arXiv:2305.04273v1 [math.GT] 7 May 2023

二维轨形的辫群与映射类群

Jonas Flechsig
2023年5月7日

摘要

本文的主要结果是，纯轨形辫群适合嵌入一个正合列

$$1 \to K \to \pi_1^{orb}(\Sigma_\Gamma(n-1+L)) \xrightarrow{\iota_{\mathrm{PZ}_n}} \mathrm{PZ}_n(\Sigma_\Gamma(L)) \xrightarrow{\pi_{\mathrm{PZ}_n}} \mathrm{PZ}_{n-1}(\Sigma_\Gamma(L)) \to 1.$$

特别是，我们注意到核 K of ι_{PZ_n} 非平凡。这修正了 [12] 中的定理 2.14。此外，我们使用纯轨形映射类群 $\mathrm{PMap}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$ 的表示，通过 [8] 确定 K。将这些轨形映射类群与轨形辫群进行比较，会发现一个令人意外的现象：与经典情形相反，轨形辫群是轨形映射类群的真商群。由此得到纯轨形辫群的一个表示，据此可以读出核 K。

1. 引言

轨形辫群是 Artin 辫群或更一般的曲面辫群的类似物。轨形辫子不是在圆盘或曲面内移动，而是在二维轨形内移动。自 Allcock 的工作以来，人们对轨形辫群产生了兴趣，因为其中一些群包含球面和仿射 Artin 群˜ ˜型 D_n， B_n 以及 D_n 作为有限指标子群 [1]。对于这些 Artin 群，轨形辫群为我们提供了辫图。Roushon 发表了多篇关于轨形辫群结构 [12, 13, 14, 15]及其所包含的 Artin 群 [11] 的文章。此外，Crisp–Paris [5]研究了轨形辫群的外自同构群。本文也对轨形辫群结构的研究有所贡献。

与 Roushon 的工作一样 [12], ，我们研究具有有限多个穿孔点和锥点（阶数可能各不相同）的轨形上的辫群。底层轨形由以下数据定义：设 Γ 为有限多个有限循环群的自由积。因此， Γ 作用于一个平面可缩曲面 Σ （带边界），该曲面由 Bass–Serre 树加厚而成（详见例 2.3 ）。若再添加 L 个穿孔点，就得到一个与 Roushon 研究的类似的轨形，我们将其记为 $\Sigma_\Gamma(L)$。与他的文章不同，我们考虑具有非空边界的轨形，但这不会影响轨形辫群的结构。轨形 $\Sigma_\Gamma(L)$ 中的奇异点仅为锥点，它们对应于自由积中的有限循环因子 Γ。

轨形辫群的元素$\mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 由辫图表示（示例见图1.1 ），其中包含 n 辫股（以黑色绘制）、 N 锥点标记（以红色绘制，顶部有一个锥点）以及 L 代表穿孔点的标记（以蓝色绘制，顶部有一个菱形）。这些图表的复合方式与 Artin 辫群中的方式相同。

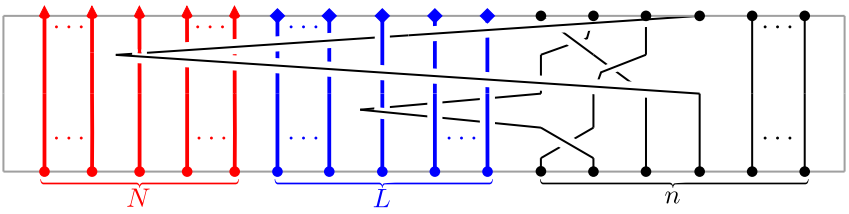


图1.1。$\mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L))$中的一个轨形辫示例。

轨形辫图还使我们可以观察到，$\mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 由以下辫子生成

$$h_1, ..., h_{n-1}, t_1, ..., t_L, u_1, ..., u_N$$

如图 1.2所示。这得出了一个隐含包含于 [1,定理 1.1 和 1.2] 以及 [12, 第 4]节中的结果。稍后，我们还将根据这些生成元推导出 $\mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 的一个有限表示。

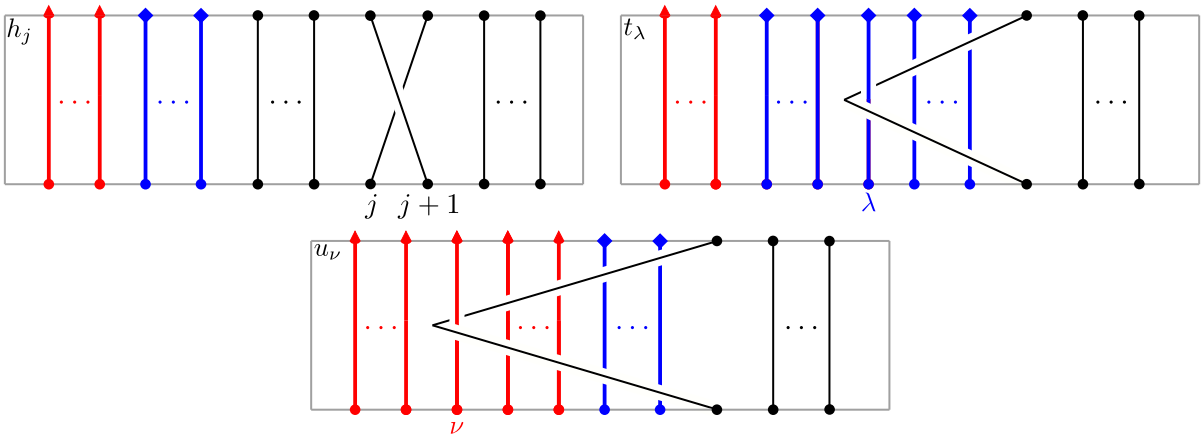


图1.2。$\mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L))$的生成元。

与Artin辫群的关键区别在于，像图 1.3中那样环绕单个锥点标记、但不环绕其他辫股或穿孔点的辫子，表示一个有限阶元素（即 $\mathbb{Z}_{m_\nu}$ 与被环绕的锥点相关联的循环因子）的阶数，详见注 3.12 。

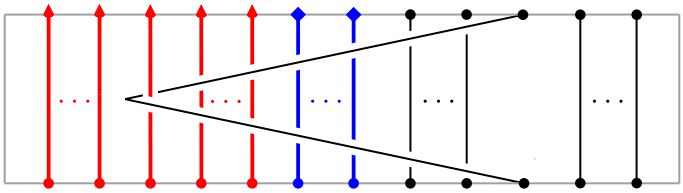


图1.3。$\mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L))$中的一个有限阶元素。

与 Artin 辫的情形一样，每个轨形辫都会诱导 n 辫股的一个置换。这给出了一个满同态$\mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L)) \to \mathrm{S}_n$ ，其核称为纯轨形辫群，记作$\mathrm{PZ}_n(\Sigma_\Gamma(L))$。与群Z$_n(\Sigma_\Gamma(L))$一样，这些图表使我们能够建立纯子群的有限生成集。这一结果重现了 Roushon 的结果 [12,引理 4。1]。

轨形辫群$\mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L))$与带 puncture 的轨形 $\Sigma_\Gamma(L)$ 上有 n 个标记点的轨形映射类群密切相关。该群记作$\mathrm{Map}_n^{orb}(\Sigma_\Gamma(L))$，研究见 [8]。一个 $\Sigma_\Gamma(L)$ 的映射类由一个 Γ-等变同胚表示，该同胚作用于 $\Sigma(L)$，并固定锥点以及边界 $\partial\Sigma(L)$ 上的每一点。若此同胚将 n 标记点的 Γ-轨道保持为 n 一个集合，则称其保留这些标记点。等价关系由固定锥点、标记点和边界的 Γ-等变环境同痕所诱导。

这些轨形映射类群存在一个同态

$$\mathrm{Forget}_n^{orb} : \mathrm{Map}_n^{orb}(\Sigma_\Gamma(L)) \to \mathrm{Map}^{orb}(\Sigma_\Gamma(L))$$

通过遗忘标记点得到。令 $\mathbf{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$,为 $\mathbf{Forget}_n^{orb}$ 的核。

主要结果

关于 $\mathbf{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 与 $\mathbf{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$,之间的关系，我们观察到如下事实：在标记点 $p_1, ..., p_n$处对某个环境同痕求值，可得到一个同态

$$\mathrm{ev} : \mathrm{Map}_n^{\mathrm{id},orb}(\Sigma_\Gamma(L)) \to \mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L)),$$

详情请参见第 5.1 节。与经典情形不同，这个求值映射不是同构。不过，ev 的核可以用以下方式描述：$\frac{2\pi}{m_\nu}$-扭转 U_ν 以及 $C_{k\nu}$ 将标记点绕锥点 c_ν 旋转 $1 \leqslant \nu \leqslant N$。局部而言， U_ν 和 $C_{k\nu}$ 如图 1.4所示绕锥点扭转。关于扭曲圆盘嵌入的更多信息，请参见第 4节。

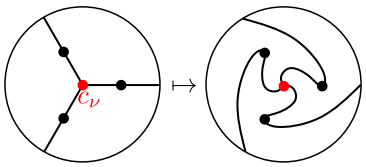


图 1.4。 $m_\nu = 3$的$\frac{2\pi}{m_\nu}$-扭转。

定理 A。 ev 的核是$\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$,中由 $\{U_\nu^{m_\nu} \mid 1 \leqslant \nu \leqslant N\}$生成的正规闭包。受限映射$\mathrm{ev}|_{\mathrm{PMap}^{\mathrm{id},}{}_n{}^{orb}(\Sigma_\Gamma(L))}$ 的核是$\mathrm{PMap}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$,中由 $\{C_{k\nu}^{m_\nu} \mid 1 \leqslant \nu \leqslant N, 1 \leqslant k \leqslant n\}$ 生成的正规闭包。

根据 [8, 命题 4。22], 我们得到$\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$,的表示。结合定理 A，我们可以推导出以下以图$\mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L))$中的辫子表示的1.2:

定理 B。 轨形辫群 $\mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 由以下生成元表示

$$h_1, ..., h_{n-1}, t_1, ..., t_L, u_1, ..., u_N$$

以及以下关于 $2 \leqslant j < n$, $1 \leqslant \theta, \lambda \leqslant L$ （其中 $\theta < \lambda$ 和$1 \leqslant \mu, \nu \leqslant N$ （其中 $\mu < \nu$）的定义关系：

(1) $u_\nu^{m_\nu} = 1$, *(2)* 生成元 $h_1, ..., h_{n-1}$ 的辫子关系和交换子关系，

(3) $[t_\lambda, h_j] = 1$ 和 $[u_\nu, h_j] = 1$, *(4)* $[h_1 t_\lambda h_1, t_\lambda] = 1$ 和 $[h_1 u_\nu h_1, u_\nu] = 1$, *(5)* $[t_\theta, b_{2\lambda}] = 1$, $[u_\mu, c_{2\nu}] = 1$ 和 $[t_\lambda, c_{2\nu}] = 1$, 其中包含 $b_{2\lambda} = h_1^{-1} t_\lambda h_1$ 和 $c_{2\nu} = h_1^{-1} u_\nu h_1$。

定理中的所有关系B 均可由几何观察得出：有限阶关系 B(1) 如备注 3.12所述；关系 B(2) 众所周知，而交换子关系 B(3)-B(5) 可由图 5.1中的辫图得出。此外，还可以推导出纯轨形辫群 $\mathrm{PZ}_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 的一个类似表示（见推论 5.6）。

本文的主要贡献是关于纯轨形辫群结构的一个结果：令 ι_{PZ_n} 为映射，它将带 puncture 的轨形 $\Sigma_\Gamma(n-1+L)$ 的轨形基本群中的元素视为$\mathrm{PZ}_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 中仅移动第 n股的辫子。此外，令 π_{PZ_n} :$\mathrm{PZ}_n(\Sigma_\Gamma(L)) \to \mathrm{PZ}_{n-1}(\Sigma_\Gamma(L))$ 为遗忘第 n股的映射。利用定理A 和B，我们得到：

定理 C。纯轨形辫群$\mathrm{PZ}_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 满足正合列

$$1 \to K \to \pi_1^{orb}(\Sigma_\Gamma(n-1+L)) \xrightarrow{\iota_{\mathrm{PZ}_n}} \mathrm{PZ}_n(\Sigma_\Gamma(L)) \xrightarrow{\pi_{\mathrm{PZ}_n}} \mathrm{PZ}_{n-1}(\Sigma_\Gamma(L)) \to 1$$

其中， K 是.....的正规闭包

$$\mathrm{PC}\left(\{(x_j z_\nu)^{m_\nu}(x_j^{-1}z_\nu^{-1})^{m_\nu} \mid 1 \leqslant j < n, 1 \leqslant \nu \leqslant N\}\right)$$

在 $\pi_1^{orb}(\Sigma_\Gamma(n-1+L))$ 中，其中$\mathrm{PC}(S)$ 是 S 中元素的部分共轭元集合（详见第5.2节的步骤1 和2 ）。

这修正了 [12] 中的定理 2.14，该定理声称核 K 是平凡的。此外，定理 C表明，与 [11, 命题 4.1] 相反，自然同态

$$\omega : \mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L)) \to \mathrm{Z}_{n+L}(\Sigma_\Gamma)$$

将穿孔点映射到固定股线的映射对 $L \geqslant 1$不是单射（详见命题 5.17）。

概述

我们将群 $\mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 引入为轨形构形空间的轨形基本群。相关概念总结于第 2 节。由于 Γ 对 Σ 的作用具有基本域，我们可以像图 1.1、1.2 和 1.3 所示，将该群中的元素重新诠释为辫图。第 3 节将讨论这一描述。第 4 节简要概述轨形映射类群，并总结 [8]中的结果。第 5 节是本文的主要成果：我们将在该节推导出定理 A ，从而得到 $\mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 和 $\mathrm{PZ}_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 的表示。后一个表示使我们能够计算非平凡的核 K （定理 C）。

致谢

我要感谢我的导师 Kai-Uwe Bux 对我的支持，并与我进行了许多富有帮助的讨论。此外，还要感谢 José Pedro Quintanilha 和 Xiaolei Wu 在本项目不同阶段给予的宝贵建议。我也很感激 José Pedro Quintanilha 对本文草稿提出的意见。

作者获得了德国研究基金会（Deutsche Forschungs- gemeinschaft，DFG）资助，项目编号为 426561549。此外，作者还获得了比勒费尔德青年人才基金的部分资助。

2. 轨形及其基本群

本文仅考虑由流形（通常是曲面）在适当群作用下的商群构成的轨形。回顾一下，一个作用

$$\phi : G \to \mathrm{Homeo}(M), g \mapsto \phi_g$$

在流形 M 上，若对每个紧集 $K \subseteq M$，集合

$$\{g \in G \mid \phi_g(K) \cap K \neq \varnothing\}$$

是紧的。由于我们赋予 G 离散拓扑，即上述集合是有限的。作为流形的真商而出现的轨形，按照 Bridson–Haefliger 的术语称为可发展，按照 Thurston 的术语称为 [2] 和良好 [16]。

以上及下文中，所有流形均为可定向流形，且所有同胚均为保向同胚。

定义 2.1（轨形，[2, 第三章 G，1.3]）。设 M 为一个流形（可以有边界），G 为一个带有单态射的群

$$\phi : G \to \mathrm{Homeo}(M)$$

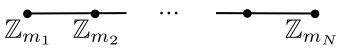
使得 G 在 M 上恰当地作用。在这些条件下，三元组 (M, G, φ) 称为一个轨形，记作 M_G。若某点 $c \in M$ 满足 $\mathrm{Stab}_G(c) \neq \{1\}$，则该点 c 称为 M_G 的奇异点。若某点 $c \in M$ 满足 $\mathrm{Stab}_G(c)$ 为有限阶 m 的循环群，则该点 c 称为 M_G 的锥点，其阶为 m。

下面是一个轨形的第一个例子：

例 2.2. 设 $\mathbb{Z}_m$ 是一个阶为 m 的循环群。群 $\mathbb{Z}_m$ 通过绕圆盘 D 中心旋转作用于该圆盘。该作用由等距变换给出，且作用群是有限群，即该作用是适当的。因此，$D_{\mathbb{Z}_m}$ 是一个轨形，其中心处恰有一个奇异点；该点是一个锥点。

例 2.2 引出了一个更一般的构造：对有限多个有限循环群取自由积。下面我们将对此作简要介绍。更多细节请参阅作者的博士论文 [7, 第 2 节。1]本文将始终研究这一轨形 $D_{\mathbb{Z}_m}$ 的推广。

例 2.3. 设 Γ 是有限循环群 $\mathbb{Z}_{m_1}, \ldots, \mathbb{Z}_{m_N}$ 的自由积。群 Γ 是以下边群平凡的群图的基本群



因此，Γ 作用于其 Bass–Serre 树 T 上。该作用的基本域是一条含有 $N-1$ 条边的路径。该作用在边上是自由的，且顶点稳定子是与 $\gamma\mathbb{Z}_{m_\nu}\gamma^{-1}$ 共轭的群，其中 $\gamma \in \Gamma$ 和 $1 \leqslant \nu \leqslant N$。根据为每个满足 $1 \leqslant \nu \leqslant N$ 的 $\mathbb{Z}_{m_\nu}$ 选取一个生成元 γ_ν，每个顶点的链接都带有一个循环次序。

考虑将 Bass–Serre 树真嵌入 T 到 $\mathbb{C}$ 中，并使其保留每条链接上的局部循环次序。若我们在 T 内 $\mathbb{C}$ 选取一个正则邻域，就得到一个平面可缩曲面 Σ（带边界），示例见图2.1 。

这个曲面 Σ 继承了来自 Bass–Serre 树的一个适当 Γ-作用，使得顶点稳定子按照被稳定顶点的链接上的循环顺序作用。此外，该作用存在一个与 T 中的基本域相对应的基本域。特别地，我们得到一个轨形结构 Σ_Γ。

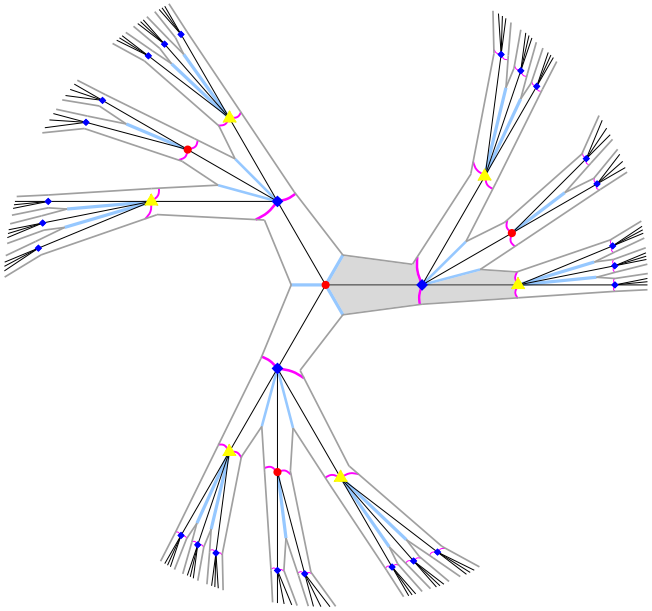


图 2.1. 加粗的 Bass–Serre 树，其中 $\Gamma = \mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_4$ 的基本域以灰色阴影表示。红色的 ●、蓝色的 ♦ 和黄色的 ▲ 分别是自由因子$\mathbb{Z}_3$、 $\mathbb{Z}_2$ 和 $\mathbb{Z}_4$的共轭元。

当且仅当 Σ_Γ 中的一个点对应于 T 的一个顶点时，该点才是奇异点。因此，Σ_Γ 中的奇异点全都是锥点，并分解为 N 个轨道。商群 Σ/Γ 是一个圆盘，其中包含 N 个标记点，这些标记点对应于锥点的轨道。

一般而言，我们可以选择一个基本域 F，如图所示，它是一个圆盘 2.2，并且恰好包含 N个锥点 c_1，..... c_N这些锥点位于边界上，且每个锥点恰有两条相邻的边界弧属于同一个 Γ-轨道。

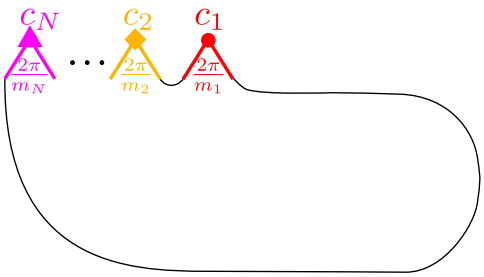


图 2.2. 基本域 F。

若去掉 Σ 的边界，则商群 Σ°/Γ 与带有 N 个标记点及其对应循环群 $\mathbb{Z}_{m_\nu}$ 的复平面同胚，其中$1 \leqslant \nu \leqslant N$。将 Γ 个穿孔点的轨道 $\Gamma(r_\lambda)$ 添加到 Σ，使得 $\Gamma(r_\theta) \neq \Gamma(r_\lambda)$ 对于 $1 \leqslant \theta,\ \lambda \leqslant L,\ \theta \neq \lambda$，我们得到称为.....的轨形

$$\mathbb{C}(L, N, \mathbf{m}) \text{ with } \mathbf{m} = (m_1, ..., m_N)$$

在 [12]。在 [1], Allcock 研究了这些轨形上的辫子，时间为

$$(L, N, \mathbf{m}) = (0, 2, (2, 2)), (0, 1, (2)) \text{ and } (1, 1, (2)).$$

由于我们还想研究映射类群，这需要固定边界，因此我们将考虑带边界的轨形 $\Sigma_\Gamma(L)$ 。此外，我们用记号 $\Sigma_\Gamma(L)$ 表示底层曲面（带边界）的轨形。

$$\Sigma(L) := \Sigma \backslash \Gamma(\{r_1, ..., r_L\}). \tag{1}$$

我们将使用 [2, 第 III.G 章 3]中引入的路径概念来考察轨形基本群。在那里，轨形被更一般地视为一个*étale* 群胚 $(\mathcal{G},\ X)$参见 [2, 第 III.G 章 2]。如果 M_G 是定义2.1意义下的轨形，则其关联的 étale 群胚为

$$(\mathcal{G}, X) = (G \times M, M).$$

以下我们将简化记号，用 G 代替 $\mathcal{G} = G \times M$。特别地，我们引入 G-路径。它们是 $\mathcal{G}$在 [2]中的 -路径。

定义 2.4 (G-路径，[2, 第 III.G 章，3.1])。 A G-路径 $\xi = (g_0,\ c_1,\ g_1,\ .....,\ c_p,\ g_p)$在 M_G 中，起点为 $x \in M$ 、终点为 $y \in M$ ，其定义在区间 $[a,\ b]$ 的一个细分$a = t_0 \leqslant ... \leqslant t_p = b$ 上，由以下部分组成

(1) 连续映射 c_i : $[t_{i-1},\ t_i] \to M$ 其中 $1 \leqslant i \leqslant p$ ；以及 **(2)** 群元素 $g_i \in G$ ，满足 $g_0(c_1(t_0)) = x,\ \ g_i(c_{i+1}(t_i)) = c_i(t_i)$ 其中$1 \leqslant i < p$ 且 $g_p(y) = c_p(t_p)$ (见图 2.3)。

如果初始点 $x \in M$ 同时也是终止点，我们称 ξ 为一个以 x 为基点的-环路。如果一个元素 g_i 是非平凡的，我们称 ξ 在时间 t_i 处包含一个 - 跃迁。

为简洁起见，若 $g_p = 1$，我们将 $(g_0, c_1, g_1, ..., c_p, g_p)$ 记作 $(g_0, c_1, g_1, ..., c_p)$。如果一个 G-路径具有 (g, c) 这种形式，我们就称它为连续的 。

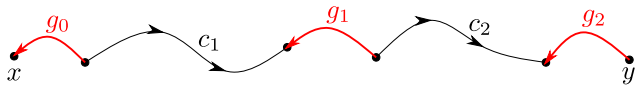


图 2.3. 一条 G-路径。

以下等价关系将某些连续部分具有相同 G轨道的 G-路径视为等同。

定义 2.5 (G-路径的等价性，[2, 第三章.G，第 3 节2])。 设

$$\xi = (g_0, c_1, g_1, ..., c_p, g_p)$$

是一个从 $a = t_0 \leqslant ... \leqslant t_p = b$ 上的 G-路径。

(1) ξ 的一个细分是通过选择某个 $1 \leqslant i \leqslant p$ 的 ξ 中的 $t' \in [t_{i-1},\ t_i]$ ，并将条目 c_i 替换为序列而得到的一个 G-路径。

$$(c_i|_{[t_{i-1}, t']}, 1, c_i|_{[t', t_i]}).$$

(2) ξ 的一个平移 是通过选择 $h \in G$ ，并将 ξ 中的一个子序列 (g_{i-1}, c_i, g_i) 替换为 $1 \leqslant i \leqslant p$ 所得到的一个 G-路径，其中 $1 \leqslant i \leqslant p$ 满足某些条件。

$$(g_{i-1}h^{-1}, h \cdot c_i, hg_i).$$

我们称两个 G-路径是等价的，如果其中一个可以通过一系列细分、细分的逆映射以及移位从另一个得到。

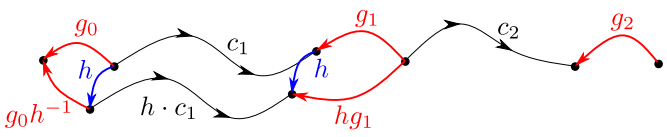


图 2.4. 两条通过平移等价的 G-路径。

利用这个等价关系，我们为 G-路径仿照拓扑空间中路径的同伦关系。

定义 2.6（ G-路径的同伦， [2, 第三章.G，第 3.5] 节）。两个 G-路径 ξ和 ξ之间的初等˜同伦，是由细分 $0 = t_0 \leqslant t_1 \leqslant ... \leqslant t_p = 1$上的一族 G-路径 $\xi_s = (g_0, c_1^s, ..., g_p)$组成的。该族 ξ_s 由 $s \in [s_0, s_1]$ 参数化，使得 c_i^s 连续依赖于参数，且 $\xi^{s_0} = \xi$,˜$\xi^{s_1} = \xi$。

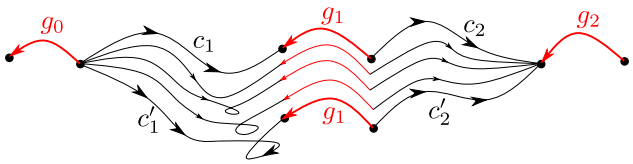


图 2.5. G-路径的初等同伦。

两条 G-路径若能通过以下一系列操作将其中一条变为另一条，则称它们是同伦的（端点固定）：

(1) G-路径的等价关系，(

2) 初等同伦。

定义 2.7 （轨形基本群， [2, 第三章 G 节，3.6]）。设 x_0 是 M_G中的一个非奇异点。在以 x_0为基点的 G-环路同伦类集合上，很容易定义一种复合运算，详情参见 [2, 第三章 G 节，3.4] 。在此复合运算下， G-环路同伦类的集合具有群结构。这个群称为 M_G的轨形基本群$\pi_1^{\mathrm{orb}}(M_G,\ x_0)$ 。其单位元由以 x_0为基点的常值 G-环路表示。

本文始终将讨论限定在这样的轨形 M_G 上：任意两点之间都存在一条 G-路径，即 M_G 是 G路径连通的。与路径连通拓扑空间的基本群情形相同，对于 G-路径连通轨形，基点的选择不会影响其基本群（同构意义下），参见 [2, 第三章 G 节，命题 3.7]。因此，只要基点无关紧要，我们就将记号$\pi_1^{\mathrm{orb}}(M_G,\ x_0)$ 简写为 $\pi_1^{\mathrm{orb}}(M_G)$ 。

本节最后，我们给出两个观察，说明轨形基本群与拓扑空间的基本群之间的关系。特别地，我们确定了 $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\Sigma_\Gamma)$ 的一个表示。这为确定 Σ_Γ 上纯轨形辫群的半直积结构奠定了基础。

固定指标 $1 \leqslant j \leqslant p$，定义 2.5 中定义的移位 允许作如下选择：元素 h 将 c_j 移位至 c_j' ： $= h \cdot c_j$， $g_{j-1}' = g_{j-1}h^{-1}$ 且$g_j' = hg_j$。因此，路径 ξ 等价于

$$\xi' = (g_0, c_1, g_1, ...c_{j-1}, g_{j-1}', c_j', g_j', c_{j+1}, ..., c_p, g_p). \tag{2}$$

如果我们选择 $h = g_j^{-1}$， 元素 g_j'是平凡的。将 c_j'， 1， c_{j+1} 替换为 $c_j' \cup c_{j+1}$，我们得到路径

$$\tilde{\xi}' = (g_0, c_1, g_1, ...c_{j-1}, g_{j-1}', c_j' \cup c_{j+1}, g_{j+1}, c_{j+1}, g_{j+2}, ..., c_p, g_p) \tag{3}$$

它等价于 ξ ，且细分长度更短。

关于以下引理的证明 2.8 和推论 2.9，参见 [7]中的引理 2.12 和推论 2.13。

引理 2.8 ([2,第三章.G， 3.9(1)])。

(1) 在 M_G 中，任何连接 x 和 y 的 G-路径，都等价于唯一的连续G-路径 (g, c) ，其中 c： $I \to M$ 连接 $g^{-1}(x)$ 和 y。

(2) 设 (g,c) 和 (g',c') 是以 M_G 中的非奇异点 x_0 为基点的两个 G-环路。那么，这些 G-环路表示 $\pi_1^{\mathrm{orb}}(M_G,x_0)$ 中的同一个元素，当且仅当 $g=g'$ 和 c 与 c'同伦。

推论2.9 ([2, 第三章 G，3.9(1)])。 设 M_0 是点 $x_0\in M$所在的道路连通分支。则 $G_0=\{g\in G\mid g^{-1}(x_0)\in M_0\}$ 是 G 的子群，并且每个G-环路在 x_0 处都等价于唯一一个形如 G的 $(g$-环路，$c)$ 其中 c 是一条连接 $g^{-1}(x_0)$ 与 x_0的道路；因此 $g\in G_0$。由此得到一个短正合序列

$$1\to\pi_1(M_0)\xrightarrow{i}\pi_1^{\mathrm{orb}}(M_G)\xrightarrow{p}G_0\to 1.$$

特别地，例 Σ_Γ 中的 2.3 的轨形基本群同构于 Γ。

如果 G 对 M 的作用是自由的，则空间 M/G 也具有流形结构。以下结论众所周知:

引理 2.10. 设 M 是一个带有适当自由 G 作用的流形。如果商空间 M/G 道路连通，则 $\pi_1^{\mathrm{orb}}(M_G)\cong\pi_1(M/G)$。

例如， [7,引理 2 中给出了一个证明14]。

3. 轨形辫群

本节介绍轨形辫群。对于轨形 $\Sigma_\Gamma(L)$，我们说明如何将这些群中的元素编码为轨形辫图。Allcock 和 Roushon 曾研究过轨形$\mathbb{C}(L,\ N、\mathbf{m})=\Sigma_\Gamma^\circ(L)$（其中 $\mathbf{m}=(m_1,\ \ldots\ldots m_N)\in\mathbb{N}_{\geqslant}2^N$）对应的类似辫图，参见 [1]和 [12]。

3.1. Artin辫群

在详细介绍轨形辫群的定义之前，我们先回顾 Artin辫的几何。具体而言，我们讨论如何将这些三维辫编码为二维 Artin 辫图。关于 Artin辫群的更多信息，请参阅 [9, 第 1]节。

定义 3.1 （几何辫和 Artin辫群，[9, 第 1.2 节1]）。 固定 n 个互不相同的点 p_1，……，p_n，它们位于紧圆盘 D的内部。几何辫是由 个互不相交的拓扑区间，$1\leqslant j\leqslant n$构成的集合 $b\subseteq D^\circ\times I$，这些区间称为 b的辫股，使得自然投影 $D\times I\to I$将每条辫股同胚地映到 I 上，并且

$$b\cap(D\times\{0\})=\{(p_1,0),\ldots,(p_n,0)\}\text{ and }b\cap(D\times\{1\})=\{(p_1,1),\ldots,(p_n,1)\}.$$

上述条件意味着，对于每个 j，辫股 b_j 与每个圆盘 $D\times\{t\}$ 恰好相交于一点，并将 $(p_j,0)$ 连接到 $(p_{\sigma(j)},1)$，其中 $\sigma\in\mathrm{S}n$。如果两个几何辫 b 和 b' 可以在几何辫的同痕类中连续变形为彼此，则称它们是同痕的 。沿着 $D\times I$的 I因子堆叠辫子的运算可以下降到同痕类上，从而在由具有 n 股的辫子的同痕类构成的集合 $\mathrm{B}n$ 上赋予群结构。$\mathrm{B}n$ 称为具有 n 股的*Artin*辫群 。

一个几何辫画在圆柱体中，圆盘 $D\times\{0\}$ 位于顶部，$D\times\{1\}$ 位于底部。根据定义，$D\times I$区间因子将辫子的每一股参数化。因此，我们通常把辫股看作定向弧b_j：$I\to D\times I$ 从顶部穿过圆柱体到达底部（见图 3.1，左图）。

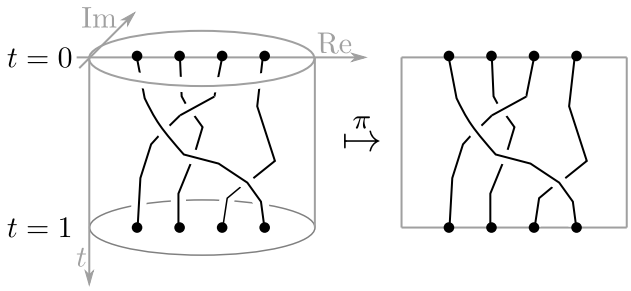


图 3.1. 一个几何辫及其 Artin 辫图。

位于其环境圆柱中的辫子是一个三维对象。Artin 辫图旨在用二维图像呈现这一对象的信息。

定义 3.2 (Artin 辫图，[9, 第 1.2 节。2])。假设 $D \subseteq \mathbb{C}$ 是以 $\frac{n+1}{2}$ 为圆心、半径为 $\frac{n+1}{2}$ 的紧圆盘，且 $p_j := j$ 对每个 $1 \leqslant j \leqslant n$（见图3.2）。

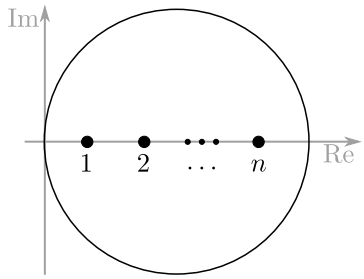


图 3.2. 圆盘 D 的嵌入。

此外，令 $u_j : I \to D$ 为满足以下条件的连续映射：第 j 条辫股 b_j 与 $D \times \{t\}$ 相交于点 $(u_j(t),\ t)$ 对每个 $t \in I$ 均成立。如果映射 u_j 对每个 j 都是分段线性的，则称相应的几何辫为分段线性。定义

$$\pi : D \times I \to [0, n+1] \times I, (z,t) \mapsto (\mathrm{Re}(z), t).$$

几何辫 b 的像 $\pi(b)$ 称为 b 的投影。

设 $x,\ y \in b,\ x \neq y$ 满足 $\pi(x) = \pi(y) =: (p,\ t)$。那么 x 和 y 分别属于不同的辫股 b_i 和 b_j。

在这种情况下，点 (p,t) 称为 $\pi(b)$ 中高度为 t 的交叉。如果存在 $[0$ 中包含 p 的一个邻域 $U\,, n+1] \times I$，使得这对 $(U, \pi(b) \cap U)$ 通过一个将 $\pi(b_i)$ 与 $\mathbb{R} \times \{0\}$、$\pi(b_j)$ 与 $\{0\} \times \mathbb{R}$对应起来的同胚，局部同胚于 $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R})$，则称该交叉为横截的。

在辫子 b 中，如果 $\mathrm{Im}(u_i(t)) < \mathrm{Im}(u_j(t))$，辫股 b_i 从上方交叉 b_j。否则，辫股 b_i 从下方交叉 b_j。

我们将考虑满足以下条件的几何辫 b 的投影：

(1) b 是分段线性的；(2) 在任一高度处，至多有一对辫股交叉；(3) 辫股在每个交叉处横截相交。

在这种情况下，投影 $\pi(b)$ 连同哪条辫股从上方（分别从下方）交叉的数据，称为 b 的 *Artin* 辫图 。如果我们画一幅 Artin 辫

图表，交叉处从下方经过的辫股用交叉附近断开的线表示；从上方经过的辫股则用连续的线表示（见图3.1，右侧）。

观察3.3 (Artin辫群的生成B_n)。给定任意一个几何辫子 b，存在一个与之同痕的辫子 b，使得 $\pi(b)$ 在每个交叉处标明哪条辫股从上方（或下方）穿过的数据构成一幅 *Artin* 辫图。

此外，条件 *3.2(1)-3.2(3)* 使我们能够将 b 分解成若干部分 $b \cap (D \times [t_{i-1}, t_i])$，使得每一部分恰好包含一个交叉。第一部分从 $p_1, ..., p_n$ 出发，最后一部分则终止于这些点，而其他部分起初既不从点 $p_1, ..., p_n$出发，也不终止于这些点。不过，通过一种将每一部分的端点拉回的同痕（见图*3.3*），我们可以假设每一部分都将 $p_1, ..., p_n$ 连接到 $p_{\sigma(1)}, ..., p_{\sigma(n)}$，其中置换 $\sigma \in S_n$ 取决于该部分。由于每一部分只包含一个交叉，发生交叉的辫股彼此相邻。因此，这些部分中的每一部分都与图*3.4*中的一个辫子或其逆映射同痕。因此，对于 $1 \leqslant j < n$，辫子 h_j 生成 *Artin*辫群 B_n。

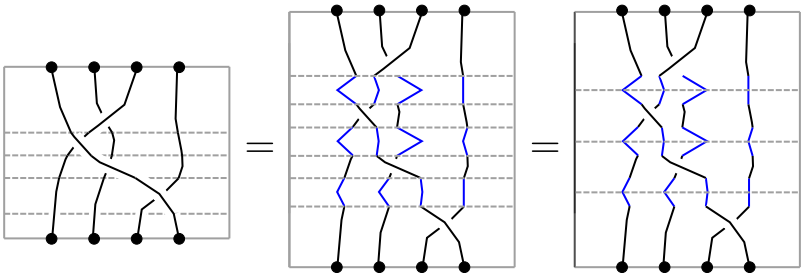


图 3.3. 将一个辫子分解为生成元。

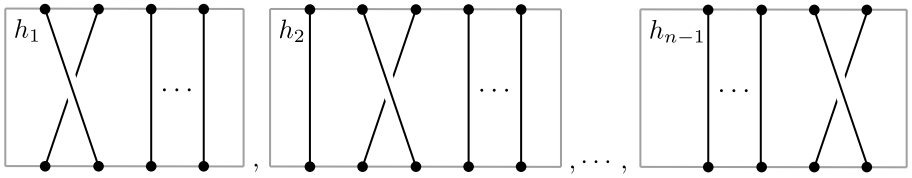


图 3.4. B_n 的生成元。

观察 3.4 （几何辫与构形空间）。一个几何辫 b对应于构形空间中的一条闭路，其基点为 $\{p_1, ..., p_n\}$

$$\mathrm{Conf}_n(D^\circ) := \{(x_1, ..., x_n) \in (D^\circ)^n \mid x_i \neq x_j, 1 \leqslant i, j \leqslant n, i \neq j\}/\mathrm{S}_n$$

映射 b 到 $\{u_1(t), ..., u_n(t)\}$ 反之亦然。此外，两个几何辫同伦，当且仅当构形空间中对应的路径同伦。因此 B_n 同构于 $\pi_1(\mathrm{Conf}_n(D^\circ))$，参见 [9, 第 1 节。4] 了解更多细节。

3.2. 轨形辫群的定义

下一个目标是建立一个类似的投影，为轨形辫子导出辫图。我们从将轨形辫群 定义为轨形构形空间的轨形基本群开始。特别地，下面的定义等价于 [1] 中给出的定义。

定义 3.5 （轨形辫群）。设 M_G 是一个轨形。该轨形

$$\mathrm{PConf}_n^G(M_G) := (M^n \backslash \Delta_n^G(M))_{G^n}$$

其中 $\Delta_n^G(M) = \{(x_1, ..., x_n) \in M^n \mid x_i = g(x_j)$对于某个 $g \in G,\ i \neq j\}$称为 n-阶纯构形空间上的空间。由于 G 在 M上的作用是适当的， G^n在 $(M^n \backslash \Delta_n^G(M))$上的逐坐标作用也适当。因此，$\mathbf{PConf}_n^G(M_G)$是一个轨形，其轨形基本群 $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathbf{PConf}_n^G(M_G))$ 称为n-阶纯轨形辫群，记作 $\mathbf{PZ}_n(M_G)$。该轨形

$$\mathrm{Conf}_n^G(M_G) := (M^n \backslash \Delta_n^G(M))_{G^n \rtimes \mathrm{S}_n}$$

称为 n-阶构形空间上的空间。如上所述，正规子群 G^n逐坐标作用，而 S_n通过置换坐标作用于（ G^n和 $M^n \backslash \Delta_n^G(M)$）。 $G^n \rtimes \mathrm{S}_n$作用也是适当的，即 $\mathbf{Conf}_n^G(M_G)$ 是一个轨形。其轨形基本群 $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathbf{Conf}_n^G(M_G))$ 称为 n-阶轨形辫群，记作 $\mathbf{Z}_n(M_G)$。

3.3. 将轨形辫子分解为辫股

首先，我们注意到轨形辫群中的元素可以分解为辫股。

观察 3.6. 一个闭合的 $G^n \rtimes \mathrm{S}_n$-路径 ξ 在 $\mathrm{Conf}_n^G(M_G)$ 中等价于一个$G^n \rtimes \mathrm{S}_n$-路径，它对应于一个 n-元组 $(\xi_1, ..., \xi_n)$ 个 G-路径

$$\xi_j = \left(g_0^j, c_1^j, g_1^j, ..., c_q^j, g_q^j\right)$$

在 M_G中。这些 G-路径 ξ_j 的初始点为 p_j ，终点为 $p_{\sigma(j)}$ ，对应于$\sigma \in \mathrm{S}_n$。此外，这些 G-路径有共同的细分 $0 = t_0 \leqslant ... \leqslant t_q = 1$ ，并满足条件

$$c_i^k(t) \cap G(c_i^l(t)) = \varnothing$$

对所有 $t \in I, 1 \leqslant k, l \leqslant n, k \neq l$ 以及一个依赖于 t的适当 $1 \leqslant i \leqslant q$ 均成立。

对于 $\sigma = id_n$， $G^n \rtimes \mathrm{S}_n$-路径 ξ 诱导出一个 G^n-路径，它表示 $\mathrm{PZ}_n(M_G)$中的一个元素。特别地，$\mathrm{PZ}_n(M_G)$ 是$\mathrm{Z}_n(M_G)$的一个子群。

对于一条闭合的 $G^n \rtimes \mathrm{S}_n$-路径 ξ，上述所描述的 G-路径 ξ_j 被称为辫股。在本节余下部分，对于一条具有 ξ 的 $G^n \rtimes \mathrm{S}_n$-路径及其辫股，我们固定使用记号 ξ_j，其形式与观察3.6 中的相同。

Artin 辫图记录辫股的交叉，而我们希望轨形辫图记录交叉以及一条 $G^n \rtimes \mathrm{S}_n$-路径的辫股中的 Γ-跃迁。

如果 ξ_j 在 $[a,\ b]$中不包含任何 Γ-跃迁，我们可以将$\xi_j|_{[a,\ b]}$ 视为连续函数。如果 ξ_j 在时刻 t_i发生 Γ-跃迁，则群元素 g_i^j 将 $c_{i+1}^j(t_i)$ 平移到 $c_i^j(t_i)$。在这种情况下，我们将 ξ_j 视为定义在不交并集$\bigcup_{i=1}^q [t_{i-1},\ t_i]$上的如下连续函数：

$$\bigcup_{i=1}^{q} [t_{i-1}, t_i] \to M, s \mapsto c_i^j(s) \text{ for } s \in [t_{i-1}, t_i].$$

此外，令 ξ表示 $\mathbf{Conf}_n^G(M_G)$ 中的并集 $\xi_j\ (\bigcup_{i=1}^q [t_{i-1},\ t_i])$。

3.4. $\mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 中的轨形辫子及其辫图

<escape>为了通过辫图来指定轨形辫群的元素，我们希望建立一种类似于图3.1中所示的投影。因此，我们将范围限制为示例 Σ_Γ 中的轨形 2.3。尽管在这种情况下，底层曲面 Σ嵌入了复平面，但直接考虑从 $\Sigma \subseteq \mathbb{C}$ 到 $\mathbb{R}$ 的投影并不适合我们的目的。由于直接投影无法使我们还原投影后的轨形辫群元素，因此我们将先把范围限制在基本域 F 内，然后再进行投影。</escape>

在解释投影之前，我们为基本域 F 赋予一个标记点集合 $r_1, ..., r_L$，这些点位于 F 的内部，并且 $\Gamma(r_\theta) \neq \Gamma(r_\lambda)$ 对所有$1 \leqslant \theta, \lambda \leqslant L$ 都满足 $\theta \neq \lambda$。移除这些点的所有 Γ-平移像后，我们得到曲面

$$\Sigma(L) := \Sigma \backslash \Gamma(\{r_1, ..., r_L\}) \tag{4}$$

带有一个适当的 Γ 作用。集合 $F(L) := F \cap \Sigma(L)$ 是Γ在 $\Sigma(L)$上的作用的一个基本域。令 $\Sigma_\Gamma(L)$ 表示 $\Sigma(L)$上诱导的轨形结构。

如果我们进一步去除 $\Sigma(L)$ 中的锥点 $\Gamma(\{c_1, ..., c_N\})$，则将所得曲面记为 $\Sigma(L, N)$。$\Sigma(L, N)$ 上的 Γ-作用具有一个基本域 $F(L, N) := F \cap \Sigma(L, N)$。令 $\Sigma_\Gamma(L, N)$ 表示所诱导的轨形结构。

回想一下图 2.2 中基本域 F 的形状，我们可以将 $F(L)$（同样也包括 $F(L、N)$）嵌入为 $\mathbb{C}$ 中以 $\frac{n-L-N}{2}$ 为中心、半径为 $\frac{n+L+N+2}{2}$ 的圆盘。对于每个 $1 \leqslant \nu \leqslant N$，令 c_ν 为 $\partial F(L)$ 的上边界点，满足 $\mathrm{Re}(c_\nu) = -L - \nu$；对于每个 $1 \leqslant \lambda \leqslant L$，令 r_λ 为点 $-\lambda \in \mathbb{R}$；对于每个 $1 \leqslant j \leqslant n$，令 p_j 为 $\mathbb{R}$ 中的点 j（见图 3.5）。此外，回想一下，$\partial F(L)$ 中的每个锥点都有两条相邻弧位于 $\partial F(L)$ 中。出于技术上的原因，我们假设与 c_ν 相邻的弧嵌入 $\partial F(L)$ 后，分别成为虚部为正且实部介于 $-L - \nu - \frac{1}{2}$ 与 $-L - \nu$ 之间，或介于 $-L - \nu$ 与 $-L - \nu + \frac{1}{2}$ 之间的边界弧。本节不需要这一假设，但它会在第 5 节中派上用场。

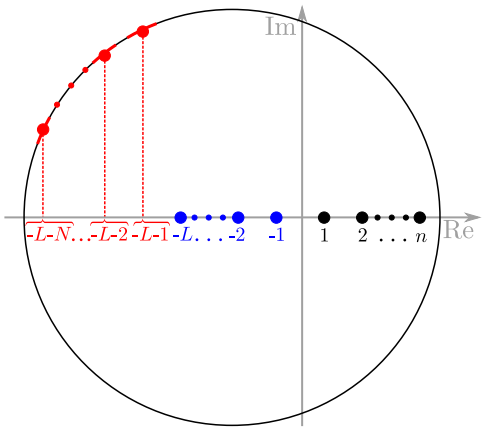


图 3.5. 基本域 $F(L)$ 嵌入到 $\mathbb{C}$ 中。

命题 3.7 ($\Gamma^n \rtimes S_n$-路径的化简)。$Z_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 中的每个元素都可以表示为一条 $\Gamma^n \rtimes S_n$-路径 ξ，其辫股 $\xi_j = (\gamma_0^j、\ c_1^j、\ \gamma_1^j、...、\ c_p^j、\ \gamma_p^j)$ 满足以下条件。对于每个 $1 \leqslant i \leqslant p$ 和 $1 \leqslant j \leqslant n$，

(1) c_i^j 是分段线性的，且其像位于 $\Sigma(L)$ 的内部。(2) c_i^j 不与任何锥点相交。(3) $c_i^j([t_{i-1}、\ t_i]) \subseteq F(L)$。对 $Z_n(\Sigma_\Gamma(L、\ N))$ 中的每个元素，同样成立。

为调整 ξ 使其满足上述性质，我们使用所谓的 Δ-变换。

定义 3.8（Δ-移动，[9, p. 11]）。设 $y_0 := (x_0, t_0), y_1 := (x_1, t_1)$ 和 $y_2 := (x_2, t_2)$ 是 $\Sigma(L) \times I$ 中的三个点，满足 $t_0 < t_1 < t_2$，且由这些点张成的线性 2-单形 Δ 包含于 $\Sigma(L) \times I$中。特别地，Δ 不包含任何穿孔点。此外，设 ξ 是一个 $\Gamma^n \rtimes S_n$-路径，表示 ZΔ中的一个

元素。如果 ξ 的辫股的 Γ-轨道恰好沿着线段 y_0y_2与 Δ 相交，我们可以在轨形辫 ξ 中用拼接路径 $\underline{y_0y_1}\cup\overline{y_1y_2}$替换 y_0y_2 。由于 Δ 不与任何穿孔点或更多辫股的 Γ-平移相交，所得的 $\Gamma^n\rtimes\mathbb{S}_n$-路径与 ξ同伦。由于上述 2-单形有界，我们将上述操作及其逆操作称为 Δ-移动。

命题 3.7 的证明。 根据引理2.8(1)，每条辫股 ξ_j 都等价于唯一一条连续的 Γ-弧 (γ, c)。由于 c 的端点位于 $\Sigma(L)$的内部，因此可以对其作相对端点的同伦变形，使得 c 完全位于 $\Sigma(L)$ 的内部。利用 $\mathbb{C}$ 中的分段线性逼近，我们可以找到 c 的一个逼近，使其位于 $\Sigma^\circ(L)$ 的开子空间 $\mathbb{C}$中；也就是说，每条辫股上连续的部分 c_i^j 都是位于 $\Sigma(L)$ 内部的路径，而该空间嵌入到 $\mathbb{C}$中，因此得到 3.7(1)。

若 ξ表示 $\mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L$中的一个元素 $N))$，则性质 3.7(2) 自动成立。若 ξ 表示 $\mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L))$中的一个元素，我们先减少辫股在锥点处停留一段时间的情形数目。通过细分这些区间，可以假设这些区间内部不会出现 Γ-跃迁。现在对常值部分作 Δ-移动（见图 3.6上图），于是可以假设路径可能与锥点相交，但不会停留在锥点处。再作一次 Δ-移动（如图 3.6 下半部分所示；该移动可能受 Γ-跃迁影响），即可消除剩余的锥点交点。

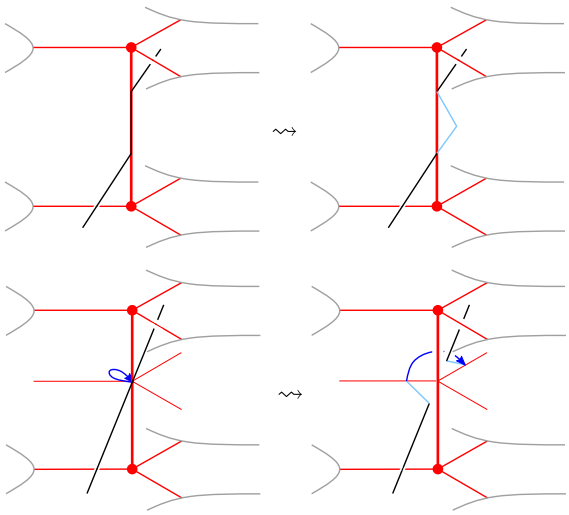


图3.6. 移除与锥点的交点。

由于 ξ 中的每条辫股都只包含分段线性路径，因此我们可以调整其中的路径，使其与 $\Gamma(\partial F(L))$只有有限多个交点。将 ξ 在所有与边界相交的时刻细分后，应用适当的移位即可将 ξ 化为基本域 $F(L)$ ，如3.7(3)所述。

对于3.7(1) 和3.7(3)，若 ξ 是一个 $\Gamma^n\rtimes\mathbb{S}_n$-路径，且表示$\mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L$中的一个元素 $N))$，则同样的论证也适用。□

推论3.9. 同态

$$\mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L,N))\to\mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L))\quad and\quad \mathrm{PZ}_n(\Sigma_\Gamma(L,N))\to\mathrm{PZ}_n(\Sigma_\Gamma(L))$$

由包含映射 $\Sigma_\Gamma(L,N)\hookrightarrow\Sigma_\Gamma(L)$ 诱导的同态是满射。

回顾定义3.1，几何辫是圆柱体内部的辫股。根据命题 3.7中的约化，我们对轨形也有类似的图景

辫子。在这种情况下，辫股包含在一个底面为 $F(L)$ 的圆柱体中（见图 3.7，左图）。与 Artin 辫不同，轨形辫的辫股可以有有限多个不连续点。在这些点处， Γ跃迁用于弥补辫股相邻部分之间的间隙。

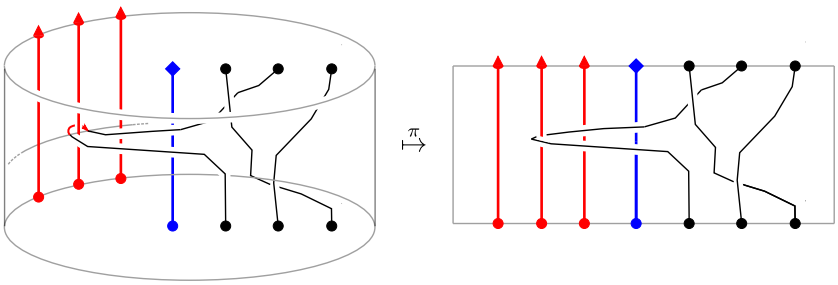


图 3.7。一条轨形辫子及其辫图。

如图 3.7所示，该图允许我们描述类似于图 3.1中的投影。

定义 3.10 （轨形辫子与轨形辫子图）。 满足性质 $\Gamma^n \rtimes \mathbb{S}_n$-路径 ξ3.7(1)-3.7(3) 的，称为一条具有辫股 ξ_j的 $1 \leqslant j \leqslant n$轨形辫。轨形辫将通过一个投影来指定

$$\pi : F(L) \times \bigsqcup_{i=1}^{q} [t_{i-1}, t_i] \to \mathbb{R} \times \bigsqcup_{i=1}^{q} [t_{i-1}, t_i]$$

其中， $F(L)$坐标相对于所选的 $F(L)$ 到 $\mathbb{C}$ 中的嵌入投影到实部，而区间坐标 t 恒等映射到 $\bigsqcup_{i=1}^{q}[t_{i-1},\ t_i]$。轨形辫的像 $\pi(\xi)$ 称为 ξ.的投影

类似于定义 3.2，我们固定如下记号。令 x、 $y \in \xi$、 $x \neq y$满足 $\pi(x) = \pi(y) =: (p,\ t)$，则 x 和 y 分别属于不同的辫股 ξ_i 和 ξ_j。

在这种情况下，点 $(p,\ t)$ 称为 $\pi(\xi)$ 中高度为 t 的交叉。如果存在 $[0,\ n+1] \times [t_{i-1},\ t_i]$ 中 $(p,\ t)$ 的一个邻域 U，使得数对 $(U,\ \pi(\xi) \cap U)$ 通过一个同胚局部同胚于 $(\mathbb{R}^2,\ \mathbb{R} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R})$，且该同胚将 $\pi(\xi_i)$ 对应到 $\mathbb{R} \times \{0\}$、将 $\pi(\xi_j)$ 对应到 $\{0\} \times \mathbb{R}$，则称此交叉为横截的。

在轨形辫 ξ 中，辫股 ξ_i 从上方交叉 ξ_j ，如果 $\mathrm{Im}(\xi_i(t)) < \mathrm{Im}(\xi_j(t))$。否则 ξ_i 从下方交叉 ξ_j。

同样，我们考虑与穿孔点 r_λ 的交叉。为此，设 $x \in \xi_i$ 满足 $\pi(x) = (-\lambda,\ t)$ ，其中 $1 \leqslant \lambda \leqslant L$。

在这种情况下，点 $(-\lambda, t)$ 称为 $\pi(\xi)$的交叉。如果存在横截的邻域 U，其位于 p 的 $[0, n+1] \times [t_{i-1}, t_i]$ 中，使得这一对

$$(U, (\pi(\xi) \cup \{-\lambda\} \times I) \cap U)$$

通过一个将$\pi(\xi_i)$ 与 $\mathbb{R} \times \{0\}$ 以及 $\{-\lambda\} \times I$ 与 $\{0\} \times \mathbb{R}$对应起来的同胚，局部同胚于 $(\mathbb{R}^2,\ \mathbb{R} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R})$。

在轨形辫子 ξ 中，如果 $\mathrm{Im}(\xi_i(t)) < 0$，辫股 ξ_i 从上方交叉 r_λ。否则ξ_i 从下方交叉 r_λ。

我们主要考虑满足以下条件的那些轨形辫子 ξ：

（1）在同一高度至多出现一个交叉，该交叉发生在两条辫股之间，或发生在一条辫股与一个穿孔点之间；（2）辫股与穿孔点在每个交叉处横截地相交，

（3）没有交叉与 Γ-跃迁同时发生，并且
(4) 不会同时发生两个 Γ-跃迁。
在这种情况下，轨形辫 ξ 的投影 $\pi(\xi)$，连同哪条辫股从上方（分别从下方）穿过，以及哪条辫股在何时包含 Γ-跃迁的信息，称为 ξ的轨形辫图。

与 Artin 辫一样，我们可以用图示来表示轨形辫图（例如见图 3.7 右图）。两条辫股之间的交叉，以及辫股与穿孔之间的交叉，均按照几何辫的方式绘制。此外，回想一下，在例 2.3 中，我们为 Γ 中的循环因子 $\mathbb{Z}_{m_\nu}$ 选定了循环生成元 γ_ν。如果辫股 ξ_j 在时间 t_i包含一个 Γ-跃迁 $\gamma_i^j = \gamma_\nu^\varepsilon$，我们就画出第$j$条辫股绕着对应第 ν个锥点的横条缠绕。对于 $\varepsilon = 1$，我们画出第 j条辫股逆时针绕着对应第 ν个锥点的横条缠绕。对于$\varepsilon = -1$，我们画出第 j条辫股顺时针绕着对应第 ν个锥点的横条缠绕。根据条件 3.7(3)，γ_ν^l 不可能发生带有 $l \notin \{\pm 1\}$ 的 Γ-跃迁。

命题3.7 结合经典情形中的标准技巧以及定义 2.5(2) 中引入的移位，可得：

引理 3.11. $Z_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 和$Z_n(\Sigma_\Gamma(L,N))$ 中的每个元素，都由一个投影为轨形辫图的轨形辫表示。

下文将使用上文引入的轨形辫图来表示轨形辫。我们不再区分轨形辫及其在 $Z_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 和 $Z_n(\Sigma_\Gamma(L,N))$中的同伦类。受 Artin 辫群的启发，我们先考察不与锥点或穿孔点交织的轨形辫：对于 $1 \leqslant j < n$，我们将轨形辫 h_j 定义为由下列辫图表示的轨形辫：

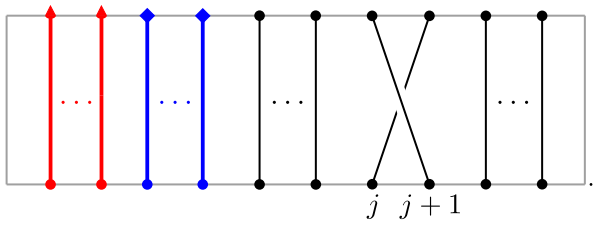


图 3.8. 生成元 h_j。

这些轨形辫分别生成 $Z_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 和 $Z_n(\Sigma_\Gamma(L,N))$的一个子群，该子群同构于 Artin 辫群 B_n。我们还可以定义

$$a_{ji} := h_{j-1}^{-1}...h_{i+1}^{-1}h_i^2h_{i+1}...h_{j-1} \text{ for } 1 \leqslant i < j \leqslant n, \tag{5}$$

这是 $PZ_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 中的一个辫子，其投影如下

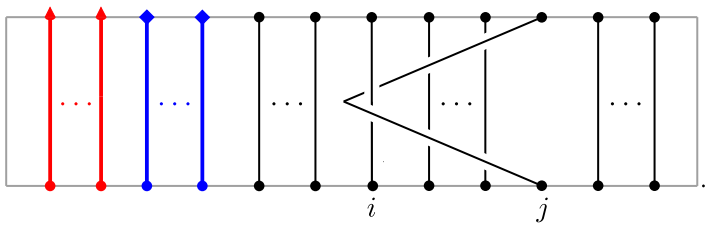


图 3.9。 a_{ji}的辫子图表。

此外，我们引入轨形辫子 t_λ 用于 $1 \leqslant \lambda \leqslant L$ 以及 u_ν 用于 $1 \leqslant \nu \leqslant N$，它们涉及锥点或穿孔点。在这两种情况下，最后的 $n-1$ 条辫股固定不动。前面的辫股如图3.10所示。

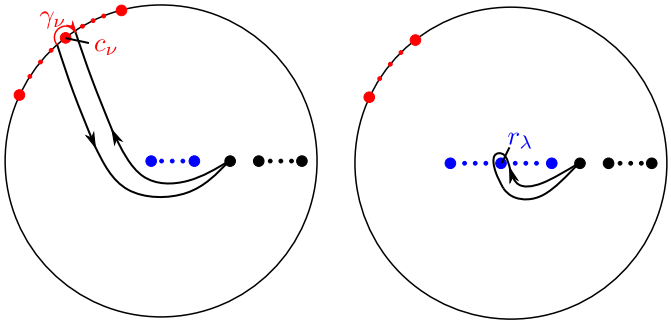


图 3.10。 u_ν （左）和 t_λ （右）的第一条辫股。

对于 $1 \leqslant k \leqslant n$、 $1 \leqslant \nu \leqslant N$ 和 $1 \leqslant \lambda \leqslant L$，我们进一步定义

$$c_{k\nu} := h_{k-1}^{-1}...h_1^{-1}u_\nu h_1...h_{k-1} \quad \text{and} \quad b_{k\lambda} := h_{k-1}^{-1}...h_1^{-1}t_\lambda h_1...h_{k-1}. \tag{6}$$

这些元素投影到下方图 3.11 所示的图表。

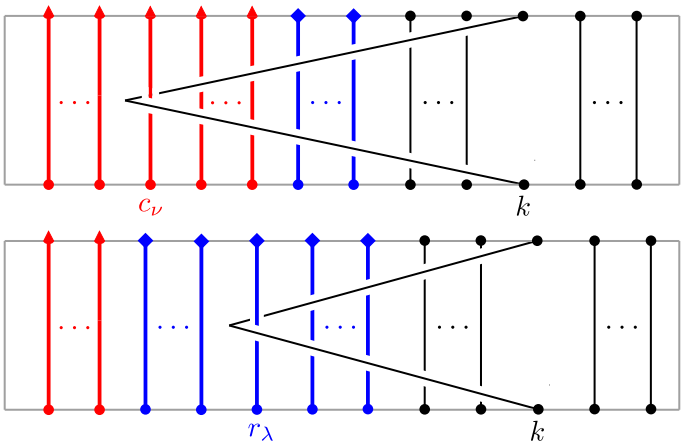


图 3.11。 $c_{k\nu}$ （左）和 $b_{k\lambda}$ （右）的辫图。

注释 3.12。 尽管轨形辫图看起来与 Artin 辫图相似，但二者存在一个本质区别：对于每个 $1 \leqslant k \leqslant n$ 和 $1 \leqslant \nu \leqslant N$， m_ν 次幂是 $c_{k\nu}$ 中的平凡辫 $\mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L))$。这是因为 $c_{k\nu}^{m_\nu}$与一个除第 k 股之外其余所有辫股均固定的辫子同伦。此外，我们可以对第 k 股进行移位，使得该辫股成为一条连续的 Γ-路径，并环绕第 ν 个锥点（见图 3.12）。由于该环路在$\Sigma(L)$中是可缩的，因此这意味着 $c_{k\nu}^{m_\nu}$ 是平凡的。因此， $c_{k\nu}$ 是$\mathrm{Z}_n(\Sigma(L))$中的一个有限阶元素。这种现象已由 Allcock [1]特别强调。

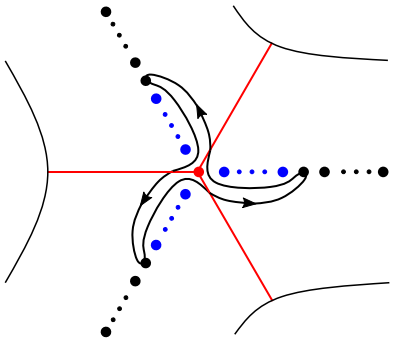


图 3.12。 $c_{k\nu}^{m_\nu} = 1$ 关于 $k = 1$的关系。

相比之下，如果移除锥点，图 3.12 中的环路便不是可缩的，即 $c_{k\nu}^{m_\nu}$在 Z $_n(\Sigma_\Gamma(L$中不是平凡的， $N))$这使推论 3.9中的满同态不是单射。

将 $\mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 中的轨形辫图与 Artin辫图进行比较，关系 $u_\nu^{m_\nu(6)}= c_{1\nu}^{m_\nu} = 1$ 关于 $1 \leqslant \nu \leqslant N$ 反映了修改轨形辫图时允许的其他变换（见图 3.13）。类比于经典情形（见 [9, 第 1.2 节3], ），这些变换可视为轨形辫图的一种额外 Reidemeister移动。

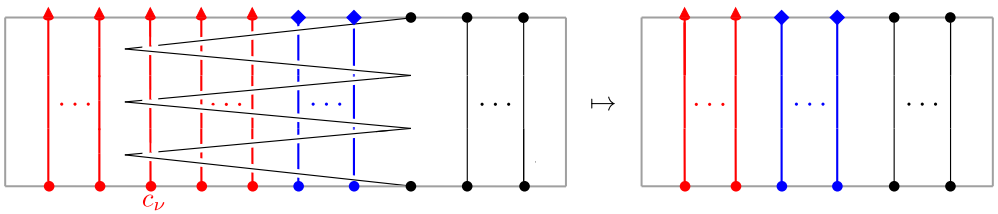


图 3.13。$\mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 中关于 $m_\nu = 3$的轨形辫图的额外 Reidemeister移动。

3.5. $\mathbf{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L))$的一个有限生成集

Artin辫群 B_n 及其纯子群 PB_n的生成集众所周知，例如参见 定理 1.12，推论 1。19]。主要思路见观察 3.3。利用轨形辫图，我们类似地得到轨形辫群及其纯子群的生成集。对于纯轨形辫群，这与 [12, 引理 4。1]类似。详细内容也可见作者的博士论文 [7, 第 3 节。5]。

定理3.13。 轨形辫群$\mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L, N))$ 由以下元素生成。

$$h_j, t_\lambda \ \ and \ \ u_\nu \ \ for \ \ 1 \leqslant j < n, 1 \leqslant \lambda \leqslant L \ \ and \ \ 1 \leqslant \nu \leqslant N.$$

由推论3.9，这尤其意味着：

推论3.14。 轨形辫群 $\mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 由以下元素生成

$$h_j, t_\lambda \ \ and \ \ u_\nu \ \ for \ \ 1 \leqslant j < n, 1 \leqslant \lambda \leqslant L \ \ and \ \ 1 \leqslant \nu \leqslant N.$$

定理3.15。 纯轨形辫群 $\mathrm{PZ}_n(\Sigma_\Gamma(L, N))$ 由以下元素生成。

a_{ji}、 $b_{k\lambda}$和 $c_{k\nu}$，对于 $1 \leqslant i$、 j、 $k \leqslant n$，满足 $i < j$、 $1 \leqslant \lambda \leqslant L$和 $1 \leqslant \nu \leqslant N$.

根据推论3.9，这尤其意味着：

推论 3.16。 纯轨形辫群 $\mathrm{PZ}_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 由以下元素生成

a_{ji}、 $b_{k\lambda}$ 和 $c_{k\nu}$，适用于 $1 \leqslant i$、 j、 $k \leqslant n$，并具有 $i < j$、 $1 \leqslant \lambda \leqslant L$ 和 $1 \leqslant \nu \leqslant N$.

4. 轨形映射类群

研究 Artin 辫群的一种重要方法，是将其与带孔圆盘的映射类群联系起来，例如参见 [6, 第 9.1 节。3]本节中，我们回顾轨形映射类群（带标记点）的定义，以及 [8]中关于它们的一些结果。这为比较轨形辫群与轨形映射类群奠定基础。

给定一个轨形 M_G，我们希望将其映射类群定义为 M 的某些同胚构成的群模掉一个等价关系。这推广了流形的映射类群这一概念。若作用群 G 是平凡的，则下面定义的 $M_{\{1\}}$ 的轨形映射类群与 M 的映射类群一致。

与流形的情形一样，我们考虑逐点固定边界的 M 同胚。此外，轨形映射类群应反映 M 上 G-作用的结构。因此，我们将范围限制在 G-等变同胚的子群 $\mathrm{Homeo}^{orb}(M_G,\ \partial M) \leqslant \mathrm{Homeo}(M,\ \partial M)$ 中；也就是说，对于每个 $H \in \mathrm{Homeo}^{orb}(M_G,\ \partial M)$，对所有 $g \in G$ 和 $x \in M$，都有 $H(g(x)) = g(H(x))$。一个环境同伦是一个连续映射

$$I \to \mathrm{Homeo}^{orb}(M_G, \partial M).$$

两个 G-等变同胚 H，H' 称为环境同伦的，记作 $H \sim H'$，如果存在一个环境同伦 H_t，使得 $H_0 = H$ 且 $H_1 = H'$。在由环境同伦所诱导的等价关系下，我们定义轨形映射类群。

定义 4.1（轨形映射类群）。 逐点固定边界的 G-等变同胚群模去环境同伦

$$\mathrm{Map}^{orb}(M_G) := \mathrm{Homeo}^{orb}(M_G, \partial M)/\sim$$

称为 M_G的映射类群。

基于 $\mathrm{Homeo}^{orb}(M_G, \partial M)$ 是拓扑群这一事实，映射类群也具有拓扑群的结构。关于轨形映射类群的一个例子，请参见 [8, 例 3.4]。

定义 4.2（带标记点的轨形映射类群）。 设 M_G 是一个轨形，并固定一组非奇异标记点 $P = \{p_1,\ \ldots,\ p_n\}$，它们位于 M 中，且满足 $G(p_i) \neq G(p_j)$ 对于 $1 \leqslant i,\ j \leqslant n,\ i \neq j$。用 $\mathrm{Homeo}_n^{orb}(M_G, \partial M)$ 表示保持标记点 $G(P)$ 的轨道作为一个集合不变的同胚所构成的子群：

$$\{H \in \mathrm{Homeo}^{orb}(M_G, \partial M) \mid H(G(P)) = G(P)\}.$$

我们将这些同胚视为在环境同伦 $I \to \mathrm{Homeo}_n^{orb}(M_G, \partial M)$ 下等价。相应的等价关系记为 $\sim_n$。由

$$\mathrm{Map}_n^{orb}(M_G) := \mathrm{Homeo}_n^{orb}(M_G, \partial M)/\sim_n$$

我们将 M_G 关于 n 个标记点的轨形映射类群。

我们强调，标记点的轨道 $G(P)$ 是一个离散集合。因此，经过 $\mathrm{Homeo}_n^{orb}(M_G,\ \partial M)$ 的环境同伦 H_t 在标记点上保持不变，即 $H_t(p_j) = H_0(p_j) = H_1(p_j)$ 对于每个 $1 \leqslant j \leqslant n$ 和 $t \in I$ 都是如此。关于含有标记点的轨形映射类群的示例，请参见 [8, 示例 3.6]。

将每个标记点映到其 G-轨道内的同胚构成所谓的纯轨形映射类群：

定义 4.3 （纯轨形映射类群）。 令 $\mathbf{PHomeo}_n^{orb}(M_G, \partial M)$ 为纯同胚群

$$\{H \in \mathrm{Homeo}_n^{orb}(M_G, \partial M) \mid H(p_j) = g_j(p_j) \text{ with } g_j \in G \text{ for all } 1 \leqslant j \leqslant n\}.$$

由纯同胚诱导的 $\mathbf{Map}_n^{orb}(M_G)$ 子群称为纯轨形映射类群

$$\mathrm{PMap}_n^{orb}(M_G) := \mathrm{PHomeo}_n^{orb}(M_G, \partial M)/\sim_n .$$

此时，我们回顾一下，流形的纯映射类群中的同胚会固定每个标记点。相比之下，我们只要求 $\mathbf{PMap}_n^{orb}(M_G)$ 中的同胚保持每个标记点的轨道，而不要求它们固定标记点本身。此外，我们强调，允许标记点的不同轨道上有不同的群作用，即 $H(p_i) = g_i(p_i)$ 和 $H(p_j) = g_j(p_j)$，其中 $g_i \neq g_j$ 适用于 $i \neq j$。

在 [8], 中，我们研究了轨形 $\Sigma_\Gamma(L)$ 的轨形映射类群的以下子群，其中底层曲面 Σ 在 $\Gamma(\{r_1, ..., r_L\})$处穿孔：同态的核

$$\mathrm{Forget}_n^{orb} : \mathrm{Map}_n^{orb}(\Sigma_\Gamma(L)) \to \mathrm{Map}^{orb}(\Sigma_\Gamma(L))$$

该映射遗忘标记点。

定义 4.4. 令 $\mathbf{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$,表示 $\mathbf{Forget}_n^{orb}$ 的核。这个子群由 Homeo 的子群诱导得到

$$\mathrm{Homeo}_n^{\mathrm{id},orb}(\Sigma_\Gamma(L), \partial\Sigma(L)) := \{H \in \mathrm{Homeo}_n^{orb}(\Sigma_\Gamma(L), \partial\Sigma(L)) \mid H \sim \mathrm{id}_{\Sigma(L)}\}$$

此外，令 $\mathbf{PMap}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L)) := \mathbf{Forget}_n^{orb}|_{\mathrm{PMap}_n^{orb}(\Sigma_\Gamma(L))}$。这个子群由子群 $\mathbf{PHomeo}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L),, \partial\Sigma(L))$ 诱导得到，该子群包含 $\mathbf{Homeo}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L),, \partial\Sigma(L))$ 的纯同胚。

这个子群可与 $\mathbf{Map}_n(D(L,N))$ 中的一个类似子群相识别，详情见 [8, 命题 4.3] 。特别地，由此可得：

定理 4.5 （轨形映射类群的 Birman 正合列， [8, 定理 A]）。 以下图表是一个短正合序列：

$$1 \to \pi_1(\mathrm{Conf}_n(D(L,N))) \xrightarrow{\mathrm{Push}_n^{orb}} \mathrm{Map}_n^{\mathrm{id},orb}(\Sigma_\Gamma(L)) \xrightarrow{\mathrm{Forget}_n^{orb}} \underbrace{\mathrm{Map}^{\mathrm{id},orb}(\Sigma_\Gamma(L))}_{=1} \to 1.$$

推论 4.6 ([8, 定理 B])。 下图是一个可分裂的短正合列：

$$1 \to F_{n-1+L+N} \xrightarrow{\mathrm{Push}^{orb}_{\mathrm{PMap}_n}} \mathrm{PMap}_n^{\mathrm{id},orb}(\Sigma_\Gamma(L)) \xrightarrow{\mathrm{Forget}^{orb}_{\mathrm{PMap}_n}} \mathrm{PMap}_{n-1}^{\mathrm{id},orb}(\Sigma_\Gamma(L)) \to 1.$$

定义 4.7。 群 G 是一个半直积，其正规子群为 N，且商群为 H，如果存在一个短正合列

$$1 \to N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} H \to 1$$

它有一个截面 $s: H \to G$。在这种情况下，我们记作 $G = N \rtimes H$。

特别地，推论4.6 表明 $\mathbf{PMap}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$ ，具有半直积结构

$$F_{n-1+L+N} \rtimes \mathrm{PMap}_{n-1}^{\mathrm{id},orb}(\Sigma_\Gamma(L)).$$

在下文中，群表示将是我们的重要工具。特别是，表示使我们能够通过定义在生成集上的赋值来定义群同态。

定义 4.8。 设 G 是一个具有如下表示的群

$$\langle X \mid R\rangle = \langle x_1, ..., x_k \mid r_1 = s_1, ..., r_l = s_l\rangle$$

并且 H 是由一组元素 $\{y_1, ..., y_p\}$ 生成的群，满足 $p \geqslant k$。此外，假设词 r_j 和 s_j 分别由 $x_{j_1}^{\varepsilon_1}...x_{j_q}^{\varepsilon_q}$ 和 $x_{\tilde{j}_1}^{\delta_1}...x_{\tilde{j}_r}^{\delta_r}$ 给出。给定赋值 *assignments* ϕ : $x_i \mapsto y_i$ ，其中 $1 \leqslant i \leqslant k$，我们将其逐字母作用于词，将 x_i^{-1} 映射到 y_i^{-1} 。若关系 $y_{j_1}^{\varepsilon_1}...y_{j_q}^{\varepsilon_q} = y_{\tilde{j}_1}^{\delta_1}...y_{\tilde{j}_r}^{\delta_r}$ 对每个 $1 \leqslant j \leqslant l$ 都在 H 中成立，则称赋值 ϕ *preserve the relations in* R 。

定理 4.9 (冯·戴克， [10, 第 346]页)。 设 G 是一个具有如下表示的群: $\langle X \mid R\rangle$如上所述，且 H 是由集合 $\{y_1, ..., y_p\}$ 生成的群，满足 $p \geqslant k$。若赋值

$$\phi : x_i \mapsto y_i$$

保持 R 中的关系，那么这些赋值会诱导出一个同态

$$\phi : G \to H.$$

引理 4.10 ([7, 引理 5.17])。 设 N 和 H 是由表示$N = \langle X \mid R\rangle$ 和 $H = \langle Y \mid S\rangle$给出的群。则以下条件等价:

(1) G 是以 N 为正规子群、以 H为商群的半直积。(2) G 有一个表示

$$G = \langle X, Y \mid R, S, y^{\pm 1}xy^{\mp 1} = \phi_{y^{\pm 1}}(x) \text{ for all } x \in X, y \in Y\rangle$$

使得对于所有 $x \in X$ 和 $y \in Y$， $\phi_{y^{\pm 1}}(x)$ 都是字母表 X 中的一个词。此外，对于每个 $y \in Y$，这些赋值

(7) $$x \mapsto \phi_y(x)$$

诱导出一个自同构 $\phi_y \in$ 自同构群(N) ，而这些赋值

(8) $$y \mapsto \phi_y$$

诱导出一个同态 $H \to$ 自同构群(N)。

注释 4.11。 引理 4.10将在定理 C的证明中发挥关键作用。在那里，我们将利用它，给定一个具有表示的群 G ，推导出 G 是一个半直积。在这种情况下，我们希望证明给定的表示满足引理 4.10(2)中的条件。

证明这一点的基础是将生成集分成两个不相交的子集 X和 Y，使得 X 生成正规子群，且 Y 生成商群。

此外，我们将这些关系划分为三个互不相交的子集 R、S 和 C ，使得 R 包含所有由 X中的字母构成的关系， S 包含所有由 Y 中的字母构成的关系，而 C 包含其余所有关系。特别是，C 中的关系应写成如下形式 $y^{\pm 1}xy^{\mp 1} = \phi_{y^{\pm 1}}(x)$ 对所有 $x \in X$ 以及 $y \in Y$。为了推导出半直积结构，还需要检查来自C 的关系是否满足赋值的条件（7）和（8）。按以下顺序检查这些条件是合理的:

步骤 1. 根据定理 4.9，第一步是检查赋值ϕ : $y \mapsto \phi_y$ 来自（8）是否保持 S中的关系。如果 S 包含一个关系 $y_1^{\varepsilon_1}...y_q^{\varepsilon_q} = \tilde{y}_1^{\delta_1}...\tilde{y}_r^{\delta_r}$，这就要求赋值

$$x \mapsto \phi_{y_1^{\varepsilon_1}} \circ ... \circ \phi_{y_q^{\varepsilon_q}}(x) \text{ and}$$
$$x \mapsto \phi_{\tilde{y}_1^{\delta_1}} \circ ... \circ \phi_{\tilde{y}_r^{\delta_r}}(x)$$

在每个字母 $x \in X$ 上一致（在 R 中的关系意义下）。

特别地，我们可以独立于 $x \mapsto \phi_y(x)$ 是否诱导了由 $\langle X \mid R\rangle$ 表示的群的自同构这一事实，检查 ϕ 是否诱导了一个同态。

步骤2. 在第二步中，我们检查赋值 $\phi_y\colon x \mapsto \phi_y(x)$ 是否对所有 $y \in Y$ 都诱导了由 $\langle X \mid R\rangle$ 表示的群的自同构。

为应用定理4.9，我们检查对于所有 $y \in Y$ 赋值 ϕ_y 是否保持来自 R的关系。如果是这样，赋值 ϕ_y 便会在由 $\langle X \mid R\rangle$表示的群上诱导一个端同态。根据第一步，我们还可得

$$\phi_{y^{-1}} \circ \phi_y = \mathrm{id}_{\langle X|R\rangle} = \phi_y \circ \phi_{y^{-1}},$$

也就是说，由 $x \mapsto \phi_y(x)$ 诱导的端同态是双射，因此是由 $\langle X \mid R\rangle$表示的群的自同构。

推论 4.6与引理4.10 共同给出了 $\mathbf{PMap}_n^{\mathrm{id}}{}^{orb}(\Sigma_\Gamma(L))$,的表示。为描述这一表示，我们需要确定一组能够生成生成集的同胚。关于图3.5中所示的 $F(L)$ 嵌入，令 $D_{i,j} \subseteq F(L)$ 对每个 $1 \leqslant i < j \leqslant n$ 均为圆盘

$$\Big(B_{\frac{1}{4}}(p_i) \cup B_{\frac{1}{4}}(p_j)\Big) \cap \{x \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(x) \geqslant 0\}$$
$$\cup A_{\frac{j-i}{2}-\frac{1}{4},\frac{j-i}{2}+\frac{1}{4}}\left(\tfrac{p_i+p_j}{2}\right) \cap \{x \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(x) \leqslant 0\}$$

其中，$A_{r,R}(x)$ 表示以内半径为 r 、外半径为 R 且以 x为中心的环带。圆盘$D_{i,j}$ 恰好包含标记点 p_i 和 p_j。见图4.1 （左），其中展示了$D_{i,j}$。

此外，对于每一对 $1 \leqslant k \leqslant n$ 和 $1 \leqslant \lambda \leqslant L$，令 $D_{r_\lambda,\,k} \subseteq F(L)$ 为圆盘

$$\Big(B_{\frac{1}{4}}(r_\lambda) \cup B_{\frac{1}{4}}(p_k)\Big) \cap \{x \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(x) \geqslant 0\}$$
$$\cup A_{\frac{k+\lambda}{2}-\frac{1}{4},\frac{k+\lambda}{2}+\frac{1}{4}}\left(\tfrac{r_\lambda+p_k}{2}\right) \cap \{x \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(x) \leqslant 0\}.$$

圆盘 $D_{r_\lambda,\,k}$ 恰好包含标记点 r_λ 和 p_k。图 4.1 （右）展示了$D_{r_\lambda,\,k}$。

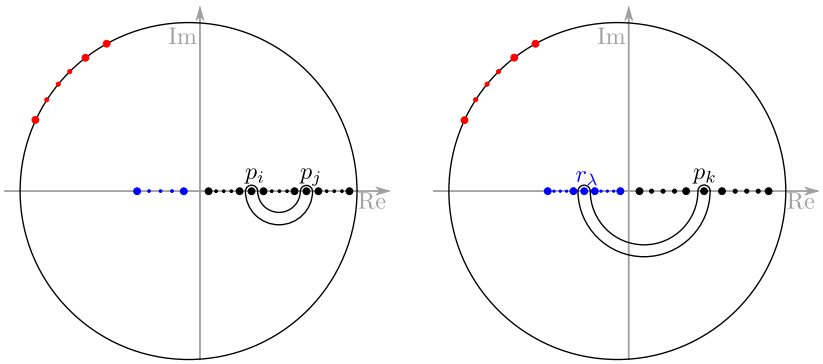


图 4.1。圆盘 $D_{i,\,j}$ （左）和 $D_{r_\lambda,\,k}$ （右）。

同胚 A_{ji} 和 $B_{k\lambda}$ 在图4.2 中所示的每个 Γ-平移的 $D_{i,\,j}$ 和 $D_{r_\lambda,\,k}$上执行扭转。

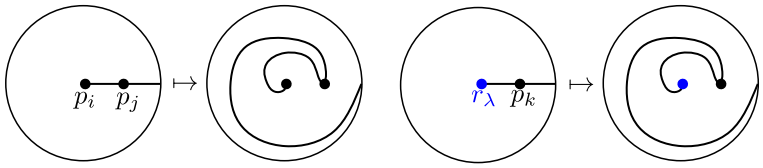
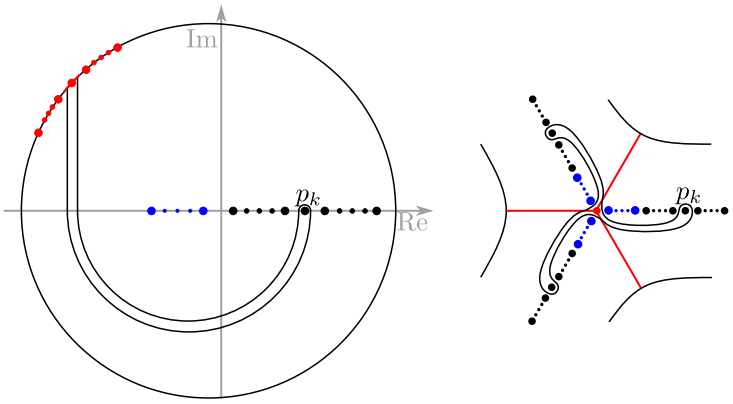


图 4.2。由 A_{ji} （左）和 $B_{k\lambda}$ （右）诱导的扭转。

˜此外，对于每个 $1 \leqslant k \leqslant n$ 和 $1 \leqslant \nu \leqslant N$，令 $D_{c_\nu,\,k}$ 为该圆盘

$$
\begin{aligned}
&B_{\frac{1}{4}}(p_k) \cap \{x \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(x) \geqslant 0\} \\
\cup &A_{\frac{k+L+\nu}{2}-\frac{1}{4},\frac{k+L+\nu}{2}+\frac{1}{4}}\left(\tfrac{-L-\nu+p_k}{2}\right) \cap \{x \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(x) \leqslant 0\} \\
\cup &\left\{x \in F \mid \mathrm{Im}(x) \geqslant 0, \mathrm{Re}(x) \in \left[-L-\nu-\tfrac{1}{4}, -L-\nu+\tfrac{1}{4}\right]\right\}.
\end{aligned}
$$

˜那么$D_{c_\nu,\,k} := \mathbb{Z}_{m_\nu} \cdot D_{c_\nu,\,k}$ 是一个 $\mathbb{Z}_{m_\nu}$-不变圆盘，它包含锥点c_ν 以及相邻的标记点 $\mathbb{Z}_{m_\nu}(p_k)$。图示见图4.3 $D_{c_\nu\,(\text{左图})\,k}$以及圆盘$D_{c_\nu\,(\text{右图})\,k} \subseteq \Sigma(L)$ 的一个示例。



˜图 4.3。圆盘$D_{c_\nu\,(\text{左图})\,k} \subseteq F$ 以及$D_{c_\nu,\,k} \subseteq \Sigma(L)$ 对应三阶锥点的情形（右图）。

令 $C_{k\nu}$ 为执行 $\frac{2\pi}{m_\nu}$-扭转的同胚，如图1.4 所示，该操作作用于$D_{c_\nu,\,k}$的每个 Γ-平移像上。对于同胚 A_{ji}，$B_{k\lambda}$ 和 $C_{k\nu}$，我们将用它们的名称作为相应映射类的缩写。这些元素满足以下关系：

引理 4.12 ([8, 引理4.18])。设 $1 \leqslant h,i,j,k,l < n$满足 $h < i < j < k < l$,$1 \leqslant \theta, \lambda \leqslant L$满足 $\theta < \lambda$且 $1 \leqslant \mu,\nu \leqslant N$满足 $\mu < \nu$。则以下关系成立：

(1) a) $A_{lj}A_{nj}A_{lj}^{-1} = A_{nj}^{-1}A_{nl}^{-1}A_{nj}A_{nl}A_{nj}$ *and* a') $A_{lj}^{-1}A_{nj}A_{lj} = A_{nl}A_{nj}A_{nl}^{-1}$,
b) $A_{ji}A_{nj}A_{ji}^{-1} = A_{ni}^{-1}A_{nj}A_{ni}$ *and* b') $A_{ji}^{-1}A_{nj}A_{ji} = A_{nj}A_{ni}A_{nj}A_{ni}^{-1}A_{nj}^{-1}$,
c) $B_{j\lambda}A_{nj}B_{j\lambda}^{-1} = B_{n\lambda}^{-1}A_{nj}B_{n\lambda}$ *and* c') $B_{j\lambda}^{-1}A_{nj}B_{j\lambda} = A_{nj}B_{n\lambda}A_{nj}B_{n\lambda}^{-1}A_{nj}^{-1}$,
d) $C_{j\nu}A_{nj}C_{j\nu}^{-1} = C_{n\nu}^{-1}A_{nj}C_{n\nu}$ *and* d') $C_{j\nu}^{-1}A_{nj}C_{j\nu} = A_{nj}C_{n\nu}A_{nj}C_{n\nu}^{-1}A_{nj}^{-1}$,
e) $B_{j\lambda}B_{n\lambda}B_{j\lambda}^{-1} = B_{n\lambda}^{-1}A_{nj}^{-1}B_{n\lambda}A_{nj}B_{n\lambda}$ *and* e') $B_{j\lambda}^{-1}B_{n\lambda}B_{j\lambda} = A_{nj}B_{n\lambda}A_{nj}^{-1}$,
f) $C_{j\nu}C_{n\nu}C_{j\nu}^{-1} = C_{n\nu}^{-1}A_{nj}^{-1}C_{n\nu}A_{nj}C_{n\nu}$ *and* f') $C_{j\nu}^{-1}C_{n\nu}C_{j\nu} = A_{nj}C_{n\nu}A_{nj}^{-1}$,

(2) a) $[A_{ih}, A_{nj}] = 1$, $[B_{i\lambda}, A_{nj}] = 1$ *and* $[C_{i\nu}, A_{nj}] = 1$,
b) $[A_{lk}, A_{nj}] = 1$, $[A_{ji}, B_{n\lambda}] = 1$, $[B_{j\theta}, B_{n\lambda}] = 1$,
$[A_{ji}, C_{n\nu}] = 1$, $[B_{j\lambda}, C_{n\nu}] = 1$ *and* $[C_{j\mu}, C_{n\nu}] = 1$,
c) $[A_{nl}A_{nj}A_{nl}^{-1}, A_{li}] = 1$, $[A_{nl}A_{nj}A_{nl}^{-1}, B_{l\lambda}] = 1$ *and*
$[A_{nl}A_{nj}A_{nl}^{-1}, C_{l\nu}] = 1$,
d) $[A_{nj}B_{n\theta}A_{nj}^{-1}, B_{j\lambda}] = 1$ *and* $[A_{nj}B_{n\theta}A_{nj}^{-1}, C_{j\nu}] = 1$,
e) $[A_{nj}C_{n\mu}A_{nj}^{-1}, C_{j\nu}] = 1$.

特别是，这些关系意味着：

$$
\begin{aligned}
(3)\quad \text{a)}\ & A_{li}A_{nj}A_{li}^{-1} = A_{ni}^{-1}A_{nl}^{-1}A_{ni}A_{nl}A_{nj}A_{nl}^{-1}A_{ni}^{-1}A_{nl}A_{ni},\\
\text{a')}\ & A_{li}^{-1}A_{nj}A_{li} = A_{nl}A_{ni}A_{nl}^{-1}A_{ni}^{-1}A_{nj}A_{ni}A_{nl}A_{ni}^{-1}A_{nl}^{-1},\\
\text{b)}\ & B_{l\lambda}A_{nj}B_{l\lambda}^{-1} = B_{n\lambda}^{-1}A_{nl}^{-1}B_{n\lambda}A_{nl}A_{nj}A_{nl}^{-1}B_{n\lambda}^{-1}A_{nl}B_{n\lambda},\\
\text{b')}\ & B_{l\lambda}^{-1}A_{nj}B_{l\lambda} = A_{nl}B_{n\lambda}A_{nl}^{-1}B_{n\lambda}^{-1}A_{nj}B_{n\lambda}A_{nl}B_{n\lambda}^{-1}A_{nl}^{-1},\\
\text{c)}\ & C_{l\nu}A_{nj}C_{l\nu}^{-1} = C_{n\nu}^{-1}A_{nl}^{-1}C_{n\nu}A_{nl}A_{nj}A_{nl}^{-1}C_{n\nu}^{-1}A_{nl}C_{n\nu},\\
\text{c')}\ & C_{l\nu}^{-1}A_{nj}C_{l\nu} = A_{nl}C_{n\nu}A_{nl}^{-1}C_{n\nu}^{-1}A_{nj}C_{n\nu}A_{nl}C_{n\nu}^{-1}A_{nl}^{-1},\\
\text{d)}\ & B_{j\lambda}B_{n\theta}B_{j\lambda}^{-1} = B_{n\lambda}^{-1}A_{nj}^{-1}B_{n\lambda}A_{nj}B_{n\theta}A_{nj}^{-1}B_{n\lambda}^{-1}A_{nj}B_{n\lambda},\\
\text{d')}\ & B_{j\lambda}^{-1}B_{n\theta}B_{j\lambda} = A_{nj}B_{n\lambda}A_{nj}^{-1}B_{n\lambda}^{-1}B_{n\theta}B_{n\lambda}A_{nj}B_{n\lambda}^{-1}A_{nj}^{-1},\\
\text{e)}\ & C_{j\nu}B_{n\lambda}C_{j\nu}^{-1} = C_{n\nu}^{-1}A_{nj}^{-1}C_{n\nu}A_{nj}B_{n\lambda}A_{nj}^{-1}C_{n\nu}^{-1}A_{nj}C_{n\nu},\\
\text{e')}\ & C_{j\nu}^{-1}B_{n\lambda}C_{j\nu} = A_{nj}C_{n\nu}A_{nj}^{-1}C_{n\nu}^{-1}B_{n\lambda}C_{n\nu}A_{nj}C_{n\nu}^{-1}A_{nj}^{-1},\\
\text{f)}\ & C_{j\nu}C_{n\mu}C_{j\nu}^{-1} = C_{n\nu}^{-1}A_{nj}^{-1}C_{n\nu}A_{nj}C_{n\mu}A_{nj}^{-1}C_{n\nu}^{-1}A_{nj}C_{n\nu},\\
\text{f')}\ & C_{j\nu}^{-1}C_{n\mu}C_{j\nu} = A_{nj}C_{n\nu}A_{nj}^{-1}C_{n\nu}^{-1}C_{n\mu}C_{n\nu}A_{nj}C_{n\nu}^{-1}A_{nj}^{-1}.
\end{aligned}
$$

现在，推论 4.6与引理 4.10和4.12一起给出以下 $\mathbf{PMap}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$, 的表示：

推论 4.13 ([8, 推论 4.19])。 纯映射类群 $\mathrm{PMap}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$,的表示具有以下生成元

$$A_{ji}, B_{k\lambda} \quad and \quad C_{k\nu},$$

对于 $1 \leqslant i$、j、$k \leqslant n$，其中有 $i < j$、$1 \leqslant \lambda \leqslant L$ 和 $1 \leqslant \nu \leqslant N$，以及以下关于 $1 \leqslant i$、j、k、$l \leqslant n$ 的定义关系，其中有 $i < j < k < l$、$1 \leqslant \theta$、$\lambda \leqslant L$，且有 $\theta < \lambda$ 和$1 \leqslant \mu$、$\nu \leqslant N$，其中有 $\mu < \nu$:

(1) $[A_{ji}$、$A_{lk}] = 1$、$[B_{j\lambda}$、$A_{lk}] = 1$和 $[C_{j\nu}$、$A_{lk}] = 1$, (2) $[A_{li}$、$A_{kj}] = 1$、$[B_{l\lambda}$、$A_{kj}] = 1$、$[B_{l\lambda}$、$B_{k\theta}] = 1$、$[C_{l\nu}$、$A_{kj}] = 1$、$[C_{l\nu}$、$B_{k\lambda}] = 1$和 $[C_{l\nu}$、$C_{k\mu}] = 1$, (3)$[A_{lk}A_{lj}A_{lk}^{-1}$、$A_{ki}] = 1$、$[A_{kj}A_{ki}A_{kj}^{-1}$、$B_{j\lambda}] = 1$、$[A_{kj}B_{k\theta}A_{kj}^{-1}$、$B_{j\lambda}] = 1$、$[A_{kj}A_{ki}A_{kj}^{-1}$、$C_{j\nu}] = 1$、$[A_{kj}C_{k\mu}A_{kj}^{-1}$、$C_{j\nu}] = 1$和$[A_{kj}B_{k\lambda}A_{kj}^{-1}$、$C_{j\nu}] = 1$, (4)

$A_{ji}A_{kj}A_{ki} = A_{ki}A_{ji}A_{kj} = A_{kj}A_{ki}A_{ji}$、

$A_{ji}B_{j\lambda}B_{i\lambda} = B_{i\lambda}A_{ji}B_{j\lambda} = B_{j\lambda}B_{i\lambda}A_{ji}$ 和$A_{ji}C_{j\nu}C_{i\nu} = C_{i\nu}A_{ji}C_{j\nu} = C_{j\nu}C_{i\nu}A_{ji}$。

此外，我们还考虑群 $\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$, 。除上述元素外，这个群还包含由以下同胚表示的元素。令 H_j 对于 $1 \leqslant j < n$ 表示在圆盘 Γ 的每个平移副本上执行以下半扭转的同胚 $D_{j,\ j+1}$即图 $D_{i\ \text{中的圆盘}\ j+1}$ （见图 4.1，其中 $i = j$:

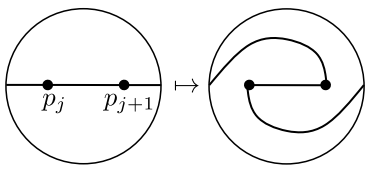


图 4.4。半扭转 H_j。

对于每个 $1 \leqslant \lambda \leqslant L$ 和 $1 \leqslant \nu \leqslant N$，令 $T_\lambda := B_{1\lambda}$ 和 $U_\nu := C_{1\nu}$。至于纯生成元，我们将使用名称 H_j，T_λ 和 U_ν 作为相应映射类的简称。

群 $\mathbf{PMap}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$，和 $\mathbf{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$，通过以下短正合序列相关联

$$1 \to \mathrm{PMap}_n^{\mathrm{id},orb}(\Sigma_\Gamma(L)) \to \mathrm{Map}_n^{\mathrm{id},orb}(\Sigma_\Gamma(L)) \to \mathrm{S}_n \to 1.$$

由此得到 $\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$. 的以下表示:

命题 4.14 ([8, 命题 4.22])。 对于 $n \geqslant 1$，群 $\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$. 由以下生成元给出表示

$$H_1, ..., H_{n-1}, T_1, ..., T_L, U_1, ..., U_N$$

以及定义关系，其中 $2 \leqslant j < n$、 $1 \leqslant \theta$、 $\lambda \leqslant L$ 满足 $\theta < \lambda$，而 $1 \leqslant \mu$、 $\nu \leqslant N$满足 $\mu < \nu$:

(1) 生成元 $H_1, ..., H_{n-1}$的辫子关系和交换子关系，(2) a) $[T_\lambda, H_j] = 1$,b) $[U_\nu, H_j] = 1$,(3) a) $[H_1 T_\lambda H_1, T_\lambda] = 1$,b) $[H_1 U_\nu H_1, U_\nu] = 1$ 以及(4) a) $[T_\theta, B_{2\lambda}] = 1$ （适用于 $B_{2\lambda} = H_1^{-1} T_\lambda H_1$），b) $[U_\mu, C_{2\nu}] = 1$ （适用于 $C_{2\nu} = H_1^{-1} U_\nu H_1$），以及c) $[T_\lambda, C_{2\nu}] = 1$ （适用于 $C_{2\nu} = H_1^{-1} U_\nu H_1$）。

上文及下文中，我们所说的关系，是指 $H_i H_{i+1} H_i = H_{i+1} H_i H_{i+1}$关于 $1 \leqslant i \leqslant n-2$ 的关系，以及 $[H_j, H_k] = 1$ 关于 $1 \leqslant j, k < n$ 的关系，其中 $|j-k| \geqslant 2$ 由辫子关系和交换子关系给出，适用于 $H_1, ..., H_{n-1}$。

5. 轨形辫群与轨形映射类群之间的关系

本节着重介绍轨形辫群与 Artin 辫群之间的两个根本差异。在经典情形下，广义 Birman 正合列

$$1 \to \underbrace{\pi_1(\mathrm{Conf}_n(D))}_{=\mathrm{B}_n} \xrightarrow{\mathrm{Push}_n} \mathrm{Map}_n(D) \xrightarrow{\mathrm{Forget}_n} \underbrace{\mathrm{Map}(D)}_{=1} \to 1$$

表明 Artin 辫群 B_n 与 $\mathrm{Map}_n(D)$同构，详见 [6, 定理 9.1] 。点推映射的逆映射是求值映射 $\mathrm{ev} : \mathrm{Map}_n(D) \to \mathrm{B}_n$，它在标记点处对某个环境同痕进行求值。更准确地说，给定圆盘 D 的一个自同胚 H，它保持标记点集合 $\{p_1, ..., p_n\}$ 不变，并固定边界。Alexander 技巧给出一个从 H 到 id_D的环境同痕。在标记点处对该环境同痕求值，便得到辫子 $\mathrm{ev}([H])$的各辫股。

对于轨形，我们将建立一个类似的映射。

$$\mathrm{ev} : \mathrm{Map}_n^{\mathrm{id},orb}(\Sigma_\Gamma(L)) \to \mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L))$$

与经典情形不同，这并非一个同构（参见定理 5.4）。

轨形映射类群与轨形辫群之间的这种差异具有根本性的影响：回想一下，纯子群 PB_n 嵌入一个短正合序列中。

$$1 \to \underbrace{\pi_1(D(n-1))}_{=F_{n-1}} \to \mathrm{PB}_n \to \mathrm{PB}_{n-1} \to 1$$

这源于将 PB_n 刻画为纯映射类群$\mathrm{PMap}_n(D)$，以及将广义 Birman 正合列从 [6, 定理 9。1] 限制到纯子群。对于纯轨形映射类群，我们有一个类似的短正合序列

$$1 \to F_{n-1+L} \to \mathrm{PMap}_n^{\mathrm{id},orb}(\Sigma_\Gamma(L)) \to \mathrm{PMap}_{n-1}^{\mathrm{id},orb}(\Sigma_\Gamma(L)) \to 1$$

在推论 4.6中讨论过。在本节中，我们将考虑纯轨形辫群的类似 Map。我们将证明仍然存在一个正合列

$$\pi_1^{\mathrm{orb}}(\Sigma_\Gamma(n-1+L)) \to \mathrm{PZ}_n(\Sigma_\Gamma(L)) \to \mathrm{PZ}_{n-1}(\Sigma_\Gamma(L)) \to 1$$

但映射 $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\Sigma_\Gamma(n-1+L)) \to \mathrm{PZ}_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 出人意料地具有非平凡的核 K_n（参见推论5.16）。这修正了 [12]中的定理 2.14。此外，这意味着将穿孔点映射到固定股线的典范同态 $\mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L)) \to \mathrm{Z}_{n+L}(\Sigma_\Gamma)$ 具有非平凡的核（参见命题 5.17）。这修正了 [11]中的命题 4.1。

5.1. 轨形辫群是轨形映射类群的商群

我们的首要目标是定义求值映射。

$$\mathrm{ev} : \mathrm{Map}_n^{\mathrm{id},orb}(\Sigma_\Gamma(L)) \to \mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L)).$$

此外，我们希望考虑轨形 $\Sigma_\Gamma(L,N)$ 上的轨形辫群 $\mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L,N))$，该轨形还在锥点处具有穿孔。我们还希望建立一个类似的求值映射。

$$\mathrm{ev}^* : \mathrm{Map}_n^{\mathrm{id},orb}(\Sigma_\Gamma(L)) \to \mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L,N)).$$

<escape>连同满同态 $f : \mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L,N)) \to \mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L))$（来自推论 3.9），求值映射将构成一个交换图</escape>

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Map}_n^{\mathrm{id},orb}(\Sigma_\Gamma(L)) & \xrightarrow{\mathrm{ev}} & \mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L)). \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ev}^*} & \nearrow{\scriptstyle f} & \\ \mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L,N)) & & \end{array} \tag{9}$$

求值映射的思路如下：回想一下，任何代表 H 中一个映射类的同胚$\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$，根据定义 4.4，在忘掉标记点 id_Σ，..... p_1，..... p_n之后，均与 H_t 环境同痕。设 r_1，..... r_L 是一个逐点固定 H_t，..... p_1，..... p_n 的环境同痕。那么，在 $\mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 中对 $[H_t(p_1, \ldots\ldots p_n)]$ 进行求值，得到一个辫子的代表元。然而，并不清楚辫子 H，.....是否不依赖于代表元和环境同痕的选择。

为了解决这个问题，我们回想一下，根据命题 4.14$\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$，可由生成元给出有限表示

$$H_j, T_\lambda \text{ and } U_\nu \text{ for } 1 \leqslant j < n,\ 1 \leqslant \lambda \leqslant L \text{ and } 1 \leqslant \nu \leqslant N.$$

对于每个生成元 H_j，T_λ 和 U_ν，都存在一个到 id_Σ 的环境同痕，它忘掉标记点，并在每个支撑圆盘上施行 Alexander 技巧；对于 T_λ 和 U_ν，相应的支撑圆盘分别以一个标记点或锥点为中心。在标记点处对这些环境同痕求值，便定义了生成元上的 ev。

为验证求值映射诱导出同态，我们根据定理 3.13 和推论 3.14 可知，群 $\mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L、\ N))$ 和 $\mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 由辫子生成

$$h_j, t_\lambda \text{ and } u_\nu \text{ for } 1 \leqslant j < n,\ 1 \leqslant \lambda \leqslant L \text{ and } 1 \leqslant \nu \leqslant N.$$

诱导映射将 H_j 映射为 h_j，T_λ 映射为 t_λ 并将 U_ν 映射为 u_ν。特别地，这一观察利用了图 1.4、4.2 和 4.4中所示的所有扭转和半扭转均是按顺时针方向定义的这一事实。因此，将其同痕至恒等映射的环境同伦会使标记点逆时针移动。这与第 16页上对 h_j、t_λ 和u_ν 的定义一致。类比命题 4.14，我们观察到轨形辫群的生成元满足以下关系：

引理 5.1. Z 的生成元 $h_1, ..., h_{n-1}, t_1, ..., t_L, u_1, ..., u_N$ 满足以下关系，其中 $2 \leqslant j < n$, $1 \leqslant \theta, \lambda \leqslant L, \theta < \lambda$ 以及 $1 \leqslant \mu, \nu \leqslant N, \mu < \nu$:
(1) $u_\nu^{m_\nu} = 1$,(2) 生成元 $h_1, ..., h_{n-1}$ 的辫子关系和交换子关系，
(3) a) $[t_\lambda, h_j] = 1$ 和 b) $[u_\nu, h_j] = 1$, (4) a) $[h_1 t_\lambda h_1, t_\lambda] = 1$ 和 b) $[h_1 u_\nu h_1, u_\nu]$, (5) a) $[t_\theta, b_{2\lambda}] = 1$, b) $[u_\mu, c_{2\nu}] = 1$ 和 c) $[t_\lambda, c_{2\nu}] = 1$, 其中 $b_{2\lambda} = h_1^{-1} t_\lambda h_1$ 和 $c_{2\nu} = h_1^{-1} u_\nu h_1$。

除 5.1(1) 外，相同的关系在 $\mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L, N))$ 中也成立。

证明。 的辫子关系和交换子关系 $h_1, ..., h_{n-1}$ 与曲面情形一样，可直接由辫图得出。其余的交换子关系也可由辫图得出（涉及绕锥点扭转的关系见图 5.1）。

关系5.1(1) 已在备注 3.12中指出。此观察基于包含一个锥点的环路的可缩性（见图 3.12）。移除锥点后，这一论证便不再成立。事实上，我们稍后将看到，关系 $u_\nu^{m_\nu} = 1$ 在 $\mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L, N))$ 中并不成立。 □

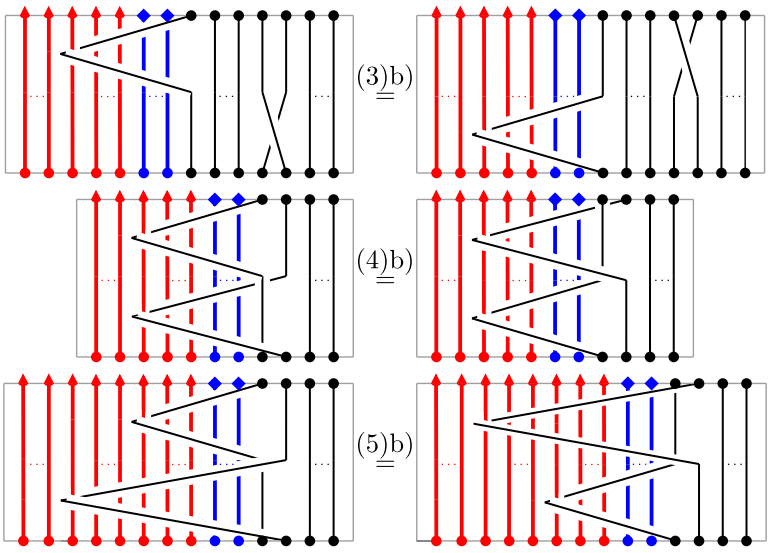


图 5.1. 通过考察轨形辫图观察关系 5.1(3)-5.1(5)。

引理 5.1 特别意味着赋值 ev 和ev* 保持命题 4.14中的关系。因此，定理 4.9 给出:

推论 5.2. 映射 ev* 和 ev 是满足条件 (9)的同态。

此外，利用引理 2.10，我们可以推得:

推论 5.3. 映射 $\mathrm{ev}^* : \mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L)) \to \mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L, N))$ 是一个同构。

证明。 群 $\mathsf{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L,N))$ 定义为轨形构形空间的轨形基本群

$$\mathrm{Conf}_n^\Gamma(\Sigma_\Gamma(L,N)) = \widetilde{\mathrm{PConf}}_n^\Gamma(\Sigma(L,N))_{\Gamma^n\rtimes \mathrm{S}_n},$$

其中 $\widetilde{\mathsf{PConf}}_n^\Gamma(\Sigma(L,\ N))$ 表示其底层空间

$$\{(x_1,...,x_n)\in(\Sigma(L,N))^n \mid x_i\neq\gamma(x_j) \text{ for all } 1\leqslant i,j\leqslant n, i\neq j, \gamma\in\Gamma\}.$$

要应用引理 2.10，我们要证明 $\Gamma^n\rtimes$Sn<style id='11}>对 $\widetilde{\mathrm{PConf}}_n^\Gamma(\Sigma(L,N))$的作用是自由的。因此，我们回顾一下 $((\gamma_1,...,\gamma_n),\sigma)\in\Gamma^n\rtimes \mathrm{S}_n$ 在$(x_1,...,x_n)\in\widetilde{\mathrm{PConf}}_n^\Gamma(\Sigma(L,\ N))$ 上的作用由下式给出

$$((\gamma_1,...,\gamma_n),\sigma)(x_1,...,x_n)=(\gamma_{\sigma(1)}(x_{\sigma(1)}),...,\gamma_{\sigma(n)}(x_{\sigma(n)})).$$

假设 $(x_1,...,x_n)\in\widetilde{\mathsf{PConf}}_n^\Gamma(\Sigma(L,\ N))$ 被 $((\gamma_1,...,\gamma_n),\ \sigma)$ 中的元素固定。$\Gamma^n\rtimes$Sn。由于 $x_i\neq\gamma(x_j)$ 对所有 $i\neq j$ 和 $\gamma\in\Gamma$均成立，我们得到 $\sigma=\mathsf{id}_n$。此外， Γ在 $\Sigma(L,\ N)$ 上自由作用，使得 $\gamma_i=1$ 对所有 $1\leqslant i\leqslant n$均成立；也就是说， $\Gamma^n\rtimes S_n$的作用是自由的。

根据引理2.10，这意味着

$$\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathrm{Conf}_n^\Gamma(\Sigma_\Gamma(L,N)))\cong\pi_1(\widetilde{\mathrm{PConf}}_n^\Gamma(\Sigma(L,N))/\Gamma^n\rtimes \mathrm{S}_n).$$

将 $(\Gamma^n\rtimes \mathrm{S}_n)\,(x_1,\ .....,\ x_n)$ 映射到 $\mathrm{S}_n(\Gamma(x_1),\ .....,\ \Gamma(x_n))$，定义了一个同胚

$$\widetilde{\mathrm{PConf}}_n^\Gamma(\Sigma(L,N))/\Gamma^n\rtimes \mathrm{S}_n\to\mathrm{PConf}_n(\Sigma(L,N)/\Gamma)/\mathrm{S}_n\,.$$

由于 $\Sigma(L,\ N)/\Gamma$与 $D(L,\ N)$同胚，且

$$\mathrm{Conf}_n(D(L,N))=\mathrm{PConf}_n(D(L,N))/\mathrm{S}_n,$$

这意味着

$$\mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L,N))\cong\pi_1(\mathrm{Conf}_n(D(L,N))).$$

由定理 4.5 ，我们进一步得到 $\mathsf{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$, 与 $\pi_1(\mathsf{Conf}_n(D(L,\ N)))$ 之间的一个同构，使得下图交换:

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id},orb}(\Sigma_\Gamma(L)) & \xrightarrow{\cong} & \pi_1(\mathrm{Conf}_n(D(L,N)))\\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ev}*} & & \downarrow{\scriptstyle\cong}\\ \mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L,N)) & = & \pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathrm{Conf}_n^\Gamma(\Sigma_\Gamma(L,N))).\end{array}$$

因此，$\mathsf{ev}*$ 是一个同构。 □

另一个同态 ev 不再是同构，但我们可以确定它的核。我们将证明:

命题 5.4. ev的核是 $\{U_\nu^{m_\nu}\mid 1\leqslant\nu\leqslant N\}$在$\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$,中的正规闭包。受限映射$\mathrm{ev}|_{\mathrm{PMap}^{\mathrm{id},}{}_n^{\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))}$ 的核是$\{C_{k\nu}^{m_\nu}\mid 1\leqslant\nu\leqslant N, 1\leqslant k\leqslant n\}$ 在$\mathrm{PMap}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$,中的正规闭包。

在证明中，我们希望追踪同伦与锥点的交点。与定义 3.10 类似，对交叉作出假设很有帮助；在此情形下，是与锥点的交叉 c_ν。因此，我们回顾图 $F(L)$ 3.5 中所示的嵌入 $F(L)$ 。关于投影

$$\pi:F(L)\times\bigsqcup_{i=1}^q[t_{i-1},t_i]\to\mathbb{R}\times\bigsqcup_{i=1}^q[t_{i-1},t_i],$$

该嵌入尤其满足 $\pi((c_\nu,\ t))=(-L-\nu,\ t)$ 对每个 $1\leqslant\nu\leqslant N$都成立。

定义 5.5 （锥点交叉与 $\mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L))$中的一般代表）。设 ξ 是一个 $\Gamma^n \rtimes \mathrm{S}_n$-路径，它代表 $\mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L))$中的一个元素。假设 ξ满足辫子的定义中的所有条件（见定义 3.10），但最终会与一个锥点相交。

令 $x \in \xi_j$ 使得 $\pi(x) = (-L-\nu,\ t)$ 其中某个 $1 \leqslant \nu \leqslant N$和 $t \in [t_{i-1},\ t_i]$。

在这种情况下，我们称 $\pi(\xi)$在高度 处穿越锥点 c_ν 。如果存在 $\pi(x)$ 在 [0中的一个邻域 U， $n+1] \rtimes [t_{i-1},\ t_i]$ 使得这对对象横截的，则称该锥点穿越为

$$(U, (\pi(\xi) \cup \{-L-\nu\} \times I) \cap U)$$

经由一个将$\pi(\xi_j)$ 与 $\mathbb{R} \times \{0\}$、 $\{-L-\nu\} \times I$ 与 $\{0\} \times \mathbb{R}$对应起来的同胚，局部同胚于 $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R})$ 。

如果 ξ 中的所有锥点穿越都是横截的，则称代表元 ξ 是一般位置的。

特别地，一般位置的 $\Gamma^n \rtimes \mathrm{S}_n$-路径不会在锥点处停留一段时间。

命题的证明 5.4。 回想一下，$\mathrm{ev}(U_\nu) = u_\nu$ 对每个 $1 \leqslant \nu \leqslant N$，关系 5.1(1) 推出 $\langle\langle U_\nu^{m_\nu} \rangle\rangle_{\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id},\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))} \subseteq \ker(\mathrm{ev})$。此外，$\mathrm{ev}(C_{k\nu}) = c_{k\nu}$ 并且根据（6） $c_{k\nu}$ 是一个 $\mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L))$-共轭于 u_ν。因此， $c_{k\nu}^{m_\nu} = 1$ 并且

$$\langle\langle C_{k\nu}^{m_\nu} \rangle\rangle_{\mathrm{PMap}_n^{\mathrm{id},orb}(\Sigma_\Gamma(L))} \subseteq \ker(\mathrm{ev}\,|_{\mathrm{PMap}_n^{\mathrm{id},orb}(\Sigma_\Gamma(L))}).$$

反向的包含关系需要更多论证。思路如下：给定一个 $H \in \ker(\mathrm{ev})$ 用映射类群的生成元表示的元素$\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$，它投影为一个与平凡辫同伦的辫子。如果该同伦与某个锥点相交，那么对同伦作适当调整后，就可以读出备注3.12 和图 3.13中讨论的轨形 Reidemeister 变换。对于表示 H的词，这种变换会导致插入或删除与 $C_{k\nu}^{m_\nu}$共轭的非平凡子词。由此即可推得所述结论。

例如，图5.2 (左)所示的同伦反映了同一图右侧描绘的轨形 Reidemeister 变换。该 Reidemeister 变换会在表示元素 U_ν^3 的词中删除 $H \in \ker(\mathrm{ev})$。

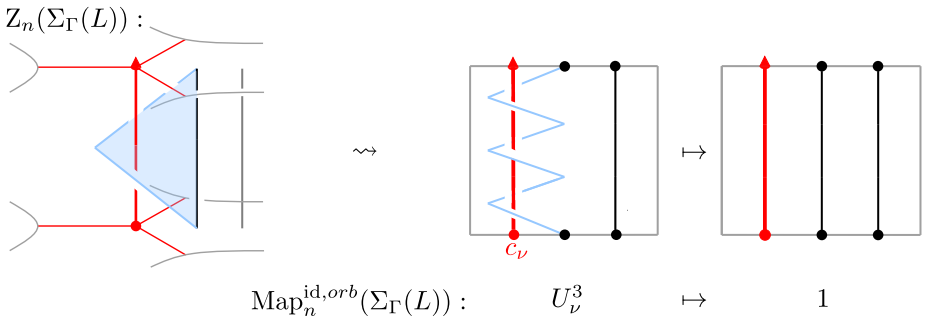


图 5.2。轨形 Reidemeister 移动的辨识，以及在 $\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$中诱导的删除。

令 $H = \rho_1^{\varepsilon_1} \ldots \rho_q^{\varepsilon_q}$满足

$$\rho_i \in \{H_1, \ldots, H_{n-1}, T_1, \ldots, T_L, U_1, \ldots, U_N\} \quad \text{and} \quad \varepsilon_i \in \{\pm 1\}$$

是 $\ker(\mathrm{ev})$ 中的一个元素。那么，如果 $\rho_i = H_j$、 $\rho_i = T_\lambda$ 和 $\rho_i = U_\nu$ ，辫子 $\mathrm{ev}(H) = b = \sigma_1^{\varepsilon_1} \ldots \sigma_q^{\varepsilon_q}$with $\sigma_i = h_j$ $\sigma_i = t_\lambda$ $\sigma_i = u_\nu$ 是平凡的。应用适当的移位，

我们可以假设 b 的辫股 b_1，……，b_n 是连续的。由于 b 是平凡的，我们有一组同伦 h_s $h_s^{(j)}$，将辫股 b_j 连接到常值映射 $I \to \Sigma$，$t \mapsto p_j$，其中 $1 \leqslant j \leqslant n$，使得映射 $h_s\colon t \mapsto (h_s^{(1)}(t),\ \ldots\ldots,\ h_s^{(n)}(t))$ 对每个 $s \in I$ 都表示 $\mathsf{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 中的一个元素。

由于 b 是分段线性的，与 [9, 断言 17]中描述的经典情形类似。同伦 h_s 可以实现为一系列 Δ-变换。对于每个 $s \in I$，我们可以假设 h_s 的每条辫股与集合 $\Gamma(\partial F(L))$ 相交于有限多个点。运用引理3.7(3)证明中的相同思路，可得到一个等价的代表元 $\bar{h}_s$，使得每条辫股 $\bar{h}_s^{(j)}$的像都包含于 $F(L)$中。此外，与经典情形 [9, 断言 18], 一样，我们也可以调整 Δ-变换$^{-}$，使得代表元 h_s 对每个 $s \in I$都是一般位置。特别地，在这样一系列 Δ-变换中，每条辫股 $h_s^{(j)}$与锥点只相交有限次。因此，我们可以按相交次数归纳。

基例。若同伦 h_s 不与任何锥点相交，则图示（9）表明 H 也包含于$\ker(\mathrm{ev}^*)$中。由引理5.3，可得$H = \mathrm{id}^{\Sigma(L)}$。

同伦与锥点相交的情形。如果同伦 h_s 至少与锥点相交一次，则存在一个三元组 $(s,\ t,\ j)$，满足 $s,\ t \in I$，并且对每个锥点交点都有 $1 \leqslant j \leqslant n$。对于这样的三元组，存在某个 $1 \leqslant \nu \leqslant N$ 和 $\gamma \in \Gamma$，使得 $h_s^{(j)}(t) = \gamma(c_\nu)$，其中 $h_s^{(j)}$ 表示 h_s 中起始于 p_j 的辫股。固定这样一个三元组 $(s_0,\ t_0,\ j_0)$。

在包含该交点的 Δ-移动过程中 $h_{s_0}^{(j_0)}(t_0) = \gamma(c_\nu)$ 唯一的$^{-}$移动辫股是第 j_0 条。由于 h_s 对每个 $s \in I$ 都是一般位置的辫子，我们可以$^{-}$假设 $\pi(h_s)$ 不包含高度为 t_0 的额外锥点穿越，方法是将任何这样的锥点穿越移到不同的高度（示例见图 5.3 ）。

此处有必要对下列图5.3、5.4和5.5作一些说明：虽然这些图是示意性绘制的，但不应将其误解为定义3.10意义下的轨形辫图；在这类图中，辫股在基本域 $F(L)$ 内移动。相反，如图5.2 （左）中更详尽的图所示，这些图中的弧应视为一条 $\Gamma^n \rtimes \mathrm{S}_n$-路径的辫股，它们在$\mathsf{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 中沿锥$^{-}$点邻域移动。在这些图中，黑色绘制的辫股表示某个 h_s 的辫子$s < s_0$ （分别为 $s > s_0$）。这些辫子以辫图中的辫股形式绘出。此外，这些图还描绘了与锥点相交的 Δ变换。与轨形辫图不同，在应用此类 Δ变换之后（分别之前），被移动的辫股（以浅蓝色绘出）并不完全位于基本域内。

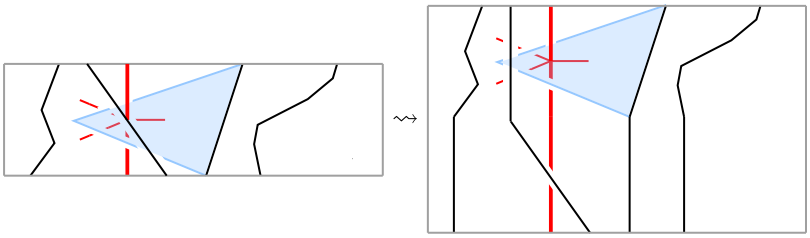


图 5.3。锥点穿越的平移。

¯我们称相关的 Δ-变换所对应的底层三角形为 T。由于 $\pi(h_{s_0})$在时刻 t_0与 c_ν 相交，因此对底层三角形 T 进行细分后，可以找到一个三角形 $T' \subseteq T$以及 $\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_1',\ \delta_2' > 0$，使得

- T' 其内部包含锥点 c_ν。
- T' 不包含任何点 p_j，对于 $1 \leqslant j \leqslant n$，该点是某条辫股的端点。
- $h_s\colon\ [s_0-\delta_1,\ s_0+\delta_2] \to \Sigma(L)$ 描述了 Δ支撑在 T'上的-移动。
- 对于每个 $s \in [s_0-\delta_1,\ s_0+\delta_2]$，按定义3.10¯所述的交叉不会在 $h_s|_{[t_0-\delta_1'中t_0+\delta_2']}$发生。

示意见图5.4。

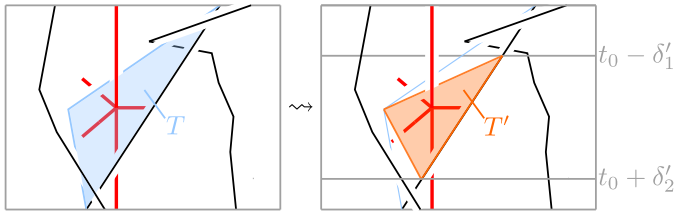


图 5.4. 将 Δ-移动调整至一个更小的三角形。

接下来，我们将 Δ支撑在 T' 上的-移动调整为使除 j_0号辫股外的所有辫股都固定在位置 p_1、……、p_n。我们将此调整分为三个步骤（示例见图5.5）：

(1) 首先，对于每个 $s \in [s_0-\delta_1,\ s_0+\delta_2]$，我们重新参数化 t-分量的 Δ-移动 $h_s|_{[t_0-\delta_1',\ t_0+\delta_2']}$ 将区间 $[t_0-\delta_1',\ t_0+\delta_2']$ 缩小为区间 $[t_0-\varepsilon_1,\ t_0+\varepsilon_2]$（见图5.5，步骤 (1)）。(2) 此外，设$\delta_1'',\ \delta_2'' > 0$ 使得

$$t_0-\delta_1'' \in (t_0-\delta_1', t_0-\varepsilon_1) \quad \text{and} \quad t_0+\delta_2'' \in (t_0+\varepsilon_2, t_0+\delta_2').$$

我们希望调整同伦 $h_s|_{[t_0-\delta_1'',\ t_0+\delta_2'']}$ 的端点，使其保持固定。因此，我们根据辫股在 $h_s(t_0-\delta_1'')$ 中的实部为辫股排序。假设第 j_0 条辫股在此顺序中位于第 k 个位置。现在我们通过适当的同伦调整 $h_s|_{[t_0-\delta_1',\ t_0-\varepsilon_1]}$和 $h_s|_{[t_0+\varepsilon_2,\ t_0+\delta_2']}$，使得

$$h_{s_0-\delta_1}(t_0-\delta_1'') = (p_1,\ldots,p_n) = h_{s_0-\delta_1}(t_0+\delta_2'') \text{ and}$$
$$h_{s_0+\delta_2}(t_0-\delta_1'') = (p_1,\ldots,p_n) = h_{s_0+\delta_2}(t_0+\delta_2'').$$

如果我们按照高度 $t_0-\delta_1''$ 处的顺序来进行这一调整，也就是说，我们将此顺序中第 i 条辫股同伦至位置 p_i，则可以假设该调整不会在 $[t_0-\delta_1'$、$t_0-\varepsilon_1]$和 $[t_0+\varepsilon_2$ 中产生任何交叉 $t_0+\delta_2']$（见图 5.5，步骤 (2)）。

(3) 此外，我们可以调整同伦，使得除 j_0股之外的所有辫股在同伦$h_s|_{[t_0-\delta_1''期间保持固定t_0+\delta_2'']}$（见图表5.5，步骤（3））。若通过移动所有位于 j_0股前方的辫股来实现这一调整，我们便得到一个 Δ-移动，其中 i股在 $i \neq j_0$ 期间保持不动，如图表5.5中的最终示意图所示。

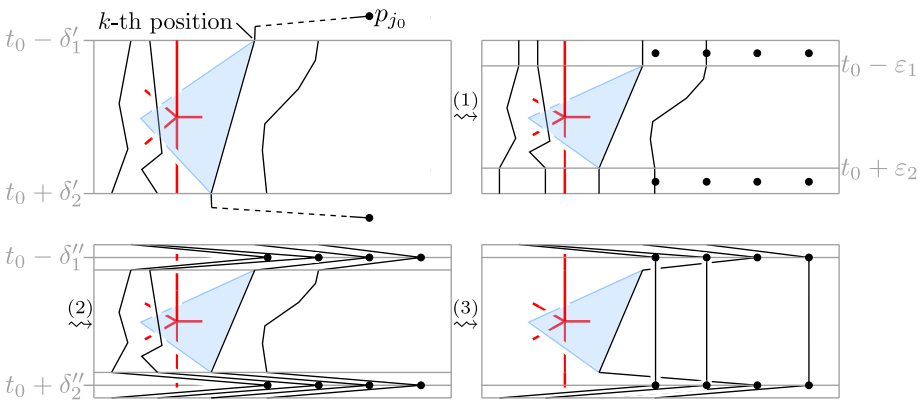


图 5.5。调整同伦以读出所诱导的轨形 Reidemeister 变换。

由于我们移动了位于 j_0股前方的辫股，这意味着辫子 $h_{s_0-\delta_1}$与$h_{s_0+\delta_2}$ 相差一次图表5.6中的轨形 Reidemeister 变换。若假设¯辫子 $h_{s_0-\delta_1}$ 对应于由推论 $w_{s_0-\delta_1}$ 3.14中的生成元构成的词，¯这意味着对应于辫子 $w_{s_0+\delta_2}$ 的词 $h_{s_0+\delta_2}$ 与$w_{s_0-\delta_1}$ 之间的差异仅在于插入或删除 $h_{k-1}...h_1u_\nu^{m_\nu}h_1^{-1}...h_{k-1}^{-1}$，也就是说，插入或删除 $c_{k\nu}^{m_\nu}$的共轭元。类似地，对应的词$W_{s_0-\delta_1}$ 与$W_{s_0+\delta_2}$ 之间的差异仅在于插入或删除 $H_{k-1}...H_1U_\nu^{m_\nu}H_1^{-1}...H_{k-1}^{-1}$。

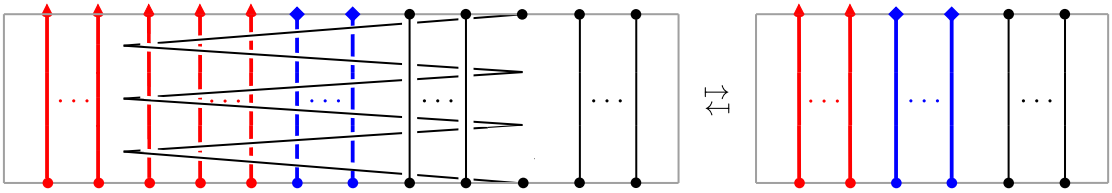


图 5.6。描述 $h_{s_0-\delta_1}$ 与 $h_{s_0+\delta_2}$之间差异的轨形 Reidemeister 变换。

将上述调整应用于 h_s 的每个锥点交点，我们得到词 $H = \rho_1^{\varepsilon_1}...\rho_q^{\varepsilon_q}$ 与空词之间相差有限次插入或删除

- 由 $\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$，中的关系所允许，• 以及适当的 $1 \leqslant k \leqslant n$ 和 $1 \leqslant \nu \leqslant N$ 的 $C_{k\nu}^{\pm m_\nu}$ 的共轭元的

这意味着 $H = \rho_1^{\varepsilon_1}...\rho_q^{\varepsilon_q}$ 包含于集合 $\{C_{k\nu}^{m_\nu} \mid 1 \leqslant k \leqslant n,\ 1 \leqslant \nu \leqslant N\}$ 的正规闭包中，即：

$$\ker(\mathrm{ev}) \subseteq \langle\langle C_{k\nu}^{m_\nu} \mid 1 \leqslant k \leqslant n, 1 \leqslant \nu \leqslant N \rangle\rangle_{\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id},orb}(\Sigma_\Gamma(L))}.$$

在 $\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$ 中，每个元素 $C_{k\nu}$ 都是 U_ν 的共轭元。因此，

$$\begin{aligned}\ker(\mathrm{ev}) =& \langle\langle C_{k\nu}^{m_\nu} \mid 1 \leqslant k \leqslant n, 1 \leqslant \nu \leqslant N \rangle\rangle_{\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id},orb}(\Sigma_\Gamma(L))} \\ =& \langle\langle U_\nu^{m_\nu} \mid 1 \leqslant \nu \leqslant N \rangle\rangle_{\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id},orb}(\Sigma_\Gamma(L))}.\end{aligned}$$

上述论证还可得到

$$\ker(\mathrm{ev}|_{\mathrm{PMap}^{\mathrm{id},}{}_n{}^{orb}(\Sigma_\Gamma(L))}) = \langle\langle C_{k\nu}^{m_\nu} \mid 1 \leqslant k \leqslant n, 1 \leqslant \nu \leqslant N \rangle\rangle_{\mathrm{PMap}^{\mathrm{id},}{}_n{}^{orb}(\Sigma_\Gamma(L))}.$$

因此，命题得证。 □

这证明了定理 A ，并结合推论 4.13和命题 4.14，我们得到 $\mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 及其纯子群的表示。

推论 5.6。 纯辫群 $\mathrm{PZ}_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 的表示由生成元组成。

$$a_{ji}, b_{k\lambda} \quad and \quad c_{k\nu}$$

对于带有 $i<j$、 $1\leqslant\lambda\leqslant L$ 和 $1\leqslant\nu\leqslant N$ 的 $1\leqslant i$、 j、 $k\leqslant n$，以及以下关于带有 $i<j<k<l$ 的 $1\leqslant i$、 j、 k、 $l\leqslant n$，带有 $\theta<\lambda$ 和 $1\leqslant\mu$ 的 $\lambda\leqslant L$，以及带有 $\mu<\nu$ 的 ν、 $\leqslant N$ 的定义关系：

(1) $c_{k\nu}^{m_\nu}=1$,
(2) $[a_{ji},a_{lk}]=1$, $[b_{j\lambda},a_{lk}]=1$, $[c_{j\nu},a_{lk}]=1$,
(3) $[a_{li},a_{kj}]=1$, $[b_{l\lambda},a_{kj}]=1$, $[b_{l\lambda},b_{k\theta}]=1$, $[c_{l\nu},a_{kj}]=1$, $[c_{l\nu},b_{k\lambda}]=1$, $[c_{l\nu},c_{k\mu}]=1$,
(4) $[a_{lk}a_{lj}a_{lk}^{-1},a_{ki}]=1$, $[a_{kj}a_{ki}a_{kj}^{-1},b_{j\lambda}]=1$, $[a_{kj}b_{k\theta}a_{kj}^{-1},b_{j\lambda}]=1$, $[a_{kj}a_{ki}a_{kj}^{-1},c_{j\nu}]=1$, $[a_{kj}c_{k\mu}a_{kj}^{-1},c_{j\nu}]=1$,
(5) $a_{ji}a_{kj}a_{ki}=a_{ki}a_{ji}a_{kj}=a_{kj}a_{ki}a_{ji}$, $a_{ji}b_{j\lambda}b_{i\lambda}=b_{i\lambda}a_{ji}b_{j\lambda}=b_{j\lambda}b_{i\lambda}a_{ji}$, $a_{ji}c_{j\nu}c_{i\nu}=c_{i\nu}a_{ji}c_{j\nu}=c_{j\nu}c_{i\nu}a_{ji}$.

推论 5.7. 轨形辫群 $\mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 由生成元呈现

$$h_1,...,h_{n-1},t_1,...,t_L,u_1,...,u_N$$

以及 $2\leqslant j<n$、 $1\leqslant\theta$、 $\lambda\leqslant L$ 满足的以下定义关系，其中 $\lambda\leqslant L$ 与 $\theta<\lambda$ 相邻，$\nu\leqslant N$ 与 $\mu<\nu$相邻：

(1) $u_\nu^{m_\nu}=1$,(2) 生成元 h_1, ..., h_{n-1} 的辫子关系和交换子关系，
(3) $[t_\lambda,h_j]=1$ 和 $[u_\nu,h_j]=1$,(4) $[h_1t_\lambda h_1,t_\lambda]=1$ 和 $[h_1u_\nu h_1,u_\nu]=1$,(5) $[t_\theta,b_{2\lambda}]=1$, $[u_\mu,c_{2\nu}]=1$ 和 $[t_\lambda,c_{2\nu}]=1$，其中 $b_{2\lambda}=h_1^{-1}t_\lambda h_1$ 和 $c_{2\nu}=h_1^{-1}u_\nu h_1$。

这证明了定理 B。

5.2. 纯轨形辫群的一个正合序列

还需推导主要目标：纯轨形辫群的正合序列。为此，我们简要回顾带有短正合序列的经典情形

$$1\to\pi_1(D(n-1),p_n)\to\mathrm{PB}_n\to\mathrm{PB}_{n-1}\to 1.$$

第一个 Map 将带孔圆盘中环路的同伦类嵌入 PB_n，将其解释为纯辫子： $n-1$ 条固定辫股位于穿孔点的位置，而第 n 条辫股沿环路移动。第二个 Map 忘记第 n 条辫股。此外， $\pi_1(D(n-1),p_n)$ 是一个具有 $n-1$ 个生成元的自由群。

我们想要建立一个类似的正合列

$$(10)\qquad \pi_1^{\mathrm{orb}}(\Sigma_\Gamma(n-1+L),p_n)\xrightarrow{\iota_{\mathrm{PZ}_n}}\mathrm{PZ}_n(\Sigma_\Gamma(L))\xrightarrow{\pi_{\mathrm{PZ}_n}}\mathrm{PZ}_{n-1}(\Sigma_\Gamma(L))\to 1$$

纯轨形辫群的情形。映射的定义类似于经典情形：映射 π_{PZ_n} 忽略第 n 个辫股，而映射 ι_{PZ_n} 将带基点 p_n 的 Γ-环路的同伦类解释为 $\Sigma_\Gamma(L)$ 中的纯辫，其中位置 $p_1,...,p_{n-1}$ 上有 $n-1$ 个恒定辫股，第 n 个辫股沿着Γ-环路移动。事实证明，映射 ι_{PZ_n} 具有非平凡的核 K_n。

我们首先确定轨形基本群 $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\Sigma_\Gamma(n-1+L))$。

引理 5.8. 群 $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\Sigma_\Gamma(n-1+L))$ 与 $F_{n-1+L}*\Gamma$同构。

证明。 我们应用轨形版本的 Seifert–van Kampen定理 [2, 第三章 III.G, 3.10(4)]。设 X_0 是一个满足以下条件的带孔圆盘：

- X_0 是 $\Sigma(n-1+L)$的一个开子集。
- $\Gamma(X_0)$ 是 Γ的平移集与 X_0的不交并。
- X_0 包含位置为 p_1、……、 p_{n-1} 以及 r_1、……、 r_L的穿孔点。

令 $X := \Gamma(X_0)$ 以及 Y 一个 Γ-不变的锥点开邻域，使得 $Y \hookrightarrow \Sigma$ <style id='16}>是一个 Γ-等变同伦等价。此外，我们假设 $X \cup Y = \Sigma(n-1+L)$。交集 $Z := X \cap Y$是圆盘 $\gamma(Z_0)$ （其中 $\gamma \in \Gamma$ ），并且这些圆盘中的每一个都是 $\Sigma(n-1+L)$的一个开子集，且不包含任何穿孔点（示例见图5.7 ）。

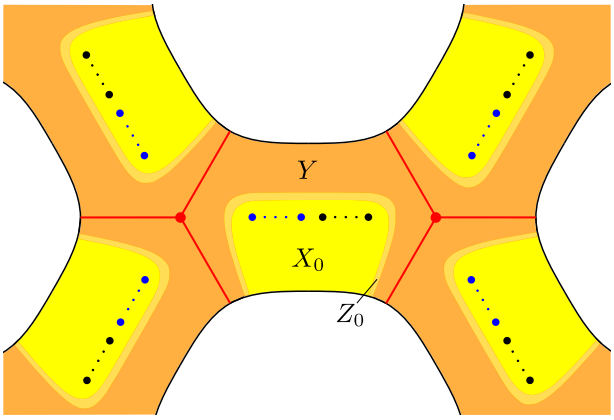


图5.7。将 $\Sigma(n-1+L)$ 分解为开子集 X和 Y。

一般来说，我们可以按如下方式得到 X 和 Y：令 $F(n-1+L)$ 嵌入 $\mathbb{C}$，如图3.5所述，并定义

$X_0 := F(n-1+L) \cap \{x \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(x) < \varepsilon_+\}$ 以及 $Y = F(n-1+L) \cap \{x \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(x) > \varepsilon_-\}$, 其中 $\varepsilon_+ > \varepsilon_- > 0$ 满足

$$\varepsilon_+ < \min\{\mathrm{Im}(x) \mid x \in F(n-1+L) \cap \gamma(F(n-1+L)) \text{ for some } \gamma \neq 1\}.$$

见图 5.8。则 $Y := \Gamma(Y)$ 和 $X = \Gamma(X_0)$ 满足上述性质。

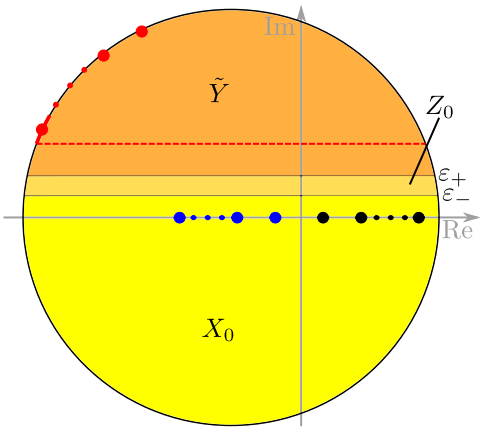


图5.8。 $F(n-1+L)$内的子集 X_0 和 Y。

如果我们考虑以 Z 中某点为基点的轨形基本群，则 Seifert–van Kampen定理表明，包含映射诱导出一个同构

$$\pi_1^{\mathrm{orb}}(X_\Gamma) * \pi_1^{\mathrm{orb}}(Y_\Gamma) / \langle\langle \iota_X(\gamma)\iota_Y(\gamma)^{-1} \mid \gamma \in \pi_1^{\mathrm{orb}}(Z_\Gamma) \rangle\rangle \to \pi_1^{\mathrm{orb}}\left(\Sigma_\Gamma(n-1+L)\right). \tag{11}$$

在这里上方，$\iota_X : \pi_1^{\mathrm{orb}}(Z_\Gamma) \hookrightarrow \pi_1^{\mathrm{orb}}(X_\Gamma)$ 和 $\iota_Y \colon \pi_1^{\mathrm{orb}}(Z_\Gamma) \hookrightarrow \pi_1^{\mathrm{orb}}(Y_\Gamma)$ 分别表示由 Z_Γ 到 X_Γ 和 Y_Γ的包含映射所诱导的同态。

由于包含映射 $Y \hookrightarrow \Sigma$ 是一个 Γ-等变同伦等价，因此 Y_Γ 的基本群等于 $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\Sigma_\Gamma) = \Gamma$，其已在推论2.9中确定。我们用 X_0 和 Z_0 分别表示包含基点的 X 和 Z 的道路连通分支。在这两种情况下，使 Γ 的道路连通分支保持不变的子群都是平凡的。由推论2.9，典范映射 $\pi_1(X_0) \to \pi_1^{\mathrm{orb}}(X_\Gamma)$ 和$\pi_1(Z_0) \to \pi_1^{\mathrm{orb}}(Z_\Gamma)$ 是同构。子曲面 X_0 是 $p_1, ..., p_{n-1}$和 $r_1, ..., r_L$中的一个带有穿孔的圆盘。因此，$\pi_1(X_0) \cong F_{n-1+L}$。子曲面 Z_0是一个无穿孔圆盘，即 $\pi_1(Z_0)$ 是平凡的。因此，$\pi_1^{\mathrm{orb}}(X_\Gamma) \cong F_{n-1+L}$和 $\pi_1^{\mathrm{orb}}(Z_\Gamma)$ 是平凡的。由（11），这意味着群 $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\Sigma_\Gamma(n-1+L)$ 同构于自由积 $F_{n-1+L} * \Gamma$。□

特别地，引理 5.8 的证明表明 $\pi_1^{\mathrm{orb}}\left(\Sigma_\Gamma(n-1+L)\right)$ 由生成元表示

$$x_j, y_\lambda \text{ and } z_\nu$$

与 $1 \leqslant j < n$、、$1 \leqslant \lambda \leqslant L$ 以及 $1 \leqslant \nu \leqslant N$ 由图 Γ5.9 中的 环路 Γ表示，并且定义关系 $z_\nu^{m_\nu} = 1$ 为 $1 \leqslant \nu \leqslant n$。下文中，我们不区分代表元 x_j、y_λ 和 z_ν，以及它们在 $\pi_1^{\mathrm{orb}}\left(\Sigma_\Gamma(n-1+L)\right)$中所表示的同伦类。

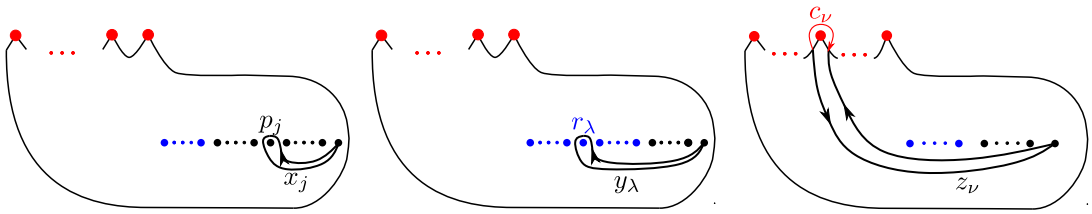


图5.9。 $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\Sigma_\Gamma(n-1+L))$ 的生成元 x_j，y_λ和 z_ν。

同态 ι_{PZ_n}。我们将赋值 ι_{PZ_n} 定义为

$$\begin{aligned} x_j &\mapsto a_{nj} \text{ for } 1 \leqslant j < n, \\ y_\lambda &\mapsto b_{n\lambda} \text{ for } 1 \leqslant \lambda < L \text{ and} \\ z_\nu &\mapsto c_{n\nu} \text{ for } 1 \leqslant \nu < N. \end{aligned}$$

推论 5.6 表明，赋值 ι_{PZ_n} 保持基本群的定义关系 $\pi_1^{\mathrm{orb}}\left(\Sigma_\Gamma(n-1+L)\right) \cong F_{n-1+L} * \Gamma$。根据定理 4.9，赋值 ι_{PZ_n} 诱导出一个同态。

在下文中，如果我们想强调某个元素可以由一条仅有第 n 条辫股移动的辫子表示，我们也将使用记号 x_j、y_λ 和 z_ν 表示它们在 ι_{PZ_n} 下的像。

同态 π_{PZ_n}。我们定义赋值 π_{PZ_n}，使得

$$\begin{aligned} a_{ji} &\mapsto a_{ji} \text{ for } 1 \leqslant i < j < n, \\ b_{k\lambda} &\mapsto b_{k\lambda} \text{ for } 1 \leqslant k < n, 1 \leqslant \lambda \leqslant L \text{ and} \\ c_{k\nu} &\mapsto c_{k\nu} \text{ for } 1 \leqslant k < n, 1 \leqslant \nu \leqslant N \end{aligned}$$

以及剩余的生成元 x_k， y_λ 和 z_ν，它们只移动第 n股辫，因此在 π_{PZ_n}下映射为恒等元。再次根据推论 5.6，很容易验证这些赋值 π_{PZ_n} 保持了 $\mathrm{PZ}_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 的关系。根据定理 4.9，这些赋值 π_{PZ_n} 诱导出一个同态。

特别地， ι_{PZ_n} 和 π_{PZ_n} 的定义蕴含 $\pi_{\mathrm{PZ}_n}\circ\iota_{\mathrm{PZ}_n}$ 是平凡映射。

一个右逆同态 $\mathrm{s}^{\mathrm{PZ}_n}$ 的 π_{PZ_n}。一个 π_{PZ_n}的右逆映射由将生成元 $a_{ji}, b_{k\lambda}$ 和 $c_{k\nu}$ 从 $\mathrm{PZ}_{n-1}(\Sigma_\Gamma(L))$ 映射到 $\mathrm{PZ}_n(\Sigma_\Gamma(L))$中对应的同名元素而诱导得到。再次使用推论 5.6中的表示，我们可以看出这些赋值保持了 $\mathrm{PZ}_{n-1}(\Sigma_\Gamma(L))$ 的定义关系。

根据定理 4.9，这意味着这些赋值诱导出一个从$\mathrm{PZ}_{n-1}(\Sigma_\Gamma(L))$ 到 $\mathrm{PZ}_n(\Sigma_\Gamma(L))$的同态。在生成元层面上，很容易看出，这个同态给出了 π_{PZ_n}的一个右逆映射。

正合性。由于 π_{PZ_n} 是右可逆的，因此它是满射。如上所强调的，$\mathrm{im}(\iota_{\mathrm{PZ}_n})\subseteq\ker(\pi_{\mathrm{PZ}_n})$。对于反向包含，设 $z\in\ker(\pi_{\mathrm{PZ}_n})$。根据推论3.16， z 可分解为生成元

$$a_{ji}, b_{k\lambda} \text{ and } c_{k\nu}$$

对于 $1\leqslant i、\ j、\ k\leqslant n、\ i<j、\ 1\leqslant\lambda\leqslant L$和 $1\leqslant\nu\leqslant N$。一方面，对于 $j=n$和 $k=n$，我们记 $a_{ni}=x_i、\ b_{n\lambda}=y_\lambda$ 和 $c_{n\nu}=z_\nu$。另一方面，对于$1\leqslant j、\ k<n$， （5）和（6）给出

$$\begin{aligned} a_{ji} &= h_{j-1}^{-1}...h_{i+1}^{-1}h_i^2h_{i+1}...h_{j-1},\\ b_{k\lambda} &= h_{k-1}^{-1}...h_1^{-1}t_\lambda h_1...h_{k-1} \text{ and}\\ c_{k\nu} &= h_{k-1}^{-1}...h_1^{-1}u_\nu h_1...h_{k-1}. \end{aligned}$$

由于这些乘积均不包含生成元 h_{n-1}，因此每个 $z\in\ker(\pi_{\mathrm{PZ}_n})$ 都可分解为生成元

$$x_k, y_\lambda, z_\nu \text{ and } h_j, t_\lambda, u_\nu$$

其中 $1\leqslant j、\ k<n、\ j\neq n-2、\ 1\leqslant\lambda\leqslant L$和 $1\leqslant\nu\leqslant N$。利用 $\mathrm{Map}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$映射到 $\mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L))$，引理 [8, 421]中的关系对于 $\mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 中相应的元素同样成立。这使我们能够将 z 分解为子词

$$\begin{aligned} &W_1(x_1,...,x_{n-1},y_1,...,y_L,z_1,...,z_N) \text{ and}\\ &W_2(h_1,...,h_{n-2},t_1,...,t_L,u_1,...,u_N) \end{aligned}$$

与 $z=W_1\cdot W_2$。这里，第 n 股的运动被分离为 W_1，辫子 W_2仅移动前 $n-1$ 股。因此， W_1在遗忘第 n 股的映射 π_{PZ_n} 下映为平凡元。由于 z 来自 $\ker(\pi_{\mathrm{PZ}_n})$，这意味着 W_2 也是一个纯辫子，且 $\pi_{\mathrm{PZ}_n}(W_2)=1$ 属于 $\mathrm{PZ}_{n-1}(\Sigma_\Gamma(L))$。此外， W_2 包含于子群

$$\left\langle a_{ji}, b_{k\lambda}, c_{k\nu} \text{ for } \begin{array}{c} 1\leqslant i,j,k<n,\ i<j,\\ 1\leqslant\lambda\leqslant L \text{ and } 1\leqslant\nu\leqslant L \end{array} \right\rangle \leqslant \mathrm{PZ}_n(\Sigma_\Gamma(L)).$$

将 π_{PZ_n} 限制在此子群上，便得到一个同构；上文构造的截面 $\mathrm{s}^{\mathrm{PZ}_n}$给出了一个逆映射。因此， $W_2=1$ 属于 $\mathrm{PZ}_n(\Sigma_\Gamma(L))$，即 $z=W_1$ 包含于 $\mathrm{im}(\iota_{\mathrm{PZ}_n})$。这意味着（10）中的序列是正合的，且同态 π_{PZ_n} 有一个截面。

记 $K=K_n:=\ker(\iota_{\mathrm{PZ}_n})$。则定义 4.7 给出：

推论 5.9。 群 $\mathrm{PZ}_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 是一个半直积

$$((F_{n-1+L}*\Gamma)/K)\rtimes\mathrm{PZ}_{n-1}(\Sigma_\Gamma(L)).$$

接下来需要计算核 K。为此，我们确定 $(F_{n-1+L} * \Gamma)/K$ 的一个表示。证明分为以下两个步骤。

1. 找出一个在 $(F_{n-1+L} * \Gamma)/K$ 中成立、但在 $F_{n-1+L} * \Gamma$中不成立的关系，即核 K 非平凡。2. 构造足够的关系，重新表述推论5.6 $_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 中的纯轨形辫群PZ$_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 的表示，使其满足引理4.10(2)中的条件。这样，后一个表示就描述了PZ$_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 的半直积结构，我们可以读出 $(F_{n-1+L} * \Gamma)/K$的表示。特别是，这就确定了 K。

步骤1. 核 K 非平凡

考虑字母表 $X = \{x_1, ..., x_{n-1}, y_1, ..., y_L, z_1, ..., z_N\}$。回想一下，我们在步骤2 中的目标是建立一组关系 R，使得这些赋值

$$\begin{aligned} X &\to (F_{n-1+L} * \Gamma)/K, \\ x_j &\mapsto x_j K, \\ y_\lambda &\mapsto y_\lambda K \quad \text{and} \\ z_\nu &\mapsto z_\nu K \end{aligned}$$

诱导一个同构 $\langle X \mid R\rangle \to (F_{n-1+L} * \Gamma)/K$。显然，集合 R 包含关系 $z_\nu^{m_\nu} = 1$，对应于 $1 \leqslant \nu \leqslant N$ 中关系所导出的 $F_{n-1+L} * \Gamma$。第1 步的目标是注意到，集合 R 还包含更多关系。因此，我们回顾一下 $(F_{n-1+L} * \Gamma)/K$ 嵌入到PZ$_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 中，该嵌入由ι_{PZ_n}诱导。我们先观察PZ$_n(\Sigma_\Gamma(L))$中的其他关系。

稍后我们会用到这样一点：这些额外关系可由5.13(C)中归纳总结的共轭关系推出。特别地，5.13(C) 包含以下关系：

$$c_{k\nu} a_{nk} c_{k\nu}^{-1} \overset{\text{n)}}{=} c_{n\nu}^{-1} a_{nk} c_{n\nu} \overset{\vee}{=} c_{n\nu}^{-1} (a_{nk}^{-1} a_{nk}) a_{nk} c_{n\nu}, \tag{12}$$

$$c_{k\nu} c_{n\nu} c_{k\nu}^{-1} \overset{\text{d')}}{=} c_{n\nu}^{-1} a_{nk}^{-1} c_{n\nu} a_{nk} c_{n\nu}, \tag{13}$$

$$c_{k\nu} a_{nj} c_{k\nu}^{-1} \overset{\text{h)}}{=} c_{n\nu}^{-1} a_{nk}^{-1} c_{n\nu} a_{nk} a_{nj} a_{nk}^{-1} c_{n\nu}^{-1} a_{nk} c_{n\nu}, \tag{14}$$

$$c_{k\nu} b_{n\lambda} c_{k\nu}^{-1} \overset{\text{y)}}{=} c_{n\nu}^{-1} a_{nk}^{-1} c_{n\nu} a_{nk} b_{n\lambda} a_{nk}^{-1} c_{n\nu}^{-1} a_{nk} c_{n\nu}, \tag{15}$$

$$c_{k\nu} c_{n\mu} c_{k\nu}^{-1} \overset{\text{f')}}{=} c_{n\nu}^{-1} a_{nk}^{-1} c_{n\nu} a_{nk} c_{n\mu} a_{nk}^{-1} c_{n\nu}^{-1} a_{nk} c_{n\nu}. \tag{16}$$

这些关系是ev-像，分别对应于引理4.12(1)中的d) 和f)，以及引理4.12(3)中的c) 、e)和f)中的同形式关系。由于ev 诱导出一个从PMap$_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$ 到PZ$_n(\Sigma_\Gamma(L))$的同态，关系（12）至（16）在PZ$_n(\Sigma_\Gamma(L))$中均成立。

引理 5.10。给定群 PZ$_n(\Sigma_\Gamma(L))$，对于每个 $z \in \mathbb{N}$，生成元满足以下关系：

$$\begin{aligned} c_{k\nu}^z a_{nk} c_{k\nu}^{-z} &= (c_{n\nu}^{-1} a_{nk}^{-1})^z a_{nk} (a_{nk} c_{n\nu})^z, \\ c_{k\nu}^z c_{n\nu} c_{k\nu}^{-z} &= (c_{n\nu}^{-1} a_{nk}^{-1})^z c_{n\nu} (a_{nk} c_{n\nu})^z, \\ c_{k\nu}^z a_{nj} c_{k\nu}^{-z} &= (c_{n\nu}^{-1} a_{nk}^{-1})^z (c_{n\nu} a_{nk})^z a_{nj} (a_{nk}^{-1} c_{n\nu}^{-1})^z (a_{nk} c_{n\nu})^z, \\ c_{k\nu}^z b_{n\lambda} c_{k\nu}^{-z} &= (c_{n\nu}^{-1} a_{nk}^{-1})^z (c_{n\nu} a_{nk})^z b_{n\lambda} (a_{nk}^{-1} c_{n\nu}^{-1})^z (a_{nk} c_{n\nu})^z, \\ c_{k\nu}^z c_{n\mu} c_{k\nu}^{-z} &= (c_{n\nu}^{-1} a_{nk}^{-1})^z (c_{n\nu} a_{nk})^z c_{n\mu} (a_{nk}^{-1} c_{n\nu}^{-1})^z (a_{nk} c_{n\nu})^z. \end{aligned}$$

证明。关系（12）是用于证明的归纳法的基例

$$c_{k\nu}^z a_{nk} c_{k\nu}^{-z} = (c_{n\nu}^{-1} a_{nk}^{-1})^z a_{nk} (a_{nk} c_{n\nu})^z \tag{17}$$

对于所有 $z \in \mathbb{N}$。假设 $z-1$ 成立，我们得到：

$$\begin{aligned}
& c_{k\nu}^{z} a_{nk} c_{k\nu}^{-z} \\
= \; & c_{k\nu} c_{k\nu}^{z-1} a_{nk} c_{k\nu}^{-(z-1)} c_{k\nu}^{-1} \\
\overset{\text{i.h.}}{=} \; & c_{k\nu} (c_{n\nu}^{-1} a_{nk}^{-1})^{z-1} a_{nk} (a_{nk} c_{n\nu})^{z-1} c_{k\nu}^{-1} \\
\overset{\vee}{=} \; & c_{k\nu} (c_{n\nu}^{-1} a_{nk}^{-1})^{z-1} (c_{k\nu}^{-1} c_{k\nu}) a_{nk} (c_{k\nu}^{-1} c_{k\nu}) (a_{nk} c_{n\nu})^{z-1} c_{k\nu}^{-1} \\
\overset{(12,13)}{=} \; & (c_{n\nu}^{-1} a_{nk}^{-1})^{z-1} c_{k\nu} a_{nk} c_{k\nu}^{-1} (a_{nk} c_{n\nu})^{z-1} \\
\overset{(12)}{=} \; & (c_{n\nu}^{-1} a_{nk}^{-1})^{z} a_{nk} (a_{nk} c_{n\nu})^{z}.
\end{aligned}$$

通过对 z 使用归纳法，这意味着第一个方程对每个 $z \in \mathbb{N}$ 都成立。

类似地，我们从方程（ $c_{k\nu}^{z} c_{n\nu} c_{k\nu}^{-z} = (c_{n\nu}^{-1} a_{nk}^{-1})^{z} c_{n\nu} (a_{nk} c_{n\nu})^{z}$ 中得到 $z = 1$，并且由方程（13）可知，归纳步骤与第一个方程的情况相同。

对于 $z = 1$，第三个关系由（14）得到。假设它对 $z-1$成立，我们可以推导出

$$\begin{aligned}
c_{k\nu}^{z} a_{nj} c_{k\nu}^{-z} \; = \; & c_{k\nu} c_{k\nu}^{z-1} a_{nj} c_{k\nu}^{-(z-1)} c_{k\nu}^{-1} \\
\overset{\text{i.h.}}{=} \; & c_{k\nu} (c_{n\nu}^{-1} a_{nk}^{-1})^{z-1} (c_{n\nu} a_{nk})^{z-1} a_{nj} (a_{nk}^{-1} c_{n\nu}^{-1})^{z-1} (a_{nk} c_{n\nu})^{z-1} c_{k\nu}^{-1} \\
\overset{\vee}{=} \; & c_{k\nu} (c_{n\nu}^{-1} a_{nk}^{-1})^{z-1} (c_{k\nu}^{-1} c_{k\nu}) (c_{n\nu} a_{nk})^{z-1} a_{nj} (a_{nk}^{-1} c_{n\nu}^{-1})^{z-1} (c_{k\nu}^{-1} c_{k\nu}) (a_{nk} c_{n\nu})^{z-1} c_{k\nu}^{-1} \\
\overset{(12,13)}{=} \; & (c_{n\nu}^{-1} a_{nk}^{-1})^{z-1} c_{k\nu} (c_{n\nu} a_{nk})^{z-1} a_{nj} (a_{nk}^{-1} c_{n\nu}^{-1})^{z-1} c_{k\nu}^{-1} (a_{nk} c_{n\nu})^{z-1} \\
\overset{\vee}{=} \; & (c_{n\nu}^{-1} a_{nk}^{-1})^{z-1} c_{k\nu} (c_{n\nu} a_{nk})^{z-1} (c_{k\nu}^{-1} c_{k\nu}) a_{nj} (c_{k\nu}^{-1} c_{k\nu}) (a_{nk}^{-1} c_{n\nu}^{-1})^{z-1} c_{k\nu}^{-1} (a_{nk} c_{n\nu})^{z-1} \\
\overset{(12,13)}{=} \; & (c_{n\nu}^{-1} a_{nk}^{-1})^{z-1} c_{n\nu}^{-1} a_{nk}^{-1} (c_{n\nu} a_{nk})^{z-1} a_{nk} c_{n\nu} c_{k\nu} a_{nj} \\
& c_{k\nu}^{-1} c_{n\nu}^{-1} a_{nk}^{-1} (a_{nk}^{-1} c_{n\nu}^{-1})^{z-1} a_{nk} c_{n\nu} (a_{nk} c_{n\nu})^{z-1} \\
\overset{(14)}{=} \; & (c_{n\nu}^{-1} a_{nk}^{-1})^{z-1} c_{n\nu}^{-1} a_{nk}^{-1} (c_{n\nu} a_{nk})^{z-1} a_{nk} c_{n\nu} (c_{n\nu}^{-1} a_{nk}^{-1} c_{n\nu} a_{nk} a_{nj} a_{nk}^{-1} c_{n\nu}^{-1} a_{nk} c_{n\nu}) \\
& c_{n\nu}^{-1} a_{nk}^{-1} (a_{nk}^{-1} c_{n\nu}^{-1})^{z-1} a_{nk} c_{n\nu} (a_{nk} c_{n\nu})^{z-1} \\
= \; & (c_{n\nu}^{-1} a_{nk}^{-1})^{z} (c_{n\nu} a_{nk})^{z} a_{nj} (a_{nk}^{-1} c_{n\nu}^{-1})^{z} (a_{nk} c_{n\nu})^{z}.
\end{aligned}$$

因此，命题中的第三个关系对每个 $z \in \mathbb{N}$ 都成立。

其余关系 $c_{k\nu}^{z} b_{n\lambda} c_{k\nu}^{-z} = (c_{n\nu}^{-1} a_{nk}^{-1})^{z} (c_{n\nu} a_{nk})^{z} b_{n\lambda} (a_{nk}^{-1} c_{n\nu}^{-1})^{z} (a_{nk} c_{n\nu})^{z}$和 $c_{k\nu}^{z} c_{n\mu} c_{k\nu}^{-z} = (c_{n\nu}^{-1} a_{nk}^{-1})^{z} (c_{n\nu} a_{nk})^{z} c_{n\mu} (a_{nk}^{-1} c_{n\nu}^{-1})^{z} (a_{nk} c_{n\nu})^{z}$ 在（ $z = 1$）和（15）中分别给出。归纳步骤与第三个关系的情况相同。□

如果我们进一步回想起关系 5.6(1) 指出 m_ν次幂的 $c_{k\nu}$ 为平凡元，那么前一个引理中的第一个关系给出

(18)
$$a_{nk} \overset{5.6(1)}{=} c_{k\nu}^{m_\nu} a_{nk} c_{k\nu}^{-m_\nu} = (c_{n\nu}^{-1} a_{nk}^{-1})^{m_\nu} a_{nk} (a_{nk} c_{n\nu})^{m_\nu} = (c_{n\nu}^{-1} a_{nk}^{-1})^{m_\nu - 1} c_{n\nu}^{-1} (a_{nk} c_{n\nu})^{m_\nu}$$

对每个 $1 \leqslant k < n$ 和 $1 \leqslant \nu \leqslant N$。通过左乘 $c_{n\nu} (a_{nk} c_{n\nu})^{m_\nu - 1}$，这等价于

(19)
$$(c_{n\nu} a_{nk})^{m_\nu} = (a_{nk} c_{n\nu})^{m_\nu}.$$

利用 ι_{PZ_n} 从 $(F_{n-1+L} * \Gamma)/K$ 到 $\mathbf{PZ}_n(\Sigma(L))$ 诱导的单态射，可知相应的关系 $(z_\nu K x_k K)^{m_\nu} = (x_k K z_\nu K)^{m_\nu}$ 对于 $1 \leqslant k < n$ 和 $1 \leqslant \nu \leqslant N$ 在 $(F_{n-1+L} * \Gamma)/K$ 中成立。因此，对于每个 k 和 ν，关系 $(z_\nu x_k)^{m_\nu} = (x_k z_\nu)^{m_\nu}$ 都包含在 R 中。显然，相应的约化字在自由积 $F_{n-1+L} * \Gamma$ 中并不相同，即上述关系在核 K 中导出非平凡元素。

步骤 2。确定核 K

为了找到群 $\mathrm{PZ}_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 的一个表示，使其满足引理 4.10(2) 中的条件，我们还需要考察在 $(F_{n-1+L}*\Gamma)/K$ 中成立的其他关系。为此，我们引入 部分共轭:

定义 5.11 （部分共轭）。 考虑上文的字母表 X 和自由群 $F(X)$。对于 $1\leqslant i,\ k\leqslant n$, $i<k$, $1\leqslant\iota\leqslant L$ 和 $1\leqslant\nu\leqslant N$, 令

$$pc_{a_{ki}}, pc_{b_{k\iota}} \text{ and } pc_{a_{k\nu}} : F(X)\to F(X)$$

为端同态，它们按照表1 中第二、第三或第四列的词分别替换每个字母。这些端同态称为部分共轭。

	$pc_{a_{ki}}$	$pc_{b_{k\iota}}$	$pc_{c_{k\nu}}$
x_l	x_l	x_l	x_l
x_k	$x_i^{-1}x_kx_i$	$y_\iota^{-1}x_ky_\iota$	$z_\nu^{-1}x_kz_\nu$
x_j	$x_i^{-1}x_k^{-1}x_ix_kx_jx_k^{-1}x_i^{-1}x_kx_i$	$y_\iota^{-1}x_k^{-1}y_\iota x_kx_jx_k^{-1}y_\iota^{-1}x_ky_\iota$	$z_\nu^{-1}x_k^{-1}z_\nu x_kx_jx_k^{-1}z_\nu^{-1}x_kz_\nu$
x_i	$x_i^{-1}x_k^{-1}x_ix_kx_i$	-	-
x_h	x_h	-	-
y_θ	y_θ	$y_\iota^{-1}x_k^{-1}y_\iota x_ky_\theta x_k^{-1}y_\iota^{-1}x_ky_\iota$	$z_\nu^{-1}x_k^{-1}z_\nu x_ky_\theta x_k^{-1}z_\nu^{-1}x_kz_\nu$
y_ι	-	$y_\iota^{-1}x_k^{-1}y_\iota x_ky_\iota$	-
y_λ	-	y_λ	-
z_μ	z_μ	z_μ	$z_\nu^{-1}x_k^{-1}z_\nu x_kz_\mu x_k^{-1}z_\nu^{-1}x_kz_\nu$
z_ν	-	-	$z_\nu^{-1}x_k^{-1}z_\nu x_kz_\nu$
z_o	-	-	z_o

指标为 $1\leqslant h<i<j<k<l<n$、 $1\leqslant\theta<\iota<\lambda\leqslant L$ 和 $1\leqslant\mu<\nu<o\leqslant N$。

表 1. 部分共轭的定义。

给定上述字母表中的一个词 W，我们可以依次应用一系列不同的部分共轭。将得到的词 W' 称为 W的部分共轭元 。对于字母表 X中的任意词集合 S，令 $\mathrm{PC}(S)$ 表示它们的部分共轭元集合。

对于每个 $a\in\{a_{ki},\ b_{k\iota},\ c_{k\nu}\}$, 表 1 中的赋值经过选择，使得部分共轭 pc_a 描述了在子群上以 a 进行的共轭

$$(F_{n-1+L}*\Gamma)/K\leqslant \mathrm{PZ}_n(\Sigma_\Gamma(L))$$

在字母表 X 中的词的层面上。更准确地说，对于每个字母 $x\in X$，词 $pc_a(x)$ 满足 $axa^{-1}=pc_a(x)$，其中 $\mathrm{PZ}_n(\Sigma_\Gamma(L))$。

观察 5.12。 由于每个部分共轭词都将 z_ν 映射为一个共轭元，这些映射保持 $F_{n-1+L}*\Gamma$ 的定义关系 $z_\nu^{m_\nu}=1$，即这些映射在 $F_{n-1+L}*\Gamma$ 上诱导出端同态，我们也用 pc_a 表示它们，其中 $a=a_{ki}$、$b_{k\iota}$ 或 $c_{k\nu}$。根据部分共轭元的定义，以下图表交换:

$$\begin{array}{ccc}
F(X) & \xrightarrow{\quad pc_a \quad} & F(X) \\
\downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\
F_{n-1+L}*\Gamma & \xrightarrow{\quad pc_a \quad} & F_{n-1+L}*\Gamma \\
\downarrow{\scriptstyle \iota_{\mathrm{PZ}_n}} & & \downarrow{\scriptstyle \iota_{\mathrm{PZ}_n}} \\
(F_{n-1+L}*\Gamma)/K & \xrightarrow{\quad conj_a \quad} & (F_{n-1+L}*\Gamma)/K \leqslant \mathrm{PZ}_n(\Sigma_\Gamma(L)).
\end{array}$$

在上文中， π 表示由字母上的恒等映射诱导的投影， $conj_a$是由与 a 共轭诱导的 $\mathrm{PZ}_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 的自同构。根据定义，$\ker(\iota_{\mathrm{PZ}_n}\circ\pi)=\langle\langle R\rangle\rangle$。图表的交换性意味着

$$r\in\ker(\iota_{\mathrm{PZ}_n}\circ\pi)=\langle\langle R\rangle\rangle\Rightarrow pc_a(r)\in\ker(\iota_{\mathrm{PZ}_n}\circ\pi)=\langle\langle R\rangle\rangle,$$

即，如果 $r=1$ 是 $(F_{n-1+L}*\Gamma)/K$，中的关系，那么关系 $pc_a(r)=1$ 在 $(F_{n-1+L}*\Gamma)/K$ 中也成立。因此，对于每个 W'，关系 $W'=1$ 都包含在 $\langle\langle R\rangle\rangle$ 中。

$$\mathrm{PC}(\{(x_kz_\nu)^{m_\nu}(x_k^{-1}z_\nu^{-1})^{m_\nu}\mid 1\leqslant k<n\ and\ 1\leqslant\nu\leqslant N\}).$$

将这些关系添加到 R 中，我们得到 $\mathbf{PZ}_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 的如下表示:

命题 5.13。 纯轨形辫群 $\mathrm{PZ}_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 由

$$a_{ji},b_{k\lambda},c_{k\nu}\ \ and\ \ x_k,y_\lambda,z_\nu$$

对于 $1\leqslant i,j,k<n$，其中 $i<j,1\leqslant\lambda\leqslant L$ 和 $1\leqslant\nu\leqslant N$，以及以下定义关系:

(R) $z_\nu^{m_\nu}=1$ 适用于 $1\leqslant\nu\leqslant N$ 且$W'=1$适用于 $W'\in\mathrm{PC}$ $(\{(x_kz_\nu)^{m_\nu}(x_k^{-1}z_\nu^{-1})^{m_\nu}\mid 1\leqslant k<n$和 $1\leqslant\nu\leqslant N\})$。

对于 $1\leqslant i$、j、k、$l<n$，其中 $i<j<k<l$、 $1\leqslant\theta$，其中 $\lambda<L$，以及 $\theta<\lambda$ 和 $1\leqslant\mu$，其中 $\nu\leqslant N$、 $\mu<\nu$，以下关系成立:

(S1) $c_{k\nu}^{m_\nu}=1$,
(S2) $[a_{ji},a_{lk}]=1$, $[b_{j\lambda},a_{lk}]=1$, $[c_{j\nu},a_{lk}]=1$,
(S3) $[a_{li},a_{kj}]=1$, $[b_{l\lambda},a_{kj}]=1$, $[b_{l\lambda},b_{k\theta}]=1$, $[c_{l\nu},a_{kj}]=1$, $[c_{l\nu},b_{k\lambda}]=1$, $[c_{l\nu},c_{k\mu}]=1$,
(S4) $[a_{lk}a_{lj}a_{lk}^{-1},a_{ki}]=1$, $[a_{kj}a_{ki}a_{kj}^{-1},b_{j\lambda}]=1$, $[a_{kj}b_{k\theta}a_{kj}^{-1},b_{j\lambda}]=1$, $[a_{kj}a_{ki}a_{kj}^{-1},c_{j\nu}]=1$, $[a_{kj}c_{k\mu}a_{kj}^{-1},c_{j\nu}]=1$, $[a_{kj}b_{k\lambda}a_{kj}^{-1},c_{j\nu}]=1$,
(S5) $a_{ji}a_{kj}a_{ki}=a_{ki}a_{ji}a_{kj}=a_{kj}a_{ki}a_{ji}$, $a_{ji}b_{j\lambda}b_{i\lambda}=b_{i\lambda}a_{ji}b_{j\lambda}=b_{j\lambda}b_{i\lambda}a_{ji}$, $a_{ji}c_{j\nu}c_{i\nu}=c_{i\nu}a_{ji}c_{j\nu}=c_{j\nu}c_{i\nu}a_{ji}$.

对于 $1\leqslant h,i,j,k,l\leqslant n$，其中 $h<i<j<k<l$，$1\leqslant\theta,\iota,\lambda<L$，且 $\theta<\iota<\lambda$ 和 $1\leqslant\mu,\nu,o\leqslant N$，其中 $\mu<\nu<o$，以下关系成立:

(C)
a) $a_{lk}x_ja_{lk}^{-1}=a_{lk}^{-1}x_ja_{lk}=x_j$,
b) $a_{lj}x_ja_{lj}^{-1}=x_j^{-1}x_l^{-1}x_jx_lx_j$,
c) $a_{lj}^{-1}x_ja_{lj}=x_lx_jx_l^{-1}$,
d) $a_{li}x_ja_{li}^{-1}=x_i^{-1}x_l^{-1}x_ix_lx_jx_l^{-1}x_i^{-1}x_lx_i$,
e) $a_{li}^{-1}x_ja_{li}=x_lx_ix_l^{-1}x_i^{-1}x_jx_ix_lx_i^{-1}x_l^{-1}$,
f) $b_{l\lambda}x_jb_{l\lambda}^{-1}=y_\lambda^{-1}x_l^{-1}y_\lambda x_lx_jx_l^{-1}y_\lambda^{-1}x_ly_\lambda$,
g) $b_{l\lambda}^{-1}x_jb_{l\lambda}=x_ly_\lambda x_l^{-1}y_\lambda^{-1}x_jy_\lambda x_ly_\lambda^{-1}x_l^{-1}$,
h) $c_{l\nu}x_jc_{l\nu}^{-1}=z_\nu^{-1}x_l^{-1}z_\nu x_lx_jx_l^{-1}z_\nu^{-1}x_lz_\nu$,
i) $c_{l\nu}^{-1}x_jc_{l\nu}=x_lz_\nu x_l^{-1}z_\nu^{-1}x_jz_\nu x_lz_\nu^{-1}x_l^{-1}$,
j) $a_{ji}x_ja_{ji}^{-1}=x_i^{-1}x_jx_i$,
k) $a_{ji}^{-1}x_ja_{ji}=x_jx_ix_jx_i^{-1}x_j^{-1}$,
l) $b_{j\lambda}x_jb_{j\lambda}^{-1}=y_\lambda^{-1}x_jy_\lambda$,
m) $b_{j\lambda}^{-1}x_jb_{j\lambda}=x_jy_\lambda x_jy_\lambda^{-1}x_j^{-1}$,
n) $c_{j\nu}x_jc_{j\nu}^{-1}=z_\nu^{-1}x_jz_\nu$,
o) $c_{j\nu}^{-1}x_jc_{j\nu}=x_jz_\nu x_jz_\nu^{-1}x_j^{-1}$,
p) $a_{ih}x_ja_{ih}^{-1}=a_{ih}^{-1}x_ja_{ih}=x_j$,
q) $b_{i\lambda}x_jb_{i\lambda}^{-1}=b_{i\lambda}^{-1}x_jb_{i\lambda}=x_j$,

r) $c_{i\nu}x_jc_{i\nu}^{-1} = c_{i\nu}^{-1}x_jc_{i\nu} = x_j$,
s) $a_{ji}y_\lambda a_{ji}^{-1} = a_{ji}^{-1}y_\lambda a_{ji} = y_\lambda$,
t) $b_{j\theta}y_\iota b_{j\theta}^{-1} = b_{j\theta}^{-1}y_\iota b_{j\theta} = y_\iota$,
u) $b_{j\lambda}y_\lambda b_{j\lambda}^{-1} = y_\lambda^{-1}x_j^{-1}y_\lambda x_j y_\lambda$,
v) $b_{j\lambda}^{-1}y_\lambda b_{j\lambda} = x_j y_\lambda x_j^{-1}$,
w) $b_{j\lambda}y_\iota b_{j\lambda}^{-1} = y_\lambda^{-1}x_j^{-1}y_\lambda x_j y_\iota x_j^{-1}y_\lambda^{-1}x_j y_\lambda$,
x) $b_{j\lambda}^{-1}y_\iota b_{j\lambda} = x_j y_\lambda x_j^{-1}y_\lambda^{-1}y_\iota y_\lambda x_j y_\lambda^{-1}x_j^{-1}$,
y) $c_{j\nu}y_\lambda c_{j\nu}^{-1} = z_\nu^{-1}x_j^{-1}z_\nu x_j y_\lambda x_j^{-1}z_\nu^{-1}x_j z_\nu$,
z) $c_{j\nu}^{-1}y_\lambda c_{j\nu} = x_j z_\nu x_j^{-1}z_\nu^{-1}y_\lambda z_\nu x_j z_\nu^{-1}x_j^{-1}$,
a') $a_{ji}z_\nu a_{ji}^{-1} = a_{ji}^{-1}z_\nu a_{ji} = z_\nu$,
b') $b_{j\lambda}z_\nu b_{j\lambda}^{-1} = b_{j\lambda}^{-1}z_\nu b_{j\lambda} = z_\nu$,
c') $c_{j\mu}z_\nu c_{j\mu}^{-1} = c_{j\mu}^{-1}z_\nu c_{j\mu} = z_\nu$,
d') $c_{j\nu}z_\nu c_{j\nu}^{-1} = z_\nu^{-1}x_j^{-1}z_\nu x_j z_\nu$,
e') $c_{j\nu}^{-1}z_\nu c_{j\nu} = x_j z_\nu x_j^{-1}$,
f') $c_{jo}z_\nu c_{jo}^{-1} = z_o^{-1}x_j^{-1}z_o x_j z_\nu x_j^{-1}z_o^{-1}x_j z_o$,
g') $c_{jo}^{-1}z_\nu c_{jo} = x_j z_o x_j^{-1}z_o^{-1}z_\nu z_o x_j z_o^{-1}x_j^{-1}$.

证明。回顾推论5.6 中我们已找到 $\mathrm{PZ}_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 的一个表示。接下来只需验证由上述表示给出的群是同构的。因此，我们考虑赋值 ρ，将上述生成集映射到推论5.6中的生成集。对于 $1 \leqslant i,\ j,\ k < n$，其中 $i < j$，$1 \leqslant \lambda \leqslant L$ 以及 $1 \leqslant \nu \leqslant N$，令 ρ 由以下赋值定义：

$$\begin{aligned} a_{ji} &\mapsto a_{ji}, & x_j &\mapsto a_{nj}, \\ b_{k\lambda} &\mapsto b_{k\lambda}, \text{ and} & y_\lambda &\mapsto b_{n\lambda}, \\ c_{k\nu} &\mapsto c_{k\nu} & z_\nu &\mapsto c_{n\nu}. \end{aligned}$$

我们证明，ρ 及其逆映射诱导出同态。

映射 ρ 诱导出一个同态。关系 5.13(S1)-5.13(S5) 是子群 $\mathrm{PZ}_{n-1}(\Sigma_\Gamma(L))$的关系。因此，它们由关系 5.6(1)-5.6(5)涵盖。

此外，由推论4.13 的证明可知，ρ 保持了 5.13(C)中的关系：根据引理 4.12，该推论表明，5.13(C) 中关系的对应形式可由纯子群$\mathrm{PMap}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$ 的表示中的关系推出；由推论 4.13可知，由于求值映射ev 将 $\mathrm{PMap}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$ 限制为到 $\mathrm{PZ}_n(\Sigma_\Gamma(L))$的同态，这意味着对应的关系可由推论$\mathrm{PZ}_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 中的表示里的关系推出，见推论5.6。

对于每个 $1 \leqslant \nu \leqslant N$，来自 5.13(R) 的关系 $z_\nu^{m_\nu} = 1$ 映射到 $c_{n\nu}^{m_\nu} = 1$，而这已由关系 5.6(1)涵盖。根据引理 5.10 和方程 (19)，推论 5.6 中的关系也蕴含关系 $(a_{nk}c_{n\nu})^{m_\nu} = (c_{n\nu}a_{nk})^{m_\nu}$，即上述赋值 ρ 对每个 j 和 ν都满足关系 $(x_k z_\nu)^{m_\nu}(x_k^{-1}z_\nu^{-1})^{m_\nu} = 1$。此外，$(x_k z_\nu)^{m_\nu}(x_k^{-1}z_\nu^{-1})^{m_\nu}$ 的部分共轭元映射为 $\mathrm{PZ}_n(\Sigma_\Gamma(L))$-共轭元 $(a_{nk}c_{n\nu})^{m_\nu}(a_{nk}^{-1}c_{n\nu}^{-1})^{m_\nu}$。因此，对于 $(a_{nk}c_{n\nu})^{m_\nu}(a_{nk}^{-1}c_{n\nu}^{-1})^{m_\nu}$的每个部分共轭词 W'，ρ也满足关系 $W' = 1$。根据定理 4.9，这证明了 ρ 诱导出一个同态。

逆映射 ρ^{-1} 诱导一个同态。关系 5.6(1)-5.6(5)对于每个指标 $< n$ 都正合映射到关系 5.13(S1)-5.13(S5)。此外，$c_{n\nu}^{m_\nu} = 1$映射到 $z_\nu^{m_\nu} = 1$ 由关系 5.13(R)得到的结果。该 ρ^{-1} 保持其余关系成立，可由关系 5.13(C)推出。为说明这一点，我们给出 ρ^{-1}-像

涉及指标的关系 n 并说明它们如何融入以下共轭关系5.13(C)：

$$
\begin{aligned}
[a_{ji}, x_k] = 1 \Leftrightarrow a_{ji}x_k a_{ji}^{-1} &\overset{p)}{=} x_k,\\
[b_{j\lambda}, x_k] = 1 \Leftrightarrow b_{j\lambda}x_k b_{j\lambda}^{-1} &\overset{q)}{=} x_k,\\
[c_{j\nu}, x_k] = 1 \Leftrightarrow c_{j\nu}x_k c_{j\nu}^{-1} &\overset{r)}{=} x_k,\\
[x_i, a_{kj}] = 1 \Leftrightarrow a_{kj}x_i a_{kj}^{-1} &\overset{a)}{=} x_i,\\
[y_\lambda, a_{kj}] = 1 \Leftrightarrow a_{kj}y_\lambda a_{kj}^{-1} &\overset{s)}{=} y_\lambda,\\
[y_\lambda, b_{k\theta}] = 1 \Leftrightarrow b_{k\theta}y_\lambda b_{k\theta}^{-1} &\overset{t)}{=} y_\lambda,\\
[z_\nu, a_{kj}] = 1 \Leftrightarrow a_{kk}z_\nu a_{kj}^{-1} &\overset{a')}{=} z_\nu,\\
[z_\nu, b_{k\lambda}] = 1 \Leftrightarrow b_{k\lambda}z_\nu b_{k\lambda}^{-1} &\overset{b')}{=} z_\nu,\\
[c_{j\mu}, z_\nu] = 1 \Leftrightarrow c_{j\mu}z_\nu c_{j\mu}^{-1} &\overset{c')}{=} z_\nu,\\
a_{ji}x_jx_i = x_ia_{ji}x_j \Leftrightarrow a_{ji}^{-1}x_ia_{ji} &\overset{c)}{=} x_jx_ix_j^{-1},\\
a_{ji}x_jx_i = x_jx_ia_{ji} \Leftrightarrow x_jx_i &\overset{\vee}{=} (x_i^{-1}x_jx_ix_i^{-1}x_j^{-1}x_i)x_jx_i \overset{j),b)}{=} a_{ji}x_jx_ia_{ji}^{-1},\\
y_\lambda b_{i\lambda}x_i = b_{i\lambda}x_iy_\lambda \Leftrightarrow b_{i\lambda}^{-1}y_\lambda b_{i\lambda} &\overset{v)}{=} x_iy_\lambda x_i^{-1},\\
x_iy_\lambda b_{i\lambda} = y_\lambda b_{i\lambda}x_i \Leftrightarrow y_\lambda^{-1}x_iy_\lambda &\overset{l)}{=} b_{i\lambda}x_ib_{i\lambda}^{-1},\\
x_iz_\nu c_{i\nu} = c_{i\nu}x_iz_\nu \Leftrightarrow x_iz_\nu &\overset{\vee}{=} (z_\nu^{-1}x_iz_\nu z_\nu^{-1}x_i^{-1}z_\nu)x_iz_\nu \overset{n),d')}{=} c_{i\nu}x_iz_\nu c_{i\nu}^{-1},\\
x_iz_\nu c_{i\nu} = z_\nu c_{i\nu}x_i \Leftrightarrow c_{i\nu}x_ic_{i\nu}^{-1} &\overset{n)}{=} z_\nu^{-1}x_iz_\nu,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[x_kx_jx_k^{-1}, a_{ki}] = 1 \Leftrightarrow x_kx_jx_k^{-1} &\overset{\vee}{=} (x_i^{-1}x_kx_ix_i^{-1}x_k^{-1}x_i)x_kx_jx_k^{-1}(x_i^{-1}x_kx_ix_i^{-1}x_k^{-1}x_i)\\
&\overset{j),d)}{=} a_{ki}x_kx_jx_k^{-1}a_{ki}^{-1},\\
[x_jx_ix_j^{-1}, b_{j\lambda}] = 1 \Leftrightarrow x_jx_ix_j^{-1} &\overset{\vee}{=} (y_\lambda^{-1}x_jy_\lambda y_\lambda^{-1}x_j^{-1}y_\lambda)x_jx_ix_j^{-1}(y_\lambda^{-1}x_jy_\lambda y_\lambda^{-1}x_j^{-1}y_\lambda)\\
&\overset{l),f)}{=} b_{j\lambda}x_jx_ix_j^{-1}b_{j\lambda}^{-1},\\
[x_jy_\theta x_j^{-1}, b_{j\lambda}] = 1 \Leftrightarrow x_jy_\theta x_j^{-1} &\overset{\vee}{=} (y_\lambda^{-1}x_jy_\lambda y_\lambda^{-1}x_j^{-1}y_\lambda)x_jy_\theta x_j^{-1}(y_\lambda^{-1}x_jy_\lambda y_\lambda^{-1}x_j^{-1}y_\lambda)\\
&\overset{l),w)}{=} b_{j\lambda}x_jy_\theta x_j^{-1}b_{j\lambda}^{-1},\\
[x_jx_ix_j^{-1}, c_{j\nu}] = 1 \Leftrightarrow x_jx_ix_j^{-1} &\overset{\vee}{=} (z_\nu^{-1}x_jz_\nu z_\nu^{-1}x_j^{-1}z_\nu)x_jx_ix_j^{-1}(z_\nu^{-1}x_jz_\nu z_\nu^{-1}x_j^{-1}z_\nu)\\
&\overset{n),h)}{=} c_{j\nu}x_jx_ix_j^{-1}c_{j\nu}^{-1},\\
[x_jz_\mu x_j^{-1}, c_{j\nu}] = 1 \Leftrightarrow x_jz_\mu x_j^{-1} &\overset{\vee}{=} (z_\nu^{-1}x_jz_\nu z_\nu^{-1}x_j^{-1}z_\nu)x_jz_\mu x_j^{-1}(z_\nu^{-1}x_jz_\nu z_\nu^{-1}x_j^{-1}z_\nu)\\
&\overset{n),f')}{=} c_{j\nu}x_jz_\mu x_j^{-1}c_{j\nu}^{-1}.
\end{aligned}
$$

这表明 ρ^{-1} 诱导了一个逆同态，并且 $\mathbf{PZ}_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 具有上述表示。□

命题 5.13 的证明尤其表明，关系 $W' = 1$ 对于

$$W' \in \mathrm{PC}(\{(x_kz_\nu)^{m_\nu}(x_k^{-1}z_\nu^{-1})^{m_\nu} \mid 1 \leqslant k < n \text{ and } 1 \leqslant \nu \leqslant N\})$$

以及一些来自 5.13(C)的关系，并非获得$\mathrm{PZ}_n(\Sigma_\Gamma(L))$的表示所必需。但这些关系是证明下述结果的关键：

引理 5.14。 $\mathrm{PZ}_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 的表示满足命题 5.13 中的表示所满足的引理 4.10(2)中的条件，即 $\mathrm{PZ}_n(\Sigma_\Gamma(L)) = \langle X \mid R\rangle \rtimes \mathrm{PZ}_{n-1}(\Sigma_\Gamma(L))$ 满足

$$X = \{x_1, ..., x_{n-1}, y_1, ..., y_L, z_1, ..., z_N\}$$

以及 R 包含来自 5.13(R)的关系。

证明。 如上所述，正规子群由 $\langle X \mid R\rangle$ 表示。商群由 generatedby 给出。

$$a_{ji}, b_{k\lambda} \text{ and } c_{k\nu}$$

对于 $1 \leqslant i, j, k < n$, $i < j$, $1 \leqslant \lambda \leqslant L$和 $1 \leqslant \nu \leqslant N$，其定义关系来自5.13(S1)-5.13(S5)，即推论 $\mathrm{PZ}_{n-1}(\Sigma_\Gamma(L))$ 5.6。令 $\langle Y \mid S\rangle$ 表示 $\mathrm{PZ}_{n-1}(\Sigma_\Gamma(L))$ 的这一表示。此外，该表示包含 5.13(C) 中以下形式的关系 $axa^{-1} = \phi_a(x)$ 其中

$$\begin{aligned} x \in &\{x_k, y_\lambda, z_\nu \mid 1 \leqslant k < n, 1 \leqslant \lambda \leqslant L, 1 \leqslant \nu \leqslant N\} \text{ and} \\ a \in &\{a_{ji}, b_{k\lambda}, c_{k\nu} \mid 1 \leqslant i, j, k < n, i < j, 1 \leqslant \lambda \leqslant N, 1 \leqslant \nu \leqslant N\} \end{aligned}$$

和 $\phi_a(x) = pc_a(x)$ 是字母表 X中的一个词。接下来需要检查此表示满足引理 4.10(2)中的条件。也就是说，赋值$x \mapsto \phi_a(x)$ 诱导出一个自同构 $\phi_a \in$ 自同构群$(\langle X \mid R\rangle)$ ，而赋值ϕ： $a \mapsto \phi_a$ 诱导出一个同态 $\mathrm{PZ}_{n-1}(\Sigma_\Gamma(L)) \to$ 自同构群$(\langle X \mid R\rangle)$。我们遵循备注 1和2中所述的步骤 4.11。

步骤 1. 赋值 $\phi : a \mapsto \phi_a$ 诱导出一个同态。

此步骤需要检查 ϕ 是否保留了以下关系：5 .13(S1) -5.13(S5) 。对于$c_{k\nu}^{m_\nu} = 1$ 在5.13(S1)中的关系，我们需要验证 $\phi_{c_{k\nu}}^{m_\nu}$ 对每个生成元都诱导平凡作用。根据5.13(C)中的关系，引理5.10 可得

$$\begin{aligned} c_{k\nu}^{m_\nu} x_l c_{k\nu}^{-m_\nu} &= x_l, \\ c_{k\nu}^{m_\nu} x_k c_{k\nu}^{-m_\nu} &= (z_\nu^{-1} x_k^{-1})^{m_\nu} x_k (x_k z_\nu)^{m_\nu}, \\ c_{k\nu}^{m_\nu} x_j c_{k\nu}^{-m_\nu} &= (z_\nu^{-1} x_k^{-1})^{m_\nu} (z_\nu x_k)^{m_\nu} x_j (x_k^{-1} z_\nu^{-1})^{m_\nu} (x_k z_\nu)^{m_\nu}, \\ c_{k\nu}^{m_\nu} y_\lambda c_{k\nu}^{-m_\nu} &= (z_\nu^{-1} x_k^{-1})^{m_\nu} (z_\nu x_k)^{m_\nu} y_\lambda (x_k^{-1} z_\nu^{-1})^{m_\nu} (x_k z_\nu)^{m_\nu}, \\ c_{k\nu}^{m_\nu} z_\mu c_{k\nu}^{-m_\nu} &= (z_\nu^{-1} x_k^{-1})^{m_\nu} (z_\nu x_k)^{m_\nu} z_\mu (x_k^{-1} z_\nu^{-1})^{m_\nu} (x_k z_\nu)^{m_\nu}, \\ c_{k\nu}^{m_\nu} z_\nu c_{k\nu}^{-m_\nu} &= (z_\nu^{-1} x_k^{-1})^{m_\nu} z_\nu (x_k z_\nu)^{m_\nu}, \\ c_{k\nu}^{m_\nu} z_o c_{k\nu}^{-m_\nu} &= z_o. \end{aligned}$$

关系$(z_\nu x_k)^{m_\nu} (z_\nu^{-1} x_k^{-1})^{m_\nu} = 1$ 对于 $1 \leqslant k \leqslant n$ 以及 $1 \leqslant \nu \leqslant N$ 来自5.13(R)，由此可得 $\phi_{c_{k\nu}}^{m_\nu}(x) = x$ 对每个 $x \in X$。

此外，还需验证 ϕ 保持关系5.13(S2)-5.13(S5)中$\mathrm{PZ}_{n-1}(\Sigma_\Gamma(L))$。因此，我们回顾一下，求值映射ev 对每个 $n \in \mathbb{N}$都诱导出一个同态

$$\mathrm{PMap}_n^{\mathrm{id}, orb}(\Sigma_\Gamma(L)) \to \mathrm{PZ}_n(\Sigma_\Gamma(L)).$$

因此，求值映射ev 保持来自$\mathrm{PMap}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$,的关系5.13(S2)-5.13(S5) 。特别要强调的是，$\mathrm{PZ}_{n-1}(\Sigma_\Gamma(L))$ 中的关系$\mathrm{PMap}_{n-1}^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$,中都有相应的关系（参见4.13(1)-4.13(4)）。

现在我们回顾推论 4.6，其中指出 $\mathrm{PMap}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$ 是半直积$F_{n-1+L+N} \rtimes \mathrm{PMap}_{n-1}^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$。因此，引理 4.10(2) 特别意味着，引理 4.12 中的共轭关系会导出赋值 ψ： $A \mapsto \psi_A$ 从而得到一个同态 $\psi : \mathrm{PMap}_{n-1}^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L)) \to$ 到自同构群$(F_{n-1+L+N})$。也就是说，赋值 ψ： $A \mapsto \psi_A$ 保持了 $\mathrm{PMap}_{n-1}^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L))$ 的定义关系，该结论来自推论 4.13。

由于 ev：$\mathrm{PMap}_n^{\mathrm{id}\ orb}(\Sigma_\Gamma(L)) \to$ 到$\mathrm{PZ}_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 是一个同态，ev 的赋值ev特别保持了引理 4.12中的关系。引理 ev 对引理 4.12 中的关系所得到的像，正是 5.13(C) 中的关系。因此，由 5.13(C) 中的关系导出的赋值 ϕ： $a \mapsto \phi_a$ 对应于由引理 4.12导出的赋值ψ： $A \mapsto \psi_A$。

最后，我们得到赋值 ϕ 对应于赋值 ψ 和ψ 保持了对应于 5.13(S2)-5.13(S5) 的关系。因此，由于 $(F_{n-1+L} * \Gamma)/K$ 是 $F_{n-1+L+N}$ 的商群，我们可以推得ϕ 保持了关系 5.13(S2)-5.13(S5)。这就完成了步骤 1 的证明，并表明赋值 $\phi : a \mapsto \phi_a$ 诱导出一个同态。

步骤 2. 赋值 ϕ_a： $x \mapsto \phi_a(x)$ 在自同构群 $\mathrm{Aut}(\langle X \mid R\rangle)$ 中诱导出一个自同构。

注意到 ϕ_a 保持关系 $z_\nu^{m_\nu} = 1$，我们回顾一下，来自 5.13(C) 的共轭关系将每个 $\mathrm{PZ}_{n-1}(\Sigma_\Gamma(L))$-共轭元 z_ν 对应到一个 $\langle X \mid R\rangle$- 共轭元 z_ν。这尤其意味着 $\phi_a(z_\nu^{m_\nu}) = \phi_a(z_\nu)^{m_\nu} = 1$。

此外，回想一下，映射 ϕ_a 描述了 $conj_a$ 在字母表 X中的词这一层面上的共轭，也就是说，该映射与部分共轭 pc_a一致。因此，观察5.12 表明，部分共轭词的集合

$$\mathrm{PC}(\{(x_k z_\nu)^{m_\nu}(x_k^{-1} z_\nu^{-1})^{m_\nu} \mid 1 \leqslant k < n \text{ and } 1 \leqslant \nu \leqslant N\})$$

在 ϕ_a下保持不变。这意味着，若 W' 是该部分共轭词集合中的一个词，则关系 $W' = 1$映射为 $pc_a(W') = 1$，而这也包含在 R中的关系之内。因此， ϕ_a 对每个 $\langle X \mid R\rangle$都诱导一个 $a \in \mathrm{PZ}_{n-1}(\Sigma_\Gamma(L))$-自同构，这正是步骤 2中所声称的。

最后，命题 5.13中的表示满足引理 4.10(2)中的条件。因此，我们得到 $\mathrm{PZ}_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 是一个半直积

$$\langle X \mid R\rangle \rtimes \mathrm{PZ}_{n-1}(\Sigma_\Gamma(L)).$$

这就证明了该断言。 □

引理 5.14 还使我们能够确定 K。

命题 5.15。 $K = K_n$ 的核 ι_{PZ_n} 由以下元素的正规闭包给出

$$\mathrm{PC}(\{(x_k z_\nu)^{m_\nu}(x_k^{-1} z_\nu^{-1})^{m_\nu} \mid 1 \leqslant k < n \ \ and \ \ 1 \leqslant \nu \leqslant N\})$$

在 $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\Sigma_\Gamma(n-1+L)) \cong F_{n-1+L} * \Gamma$ 中。

证明。 由推论 5.9，群 $\mathrm{PZ}_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 是一个半直积

$$((F_{n-1+L} * \Gamma)/K) \rtimes \mathrm{PZ}_{n-1}(\Sigma_\Gamma(L)).$$

此外，引理 5.14 表明 $\mathrm{PZ}_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 分解为一个半直积，其正规子群为 $\langle X \mid R\rangle$，且

$$X = \{x_1, ..., x_{n-1}, y_1, ..., y_L, z_1, ..., z_N\}$$

以及来自命题 R 5.13(R)的定义关系。这表明，由 $\mathrm{PZ}_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 中的 x_1、……、x_{n-1}、y_1、……、y_L 和 z_1、……、z_N生成的子群同构于 $(F_{n-1+L} * \Gamma)/K$ 以及具有如下表示的群 $\langle X \mid R\rangle$，即 $(F_{n-1+L} * \Gamma)/K$具有如下表示 $\langle X \mid R\rangle$。特别地，我们得到核 K 是以下集合的正规闭包

$$\mathrm{PC}(\{(x_k z_\nu)^{m_\nu}(x_k^{-1} z_\nu^{-1})^{m_\nu} \mid 1 \leqslant k < n \text{ and } 1 \leqslant \nu \leqslant N\})$$

在 $F_{n-1+L} * \Gamma$ 内。

□

最后，我们已经证明了定理 C:

推论 5.16. 纯辫群$\mathrm{PZ}_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 属于以下纯轨形辫群正合列

$$1 \to K_n \to \pi_1^{\mathrm{orb}}\left(\Sigma_\Gamma(n-1+L)\right) \xrightarrow{\iota_{\mathrm{PZ}_n}} \mathrm{PZ}_n(\Sigma_\Gamma(L)) \xrightarrow{\pi_{\mathrm{PZ}_n}} \mathrm{PZ}_{n-1}(\Sigma_\Gamma(L)) \to 1$$

其中 $\pi_1^{\mathrm{orb}}\left(\Sigma_\Gamma(n-1+L)\right) \cong F_{n-1+L} * \Gamma$ 且

$$K_n = \langle\langle \mathrm{PC}(\{(x_k z_\nu)^{m_\nu}(x_k^{-1} z_\nu^{-1})^{m_\nu} \mid 1 \leqslant k < n, 1 \leqslant \nu \leqslant N\}) \rangle\rangle_{F_{n-1+L}*\Gamma}. \tag{20}$$

此外，同态 π_{PZ_n} 有一个右逆同态$\mathrm{s}^{\mathrm{PZ}_n}$，即群 $\mathrm{PZ}_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 是半直积 $((F_{n-1+L}*\Gamma)/K_n) \rtimes \mathrm{PZ}_{n-1}(\Sigma_\Gamma(L))$。

推论 5.16 修正了 [12] 中的定理 2.14。这引出了一个自然问题： [12] 中所述的推论是否仍然成立？特别是，Roushon 推导出

- $\mathrm{PZ}_n(\Sigma_\Gamma(L))$，因此类型为 A_n, B_n, C_n和 D_n 的仿射 Artin 群，以及有限复型 $G(de, e, r)$ 的辫群，对于 $d, r \geqslant 2$ 几乎多自由，见 [12,定理 2.19]。
- $\mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L))$，因此类型为 D_n 的仿射 Artin 群满足 Farrell–Jones 同构猜想，见 [12,定理 2.20]。

根据 [1]，A_n 型 Artin 群嵌入到 B_{n+1}型 Artin 群中。同一篇文章还证明，C_n 型 Artin 群嵌入到 A_n型 Artin 群中。已知这些球面 Artin 群几乎多自由，参见 [3]。由于几乎多自由这一性质对子群具有遗传性，因此 A_n 型和 C_n型 Artin 群的问题得以解决。根据 [4, 命题 4.1]，$G(de$型复辫群$, e, r)$ 同构于 $A(B_r)$ 的一个子群，因此它们也几乎多自由。此外，据作者所知，对于 B_n 型和 D_n型 Artin 群，它们是否几乎多自由仍是一个开放问题。

对于以下的型的 Artin 群，Farrell–Jones 同构猜想仍是一个开放问题。B_n型 Artin 群是否满足 Farrell–Jones 同构猜想这一问题在 [11]中进行了讨论。但是，正如我们将在下文指出的，该文中的命题 4.1 并不正确。命题 4.1 对于证明 [11, 定理 3.2 和 3.3] 似乎至关重要，而这两个定理推出 B_n 型 Artin 群满足 Farrell–Jones 同构猜想。据作者所知，这一问题也仍未解决。

固定股线与穿孔点

此处有必要对固定股线与穿孔点作一番说明。我们不必考虑轨形中穿孔点位于$\Gamma(\{r_1, \ldots, r_L\})$的辫子群 $\mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L))$，也可以考虑 $\mathrm{Z}_{n+L}(\Sigma_\Gamma)$的子群 $\mathrm{Z}_{n+L}^{\mathrm{fix}(L)}(\Sigma_\Gamma)$，其中 L 条辫股保持不动。更确切地说，子群 $\mathrm{Z}_{n+L}^{\mathrm{fix}(L)}(\Sigma_\Gamma)$ 中的每个元素都由一条辫子表示，该辫子终止于点 $r_1, \ldots, r_L, p_1, \ldots, p_n$，且终止于位置 $r_1, \ldots, r_L$ 的辫股保持不变。

然而，利用与上述类似的观察可知，群 $\mathrm{Z}_{n+L}^{\mathrm{fix}(L)}(\Sigma_\Gamma)$ 与 $\mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 不同。在辫图层面，这体现在以下观察中：

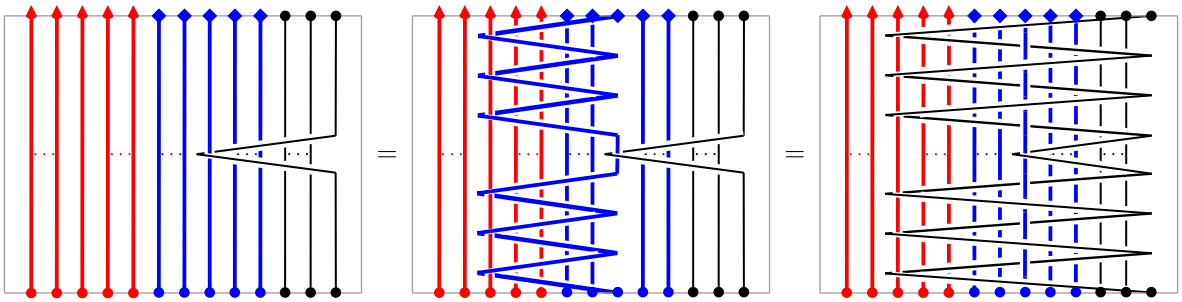


图 5.10。$\mathrm{Z}^{\mathrm{fix}(L)}_{n+L}(\Sigma_\Gamma)$ 中的一个关系。

在群 $\mathrm{Z}^{\mathrm{fix}(L)}_{n+L}(\Sigma_\Gamma)$ 中，图 5.10所描述的关系成立。相比之下，群 $\mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 不允许进行图 5.10所描述的变换。由于我们要求每个代表元都固定终止于位置 r_λ 的辫股，因此图 5.10 中间的辫子不属于 $\mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L))$。

为使这一点更加明确，考虑纯子群 $\mathrm{PZ}^{\mathrm{fix}(L)}_{n+L}(\Sigma_\Gamma)$，它属于 $\mathrm{Z}^{\mathrm{fix}(L)}_{n+L}(\Sigma_\Gamma)$。通过与推论 3.16中相同的论证，我们得到该群的一个生成集。为了强调它与 $\mathrm{PZ}_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 之间的相似性，我们将该群的生成集记为辫子

$$a_{ji}, b_{k\lambda} \quad \text{and} \quad c_{k\nu}$$

对于 $1 \leqslant i,\ j,\ k \leqslant n$ 其中 $i < j$，$1 \leqslant \lambda \leqslant L$ 以及 $1 \leqslant \nu \leqslant N$，其辫图如图 3.9 和3.11所示。现在令 $\omega : \mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L)) \to \mathrm{Z}^{\mathrm{fix}(L)}_{n+L}(\Sigma_\Gamma) \leqslant \mathrm{Z}_{n+L}(\Sigma_\Gamma)$ 为如下同态：将位置 r_1，……，r_L 处的穿孔点映射为固定股线。关于此同态，图5.10所示的关系意味着：

命题 5.17. 对于 $L \geqslant 1$，同态 ω 不是单射。

证明。 在证明中，我们考虑其限制

$$\omega|_{\mathrm{PZ}_n(\Sigma_\Gamma(L))} : \mathrm{PZ}_n(\Sigma_\Gamma(L)) \to \mathrm{PZ}^{\mathrm{fix}(L)}_{n+L}(\Sigma_\Gamma) \leqslant \mathrm{PZ}_{n+L}(\Sigma_\Gamma).$$

我们将证明此限制不是单射。为此，我们使用由推论 5.16得到的以下正合列：

$$1 \to K_{n+L} \to F_{n-1+L} * \Gamma \xrightarrow{\iota_{\mathrm{PZ}_n}} \mathrm{PZ}_{n+L}(\Sigma_\Gamma) \xrightarrow{\pi_{\mathrm{PZ}_n}} \mathrm{PZ}_{n-1+L}(\Sigma_\Gamma) \to 1$$

with

(21)

$$K_{n+L} = \left\langle\left\langle \mathrm{PC}\left(\left\{ \begin{matrix}(x_k z_\nu)^{m_\nu}(x_k^{-1}z_\nu^{-1})^{m_\nu},\\ (y_\lambda z_\nu)^{m_\nu}(y_\lambda^{-1}z_\nu^{-1})^{m_\nu}\end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix}1 \leqslant k < n, 1 \leqslant \nu \leqslant N\\ 1 \leqslant \lambda \leqslant L, 1 \leqslant \nu \leqslant N\end{matrix} \right\}\right)\right\rangle\right\rangle_{F_{n-1+L}*\Gamma}.$$

将此正合列限制到子群 $\mathbf{PZ}^{\mathrm{fix}(L)}_{n+L}(\Sigma_\Gamma)$ 上，我们进一步得到：

(22) $$1 \to K_{n+L} \to F_{n-1+L} * \Gamma \xrightarrow{\iota_{\mathrm{PZ}_n}} \mathrm{PZ}^{\mathrm{fix}(L)}_{n+L}(\Sigma_\Gamma) \xrightarrow{\pi_{\mathrm{PZ}_n}} \mathrm{PZ}^{\mathrm{fix}(L)}_{n-1+L}(\Sigma_\Gamma) \to 1.$$

限制同态 $\mathrm{s}^{\mathrm{PZ}_{n+L}}$: $\mathbf{PZ}_{n-1+L}(\Sigma_\Gamma) \to \mathrm{PZ}_{n+L}(\Sigma_\Gamma)$ 如第 36 页所定义，得到同态 $\mathrm{PZ}^{\mathrm{fix}(L)}_{n+L}(\Sigma_\Gamma) \to \mathrm{PZ}^{\mathrm{fix}(L)}_{n-1+L}(\Sigma_\Gamma)$ 的一个截面。因此，群 $\mathrm{PZ}^{\mathrm{fix}(L)}_{n+L}(\Sigma_\Gamma)$ 是半直积

$$(F_{n-1+L} * \Gamma)/K_{n+L} \rtimes \mathrm{PZ}^{\mathrm{fix}(L)}_{n-1+L}(\Sigma_\Gamma).$$

相比之下，群 $\mathbf{PZ}_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 是半直积。

$$(F_{n-1+L} * \Gamma)/K_n \rtimes \mathrm{PZ}_{n-1}(\Sigma_\Gamma(L)).$$

为了推导出这两个群并不相同，还需检查以下内容：

断言。 $K_n \subsetneq K_{n+L}$。

一方面，我们有 K_n 由（20）得出，以及 K_{n+L} 如（21）所示。这直接意味着 K_n 包含于 K_{n+L}之中。

另一方面，固定 $1 \leqslant \theta \leqslant L$ 和 $1 \leqslant o \leqslant N$，并令 $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_{m_o}$ 为由 $\mathbb{Z} = \langle y_\theta \rangle$ 和 $\mathbb{Z}_{m_o} = \langle z_o \rangle$ 生成的自由积。以下赋值诱导出一个同态:

$$\begin{aligned} q_{\theta,o} : F_{n-1+L} * \Gamma &\to \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_{m_\nu}, \\ y_\theta &\mapsto y_\theta, \\ z_o &\mapsto z_o, \\ x &\mapsto 1 \quad \text{for the remaining generators.} \end{aligned}$$

在 $q_{\theta,\ o}$ 元素 $(y_\theta z_o)^{m_o}(y_\theta^{-1} z_o^{-1})^{m_o}$ 映射为$\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_{m_\nu}$中的一个非平凡正规形，即 $(y_\theta z_o)^{m_o}(y_\theta^{-1} z_o^{-1})^{m_o} \notin \ker(q_{\theta,\ o})$。此外，对于每个 $1 \leqslant k < n$ 和$1 \leqslant \nu \leqslant N$，元素 $(x_k z_\nu)^{m_\nu}(x_k^{-1} z_\nu^{-1})^{m_\nu}$在 $q_{\theta,\ o}$下均映射为平凡元素。因此，

$$\mathrm{PC}(\{(x_k z_\nu)^{m_\nu}(x_k^{-1} z_\nu^{-1})^{m_\mu} \mid 1 \leqslant k < n, 1 \leqslant \nu \leqslant L\}) \subseteq \ker(q_{\theta,o})$$

因此 $K_n \subseteq \ker(q_{\theta,\ o})$。这意味着 $K_{n+L} \neq K_n$，最终得到 $K_{n+L} \supsetneq K_n$。

因此，与 $\mathrm{PZ}_n(\Sigma_\Gamma(L))$ 相比，群 $\mathrm{PZ}_{n+L}^{\mathrm{fix}(L)}(\Sigma_\Gamma)$ 满足以下附加关系

$$(b_{n\lambda} c_{n\nu})^{m_\nu} = (c_{n\nu} b_{n\lambda})^{m_\nu} \tag{23}$$

对于 $1 \leqslant \lambda \leqslant L$ 和 $1 \leqslant \nu \leqslant N$。这意味着 $\omega|_{\mathrm{PZ}_n(\Sigma_\Gamma(L))}$ 不是单射，当$L \geqslant 1$时尤其如此。在这种情况下，同态 ω 不是单射。□

这证明了 [11] 中的命题 **4.1** 不正确。比较$\mathrm{Z}_{n+L}^{\mathrm{fix}(L)}(\Sigma_\Gamma)$和 $\mathrm{Z}_n(\Sigma_\Gamma(L))$，**(23)** 可归结为以下附加关系 $(t_\lambda u_\nu)^{m_\nu} = (u_\nu t_\lambda)^{m_\nu}$ 对于$1 \leqslant \lambda \leqslant L$ 以及 $1 \leqslant \nu \leqslant N$。

K_n 在 $n \leqslant 2$时的核

在附加假设下，我们可以对 K_n 在 $n \leqslant 2$时的核的正规生成集给出更简洁的描述。

对于 $n = 1$，$\mathrm{PZ}_1(\Sigma_\Gamma(L))$ 中不存在非平凡的部分共轭。因此，映射

$$\pi_1^{\mathrm{orb}}(\Sigma_\Gamma(L)) \to \mathrm{PZ}_1(\Sigma_\Gamma(L))$$

是一个同构。特别地，当 $n = 1$时，核 K_n 是平凡的。在这种情况下，两个群都同构于 $F_L * \Gamma$。

对于 $n = 2$、$\Gamma = \mathbb{Z}_m$ 和 $L = 0$，映射

$$\pi_1^{\mathrm{orb}}(D_{\mathbb{Z}_m}(1)) \to \mathrm{PZ}_2(D_{\mathbb{Z}_m})$$

根据推论 5.16，其核为 $K_2 = \langle\langle \mathrm{PC}((x_1 z)^m (x_1^{-1} z^{-1})^m \rangle\rangle$。在这种情况下，唯一的部分共轭由 c_{1z} 诱导，它将

$$\begin{aligned} z &\mapsto z^{-1} x_1^{-1} z x_1 z \quad \text{and} \\ x_1 &\mapsto z^{-1} x_1 z, \end{aligned}$$

即由 $z^{-1}x_1^{-1}$进行共轭。因此，核 K_2 由下列元素正规生成$(x_1 z)^m (x_1^{-1} z^{-1})^m$。特别地，由（22）得到的关于$\mathrm{PZ}_2^{\mathrm{fix}(1)}(D_{\mathbb{Z}_m})$ 的正合列

$$1 \to \langle\langle (x_1 z)^m (x_1^{-1} z^{-1})^m \rangle\rangle \to \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_m \xrightarrow{\iota_{\mathrm{PZ}_n}} \mathrm{PZ}_2^{\mathrm{fix}(1)}(D_{\mathbb{Z}_m}) \xrightarrow{\pi_{\mathrm{PZ}_n}} \underbrace{\mathrm{PZ}_1^{\mathrm{fix}(1)}(D_{\mathbb{Z}_m})}_{=1} \to 1,$$

i.e. $\mathrm{Z}_2^{\mathrm{fix}(1)}(D_{\mathbb{Z}_m}) = \mathrm{PZ}_2^{\mathrm{fix}(1)}(D_{\mathbb{Z}_m}) = \langle x_1, z \mid z^m = 1, (x_1 z)^m = (z x_1)^m \rangle \neq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_m$.

参考文献

[1] D. Allcock. Artin 群的辫图。美国数学会会刊，354(9):3455–3474，2002。[2] M. R. Bridson 和 A. Haefliger。非正曲率度量空间。数学科学基础丛书。施普林格柏林海德堡，2011。[3] E. Brieskorn。论辫群。载于布尔巴基研讨班，第*24*年（*1971/1972*），数学讲义，第317卷，第401号报告，第21–44页。施普林格，柏林，1973。[4] R. Corran、E.-K. Lee 和 S.-J. Lee。非本原复反射群的辫群。代数杂志，427:387–425，2015。[5] J. Crisp 和 L. Paris。类型 B 和 D的 Artin 群。几何进展，5(4):607–636，2005。[6] B. Farb 和 D. Margalit。映射类群入门，普林斯顿数学丛书第49卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，2012。[7] J. Flechsig。二维轨形的辫群与映射类群，2023。博士论文，比勒费尔德。[8] J. Flechsig。二维轨形的映射类群，2023。预印本。[9] C. Kassel 和 V. Turaev。辫群，数学研究生教材第247卷。施普林格，纽约，2008。[10] J. J. Rotman。群论导论，数学研究生教材第148卷。施普林格，纽约，1995。[11] S. K. Roushon。Artin 群的某种结构与同构猜想。加拿大数学杂志，73(4):1153–1170，2021。[12] S. K. Roushon。构形李群胚与轨形辫群。数学科学通报，171：论文编号 103028，35，2021。[13] S. K. Roushon。轨道构形空间的几乎拟纤维化与基本群，2022。arXiv:2111.06159。[14] S. K. Roushon。轨形辫群，2022。arXiv:2301.02043。[15] S. K. Roushon。构形李群胚中的拟纤维化与轨形辫群，2022。arXiv:2106.08110。[16]W. P. Thurston。三维流形的几何与拓扑，1979。http://library.msri.org/books/gt3m/.

Jonas Flechsig：数学系，比勒费尔德大学，D-33501 比勒费尔德，德国