arXiv:2305.04278v1 [math.AP] 7 May 2023

含时变结构阻尼项的半线性波动方程整体弱解的不存在性

Mokhtar Kirane[a],1,1，Ahmad Z. Fino[b]，Sebti Kerbal[c]，Aymen Laadhari[a]

[a]数学系，文理学院，哈利法科技大学，阿布扎比，阿拉伯联合酋长国[b]工程与技术学院，中东美国大学，埃盖拉 54200，科威特[c]数学系，苏丹卡布斯大学，分数阶微分研究组（DR/RG/03），阿尔胡德 123，马斯喀特，邮政信箱 36，阿曼

摘要
我们研究如下形式的含时变结构阻尼项的半线性波动方程：$1\,(1+t)^{\beta}(-\Delta)^{\sigma/2}u_t$。

我们的结果表明，在给定系统数据满足相关假设的情况下，参数β、σ对整体弱解的不存在性具有影响。

关键词：爆破、阻尼波动方程、变系数、分数阶拉普拉斯算子2020年数学学科分类（MSC）：主要分类：35B44、35A01；次要分类：35L20、35L71

1. 引言

本文旨在证明以下半线性结构阻尼波动方程柯西问题的全局弱解不存在性。

$$\begin{cases} u_{tt}-\Delta u+\dfrac{b_0}{(1+t)^{\beta}}(-\Delta)^{\sigma/2}u_t=|u|^p & x\in\mathbb{R}^n,\ t>0,\\ u(0,x)=u_0(x),\ \ u_t(0,x)=u_1(x), & x\in\mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1}$$

其中$0<\sigma<2$，$n\geq 1$、$p>1$，b_0为正常数，且$\beta\in\mathbb{R}$。不失一般性，我们假设$b_0=1$。

在介绍我们的主要爆破结果之前，我们想强调，方程 (1) 在$b_0=0$情形下的特例由经典半线性波动方程所支配。该情形的 Strauss 猜想指出：若$p\leq p_S$，则在初始数据满足适当符号假设的条件下，方程 (1) 不存在整体解；而若$p>p_S$，则小初始数据对应一个整体解；参见 [10, 14, 16, 18] 等诸多文献。其中，p_S是下列二次方程的正根$(n-1)p^2-(n+1)p-2=0$，其表达式为

$$p_S=p_S(n):=\frac{n+1+\sqrt{n^2+10n-7}}{2(n-1)}.$$

为了允许更一般的初始数据，同时仍保持紧支集，Kato [11] 得到了一个指数为$(n+1)/(n-1)$的爆破结果，虽然其精度略低于 Strauss 指数p_S；其中$n\geq 2$。
我们在此想强调，由 [17] 引入并由 [8, 9, 12]，使用的测试函数法，在证明爆破结果时发挥着与 Kato 方法类似的作用。事实上，对于抛物型方程，测试函数能够给出恰好为临界指数p_c的结果，因此十分有效；但对于双曲型方程（参见 [12]），我们

*通讯作者电子邮箱：mokhtar.kirane@ku.ac.ae（Mokhtar Kirane）、ahmad.fino@aum.edu.kw（Ahmad Z.Fino）、skerbal@squ.edu.om（Sebti Kerbal）、aymen.laadhari@ku.ac.ae（Aymen Laadhari）

提交至爱思唯尔的预印本 2023年5月9日

得到所谓的 Kato 指数 p^*，它小于 p_c。这是测试函数法的一个弱点，但一般来说，它可以应用于更一般的方程和方程组，而无需对解施加正性条件。

当 $\beta = 0$、$\sigma \to 2$ 和 $b_0 = 1$ 时，问题 (1) 化为

$$u_{tt} - \Delta u - \Delta u_t = |u|^p, \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \tag{2}$$

这被称为黏弹性阻尼情形。D'Ambrosio 和 Lucente [3, 定理 4.2] 通过应用测试函数法证明，当 $1 < p \le (n+1)/(n-1)_+$ 时，方程 (2) 的解会在有限时间内爆破，其中 $(\cdot)_+ := \max\{0, \cdot\}$。最近，Fino [6] 在外部区域情形下也得到了类似结果。另一方面，D'Abbicco-Reissig [2] 证明，当 $p > 1 + \frac{3}{n-1}$ $(n \ge 2)$ 时，对于充分小的初始数据，问题 (2) 存在整体解。因此，临界指数的精确值仍是一个悬而未决的问题。

最近，Fino 和 Hamza 研究了满足 $\sigma \to 2$ 的问题 (1),

$$u_{tt} - \Delta u - \frac{b_0}{(1+t)^\beta}\Delta u_t = |u|^p, \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \tag{3}$$

他们证明，若 $\int_{\mathbb{R}^n} u_1(x)dx > 0$,

$$\begin{cases} p \in (1, \infty) & \text{for } n = 1, 2, \\ p \in (1, \frac{n}{n-2}] & \text{for } n \ge 3, \end{cases}$$

and

$$\begin{cases} 1 < p \le \frac{n+1}{(n-1)_+} & \text{if } \beta \ge -1, \\ 1 < p \le \frac{n(1-\beta)+2}{(n(1-\beta)-2)_+} & \text{if } \beta \le -1, \end{cases}$$

那么，方程 (3) 的温和解会在有限时间内爆破。

本文旨在利用一种基于下文引理 1 的最新版本测试函数法，证明方程 (1) 不存在整体弱解；方程 (1) 是将 [7] 的结果推广到分数阶拉普拉斯阻尼项情形所得。本文的创新之处在于测试函数的选取，这种选取与许多作者通常假设的正性抑制相一致。

在 β、0 和 $b_0 = 1$ 的情形下，我们通过尺度论证直观地考察阻尼项 $(1+t)^\beta(-\Delta)^{\sigma/2}u_t$ 的影响。设 $u(t, x)$ 是线性强阻尼波动方程的一个解

$$u_{tt}(t, x) - \Delta u(t, x) + \frac{1}{(1+t)^\beta}(-\Delta)^{\sigma/2}u_t(t, x) = 0. \tag{4}$$

当 $\sigma \ge 1 - \beta$ 时，令

$$u(t, x) = v(\lambda(1+t), \lambda x), \qquad \lambda(1+t) = s, \ \lambda x = y, \tag{5}$$

取参数 $\lambda > 0$，我们有

$$v_{ss}(s, y) - \Delta v(s, y) + \frac{\lambda^{\sigma+\beta-1}}{s^\beta}(-\Delta)^{\sigma/2}v_s(s, y) = 0.$$

因此，当 $\sigma = 1 - \beta$ 时，我们注意到方程 (4) 是不变的；而当 $\sigma > 1 - \beta$ 时，令 $\lambda \to 0$，便得到无阻尼波动方程

$$v_{ss}(s, y) - \Delta v(s, y) = 0.$$

我们注意到， $\lambda \to 0$ 对应于 t $\to +\infty$。
另一方面，当 $\sigma < 1-\beta$ 时，我们令

$$u(t,x) = v(\lambda^{\frac{\sigma}{1-\beta}}(1+t), \lambda x), \qquad \lambda^{\frac{2}{1-\beta}}(1+t) = s,\ \lambda x = y,$$

对于参数 $\lambda > 0$，我们有

$$v_{ss}(s,y) + \frac{1}{s^{\beta}}(-\Delta)^{\sigma/2} v_s(s,y) - \lambda^{\frac{2(1-\beta-\sigma)}{1-\beta}} \Delta v(s,y) = 0.$$

在这种情况下，令 $\lambda \to 0$，可得伪抛物型方程

$$v_{ss}(s,y) + \frac{1}{s^{\beta}}(-\Delta)^{\sigma/2} v_s(s,y) = 0.$$

这意味着解的渐近行为取决于阻尼项系数的行为。

本文结构安排如下。第 2 节陈述本文的主要定理，并在第 4 节给出证明。第 3 节汇集一些预备知识。

2. 主要结果

本节旨在陈述我们的主要结果。

定理1（爆破）。假设

$$(u_0, u_1) \in (L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^1(\mathbb{R}^n)) \times (L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n))$$

满足以下条件:

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_1(x)dx > 0. \tag{6}$$

If

$$\begin{cases} 1 < p < \min\left\{\dfrac{n+1}{(n-1)_+}; \dfrac{n}{(n-\sigma)_+}\right\} & \text{if } \sigma \geq 1-\beta, \\ 1 < p < \min\left\{\dfrac{n(1-\beta)+\sigma}{(n(1-\beta)-\sigma)_+}; \dfrac{n}{(n-\sigma)_+}\right\} & \text{if } \sigma \leq 1-\beta, \end{cases} \tag{7}$$

or

$$\begin{cases} p = \dfrac{n+1}{n-1}, & \text{if } \sigma \geq 1-\beta,\ \sigma > \dfrac{2n}{n+1},\ n \geq 2, \\ p = \dfrac{n(1-\beta)+\sigma}{n(1-\beta)-\sigma}, & \text{if } n(1+\beta) < \sigma \leq 1-\beta,\ n \geq 1, \end{cases}$$

其中 $(\cdot)_+ := \max\{0, \cdot\}$，则问题（1）不存在全局弱解。

注1。我们注意到，取极限情形 $\sigma \to 2$，可以得到与 *[7]*相同的结果。

注 2. 我们强调，(7) 中出现的指数 $\overline{n+1}(n-1)_+$ 最初由 *[11]* 引入，用于证明在具有紧支集的小初始数据条件下，非线性项为 $|u|^p$ 的半线性波动方程不存在整体解。

3. 预备知识

定义 1. *[13]*
设 $\mathcal{S}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中快速衰减的 C^∞ 函数构成的施瓦茨空间，且 $s \in (0,1)$。$\mathbb{R}^n$ 中的分数阶拉普拉斯算子 $(-\Delta)^s$ 是定义在 $\mathcal{S}$ 上的非局部算子，其定义为

$$
\begin{aligned}
(-\Delta)^s v(x) \quad &:= \quad C_{n,s}\ p.v. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{v(x)-v(y)}{|x-y|^{n+2s}}\,dy \\
&= \quad \begin{cases} C_{n,s} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{v(x)-v(y)}{|x-y|^{n+2s}}\,dy, & \text{if } 0<s<1/2, \\ C_{n,s} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{v(x)-v(y)-\nabla v(x)\cdot(x-y)\mathcal{X}_{|x-y|<\delta}(y)}{|x-y|^{n+2s}}\,dy, \quad \forall\,\delta>0, & \text{if } 1/2 \le s<1, \end{cases}
\end{aligned}
$$

其中，p.v. 表示柯西主值，且 $C_{n,s} := s\,4^s\Gamma(\frac{n}{2}+s)\,\pi^{-\frac{n}{2}}\Gamma(1-s)$。

事实上，我们很少在施瓦茨空间中使用分数阶拉普拉斯算子；它可以扩展到正则性较低的函数，如下所示：对于 $s \in (0,1)$，$\varepsilon > 0$，令

$$
\mathcal{L}_{s,\varepsilon}(\Omega) \quad := \quad \begin{cases} L_s(\mathbb{R}^n) \cap C^{0,2s+\varepsilon}(\Omega) & \text{if } 0<s<1/2, \\ L_s(\mathbb{R}^n) \cap C^{1,2s+\varepsilon-1}(\Omega), & \text{if } 1/2 \le s<1, \end{cases}
$$

其中，Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个开子集，$C^{0,\,2s+\varepsilon}(\Omega)$ 是 Ω 上 $2s+\varepsilon$-赫尔德连续函数的空间，$C^{1,\,2s+\varepsilon-1}(\Omega)$ 是 $C^1(\Omega)$ 中一阶偏导数为指数 $2s+\varepsilon-1$ 的赫尔德连续函数所构成的空间，并且

$$
L_s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \text{such that} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x)}{1+|x|^{n+2s}}\,dx < \infty \right\}.
$$

命题 1. *[13,* 命题 2.*4]*
设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个开子集，$s \in (0,1)$，且对于某个 $\varepsilon > 0$，$f \in \mathcal{L}_{s,\varepsilon}(\Omega)$。那么 $(-\Delta)^s f$ 是 Ω 上的连续函数，并且对于每个 $x \in \Omega$，$(-\Delta)^s f(x)$ 由定义 1 中的逐点公式给出。

注：函数 f 满足命题 1 中条件的一个简单充分条件是 $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \cap C^2(\Omega)$。

利用 [4, 引理 2.11] 及其证明，可得如下结果。

引理 1. 设 $\langle x\rangle := (1+(|x|-1)^4)^{1/4}$ 对所有 $x \in \mathbb{R}^n$、$n \ge 1$ 均成立。设 $s \in (0,1]$ 且 $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是由下式定义的函数

$$
\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } |x| \le 1, \\ \langle x\rangle^{-n-2s} & \text{if } |x| \ge 1. \end{cases} \tag{8}
$$

Then

$$
\phi \in C^2(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap H^2(\mathbb{R}^n), \qquad \partial_x^2 \phi \in L^\infty(\mathbb{R}^n),
$$

并且以下估计成立：

$$
\max\{|\Delta\phi(x)|,\, |(-\Delta)^s\phi(x)|\} \le C\,\phi(x) \quad \textit{for all } x \in \mathbb{R}^n.
$$

引理 2. 设 h 是满足 $\partial_x^2 h \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 的光滑函数。对于任意 $R > 0$，令 h_R 为由下式定义的函数

$$
h_R(x) := h(R^{-1}x) \quad \textit{for all } x \in \mathbb{R}^n.
$$

那么，$(-\Delta)^s(h_R)$，$s \in (0,1]$，满足以下缩放性质

$$
(-\Delta)^s h_R(x) = R^{-2s}(-\Delta)^s h(R^{-1}x), \quad \textit{for all } x \in \mathbb{R}^n.
$$

引理3. *[4,* 引理 2.*14]*
设 s，es $\in(0,1]$, R >0 且 p >1。那么，以下估计成立

$$\int_{\mathbb{R}^n}(\phi_R(x))^{-\frac{1}{p-1}}\left|(-\Delta)^{\widetilde{s}}\phi_R(x)\right|^{\frac{p}{p-1}}dx\le C\,R^{-\frac{2\widetilde{s}p}{p-1}+n},$$

其中 ϕ_R(x) := ϕ(x/R)，且 ϕ 如式 (8) 中所定义。

4. 定理1的证明

定理1的证明主要依赖于柯西问题 (1) 的弱解概念以及测试函数法。设

$$X_{\delta,T}=\{\varphi\in C([0,\infty),H^2(\mathbb{R}^n))\cap C^1([0,\infty),H^\delta(\mathbb{R}^n))\cap C^2([0,\infty),L^2(\mathbb{R}^n)),\text{such that supp}\varphi\subset Q_T\},$$

其中 Q_T:= $[0,T]\times\mathbb{R}^n$，齐次分数阶索伯列夫空间 $H^\delta(\mathbb{R}^n)$，$\delta\in(0,2)$，定义为

$$H^\delta(\mathbb{R}^n)=\begin{cases}\{u\in L^2(\mathbb{R}^n);(-\Delta)^{\delta/2}u\in L^2(\mathbb{R}^n)\}, & \text{if } \delta\in(0,1),\\ H^1(\mathbb{R}^n), & \text{if } \delta=1,\\ \{u\in H^1(\mathbb{R}^n);(-\Delta)^{\delta/2}u\in L^2(\mathbb{R}^n)\}, & \text{if } \delta\in(1,2),\end{cases}$$

赋予范数

$$\|u\|_{H^\delta(\mathbb{R}^n)}=\begin{cases}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\left\|(-\Delta)^{\delta/2}u\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, & \text{if } \delta\in(0,1),\\ \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, & \text{if } \delta=1,\\ \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\left\|(-\Delta)^{\delta/2}u\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, & \text{if } \delta\in(1,2).\end{cases}$$

与 (1) 相关的弱形式如下:

定义 2.（弱解）
设 T >0，且 u_0,$u_1\in L^2(\mathbb{R}^n)$。函数

$$u\in L^1((0,T),L^2(\mathbb{R}^n))\cap L^p((0,T);L^{2p}(\mathbb{R}^n)),$$

称为在 $[0,T)\times\mathbb{R}^n$ 上的 (1) 的弱解，如果

$$\begin{aligned}&\int_{Q_T}|u|^p\varphi\,dt\,dx+\int_{\mathbb{R}^n}u_1(x)\varphi(0,x)\,dx\\&+\int_{\mathbb{R}^n}u_0(x)(-\Delta)^{\sigma/2}\varphi(0,x)\,dx-\int_{\mathbb{R}^n}u_0(x)\varphi_t(0,x)\,dx\\&=\int_{Q_T}u\varphi_{tt}\,dt\,dx-\int_0^T\frac{1}{(1+t)^\beta}\int_{\mathbb{R}^n}u\,(-\Delta)^{\sigma/2}\varphi_t\,dx\,dt\\&-\int_{Q_T}u\Delta\varphi\,dt\,dx+\int_0^T\frac{\beta}{(1+t)^{\beta+1}}\int_{\mathbb{R}^n}u\,(-\Delta)^{\sigma/2}\varphi\,dx\,dt,\end{aligned}$$

对所有 $\varphi\in X_{\sigma,\ T}$ 均成立。我们将该弱解的寿命记为

$$T_w(u_0,u_1):=\sup\{T\in(0,\infty]\ \textit{for which there exists a unique weak solution u to (1)}\}.$$

此外，如果 T >0 可以任意选取，即 T_w(u_0,u_1) $=\infty$，那么称 u 为方程（1）的全局弱解。

定理1的证明。设 u 是方程（1）的全局弱解，即

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_T} |u|^p \varphi \, dt\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} u_1(x)\varphi(0,x)\, dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x)(-\Delta)^{\sigma/2}\varphi(0,x)\, dx - \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x)\varphi_t(0,x)\, dx \\
&= \int_{Q_T} u\varphi_{tt}\, dt\, dx - \int_0^T \frac{1}{(1+t)^\beta} \int_{\mathbb{R}^n} u\,(-\Delta)^{\sigma/2}\varphi_t\, dx\, dt \\
&- \int_{Q_T} u\Delta\varphi\, dt\, dx + \int_0^T \frac{\beta}{(1+t)^{\beta+1}} \int_{\mathbb{R}^n} u\,(-\Delta)^{\sigma/2}\varphi\, dx\, dt, \qquad (9)
\end{aligned}$$

对所有 $T > 0$ 以及所有 $\varphi \in X_{\sigma,\, T}$。

设 $T > 0$。现在，我们引入以下测试函数

$$\varphi(t,x) = \psi^\eta(t)\phi_{T^d}(x) = \psi^\eta(t)\phi\left(\frac{x}{T^d}\right) \qquad (10)$$

其中 ϕ 在 (8) 中定义， $\psi(t) = \Psi(\frac{t}{T})$， $\eta \gg 1$、$d > 0$ 为稍后确定的常数， $\Psi \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ 是一个非增截断函数，满足

$$\Psi(r) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \le r \le 1/2, \\ \searrow & \text{if } 1/2 \le r \le 1, \\ 0 & \text{if } r \ge 1. \end{cases}$$

由公式 (9)，我们得到以下不等式

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_T} |u|^p \varphi \, dt\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} u_1(x)\varphi(0,x)\, dx \\
&\le \int_{\frac{T}{2}}^T \int_{\mathbb{R}^n} |u|\,|\varphi_{tt}|\, dx\, dt + \int_{Q_T} |u|\,|\Delta\varphi|\, dt\, dx \\
&+ \int_{\frac{T}{2}}^T \frac{1}{(1+t)^\beta} \int_{\mathbb{R}^n} |u||(-\Delta)^{\sigma/2}\varphi_t|\, dx\, dt + \int_0^T \frac{\beta}{(1+t)^{\beta+1}} \int_{\mathbb{R}^n} |u|\,|(-\Delta)^{\sigma/2}\varphi|\, dx\, dt \\
&+ \int_{\mathbb{R}^n} |u_0|\left(|(-\Delta)^{\sigma/2}\varphi(0,x)| + |\varphi_t(0,x)|\right) dx \\
&=: I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5. \qquad (11)
\end{aligned}$$

设 $\varepsilon > 0$。应用 ε-Young不等式

$$AB \le \varepsilon A^p + C(\varepsilon,p)B^{p'},\ A \ge 0,\ B \ge 0,\ p + p' = pp',\ C(\varepsilon,p) = (p-1)(\varepsilon\, p^p)^{-1/(p-1)},$$

我们得到第一个积分的估计

$$\begin{aligned}
I_1 &\le \int_{Q_T} |u|\varphi^{1/p}\varphi^{-1/p}\phi_{T^d}|(\psi^\eta)_{tt}|\, dt\, dx \\
&\le \varepsilon \int_{Q_T} |u|^p \varphi\, dt\, dx + C\int_{Q_T} \phi_{T^d}\psi^{-\eta/(p-1)}|(\psi^\eta)_{tt}|^{p'}\, dt\, dx. \qquad (12)
\end{aligned}$$

由于 $(\psi^\eta)_{tt} = \eta\psi^{\eta-1}\psi_{tt} + \eta(\eta-1)\psi^{\eta-2}|\psi_t|^2$， 不等式 (12) 变为

$$I_1 \le \varepsilon \int_{Q_T} |u|^p \psi\, dt\, dx + C\int_{Q_T} \phi_{T^d}\psi^{\eta-p'}|\psi_{tt}|^{p'}\, dt\, dx + C\int_{Q_T} \phi_{T^d}\psi^{\eta-2p'}|\psi_t|^{2p'}\, dt\, dx. \qquad (13)$$

与 (13) 类似地推导，可得

$$I_2 \le \varepsilon \int_{Q_T} |u|^p \varphi \, dt \, dx + C \int_{Q_T} \psi^\eta \phi_{T^d}^{-1/(p-1)} |\Delta \phi_{T^d}|^{p'} \, dt \, dx. \tag{14}$$

同理，我们写出

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{\frac{T}{2}}^T \frac{1}{(1+t)^\beta} \int_{\mathbb{R}^n} |u| \varphi^{1/p} \varphi^{-1/p} \, |(-\Delta)^{\sigma/2} \phi_{T^d}| |(\psi^\eta)_t| \, dx \, dt \\ &\le \varepsilon \int_{Q_T} |u|^p \varphi \, dt \, dx \\ &\quad + C \int_{\frac{T}{2}}^T \frac{1}{(1+t)^{\beta p'}} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_{T^d}^{-1/(p-1)} |(-\Delta)^{\sigma/2} \phi_{T^d}|^{p'} \, \psi^{\eta - p'} \, |\psi_t|^{p'} \, dx \, dt. \end{aligned} \tag{15}$$

显然，

$$\frac{1}{(1+t)^{\beta p'}} \le C \, T^{-\beta p'}, \qquad \forall \, t \in \left(\frac{T}{2}, T \right),$$

因此，

$$I_3 \le \varepsilon \int_{Q_T} |u|^p \varphi \, dt \, dx + C \, T^{-\beta p'} \int_{Q_T} \phi_{T^d}^{-1/(p-1)} |(-\Delta)^{\sigma/2} \phi_{T^d}|^{p'} \, \psi^{\eta - p'} \, |\psi_t|^{p'} \, dt \, dx. \tag{16}$$

同样地，

$$\begin{aligned} I_4 &\le C \int_0^T \frac{1}{(1+t)^{\beta+1}} \int_{\mathbb{R}^n} |u| \varphi^{1/p} \varphi^{-1/p} \, \psi^\eta \, |(-\Delta)^{\sigma/2} \phi_{T^d}| \, dx \, dt \\ &\le \varepsilon \int_{Q_T} |u|^p \varphi \, dt \, dx + C \int_0^T \frac{1}{(1+t)^{(\beta+1)p'}} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_{T^d}^{-1/(p-1)} |(-\Delta)^{\sigma/2} \phi_{T^d}|^{p'} \, \psi^\eta \, dx \, dt. \end{aligned} \tag{17}$$

Fin最后，只需控制项 I_5。利用恒等式 $\varphi_t(0, x) = \eta \psi_t(0) \phi_{T^d}(x)$，我们推得 r

$$I_5 \le C \int_{\mathbb{R}^n} |u_0| \left(|(-\Delta)^{\sigma/2} \phi_{T^d}| + |\psi_t(0)| \phi_{T^d} \right) dx. \tag{18}$$

将 (11) 与 (13)-(18) 结合，并取 ε 足够小，我们可得

$$\begin{aligned} &\int_{Q_T} |u|^p \varphi \, dx \, dt + \int_{\mathbb{R}^n} u_1(x) \phi_{T^d}(x) \, dx \\ &\le C \int_{Q_T} \phi_{T^d} \psi^{\eta - p'} |\psi_{tt}|^{p'} \, dt \, dx + C \int_{Q_T} \phi_{T^d} \psi^{\eta - 2p'} |\psi_t|^{2p\prime} \, dt \, dx \\ &\quad + C \int_{Q_T} \psi^\eta \phi_{T^d}^{-1/(p-1)} |\Delta \phi_{T^d}|^{p'} \, dt \, dx \\ &\quad + C \, T^{-\beta p'} \int_{Q_T} \phi_{T^d}^{-1/(p-1)} |(-\Delta)^{\sigma/2} \phi_{T^d}|^{p'} \, \psi^{\eta - p'} \, |\psi_t|^{p'} \, dt \, dx \\ &\quad + C \int_0^T \frac{1}{(1+t)^{(\beta+1)p'}} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_{T^d}^{-1/(p-1)} |(-\Delta)^{\sigma/2} \phi_{T^d}|^{p'} \, \psi^\eta \, dx \, dt \\ &\quad + C \int_{\mathbb{R}^n} |u_0| \left(|(-\Delta)^{\sigma/2} \phi_{T^d}| + |\psi_t(0)| \phi_{T^d} \right) dx. \end{aligned}$$

考虑到 (10) 给出的 φ 表达式以及引理1-3，我们推知

$$\begin{aligned} &\int_{Q_T} |u|^p \varphi \, dx \, dt + \int_{\mathbb{R}^n} u_1(x) \phi_{T^d}(x) \, dx \\ &\le C \, T^{-2p'+1+nd} + C \, T^{-2dp'+1+nd} + C \, T^{-\beta p' - p' - \sigma d p' + 1 + nd} \\ &\quad + C \, T^{-\sigma d p' + nd} \int_0^T (1+t)^{-\frac{(\beta+1)p}{p-1}} \, dt + C \left(T^{-\sigma d} + T^{-1} \right) \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(x)| \, dx. \end{aligned} \tag{19}$$

由于 $0<\sigma<2$，我们注意到， $\sigma \geq 1-\beta$ 和 $\sigma \leq 1-\beta$ 的情形等价于

$$\sigma \geq 1-\beta, \quad \text{for all } \beta>-1, \qquad \text{and} \qquad \sigma<1-\beta, \quad \text{for all } \beta<1,$$

因此，我们区分两种情形：

I. 情形： $\sigma \geq 1-\beta$，对所有 $\beta>-1$。
在这种情形下，我们取 $d=1$。

亚临界情形 $p<\min\{n+1,(n-1)_+;\ \frac{n}{(n-\sigma)_+}\}$。
注意，

$$\int_0^T (1+t)^{-\frac{(\beta+1)p}{p-1}}\,dt \leq C \begin{cases} T^{1-\frac{(\beta+1)p}{p-1}} & \text{if } \beta p<-1, \\ \ln T & \text{if } \beta p=-1, \\ 1 & \text{if } \beta p>-1. \end{cases}$$

我们需要区分两种情形。

a) 若 $\beta \geq 0$。在此情况下，我们有 $\beta p>-1$，因此

$$\int_0^T (1+t)^{-\frac{(\beta+1)p}{p-1}}\,dt \leq C.$$

因此，由（19）可得

$$\begin{aligned} &\int_{Q_T} |u|^p \varphi\,dx\,dt+\int_{\mathbb{R}^n} u_1(x)\phi_T(x)\,dx \\ &\leq C\,T^{-2p'+1+n}+C\,T^{-(\beta+1)p'-\sigma p'+1+n}+C\,T^{-\sigma p'+n}+C\left(T^{-\sigma}+T^{-1}\right)\int_{\mathbb{R}^n}|u_0(x)|\,dx. \end{aligned}$$

利用以下事实： $\beta p>-1 \Longrightarrow -(\beta+1)p'-\sigma p'+1+n<-\sigma p'+n$，我们得到

$$\begin{aligned} &\int_{Q_T} |u|^p \varphi\,dx\,dt+\int_{\mathbb{R}^n} u_1(x)\phi_T(x)\,dx \\ &\leq C\,T^{-2p'+1+n}+C\,T^{-\sigma p'+n}+C\left(T^{-\sigma}+T^{-1}\right)\int_{\mathbb{R}^n}|u_0(x)|\,dx. \end{aligned} \tag{20}$$

注意到，我们很容易看出

$$-2p'+1+n<0 \Longleftrightarrow p<\frac{n+1}{(n-1)_+} \quad \text{and} \quad -\sigma p'+n<0 \Longleftrightarrow p<\frac{n}{(n-\sigma)_+}.$$

令 $T \to \infty$，并结合勒贝格控制收敛定理以及 $u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$，我们得到

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_1(x)\,dx \leq 0.$$

这与我们的假设（6）相矛盾。

b) 如果 $-1<\beta<0$。对于 n，我们有三种情况。



注意，当 $n = 1$ 时，我们有 $n = 1 < \frac{1-\beta}{1+\beta}$。

i) 若 $n \geq \dfrac{\sigma}{1+\beta}$，则 $n \geq \dfrac{1-\beta}{1+\beta}$，因此

$$p < \min\left\{\frac{n+1}{n-1}; \frac{n}{n-\sigma}\right\} \leq -\frac{1}{\beta}, \quad \text{for all } n \geq 2,$$

即 $\beta p > -1$，按照 a) 部分中的相同计算可得矛盾。ii) 若当 $\sigma > 1-\beta$ 时 $\dfrac{1-\beta}{1+\beta} < n < \dfrac{\sigma}{1+\beta}$，则有

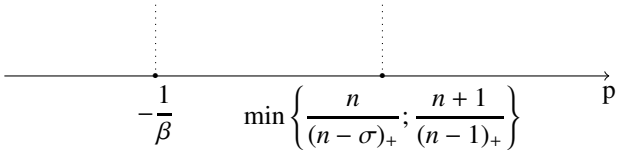
$$n < \frac{\sigma}{1+\beta} < \frac{\sigma}{2-\sigma},$$

因此

$$p < \min\left\{\frac{n+1}{n-1}; \frac{n}{n-\sigma}\right\} = \frac{n+1}{n-1} < -\frac{1}{\beta}, \quad \text{for all } n \geq 2,$$

即 $\beta p > -1$，按照 a) 部分中的相同计算可得矛盾。iii) 若 $n \leq \dfrac{1-\beta}{1+\beta}$，则 $n \leq \dfrac{\sigma}{1+\beta}$，

即



- 若 $p \leq -1/\beta$，即 $p\beta \geq -1$，则

$$\int_0^T (1+t)^{-\frac{(\beta+1)p}{p-1}}\, dt \leq C \ln T, \qquad \text{for all } T \gg 1.$$

于是，由 (19) 得

$$\begin{aligned}&\int_{Q_T} |u|^p \varphi\, dx\, dt + \int_{\mathbb{R}^n} u_1(x)\phi_T(x)\, dx\\ &\leq C\, T^{-2p'+1+n} + C\, T^{-(\beta+1)p'-\sigma p'+1+n} + C\, T^{-\sigma p'+n} \ln T + C\left(T^{-\sigma} + T^{-1}\right) \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(x)|\, dx,\end{aligned}$$

对所有的 $T \gg 1$。由于 $p\beta \geq -1 \Longrightarrow (\beta+1)p' \geq 1$，我们得出

$$\begin{aligned}&\int_{Q_T} |u|^p \varphi\, dx\, dt + \int_{\mathbb{R}^n} u_1(x)\phi_T(x)\, dx\\ &\leq C\, T^{-2p'+1+n} + C\, T^{-\sigma p'+n} \ln T + C\left(T^{-\sigma} + T^{-1}\right) \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(x)|\, dx, \quad \forall\, T \gg 1. \qquad (21)\end{aligned}$$

注意，我们很容易看出

$$-2p' + 1 + n < 0 \Longleftrightarrow p < \frac{n+1}{(n-1)_+} \quad \text{and} \quad -\sigma p' + n < 0 \Longleftrightarrow p < \frac{n}{(n-\sigma)_+}.$$

令 $T \to \infty$，利用 $\ln T \leq T^{\sigma_{p'-n^2}}$（因为 $p < n/(n-\sigma)_+$）这一事实，并应用勒贝格控制收敛定理，我们得出 国产成人

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_1(x)\, dx \leq 0.$$

这与我们的假设 (6) 矛盾。

• 若 $p > -1/\beta$，即 $p\beta < -1$，则

$$\int_0^T (1+t)^{-\frac{(\beta+1)p}{p-1}}\,dt \le C\,T^{1-\frac{(\beta+1)p}{p-1}}, \qquad \text{for all } T>0.$$

然后，(19)意味着

$$\begin{aligned}&\int_{Q_T} |u|^p\varphi\,dx\,dt + \int_{\mathbb{R}^n} u_1(x)\phi_T(x)\,dx\\ &\le C\,T^{-2p'+1+n} + C\,T^{-(\beta+1)p'-\sigma p'+1+n} + C\left(T^{-\sigma}+T^{-1}\right)\int_{\mathbb{R}^n}|u_0(x)|\,dx,\end{aligned}$$

对所有 $T \gg 1$。由于 $\sigma \ge 1-\beta \Longrightarrow n \le \frac{1-\beta}{1+\beta} \le \frac{\sigma}{2-\sigma}$，我们得出结论：

$$p < \min\left\{\frac{n+1}{(n-1)_+}; \frac{n}{(n-\sigma)_+}\right\} = \frac{n+1}{(n-1)_+} \le \frac{n+1}{(n-\beta-\sigma)_+} \Longrightarrow -(\beta+1)p' - \sigma p' + 1 + n < 0,$$

and

$$p < \min\left\{\frac{n+1}{(n-1)_+}; \frac{n}{(n-\sigma)_+}\right\} = \frac{n+1}{(n-1)_+} \Longleftrightarrow -2p' + 1 + n < 0.$$

注意到 $\sigma \ge 1-\beta > 1$ 和 $2 > \sigma > \sigma+\beta$，因此

$$\begin{cases}(n-\beta-\sigma)_+ = (n-1)_+ = (n-\sigma)_+ = 0, & \text{when } n=1,\\ (n-\beta-\sigma)_+ = n-\beta-\sigma,\ (n-1)_+ = n-1,\ (n-\sigma)_+ = n-\sigma, & \text{when } n \ge 2,\end{cases}$$

令 $T \to \infty$，利用勒贝格控制收敛定理，我们得出结论，即

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_1(x)\,dx \le 0.$$

这与我们的假设（6）矛盾。

临界情形：当 $n=1$ 时，$p < \infty$ and $\sigma \ge 1$；或当 $n \ge 2$ 时，$p = n+1$ $n-1$ and $\sigma > \frac{2}{n}$ n $n+1$。注意，当 $2 \le n < \frac{\sigma}{2-\sigma}$ 时，我们有

$$p = \frac{n+1}{n-1} < \frac{n}{n-\sigma} \quad \text{i.e.} \quad -\sigma p' + n < 0,$$

当 $\sigma \ge 1$ 且 $n=1$ 时，我们还有 $-\sigma p' + n < 0$。
我们需要区分两种情况。

a) 如果 $\beta \ge 0$。在这种情况下，我们有 $\beta p > -1$，因此

$$\int_0^T (1+t)^{-\frac{(\beta+1)\,p}{p-1}}\,dt \le C.$$

从亚临界情形中，我们可以看出我们有

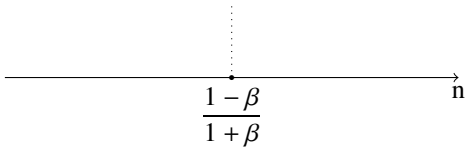
$$u \in L^p((0,\infty); L^p(\mathbb{R}^n)). \tag{22}$$

另一方面，通过应用Hölder不等式而非Young不等式，我们得到

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_1(x)\phi_T(x)\,dx \;\le\; C\left(\int_{\frac{T}{2}}^{T}\int_{\mathbb{R}^n}|u|^p\varphi\,dx\,dt\right)^{1/p} + C\left(\int_0^T\int_{|x|\ge T}|u|^p\varphi\,dx\,dt\right)^{1/p}$$
$$+C\,T^{-\sigma p'+n} + C\left(T^{-\sigma}+T^{-1}\right)\int_{\mathbb{R}^n}|u_0(x)|\,dx.$$

令 T $\longrightarrow\infty$，并考虑到 (22)，我们得到矛盾。

b) 若 $-1<\beta<0$。关于 n，我们分三种情况讨论。



注意，当 n $=1$ 时，我们有 n $=1<\frac{1-\beta}{1+\beta}$。

i) 若 n $>\frac{1-\beta}{1+\beta}$，则

$$p=\frac{n+1}{n-1}<-\frac{1}{\beta},$$

即 βp >-1，按照 a) 部分相同的计算可推出矛盾。ii) 若 n $=\frac{1-\beta}{1+\beta}$，则

$$p=\frac{n+1}{n-1}=-\frac{1}{\beta},$$

即 βp $=-1$，因此

$$\int_0^T(1+t)^{-\frac{(\beta+1)\,p}{p-1}}\,dt\le C\,\ln T,\qquad \text{for all } T>0.$$

由亚临界情形（20）可容易看出

$$u\in L^p((0,\infty);L^p(\mathbb{R}^n)). \tag{23}$$

另一方面，通过应用Hölder不等式而非Young不等式，并利用 p $=$n $+1$n -1，我们得到

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_1(x)\phi_T(x)\,dx \;\le\; C\left(\int_{\frac{T}{2}}^{T}\int_{\mathbb{R}^n}|u|^p\varphi\,dx\,dt\right)^{1/p} + C\left(\int_0^T\int_{|x|\ge T}|u|^p\varphi\,dx\,dt\right)^{1/p}$$
$$+C\,T^{-\sigma p'+n}\ln T + C\left(T^{-\sigma}+T^{-1}\right)\int_{\mathbb{R}^n}|u_0(x)|\,dx.$$

σp′ –n 令 T $\longrightarrow\infty$，并结合（23）以及 ln T $\le$ T 2 这一事实（因为 p $<$n n $-\sigma$），我们得到

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_1(x)\,dx\le 0.$$

这与我们的假设 (6) 矛盾。

iii) 若 $n < \frac{1-\beta}{1+\beta}$，则

$$p = \frac{n+1}{(n-1)} > -\frac{1}{\beta},$$

即 $p\beta < -1$。在这种情况下，我们将测试函数 ψ 替换为 $\psi(t) = \Psi\left(t K^{-1} T\right)$，其中 $K \geq 1$ 与 T 无关。于是

$$\int_0^{K^{-1}T} (1+t)^{-\frac{(\beta+1)p}{p-1}}\, dt \leq C\, K^{-1+(\beta+1)p'}\, T^{1-(\beta+1)p'}, \qquad \text{for all } T > 0.$$

由亚临界情形 (20)，很容易看出

$$u \in L^p((0,\infty); L^p(\mathbb{R}^n)). \tag{24}$$

另一方面，在 (19) 中应用 Hölder不等式而非 Young不等式，可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} u_1(x)\phi_T(x)\, dx \quad \leq \quad & C\, K^{2p'-1}\left(\int_{\frac{K^{-1}T}{2}}^{K^{-1}T}\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p \varphi\, dx\, dt\right)^{1/p} + C\, K^{-1}\left(\int_0^{K^{-1}T}\int_{|x|\geq T} |u|^p\varphi\, dx\, dt\right)^{1/p} \\ & + C\, K^{-1+(\beta+1)p'}\, T^{-(\beta+1)p'-\sigma p'+1+n} + C\left(K^{\sigma}T^{-\sigma} + KT^{-1}\right)\int_{\mathbb{R}^n} |u_0(x)|\, dx.\end{aligned}$$

由于 $\sigma \geq 1-\beta$ 和 $2 > \sigma > \sigma+\beta$，我们得出

$$p = \frac{n+1}{n-1} \leq \frac{n+1}{n-\beta-\sigma} \Longrightarrow -(\beta+1)p' - \sigma p' + 1 + n \leq 0, \quad \text{when } n \geq 2,$$

and

$$-(\beta+1)p' - \sigma p' + 1 + n < 0, \quad \text{when } n = 1,$$

so

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} u_1(x)\phi_T(x)\, dx \quad \leq \quad & C\, K^{2p'-1}\left(\int_{\frac{K^{-1}T}{2}}^{K^{-1}T}\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p \varphi\, dx\, dt\right)^{1/p} + C\, K^{-1}\left(\int_0^{K^{-1}T}\int_{|x|\geq T} |u|^p\varphi\, dx\, dt\right)^{1/p} \\ & + C\, K^{-1+(\beta+1)p'} + C\left(K^{\sigma}T^{-\sigma} + KT^{-1}\right)\int_{\mathbb{R}^n} |u_0(x)|\, dx.\end{aligned}$$

令 $T \longrightarrow \infty$，并考虑到 (24)，可得

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_1(x)\, dx \quad \leq \quad C\, K^{-1+(\beta+1)p'}.$$

令 $K \longrightarrow \infty$，并利用 $p\beta < -1 \Longrightarrow -1 + (\beta+1)p' < 0$，我们推得

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_1(x)\, dx \leq 0.$$

这与我们的假设 (6) 矛盾。

II. 情形： $\sigma < 1-\beta$，对所有 $\beta < 1$。
在此情形下，我们取 $d = \frac{1-\beta}{\sigma} > 1$.

亚临界情形 $p < \min\left(\frac{n(1-\beta)}{n(1-\beta)} + \sigma; \frac{n}{n-\sigma}\right)$。

注意，

$$\int_0^T (1+t)^{-\frac{(\beta+1)p}{p-1}}\, dt \leq C \begin{cases} 1 - \frac{(\beta+1)p}{p-1} & \text{if } \beta p < -1, \\ T & \text{if } \beta p = -1, \\ \ln T & \text{if } \beta p > -1. \\ 1 & \end{cases}$$

我们需要区分两种情况。

a) 若 $0 \le \beta < 1$。在这种情况下，我们有 $\beta p > -1$ 因此

$$\int_0^T (1+t)^{-\frac{(\beta+1)p}{p-1}}\, dt \le C.$$

因此，(19) 意味着

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_T} |u|^p \varphi\, dx\, dt + \int_{\mathbb{R}^n} u_1(x)\phi_{T^d}(x)\, dx \\
&\le C\, T^{-2p'+1+\frac{n(1-\beta)}{\sigma}} + C\, T^{-\frac{2(1-\beta)}{\sigma}p'+1+\frac{n(1-\beta)}{\sigma}} \\
&\quad + C\, T^{-(1-\beta)p'+\frac{n(1-\beta)}{\sigma}} + C\left(T^{-(1-\beta)} + T^{-1}\right) \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(x)|\, dx.
\end{aligned}$$

As

$$\sigma < 1-\beta \Longrightarrow -\frac{2(1-\beta)}{\sigma}p' + 1 + \frac{n(1-\beta)}{\sigma} < -2p' + 1 + \frac{n(1-\beta)}{\sigma},$$

由此我们得出，

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_T} |u|^p \varphi\, dx\, dt + \int_{\mathbb{R}^n} u_1(x)\phi_{T^d}(x)\, dx \\
&\le C\, T^{-2p'+1+\frac{n(1-\beta)}{\sigma}} + C\, T^{(1-\beta)\left[-p'+\frac{n}{\sigma}\right]} + C\left(T^{-(1-\beta)} + T^{-1}\right) \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(x)|\, dx,
\end{aligned}$$

注意，我们可以很容易地看出，

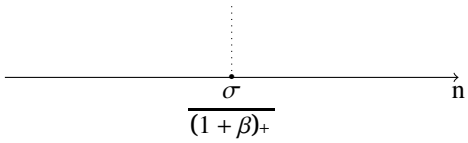
$$(1-\beta)\left[-p' + \frac{n}{\sigma}\right] < 0 \Longleftrightarrow p < \frac{n}{(n-\sigma)_+} \quad \text{and} \quad -2p' + 1 + \frac{n(1-\beta)}{\sigma} < 0 \Longleftrightarrow p < \frac{n(1-\beta)+\sigma}{n(1-\beta)-\sigma}.$$

注意，对于所有 $n \ge 1$，均有 $n(1-\beta) - \sigma \ge 1 - \beta - \sigma > 0$。令 $T \to \infty$，并利用勒贝格控制收敛定理以及 $u_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$，我们得出

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_1(x)\, dx \le 0.$$

这与我们的假设（6）矛盾。

b) 若 $\beta < 0$。对于 n，我们有两种情况。



注意，对于所有 $n \ge 1$，$n(1-\beta) - \sigma \ge 1 - \beta - \sigma > 0$ 和 $\sigma < \beta + 1 < 1 \le n \Longrightarrow n - \sigma > 0$。

i) 如果 $n \ge \sigma$，我们有

$$p < \min\left\{\frac{n(1-\beta)+\sigma}{n(1-\beta)-\sigma}; \frac{n}{n-\sigma}\right\} = \frac{n}{n-\sigma} \le -\frac{1}{\beta},$$

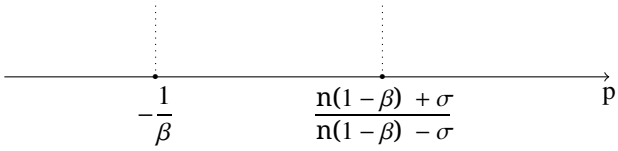
即 $\beta p > -1$，按照 a) 部分的相同计算可得矛盾。ii) 若 $n < \sigma$，则有

$$p < \min\left\{\frac{n(1-\beta)+\sigma}{n(1-\beta)-\sigma}; \frac{n}{n-\sigma}\right\} = \frac{n(1-\beta)+\sigma}{n(1-\beta)-\sigma},$$

and

$$-\frac{1}{\beta} < \frac{n(1-\beta)+\sigma}{n(1-\beta)-\sigma},$$

i.e.



• 若 $p \le -1/\beta$，即 $p\beta \ge -1$，则

$$\int_0^T (1+t)^{-\frac{(\beta+1)p}{p-1}}\,dt \le C\,\ln T, \qquad \text{for all } T \gg 1.$$

由此，(19)可得

$$\begin{aligned}&\int_{Q_T} |u|^p\varphi\,dx\,dt + \int_{\mathbb{R}^n} u_1(x)\phi_{T^d}(x)\,dx\\ &\le C\,T^{-2p'+1+\frac{n(1-\beta)}{\sigma}} + C\,T^{-\frac{2(1-\beta)}{\sigma}p'+1+\frac{n(1-\beta)}{\sigma}}\\ &\quad + C\,T^{-(1-\beta)p'+\frac{n(1-\beta)}{\sigma}}\,\ln T + C\left(T^{-(1-\beta)}+T^{-1}\right)\int_{\mathbb{R}^n}|u_0(x)|\,dx,\end{aligned}$$

对所有 $T \gg 1$ 均成立。
由于

$$\sigma < 1-\beta \Longrightarrow -\frac{2(1-\beta)}{\sigma}p' + 1 + \frac{n(1-\beta)}{\sigma} < -2p' + 1 + \frac{n(1-\beta)}{\sigma},$$

我们得出

$$\begin{aligned}&\int_{Q_T} |u|^p\varphi\,dx\,dt + \int_{\mathbb{R}^n} u_1(x)\phi_{T^d}(x)\,dx\\ &\le C\,T^{-2p'+1+\frac{n(1-\beta)}{\sigma}} + C\,T^{(1-\beta)[-p'+\frac{n}{\sigma}]}\,\ln T + C\left(T^{-(1-\beta)}+T^{-1}\right)\int_{\mathbb{R}^n}|u_0(x)|\,dx,\end{aligned}$$

注意到，我们很容易看出

$$(1-\beta)\left[-p'+\frac{n}{\sigma}\right] < 0 \Longleftrightarrow p < \frac{n}{n-\sigma} \quad \text{and} \quad -2p'+1+\frac{n(1-\beta)}{\sigma} < 0 \Longleftrightarrow p < \frac{n(1-\beta)+\sigma}{n(1-\beta)-\sigma}.$$

令 $T \to \infty$，利用 $\ln T \le T^{(1-\beta)(p'-\frac{n}{\sigma})}$（因为 ~~$p < \frac{n}{n-\sigma}$~~），并应用勒贝格控制收敛定理，可得

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_1(x)\,dx \le 0.$$

这与我们的假设 (6) 矛盾。

• 若 $p > -1/\beta$，即 $p\beta < -1$，则

$$\int_0^T (1+t)^{-\frac{(\beta+1)p}{p-1}}\,dt \le C\,T^{1-\frac{(\beta+1)p}{p-1}}, \qquad \text{for all } T > 0.$$

于是，由（19）可得

$$\begin{aligned}&\int_{Q_T} |u|^p\varphi\,dx\,dt + \int_{\mathbb{R}^n} u_1(x)\phi_{T^d}(x)\,dx\\ &\le C\,T^{-2p'+1+\frac{n(1-\beta)}{\sigma}} + C\,T^{-\frac{2(1-\beta)}{\sigma}p'+1+\frac{n(1-\beta)}{\sigma}} + C\left(T^{-(1-\beta)}+T^{-1}\right)\int_{\mathbb{R}^n}|u_0(x)|\,dx.\end{aligned}$$

As

$$\sigma < 1-\beta \Longrightarrow -\frac{2(1-\beta)}{\sigma}p' + 1 + \frac{n(1-\beta)}{\sigma} < -2p' + 1 + \frac{n(1-\beta)}{\sigma},$$

我们得出

$$\begin{aligned}&\int_{Q_T} |u|^p \varphi \, dx\, dt + \int_{\mathbb{R}^n} u_1(x)\phi_{T^d}(x)\, dx \\ &\leq C\, T^{-2p'+1+\frac{n(1-\beta)}{\sigma}} + C\left(T^{-(1-\beta)} + T^{-1}\right)\int_{\mathbb{R}^n} |u_0(x)|\, dx,\end{aligned}$$

注意到，我们可以很容易地看出

$$-2p' + 1 + \frac{n(1-\beta)}{\sigma} < 0 \Longleftrightarrow p < \frac{n(1-\beta)+\sigma}{n(1-\beta)-\sigma}.$$

令 T $\to \infty$，利用勒贝格控制收敛定理，我们得到

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_1(x)\, dx \leq 0.$$

这与我们的假设（6）矛盾。

Critical case: $p = \dfrac{n(1-\beta)+\sigma}{n(1-\beta)-\sigma}$ and $\sigma > n(1+\beta)$.

注意，当 $n(1+\beta) < \sigma$ 时，我们有

$$p = \frac{n(1-\beta)+\sigma}{n(1-\beta)-\sigma} < \frac{n}{n-\sigma} \quad \text{i.e.} \quad -\sigma p' + n < 0,$$

我们需要区分以下两种情况。

a）如果 $0 \leq \beta < 1$。在这种情况下，我们有 $\beta p > -1$，因此

$$\int_0^T (1+t)^{-\frac{(\beta+1)p}{p-1}}\, dt \leq C.$$

由亚临界情形 (20) 可轻易看出，我们有

$$u \in L^p((0,\infty); L^p(\mathbb{R}^n)). \tag{25}$$

另一方面，用 Hölder不等式代替 Young不等式，由 (19) 可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} u_1(x)\phi_{T^d}(x)\, dx \quad \leq \quad & C\left(\int_{\frac{T}{2}}^T \int_{\mathbb{R}^n} |u|^p \varphi \, dx\, dt\right)^{1/p} + C\left(\int_0^T \int_{|x|\geq T^d} |u|^p \varphi \, dx\, dt\right)^{1/p} \\ & + C\, T^{(1-\beta)\left[-p'+\frac{n}{\sigma}\right]} + C\left(T^{-(1-\beta)} + T^{-1}\right)\int_{\mathbb{R}^n} |u_0(x)|\, dx.\end{aligned}$$

令 T $\longrightarrow \infty$，并考虑到 (25)，我们得到

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_1(x)\, dx \leq 0.$$

这与我们的假设（6）相矛盾。

b) 如果 $\beta < 0$。由于 $\mathrm{n}(1+\beta) < \sigma \Longrightarrow \mathrm{n} < \frac{\sigma}{(1+\beta)_+}$，因此

$$p = \frac{n(1-\beta)+\sigma}{n(1-\beta)-\sigma} > -\frac{1}{\beta},$$

即 $\mathrm{p}\beta < -1$。在这种情况下，我们将测试函数 ψ 替换为 $\psi(\mathrm{t}) = \Psi\left(\mathrm{t}\,\mathrm{K}^{-l}\mathrm{T}\right)$，其中 $\mathrm{K} \geq 1$ 与 T 无关。于是

$$\int_0^{K^{-1}T} (1+t)^{-\frac{(\beta+1)p}{p-1}}\,dt \leq C\,K^{-1+(\beta+1)p'}\,T^{1-(\beta+1)p'}, \qquad \text{for all } T>0.$$

由亚临界情形 (20) 可容易看出，我们有

$$u \in L^p((0,\infty); L^p(\mathbb{R}^n)). \tag{26}$$

另一方面，在 (19) 中应用 Hölder不等式而非 Young不等式，并利用 $\mathrm{p} = \mathrm{n}(1-\beta) + \sigma\,\mathrm{n}(1-\beta) - \sigma$，(19) 蕴含

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_T} |u|^p \varphi\,dx\,dt + \int_{\mathbb{R}^n} u_1(x)\phi_{T^d}(x)\,dx \\
&\leq C\,K^{2p'-1}\left(\int_{\frac{K^{-1}T}{2}}^{K^{-1}T}\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p\varphi\,dx\,dt\right)^{1/p} + C\,K^{-1}\left(\int_0^{K^{-1}T}\int_{|x|\geq T^d} |u|^p\varphi\,dx\,dt\right)^{1/p} \\
&+C\,K^{-1+(\beta+1)p'} + C\left(K^{1-\beta}T^{-(1-\beta)} + KT^{-1}\right)\int_{\mathbb{R}^n} |u_0(x)|\,dx.
\end{aligned}$$

令 $\mathrm{T} \longrightarrow \infty$，并考虑到 (26)，可得

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_1(x)\,dx \leq C\,K^{-1+(\beta+1)p'}.$$

令 $\mathrm{K} \longrightarrow \infty$，并利用 $\mathrm{p}\beta < -1 \Longrightarrow -1+(\beta+1)\mathrm{p}' < 0$，我们推得

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_1(x)\,dx \leq 0.$$

这与我们的假设 (6) 矛盾。

□

致谢

M.K. 衷心感谢 KUST 通过 FSU-2021-015 项目提供的经费支持。A.L. 衷心感谢 KUST 通过 FSU-2021-027 项目提供的经费支持。

参考文献

[1] T. Cazenave 和 A. Haraux《半线性演化问题导论》，Ellipses，巴黎，1990。[2] M. D'Abbicco 和 M. Reissig《半线性结构阻尼波》，数学方法与应用科学，37（2014），1570–1592。[3] L. D'Ambrosio 和 S. Lucente《Grushin 算子和 Tricomi 算子的非线性 Liouville 定理》，微分方程杂志，123（2003），511–541。[4] T. A. Dao 和 A. Z. Fino《带非线性记忆的半线性结构阻尼波模型的爆破解》，数学新闻，（2022），1–14。[5] M. Bonforte 和 J. L. Vázquez《分数阶非线性扩散方程的定量局部与整体先验估计》，数学进展，250（2014），242–284。

[6] A. Z. Fino《外部区域中具有强阻尼的波动方程的有限时爆破》，地中海数学杂志，17（2020），第 6 期，论文编号 174，21 页。[7] A. Z. Fino 和 Hamza, M.A.《具有时变强阻尼的半线性波动方程解的爆破》，《演化方程与控制理论杂志》，doi：10.3934/eect.2022006。[8] A. Fino 和 G. Karch《带分数阶拉普拉斯算子的非线性方程的质量衰减》，J. Monatsh. Math.，160（2010），375–384。[9] A. Z. Fino 和 M. Kirane《时空分数阶演化方程解的定性性质》，J. Quarterly of Applied Mathematics，70（2012），133–157。[10] F. John《三维空间中非线性波动方程解的爆破》，Manuscripta Math.，28（1979），第 1–3 期，235–268。[11] T. Kato《某些非线性双曲型方程解的爆破》，Comp. Pure Appl. Math.，33（1980），501–505。[12] E. Mitidieri 和 S. I. Pohozaev《非线性偏微分方程及不等式的先验估计与解的爆破》，Proc. Steklov. Inst. Math.，234（2001），1–383。[13] L. Silvestre《分数阶幂拉普拉斯算子障碍问题的正则性》，Comm. Pure Appl. Math.，60（2007），第 1 期，67–112。[14] W. A. Strauss《低能下的非线性散射理论》，J. Functional Analysis，41（1981），第 1 期，110–133。[15] Y. Wakasugi《变系数阻尼波动方程的扩散结构》，博士学位论文，大阪大学，2014。[16] B. Yordanov 和 Q.S. Zhang《高维临界波动方程的有限时爆破》，J. Functional Analysis，231（2006），361–374。[17] Qi S. Zhang《带阻尼的非线性波动方程的一个爆破解：临界情形》，C. R. Acad. Sci. 巴黎，333（2001），第 2 期，109–114。[18] Y. Zhou《高维具有临界指数的半线性波动方程解的爆破》，Chin. Ann. Math. Ser. B，28（2007），第 2 期，205–212。[19] A. Pazy《线性算子半群及其在偏微分方程中的应用》，应用数学科学丛书 44，施普林格，纽约，1983。