki}A_{kj}^{-1}, B_{j\lambda}] = 1$, $[A_{kj}B_{k\theta}A_{kj}^{-1}, B_{j\lambda}] = 1$, $[A_{kj}A_{ki}A_{kj}^{-1}, C_{j\nu}] = 1$, $[A_{kj}C_{k\mu}A_{kj}^{-1}, C_{j\nu}] = 1$ and $[A_{kj}B_{k\lambda}A_{kj}^{-1}, C_{j\nu}] = 1$,
- $A_{ji}A_{kj}A_{ki} = A_{ki}A_{ji}A_{kj} = A_{kj}A_{ki}A_{ji}$, $A_{ji}B_{j\lambda}B_{i\lambda} = B_{i\lambda}A_{ji}B_{j\lambda} = B_{j\lambda}B_{i\lambda}A_{ji}$ and $A_{ji}C_{j\nu}C_{i\nu} = C_{i\nu}A_{ji}C_{j\nu} = C_{j\nu}C_{i\nu}A_{ji}$.

此外，这些生成元还满足引理 4.18 中的共轭关系。下面我们按一定顺序列出这些关系，以便观察到这些关系保证了 $\mathbf{Push}^{orb}_{\mathrm{PMap}_n}$ 嵌入为 $F_{n-1+L+N}$ 一个正规子群，即共轭关系以及来自 $\mathrm{PMap}_{n-1}^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$ 的关系给出了引理 4.15(2) 中所述的表示。

还需证明该表示与所断言的表示等价。因此，我们说明共轭关系如何纳入 $\mathrm{PMap}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$, 如上所述的表示中。这需要以下观察。在（12）中，我们使用：

$$\begin{aligned} & A_{lj}A_{nj}A_{lj}^{-1} = A_{nj}^{-1}A_{nl}^{-1}A_{nj}A_{nl}A_{nj} && |A_{nl}A_{nj}\cdot\ \cdot A_{lj} \\ \Leftrightarrow\quad & A_{nl}A_{nj}A_{lj}A_{nj} = A_{nj}A_{nl}A_{nj}A_{lj} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{(13\text{-}1)}{\Leftrightarrow} && A_{nj}A_{lj}A_{nl}A_{nj} = A_{nj}A_{nj}A_{lj}A_{nl} && \mid A_{nj}^{-1}\cdot\\
&\Leftrightarrow && A_{lj}A_{nl}A_{nj} = A_{nj}A_{lj}A_{nl} \text{ from 4.19(4).}
\end{aligned}$$

（13）中的观察显而易见。对于（14），我们观察到：

$$\begin{aligned}
& && A_{li}A_{nj}A_{li}^{-1} = A_{ni}^{-1}A_{nl}^{-1}A_{ni}A_{nl}A_{nj}A_{nl}^{-1}A_{ni}^{-1}A_{nl}A_{ni} && \mid A_{nl}A_{ni}\cdot\ \cdot A_{li}\\
&\Leftrightarrow && A_{nl}A_{ni}A_{li}A_{nj} = A_{ni}A_{nl}A_{nj}A_{nl}^{-1}A_{ni}^{-1}A_{nl}A_{ni}A_{li}\\
&\overset{(13\text{-}1)}{\Leftrightarrow} && A_{ni}A_{li}A_{nl}A_{nj} = A_{ni}A_{nl}A_{nj}A_{nl}^{-1}A_{ni}^{-1}A_{ni}A_{li}A_{nl} && \mid A_{ni}^{-1}\cdot\\
&\Leftrightarrow && A_{li}A_{nl}A_{nj} = A_{nl}A_{nj}A_{nl}^{-1}A_{li}A_{nl} && \mid \cdot A_{nl}^{-1}\\
&\Leftrightarrow && A_{li}A_{nl}A_{nj}A_{nl}^{-1} = A_{nl}A_{nj}A_{nl}^{-1}A_{li} \text{ from 4.19(3).}
\end{aligned}$$

为推出（15），我们还注意到

$$(11)\qquad A_{lj}A_{nl}A_{nj} \overset{(12)}{=} A_{nj}A_{lj}A_{nl} \overset{(13\text{-}1)}{=} A_{nl}A_{nj}A_{lj}.$$

这意味着：

$$\begin{aligned}
& A_{li}^{-1}A_{nj}A_{li} && = && A_{nl}A_{ni}A_{nl}^{-1}A_{ni}^{-1}A_{nj}A_{ni}A_{nl}A_{ni}^{-1}A_{nl}^{-1} && \mid A_{li}\cdot\ \cdot A_{li}^{-1}\\
\Leftrightarrow\ & A_{nj} && = && A_{li}A_{nl}A_{ni}A_{nl}^{-1}A_{ni}^{-1}A_{nj}A_{ni}A_{nl}A_{ni}^{-1}A_{nl}^{-1}A_{li}^{-1}\\
& && \overset{(11)}{=} && A_{nl}A_{ni}A_{li}A_{nl}^{-1}A_{ni}^{-1}A_{nj}A_{ni}A_{nl}A_{li}^{-1}A_{ni}^{-1}A_{nl}^{-1}\\
& && \overset{\vee}{=} && A_{nl}A_{ni}A_{li}A_{nl}^{-1}A_{ni}^{-1}(A_{li}^{-1}A_{li})A_{nj}\\
& && && (A_{li}^{-1}A_{li})A_{ni}A_{nl}A_{li}^{-1}A_{ni}^{-1}A_{nl}^{-1}\\
& && \overset{(12,13\text{-}1)}{=} && A_{nl}A_{ni}A_{ni}^{-1}A_{nl}^{-1}A_{ni}A_{ni}^{-1}A_{nl}^{-1}A_{ni}^{-1}A_{nl}A_{ni}A_{li}A_{nj}\\
& && && A_{li}^{-1}A_{ni}^{-1}A_{nl}^{-1}A_{ni}A_{nl}A_{ni}A_{ni}^{-1}A_{nl}A_{ni}A_{ni}^{-1}A_{nl}^{-1}\\
& && = && A_{nl}^{-1}A_{ni}^{-1}A_{nl}A_{ni}A_{li}A_{nj}A_{li}^{-1}A_{ni}^{-1}A_{nl}^{-1}A_{ni}A_{nl}\\
\Leftrightarrow\ & A_{li}A_{nj}A_{li}^{-1} && = && A_{ni}^{-1}A_{nl}^{-1}A_{ni}A_{nl}A_{nj}A_{nl}^{-1}A_{ni}^{-1}A_{nl}A_{ni}\\
\overset{(14)}{\Leftrightarrow}\ & [A_{nl}A_{nj}A_{nl}^{-1}, A_{li}] && = && 1.
\end{aligned}$$

利用这些以及其他类似的观察，共轭关系便纳入了上述表示中。在下面的列表中，编号为 (x-y) 的等价关系依赖于与上文针对 (x) 所述观察类似的观察。设 $1 \leqslant h,\ i,\ j,\ k,\ l < n$ 满足 $h < i < j < k < l$，$1 \leqslant \theta,\ \iota,\ \lambda \leqslant L$ 满足 $\theta < \iota < \lambda$，且 $1 \leqslant \mu,\ \nu,\ o \leqslant N$ 满足 $\mu < \nu < o$。

$$A_{lk}A_{nj}A_{lk}^{-1} = A_{lk}^{-1}A_{nj}A_{lk} = A_{nj} \quad\Leftrightarrow\quad [A_{lk}, A_{nj}] = 1,$$

$$(12)\qquad A_{lj}A_{nj}A_{lj}^{-1} = A_{nj}^{-1}A_{nl}^{-1}A_{nj}A_{nl}A_{nj} \overset{(13\text{-}1)}{\Leftrightarrow} A_{nj}A_{lj}A_{nl} = A_{lj}A_{nl}A_{nj},$$

$$(13)\qquad A_{lj}^{-1}A_{nj}A_{lj} = A_{nl}A_{nj}A_{nl}^{-1} \quad\Leftrightarrow\quad A_{nj}A_{lj}A_{nl} = A_{lj}A_{nl}A_{nj},$$

$$(14)\qquad A_{li}A_{nj}A_{li}^{-1} = A_{ni}^{-1}A_{nl}^{-1}A_{ni}A_{nl}A_{nj}A_{nl}^{-1}A_{ni}^{-1}A_{nl}A_{ni} \overset{(13\text{-}1)}{\Leftrightarrow} [A_{nl}A_{nj}A_{nl}^{-1}, A_{li}] = 1,$$

$$(15)\qquad A_{li}^{-1}A_{nj}A_{li} = A_{nl}A_{ni}A_{nl}^{-1}A_{ni}^{-1}A_{nj}A_{ni}A_{nl}A_{ni}^{-1}A_{nl}^{-1} \overset{(12,13\text{-}1)}{\Leftrightarrow} [A_{nl}A_{nj}A_{nl}^{-1}, A_{li}] = 1,$$

$$(14\text{-}1)\qquad B_{l\lambda}A_{nj}B_{l\lambda}^{-1} = B_{n\lambda}^{-1}A_{nl}^{-1}B_{n\lambda}A_{nl}A_{nj}A_{nl}^{-1}B_{n\lambda}^{-1}A_{nl}B_{n\lambda} \overset{(13\text{-}2)}{\Leftrightarrow} [A_{nl}A_{nj}A_{nl}^{-1}, B_{l\lambda}] = 1,$$

$$(15\text{-}1)\qquad B_{l\lambda}^{-1}A_{nj}B_{l\lambda} = A_{nl}B_{n\lambda}A_{nl}^{-1}B_{n\lambda}^{-1}A_{nj}B_{n\lambda}A_{nl}B_{n\lambda}^{-1}A_{nl}^{-1} \overset{(12\text{-}4,13\text{-}2)}{\Leftrightarrow} [A_{nl}A_{nj}A_{nl}^{-1}, B_{l\lambda}] = 1,$$

(14-2)

$$C_{l\nu}A_{nj}C_{l\nu}^{-1} = C_{n\nu}^{-1}A_{nl}^{-1}C_{n\nu}A_{nl}A_{nj}A_{nl}^{-1}C_{n\nu}^{-1}A_{nl}C_{n\nu} \overset{(13\text{-}3)}{\Leftrightarrow} [A_{nl}A_{nj}A^{-\ \ \ 1}_{nl}, C_{l\nu}] = 1,$$

(15-2)

$$C_{l\nu}^{-1}A_{nj}C_{l\nu} = A_{nl}C_{n\nu}A_{nl}^{-1}C_{n\nu}^{-1}A_{nj}C_{n\nu}A_{nl}C_{n\nu}^{-1}A_{nl}^{-1} \overset{(12\text{-}5,\ 13\text{-}3)}{\Leftrightarrow} [A_{nl}A_{nj}A^{-\ \ \ 1}_{nl}, C_{l\nu}] = 1,$$

(13-1) $$A_{ji}A_{nj}A_{ji}^{-1} = A_{ni}^{-1}A_{nj}A_{ni} \Leftrightarrow A_{ni}A_{ji}A_{nj} = A_{nj}A_{ni}A_{ji},$$

(12-1) $$A_{ji}^{-1}A_{nj}A_{ji} = A_{nj}A_{ni}A_{nj}A_{ni}^{-1}A_{nj}^{-1} \overset{(13)}{\Leftrightarrow} A_{ji}A_{nj}A_{ni} = A_{nj}A_{ni}A_{ji},$$

(13-2) $$B_{j\lambda}A_{nj}B_{j\lambda}^{-1} = B_{n\lambda}^{-1}A_{nj}B_{n\lambda} \Leftrightarrow B_{n\lambda}B_{j\lambda}A_{nj} = A_{nj}B_{n\lambda}B_{j\lambda},$$

(12-2) $$B_{j\lambda}^{-1}A_{nj}B_{j\lambda} = A_{nj}B_{n\lambda}A_{nj}B_{n\lambda}^{-1}A_{nj}^{-1} \overset{(13\text{-}4)}{\Leftrightarrow} B_{j\lambda}A_{nj}B_{n\lambda} = A_{nj}B_{n\lambda}B_{j\lambda},$$

(13-3) $$C_{j\nu}A_{nj}C_{j\nu}^{-1} = C_{n\nu}^{-1}A_{nj}C_{n\nu} \Leftrightarrow C_{n\nu}C_{j\nu}A_{nj} = A_{nj}C_{n\nu}C_{j\nu},$$

(12-3) $$C_{j\nu}^{-1}A_{nj}C_{j\nu} = A_{nj}C_{n\nu}A_{nj}C_{n\nu}^{-1}A_{nj}^{-1} \overset{(13\text{-}5)}{\Leftrightarrow} C_{j\nu}A_{nj}C_{n\nu} = A_{nj}C_{n\nu}C_{j\nu},$$

$$A_{ih}A_{nj}A_{ih}^{-1} = A_{ih}^{-1}A_{nj}A_{ih} = A_{nj} \Leftrightarrow [A_{ih}, A_{nj}] = 1,$$

$$B_{i\lambda}A_{nj}B_{i\lambda}^{-1} = B_{i\lambda}^{-1}A_{nj}B_{i\lambda} = A_{nj} \Leftrightarrow [B_{i\lambda}, A_{nj}] = 1,$$

$$C_{i\nu}A_{nj}C_{i\nu}^{-1} = C_{i\nu}^{-1}A_{nj}C_{i\nu} = A_{nj} \Leftrightarrow [C_{i\nu}, A_{nj}] = 1.$$

$$A_{ji}B_{n\iota}A_{ji}^{-1} = A_{ji}^{-1}B_{n\iota}A_{ji} = B_{n\iota} \Leftrightarrow [A_{ji}, B_{n\iota}] = 1,$$

$$B_{j\theta}B_{n\iota}B_{j\theta}^{-1} = B_{j\theta}^{-1}B_{n\iota}B_{j\theta} = B_{n\iota} \Leftrightarrow [B_{j\theta}, B_{n\iota}] = 1,$$

(12-4) $$B_{j\iota}B_{n\iota}B_{j\iota}^{-1} = B_{n\iota}^{-1}A_{nj}^{-1}B_{n\iota}A_{nj}B_{n\iota} \overset{(13\text{-}2)}{\Leftrightarrow} A_{nj}B_{n\iota}B_{j\iota} = B_{j\iota}A_{nj}B_{n\iota},$$

(13-4) $$B_{j\iota}^{-1}B_{n\iota}B_{j\iota} = A_{nj}B_{n\iota}A_{nj}^{-1} \Leftrightarrow B_{n\iota}B_{j\iota}A_{nj} = B_{j\iota}A_{nj}B_{n\iota},$$

(14-3)

$$B_{j\lambda}B_{n\iota}B_{j\lambda}^{-1} = B_{n\lambda}^{-1}A_{nj}^{-1}B_{n\lambda}A_{nj}B_{n\iota}A_{nj}^{-1}B_{n\lambda}^{-1}A_{nj}B_{n\lambda} \overset{(13\text{-}2)}{\Leftrightarrow} [A_{nj}B_{n\iota}A_{nj}^{-1}, B_{j\lambda}] = 1,$$

(15-3)

$$B_{j\lambda}^{-1}B_{n\iota}B_{j\lambda} = A_{nj}B_{n\lambda}A_{nj}^{-1}B_{n\lambda}^{-1}B_{n\iota}B_{n\lambda}A_{nj}B_{n\lambda}^{-1}A_{nj}^{-1} \overset{(12\text{-}4,13\text{-}2)}{\Leftrightarrow} [A_{nj}B_{n\iota}A_{nj}^{-1}, B_{j\lambda}] = 1,$$

(style id='1'>（14-4）

$$C_{j\nu}B_{n\iota}C_{j\nu}^{-1} = C_{n\nu}^{-1}A_{nj}^{-1}C_{n\nu}A_{nj}B_{n\iota}A_{nj}^{-1}C_{n\nu}^{-1}A_{nj}C_{n\nu} \overset{(13\text{-}3)}{\Leftrightarrow} [A_{nj}B_{n\iota}A_{nj}^{-1}, C_{j\nu}] = 1,$$

(15-4)

$$C_{j\nu}^{-1}B_{n\iota}C_{j\nu} = A_{nj}C_{n\nu}A_{nj}^{-1}C_{n\nu}^{-1}B_{n\iota}C_{n\nu}A_{nj}C_{n\nu}^{-1}A_{nj}^{-1} \overset{(12\text{-}5,\ 13\text{-}3)}{\Leftrightarrow} [A_{nj}B_{n\iota}A_{nj}^{-1}, C_{j\nu}] = 1.$$

$$A_{ji}C_{n\nu}A_{ji}^{-1} = A_{ji}^{-1}C_{n\nu}A_{ji} = C_{n\nu} \Leftrightarrow [A_{ji}, C_{n\nu}] = 1,$$

$$B_{j\lambda}C_{n\nu}B_{j\lambda}^{-1} = B_{j\lambda}^{-1}C_{n\nu}B_{j\lambda} = C_{n\nu} \Leftrightarrow [B_{j\lambda}, C_{n\nu}] = 1,$$

$$C_{j\mu}C_{n\nu}C_{j\mu}^{-1} = C_{j\mu}^{-1}C_{n\nu}C_{j\mu} = C_{n\nu} \Leftrightarrow [C_{j\mu}, C_{n\nu}] = 1,$$

(12-5) $$C_{j\nu}C_{n\nu}C_{j\nu}^{-1} = C_{n\nu}^{-1}A_{nj}^{-1}C_{n\nu}A_{nj}C_{n\nu} \overset{(13\text{-}3)}{\Leftrightarrow} C_{j\nu}A_{nj}C_{n\nu} = C_{n\nu}C_{j\nu}A_{nj},$$

(13-5) $$C_{j\nu}^{-1}C_{n\nu}C_{j\nu} = A_{nj}C_{n\nu}A_{nj}^{-1} \Leftrightarrow C_{n\nu}C_{j\nu}A_{nj} = C_{j\nu}A_{nj}C_{n\nu},$$

(14-5)

$$C_{jo}C_{n\nu}C_{jo}^{-1} = C_{no}^{-1}A_{nj}^{-1}C_{no}A_{nj}C_{n\nu}A_{nj}^{-1}C_{no}^{-1}A_{nj}C_{no} \overset{(13\text{-}3)}{\Leftrightarrow} [A_{nj}C_{n\nu}A^{-\ \ \ 1}_{nj}, C_{jo}] = 1,$$

(15-5)

$$C_{jo}^{-1}C_{n\nu}C_{jo} = A_{nj}C_{no}A_{nj}^{-1}C_{no}^{-1}C_{n\nu}C_{no}A_{nj}C_{no}^{-1}A_{nj}^{-1} \overset{(12\text{-}5,\ 13\text{-}3)}{\Leftrightarrow} [A_{nj}C_{n\nu}A^{-\ \ \ 1}_{nj}, C_{jo}] = 1.$$

综上，所有这些关系共同给出了上述表示。 □

4.4. 映射$\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$.

现在我们希望推导出 $\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$. 。为此，令 H_j 对于 $1 \leqslant j < n$ 表示在每个 Γ-平移的圆盘 $D_{j,\ j+1}$上执行如下半扭转的同胚$D_{i,\ j+1}$ 即图 4.3 中对于 $i = j$的圆盘:

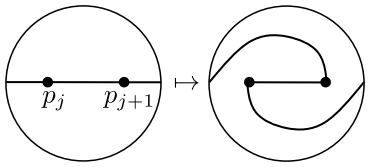


图4.8。半扭转 H_j。

对于每个 $1 \leqslant \lambda \leqslant L$ 和 $1 \leqslant \nu \leqslant N$，令 $T_\lambda := B_{1\lambda}$ 和 $U_\nu := C_{1\nu}$。至于纯生成元，我们将使用名称 H_j, T_λ 和 U_ν 作为所表示映射类的缩写。

引理 4.20. 群$\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$,由以下元素生成:

$$H_j, T_\lambda \ \ and \ \ U_\nu$$

其中包含 $1 \leqslant j < n$、 $1 \leqslant \lambda \leqslant L$ 和 $1 \leqslant \nu \leqslant N$。

证明。 定义 4.1 导出一个短正合列

$$1 \to \mathrm{PMap}_n^{\mathrm{id},orb}(\Sigma_\Gamma(L)) \to \mathrm{Map}_n^{\mathrm{id},orb}(\Sigma_\Gamma(L)) \to \mathrm{S}_n \to 1.$$

此外， H_j 中的元素 $1 \leqslant j < n$ 映射到S_n中的相邻换位生成集。因此，元素 H_j 和纯映射类生成$\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$. 。利用引理4.19，子群$\mathrm{PMap}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$ ，由

$$A_{ji}, B_{k\lambda} \ \text{ and } \ C_{k\nu}$$

其中包含 $1 \leqslant i < j \leqslant n$， $1 \leqslant k \leqslant n$， $1 \leqslant \lambda \leqslant L$和 $1 \leqslant \nu \leqslant N$。此外，我们观察到

$$\begin{aligned} H_{j-1}^{-1}...H_{i+1}^{-1}(D_{i,i+1}) &= D_{i,j}, \\ H_{j-1}^{-1}...H_1^{-1}(D_{r_\lambda,1}) &= D_{r_\lambda,j} \text{ and} \\ H_{k-1}^{-1}...H_1^{-1}(D_{c_\nu,1}) &= D_{c_\nu,k}, \end{aligned}$$

见图 4.9。利用引理 4.17，这意味着

$$A_{ji} = H_{j-1}^{-1}...H_{i+1}^{-1}H_i^2H_{i+1}...H_{j-1}, \tag{16}$$

$$B_{k\lambda} = H_{k-1}^{-1}...H_1^{-1}T_\lambda H_1...H_{k-1} \text{ and} \tag{17}$$

$$C_{k\nu} = H_{k-1}^{-1}...H_1^{-1}U_\nu H_1...H_{k-1}. \tag{18}$$

因此， H_j, T_λ 以及 U_ν与 $1 \leqslant j < n, 1 \leqslant \lambda \leqslant L$和 $1 \leqslant \nu \leqslant N$生成 $\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$,. □

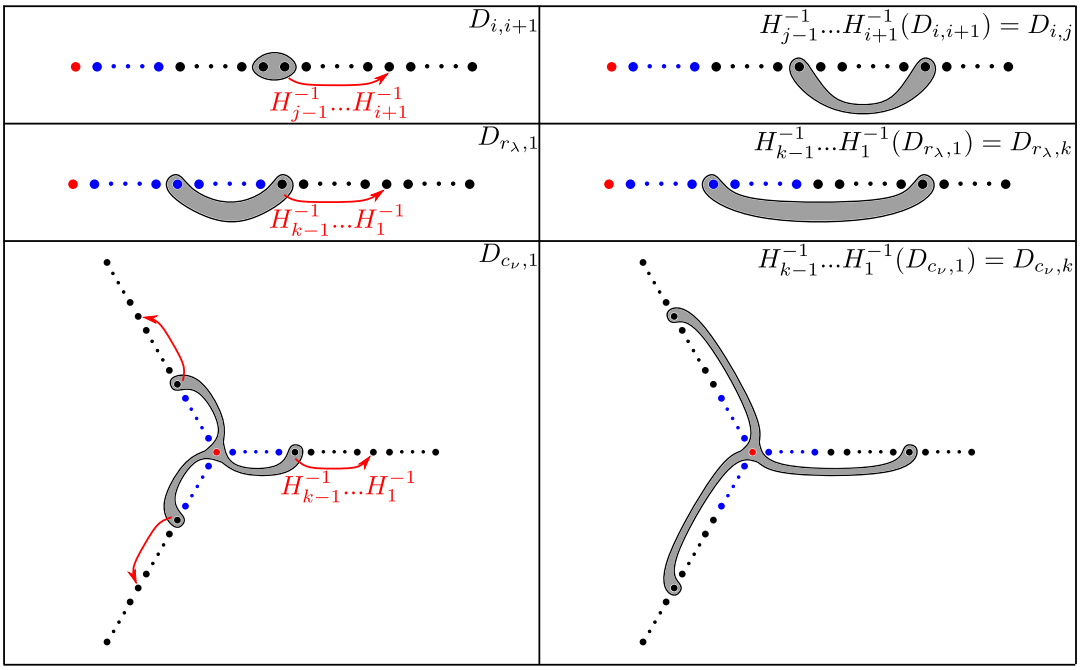


图 4.9。关联 H_i 与 A_{ji}、 T_λ 与$B_{k\lambda}$，以及 U_ν 与 $C_{k\nu}$的支撑圆盘。

基于上述生成集，我们将给出一组合适的关系来定义 $\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$。为此，我们引入以下缩写

$$X_j := A_{nj} = H_{n-1}^{-1}...H_{j+1}^{-1}H_j^2H_{j+1}...H_{n-1}, \tag{19}$$

$$Y_\lambda := B_{n\lambda} = H_{n-1}^{-1}...H_1^{-1}T_\iota H_1...H_{n-1} \text{ and} \tag{20}$$

$$Z_\nu := C_{n\nu} = H_{n-1}^{-1}...H_1^{-1}U_\nu H_1...H_{n-1}. \tag{21}$$

回想一下，这些元素生成 $\mathrm{Push}^{orb}_{\mathrm{PMap}_n}$的像，也就是说，它们生成了 $\mathrm{PMap}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$中的一个自由子群 $F_{n-1+L+N}$。

下文将 $H_iH_{i+1}H_i = H_{i+1}H_iH_{i+1}$（针对 $1 \leqslant i \leqslant n-2$ 和$[H_j,)$、 $H_k] = 1$（针对 $1 \leqslant j,)$以及$k < n$（针对 $|j-k| \geqslant 2$）的关系称为针对 , ..., H_{n-1}的辫关系和交换子关系 。

引理 4.21。 $\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$,的生成元 H_1、...、 H_{n-1}、 T_1、...、 T_L、 U_1、...、 U_N满足以下关系：对于 $2 \leqslant j < n$、 $1 \leqslant \theta$、 $\lambda \leqslant L$ ，其中 $\theta < \lambda$ 和$1 \leqslant \mu$；对于 $\nu \leqslant N$，其中 $\mu < \nu$:

(1) 生成元 H_1, ..., H_{n-1} 的辫群关系和交换子关系，(2) a) $[T_\lambda$, $H_j] = 1$,b) $[U_\nu, H_j] = 1$,(3) a) $[H_1T_\lambda H_1, T_\lambda] = 1$,b) $[H_1U_\nu H_1$, $U_\nu] = 1$ 以及(4) a) $[T_\theta, B_{2\lambda}] = 1$ 对于 $B_{2\lambda} = H_1^{-1}T_\lambda H_1$， b) $[U_\mu$, $C_{2\nu}] = 1$ 对于 $C_{2\nu} = H_1^{-1}U_\nu H_1$ ， 以及c) $[T_\lambda, C_{2\nu}] = 1$ 对于 $C_{2\nu} = H_1^{-1}U_\nu H_1$。

特别是，这些关系意味着

$$\mathrm{Map}_{n-1}^{\mathrm{id},orb}(\Sigma_\Gamma(L)) = \langle H_1, ..., H_{n-2}, T_\lambda, U_\nu \mid 1 \leqslant \lambda \leqslant L, 1 \leqslant \nu \leqslant N \rangle$$

通过共轭作用于 $F_{n-1+L+N}$。更准确地说，对于满足 $i<j<k$的 $1\leqslant i$、 j、 $k<n$，以及满足 $\theta<\iota<\lambda$ 的 $1\leqslant\theta$、 ι、 $\lambda\leqslant L$和满足 $\mu<\nu<o$的 $1\leqslant\mu$、 ν、 $o\leqslant N$，我们有：

$$
\begin{aligned}
H_kX_jH_k^{-1}&=H_k^{-1}X_jH_k=X_j && for\ k\leqslant n-2,\\
H_jX_jH_j^{-1}&=X_j^{-1}X_{j+1}X_j && for\ j\leqslant n-2,\\
H_j^{-1}X_jH_j&=X_{j+1} && for\ j\leqslant n-2,\\
H_{j-1}X_jH_{j-1}^{-1}&=X_{j-1} && for\ j<n,\\
H_{j-1}^{-1}X_jH_{j-1}&=X_jX_{j-1}X_j^{-1} && for\ j<n,\\
H_iX_jH_i^{-1}&=H_i^{-1}X_jH_i=X_j && for\ i\leqslant j-2,\\
T_\lambda X_jT_\lambda^{-1}&=T_\lambda^{-1}X_jT_\lambda=X_j && for\ 2\leqslant j,\\
U_\nu X_jU_\nu^{-1}&=U_\nu^{-1}X_jU_\nu=X_j && for\ 2\leqslant j,\\
T_\lambda X_1T_\lambda^{-1}&=Y_\lambda^{-1}X_1Y_\lambda,\\
T_\lambda^{-1}X_1T_\lambda&=X_1Y_\lambda X_1Y_\lambda^{-1}X_1^{-1},\\
U_\nu X_1U_\nu^{-1}&=Z_\nu^{-1}X_1Z_\nu,\\
U_\nu^{-1}X_1U_\nu&=X_1Z_\nu X_1Z_\nu^{-1}X_1^{-1},\\
H_jY_\iota H_j^{-1}&=H_j^{-1}Y_\iota H_j=Y_\iota && for\ j\leqslant n-2,\\
T_\theta Y_\iota T_\theta^{-1}&=T_\theta^{-1}Y_\iota T_\theta=Y_\iota,\\
T_\iota Y_\iota T_\iota^{-1}&=Y_\iota^{-1}X_1^{-1}Y_\iota X_1Y_\iota,\\
T_\iota^{-1}Y_\iota T_\iota&=X_1Y_\iota X_1^{-1},\\
T_\lambda Y_\iota T_\lambda^{-1}&=Y_\lambda^{-1}X_1^{-1}Y_\lambda X_1Y_\iota X_1^{-1}Y_\lambda^{-1}X_1Y_\lambda,\\
T_\lambda^{-1}Y_\iota T_\lambda&=X_1Y_\lambda X_1^{-1}Y_\lambda^{-1}Y_\iota Y_\lambda X_1Y_\lambda^{-1}X_1^{-1},\\
U_\nu Y_\iota U_\nu^{-1}&=Z_\nu^{-1}X_1^{-1}Z_\nu X_1Y_\iota X_1^{-1}Z_\nu^{-1}X_1Z_\nu,\\
U_\nu^{-1}Y_\iota U_\nu&=X_1Z_\nu X_1^{-1}Z_\nu^{-1}Y_\iota Z_\nu X_1Z_\nu^{-1}X_1^{-1},\\
H_jZ_\nu H_j^{-1}&=H_j^{-1}Z_\nu H_j=Z_\nu && for\ j\leqslant n-2,\\
T_\lambda Z_\nu T_\lambda^{-1}&=T_\lambda^{-1}Z_\nu T_\lambda=Z_\nu,\\
U_\mu Z_\nu U_\mu^{-1}&=U_\mu^{-1}Z_\nu U_\mu=Z_\nu,\\
U_\nu Z_\nu U_\nu^{-1}&=Z_\nu^{-1}X_1^{-1}Z_\nu X_1Z_\nu,\\
U_\nu^{-1}Z_\nu U_\nu&=X_1Z_\nu X_1^{-1},\\
U_oZ_\nu U_o^{-1}&=Z_o^{-1}X_1^{-1}Z_oX_1Z_\nu X_1^{-1}Z_o^{-1}X_1Z_o,\\
U_o^{-1}Z_\nu U_o&=X_1Z_oX_1^{-1}Z_o^{-1}Z_\nu Z_oX_1Z_o^{-1}X_1^{-1}.
\end{aligned}
$$

证明。 对于 $H_1,...,H_{n-1}$，在 4.19(1) 中的辫群关系和交换子关系与曲面情形相同。

中的关系4.21(3)是对以下关系的改写：

$$A_{21}C_{2\nu}C_{1\nu}=C_{1\nu}A_{21}C_{2\nu}\text{ and }A_{21}B_{2\lambda}B_{1\lambda}=B_{1\lambda}A_{21}C_{2\lambda}$$

由关系 4.19(4)得到。利用（ A_{21}、 $B_{2\lambda}$ 和 $C_{2\nu}$ ）中（16）、（17）和（18）给出的定义，这些关系等价于

$$(H_1^2)(H_1^{-1}U_\nu H_1)U_\nu=U_\nu(H_1^2)(H_1^{-1}U_\nu H_1)\text{ and}$$
$$(H_1^2)(H_1^{-1}T_\lambda H_1)T_\lambda=T_\lambda(H_1^2)(H_1^{-1}T_\lambda H_1).$$

这些等价于 $[U_\nu,\ H_1U_\nu H_1]=1$ 以及 $[T_\lambda,\ H_1T_\lambda H_1]=1$。

交换子关系 4.21(2)和 4.21(4)直接源于这样一个事实：这些彼此交换的映射类可以由支撑集互不相交的同胚来实现（见图4.10）。

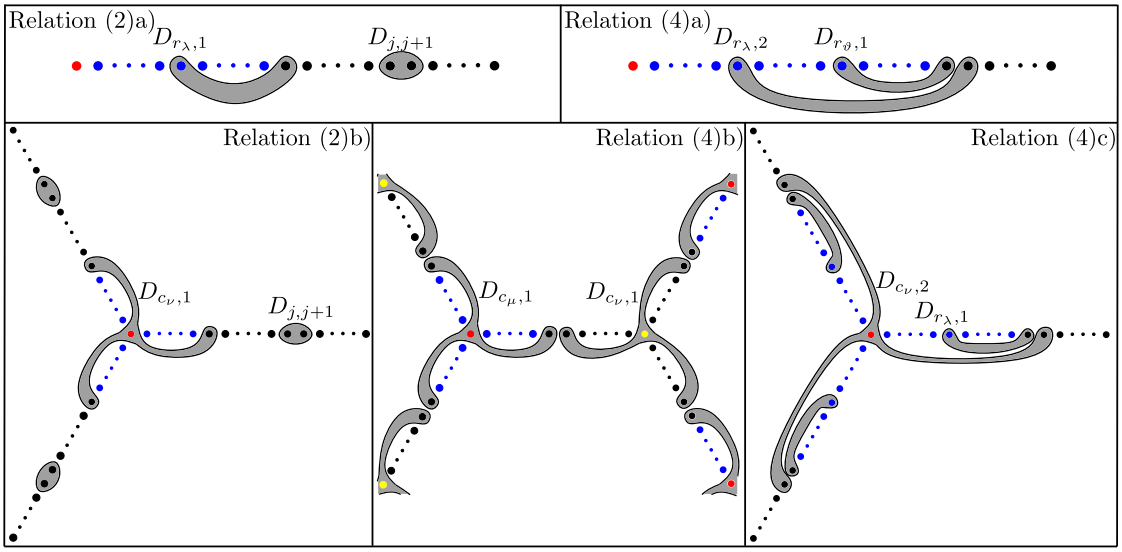


图 4.10. 对关系的观察4.21(2)-4.21(4)通过考察支撑圆盘。

关于上述共轭关系可由关系4.21(1) 至4.21(4)的证明，参见 [7, 引理 5。24]。□

上述关系和半直积结构结合起来，使我们能够推导出 $\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$, 的一个表示。该论证受到 [8, 命题 3.1] 中辫群梳理的启发。

命题 4.22。 对于 $n \geqslant 1$，群 $\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$，由生成元表示。

$$H_1, ..., H_{n-1}, T_1, ..., T_L, U_1, ..., U_N$$

以及 $2 \leqslant j < n$、 $1 \leqslant \theta$、 $\lambda \leqslant L$ 与 $\theta < \lambda$ 和 $1 \leqslant \mu$、 $\nu \leqslant N$ 与 $\mu < \nu$ 的定义关系：

(1) 生成元 $H_1, ..., H_{n-1}$ 的辫关系和交换子关系；(2) a) $[T_\lambda, H_j] = 1$; b) $[U_\nu, H_j] = 1$; (3) a) $[H_1 T_\lambda H_1, T_\lambda] = 1$; b) $[H_1 U_\nu H_1, U_\nu] = 1$ ； 以及(4) a) $[T_\theta, B_{2\lambda}] = 1$ 对于 $B_{2\lambda} = H_1^{-1} T_\lambda H_1$; b) $[U_\mu, C_{2\nu}] = 1$ 对于 $C_{2\nu} = H_1^{-1} U_\nu H_1$ ； 以及c) $[T_\theta, C_{2\nu}] = 1$ 对于 $C_{2\nu} = H_1^{-1} U_\nu H_1$。

证明。 对于 $n = 1$，上面给出的群是秩为 $L + N$ 的自由群。另一方面，对于 $n = 1$，有 $\mathrm{Map}_1^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L)) =$, $\mathrm{PMap}_1^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$，后一个群根据推论 4.13 是秩为 $L + N$ 的自由群。

对于 $n \geqslant 2$，我们假设$\mathrm{Map}_{n-1}^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$，具有如上所述的表示。此外，根据引理 4.20 ，我们知道$\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$，由以下元素生成： H_1、 ....., H_{n-1}、 T_1、 ....., T_L、 U_1、 ....., U_N。根据引理4.21，这些生成元满足上述关系。因此，我们得到了一个从群 φ 出发的满同态

利用上述表示映射到 $\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$,。剩下要验证的是该同态也是单射。

设 $W = \sigma_1^{\varepsilon_1}...\sigma_p^{\varepsilon_p}$with $\sigma_i \in \{H_j, T_\lambda, U_\nu \mid 1 \leqslant j < n, 1 \leqslant \lambda \leqslant L, 1 \leqslant \nu \leqslant N\}$ and $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$ 是同态 φ的核中的一个字。利用该字表示一个纯映射类这一点，我们可以使用（16）至（18）中的缩写，将 W 改写为由字母 $A_{ji}, B_{k\lambda}$ and$C_{k\nu}$ 组成的字，其中 $1 \leqslant i, j, k \leqslant n, i < j$, $1 \leqslant \lambda \leqslant L$ and $1 \leqslant \nu \leqslant N$；类似改写的细节见 [7, 定理 3.15]。特别是，这种改写只使用上述关系。若进一步使用（19）至（21）中引入的缩写 X_j, Y_λ and Z_ν，则引理 4.21 中的共轭关系允许我们将 W 改写为一个乘积

$$W_1(X_1, ..., X_{n-1}, Y_1, ..., Y_L, Z_1, ..., Z_N) \cdot W_2(H_1, ..., H_{n-2}, T_1, ..., T_L, U_1, ..., U_N).$$

由于 $\varphi(W) = 1$ 包含在纯轨形映射类群中，我们可以使用半直积结构。

$$\mathrm{PMap}_n^{\mathrm{id},orb}(\Sigma_\Gamma(L)) = F_{n-1+L+N} \rtimes \mathrm{PMap}_{n-1}^{\mathrm{id},orb}(\Sigma_\Gamma(L))$$

已在定理 4.13 中证明。W_1 中使用的字母表明，$\varphi(W_1)$ 包含于自由群 $F_{n-1+L+N}$中。特别地，$\varphi(W_1)$ 是纯的。因此，单词 $\varphi(W_2)$ 也是纯的，并且包含于 PMap $^{\mathrm{id}\ orb}_{n-1}(\Sigma_\Gamma(L))$,中。这意味着，$\varphi(W_1) \cdot \varphi(W_2)$是将 $\varphi(W) = 1$ 分解为半直积的正规子群和商群的唯一分解，即 $\varphi(W_1) = 1$ 属于 $F_{n-1+L+N}$，而 $\varphi(W_2) = 1$ 属于 PMap $^{\mathrm{id}\ orb}_{n-1}(\Sigma_\Gamma(L))$,。第一个等式直接推出 $W_1 = 1$。利用归纳假设，我们进一步得到 $W_2 = 1$。因此，φ 是一个同构，并且 $\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$,具有上述表示。□

参考文献

[1] D. Allcock. Artin 群的辫子图。美国数学会汇刊，354(9):3455–3474，2002。[2] M. R. Bridson 和 A. Haefliger. 非正曲率度量空间。数学科学基础丛书。Springer Berlin Heidelberg, 2011。[3] J. Crisp 和 L. Paris. B 型和 D型 Artin 群。高等几何，5(4):607–636，2005。[4] J. Dugundji. 拓扑学。Allyn and Bacon, Inc.，波士顿，1966。[5] B. Farb 和 D. Margalit. 映射类群入门，第49卷，普林斯顿数学丛书。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，2012。[6] J. Flechsig. 二维轨形的辫子群与映射类群，2023。预印本。[7] J. Flechsig. 二维轨形的辫子群与映射类群，2023。博士论文，比勒费尔德。[8] J. González-Meneses. 辫子群的基本结果。布莱兹·帕斯卡数学年刊，18(1):15–59，2011。[9] A. Hatcher. 曲面的三角剖分。拓扑学及其应用，40(2):189–194，1991。[10] J. J. Rotman. 群论导论，第148卷，数学研究生教材。Springer，纽约，1995。[11] S. K. Roushon. Artin 群的某种结构与同构猜想。加拿大数学杂志，73(4):1153–1170，2021。[12] S. K. Roushon. 构形 Lie 群胚与轨形辫群。数学科学通报，171：论文编号 103028，35，2021。[13] S. K. Roushon. 近似拟纤维化与轨道构形空间的基本群，2022。arxiv:2111.06159。[14] S. K. Roushon. 轨形辫群，2022。arxiv:2301.02043。[15] S. K. Roushon. 构形 Lie 群胚中的拟纤维化与轨形辫群，2022。arxiv:2106.08110。[16]W. P. Thurston. 3-流形的几何与拓扑，1979。http://library.msri.org/books/gt3m/。

Jonas Flechsig：比勒费尔德大学数学学院，德国比勒费尔德 D-33501