arXiv:2305.04283v1 [math.DG] 7 May 2023

ALE 向量丛的刚性

法特梅·阿萨迪[1], 佐赫雷·法西[2], 和萨贾德·拉克齐安[3*]

摘要。我们讨论具有渐近锥形（AC）全空间、秩为 $\geqslant 2$ 且带有充分连通链接的向量丛的拓扑刚性；我们的重点主要是 ALE（渐近局部欧几里得）向量丛。在光滑范畴中，我们通过证明仅有 $\mathbb{S}^2$、 $\mathbb{RP}^2$ 和开可缩流形允许存在 ALE 切丛，对所有 ALE 切丛进行了拓扑分类。我们还讨论了 ALE 向量丛其他有趣的拓扑和几何刚性。

1. 引言

渐近锥形（AC）流形通常被认为可以刻画“合理的”开流形$\mathcal{M}$，其曲率衰减渐近地不慢于二次衰减，并且在无穷远处还具有唯一的切度量锥。例如，在曲率衰减渐近快于二次衰减（又称弱渐近平坦性）且具有唯一切度量锥性质的情况下，这一点成立 [39]。仅有后一个条件并不会对 $\mathcal{M}$ 施加任何拓扑限制；然而，在所述条件的更强变体、非负里奇曲率假设以及充分的体积增长共同作用下， $\mathcal{M}$ 的拓扑刚性逐渐显现，并趋于使其成为可缩空间。例如，强渐近平坦性加上强整体性控制意味着 $\mathcal{M}$ 的端是 AC，其链接是球面空间形式上的纤维化[14], ；而曲率衰减快于二次衰减并结合欧几里得体积增长，则意味着 $\mathcal{M}$ 是渐近局部欧几里得（ALE） [6]；在后一种情况下，如果进一步 $\mathcal{M}$ 具有非负里奇曲率，则可以用渐近体积增长的倒数界定其基本群的大小 [33, 3] ；如果该增长超过 Prelman 阈值，则该流形必为可缩的 [38]。

ALE流形是渐近圆锥流形中的一个重要特殊情形，在多个领域中自然出现；它们既作为引力瞬子 [26, 19, 20] ，也作为四维 Ricci 流的奇点模型 [5, 42]。其中一个特殊情形是渐近欧几里得流形，它们是广义相对论中空间模型的主要研究对象。

借助额外结构，可以对渐近圆锥流形进行部分分类。例如，在 Kähler 情形下，渐近圆锥流形具有更强的刚性；事实上， [27], 证明了所有 Kähler ALE 流形均可由一个轨形奇点的变形的解消得到 $\mathbb{C}/G$。此外， $\mathbb{C}^{n+1}$ 中还对所有多项式渐近于超二次曲面（相差一个微分同胚）的 Calabi–Yau 渐近圆锥流形进行了分类 [15]。

我们所关注的额外结构是向量丛结构。向量丛的全空间在拓扑上具有更好的性质，并且比其底空间具备更多结构；这一特点使得它们，尤其是切丛（回想一下，切丛可以通过存在一个全局可积的切向结构来刻画），适合承载许多重要的构造，特别是在渐近圆锥流形的背景下。举几个重要的例子，Eguchi-Hanson度量、Candelas和de la Ossa在三维中的一个度量，以及Stenzel度量 [19, 12, 46]（后者推广了前两者），都是定义在球面的（余）切丛上的构造；而Candelas和de la Ossa构造的另一个重要度量则定义在$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^{\oplus 2}$ [12]上。事实上，正如 [15]中最近所证明的，在复维数高于3时，Stenzel的构造给出了唯一一类关于超二次曲面呈多项式渐近的Ricci平坦Calabi-Yau ALE流形。

[1]阿塞拜疆沙希德·马达尼大学数学系，邮政信箱 53714-161，伊朗大不里士。[2,3]基础科学研究所（IPM）数学学院，邮政信箱 19395-5746，伊朗德黑兰[3]伊斯法罕理工大学（IUT）数学科学系，伊朗伊斯法罕 8415683111电子邮件地址： f_asadi@azaruniv.ac.ir， z.fathi@ipm.ir， slakzian@ipm.ir， slakzian@iut.ac.ir。2020 数学学科分类。主要分类：53Cxx，57Rxx；次要分类：57Nxx，58Axx。关键词与短语。渐近圆锥流形，ALE流形，丛，渐近平坦流形，平坦流形，球面空间形式。*通讯作者。1

本文旨在探讨渐近圆锥向量丛的主要拓扑刚性，重点关注ALE丛，尤其是切丛——它们既是向量丛的原型，也是承载近复结构的开流形的原型；作为应用，我们还将利用这些拓扑刚性，推导有关黎曼度量的一些几何刚性性质。本文的一个主要方面是ALE切丛的拓扑分类，以及关于ALE丛的若干不存在性定理。

~1.1. **设定与记号**。在这些笔记中，Z 表示 Z的普遍覆盖空间。除非另有说明，所有出现的空间都是光滑流形，而作用于其上的群均为微分同胚群的离散自由作用子群。

1.1.1. 渐近圆锥流形。我们将考虑以下渐近圆锥空间。

定义 1.1（渐近圆锥流形）。

(1) **拓扑渐近锥：**如果存在一个紧子集 $\mathcal{K} \Subset \mathcal{M}$ 以及流形 $\mathcal{N}_j^{n-1}$, $j = 1, \cdots, m$，使得 $\mathcal{M} \setminus \mathcal{K}$ 是不相交的端 $\mathcal{M}_j$的并集，且每个端都通过同胚 φ 的限制映射与一个具有链路 $\mathcal{N}_j$的去心锥同胚，则称流形 $\mathcal{M}^n$ 是拓扑渐近锥形的（top-AC）。特别地，对于任意 $p_j \in \mathcal{M}_j$，定义坐标 x_j，其定义方式为 $\varphi^{-1}(p_j) = (x_j, q_j)$，其中 $q_j \in \mathcal{N}_j$。我们进一步假设，x_j的增大意味着沿端向更远处延伸；也就是说，如果对于某个开集 U 和紧集 $\mathcal{K}'$，有 $\mathcal{K} \Subset U \subset \mathcal{K}'$，那么 x_j 在 $\mathcal{M} \setminus \mathcal{K}'$ 上的取值严格大于其在 $\mathcal{M} \setminus \mathcal{K}$ 上的取值。

(2) **微分渐近锥：** $\mathcal{M}$ 由条目 (1) 定义，若其端部通过微分同胚 φ 的限制与上述锥微分同胚，则称为微分渐近锥。

(3) **黎曼渐近锥：**设 $\mathcal{M}$ 是一个微分渐近锥，且在 $\mathcal{N}_j$ 上给定度量 $g_{\mathcal{N}_j}$，其对应的锥度量为 $\widehat{g}_j := dx_j^2 + x_j^2 g_{\mathcal{N}_j}$（因此，$x_j$ 现在表示到顶点的距离）。若黎曼流形 $(\mathcal{M}, g)$ 在端部 $\mathcal{M}_j$, g_j 上的度量限制具有形式 $\varphi^* g_j = \widehat{g}_j + o(1)$，则称其为黎曼渐近锥形流形。有时还要求 g_j 上具有衰减率 $\tau_j > 0$，且直到 d_j 阶导数均满足该要求；这意味着要求加权 Sobolev 范数衰减

$$\sum_{\ell=0}^{d_j} x_j^l \|\nabla_{\widehat{g}_j}^{\ell} (\varphi^* g_j - \widehat{g}_j)\|_{\bar{g}_j} = O(x_j^{-\tau_j}), \quad \text{as} \quad x_j \to \infty,$$

定义 1.2。

(1) 若对所有 j、$\mathcal{N}_j = \widetilde{\mathcal{N}}_j/\Gamma_j$，均存在一个有限的自由作用 $\widetilde{\ }$ 子群 $\Gamma_j \leqslant \mathrm{Diff}(\mathcal{N}_j)$，则称拓扑渐近锥流形 $\mathcal{M}$ 为简单的。类似地，可以定义简单的微分渐近锥流形和黎曼渐近锥形流形。对于~后一种情形，假设 $\Gamma_j \leqslant \mathrm{Isom}(\mathcal{N}_j)$。(2) 若简单的拓扑渐近锥流形（微分渐近锥流形或黎曼渐近锥形流形）中的群 Γ_j 均保持定向，则称其为正规的 拓扑渐近锥流形（微分渐近锥流形或黎曼渐近锥形流形）。

一种特殊情况是，当 $\mathcal{M}$ 是简单的且 $\widetilde{\mathcal{N}}_j$ 是 $\mathbb{S}^{n-1}$（在同胚、微分同胚（非奇异结构）意义下，或还配备标准度量）；此时，我们得到拓扑渐近局部欧几里得（微分渐近局部欧几里得和黎曼渐近局部欧几里得）流形的定义。此外，允许奇异球面后，也可定义奇异微分渐近局部欧几里得流形。类似地，可以定义复渐近局部欧几里得流形，其端与商 $\mathbb{C}^*$ 微分同胚，其中商群由 $\mathrm{U}(n)$（对于适当的情形则由 $\mathrm{SU}(n)$）的有限自由作用子群给出。

值得注意的是，在许多文献中，渐近局部欧几里得 流形指的是适当的 黎曼渐近局部欧几里得流形。

定义 1.3。若一个单端拓扑渐近锥形流形 $\mathcal{M}$ 上的同胚 φ 可延拓至 $\partial\mathcal{K}$，则称其为“正则”；特别地，黎曼渐近锥形流形总可以假设为正则的（或许通过取一个更大的 $\mathcal{K}$）。

定义 1.4. 当允许 $\mathcal{K}$ 为 σ-紧，且 $\mathcal{M} \setminus \mathcal{K}$ 由可数多个连通分支组成时，$\mathcal{M}$ 称为 σ-AC 流形（带有拓扑、微分和黎曼变体）。

当 $\mathcal{M}$ 是只有一个端的拓扑渐近锥时，端 $\mathcal{M} \setminus \mathcal{K}$ 的基本群为 Γ，它与$\pi_1(\mathcal{N})$一致；这也就是无穷远基本群，因此记作 $\pi_1^{\infty}(\mathcal{M})$。

1.1.2. 丛。 在本文中， $\mathcal{E}^{r\geqslant 2}$ 表示秩为 $r\geqslant 2$ 的向量丛。我们注意到一个简单却关键的事实：“任何秩为 $\geqslant 2$ 的向量丛都只有一个端，特别是 $\mathcal{TM}^n$ 在 $n\geqslant 2$时只有一个端。”

此外，我们假设 $\mathcal{M}^n$ 是一个具有 $n\geqslant 2$ 的无边界流形，因此，所有定义在 $\mathcal{M}$ 上的向量丛 $\mathcal{E}$ 的全空间也具有相同性质。

给定一个纤维丛 $\mathcal{F}$ ——这里稍微宽泛地使用了这一术语——我们将用 $\mathcal{F}$ 同时表示该丛本身及其作为拓扑空间的全空间。

我们始终假设 $\mathcal{E}$ 具有有限基本群。 $\mathcal{E}_{\text{slit}}$ 表示去零截面丛，即从丛中去掉零截面后得到的空间。

1.1.3. 渐近平坦性与整体性控制性质。

定义 1.5. 设 $(\mathcal{M},g)$ 是一个完备开流形。

(1) 如果对于某个（因而对于所有） $p\in\mathcal{M}$， $\mathcal{M}$ 被称为“弱渐近平坦”，则称其为“弱渐近平坦”。

$$\limsup_{r\to\infty}\left\{\|\mathrm{Rm}\|(x),r^2\right\}=0,$$

其中 $r:=d(x、p)$，即 $\mathcal{M}$ 在渐近意义下具有快于二次的曲率衰减；

(2) $\mathcal{M}$ 被称为“强渐近平坦”，如果对于任意 $p\in\mathcal{M}$， $\|\mathrm{Rm}\|(x)\leqslant\Lambda^{(r)}/r^2$，以及一个非递增的正函数 Λ，满足 $\int_1^\infty\Lambda^{(s)}/s\,ds<\infty$，即 $\mathcal{M}$，其渐近曲率衰减以受控方式快于二次。

研究这些条件的一个主要参考文献是 [1]。

定义 1.6 （强整体性控制 [14]）。令 $\Delta\Theta(\gamma)$ 表示黎曼流形 $(\mathcal{M},g)$ 中沿测地线闭路 γ （向量与其沿 γ 的平行移动之间的夹角）的旋转角。若存在一个紧集 $\mathcal{K}$ 和一个正函数 $\varepsilon(r)$，满足 $\varepsilon(r)\downarrow 0$，其中 $r\downarrow 0$，使得对于任意以 x 为基点且长度为 $\leqslant\kappa l$ 的测地线闭路，均有 $\|\Delta\Theta\|\leqslant\varepsilon(l)$，则称 $(\mathcal{M},g)$ 在尺度 κ 下满足强整体性控制。

1.2. **主要结果术语表**。

1.2.1. 拓扑学备注。

定理 1.7. 假设 $\mathcal{E}^r$ 是带有链接 $\mathcal{N}$ 的拓扑渐近锥，且 $\mathcal{N}$ 是 k-连通的；此外，假设 $n-1\leqslant(r-1)\wedge k$ 成立。那么

(1) 如果 $\mathcal{M}^n$ 是闭的，那么 $\widetilde{\mathcal{M}}$ 就是 n-球面；该链接在同伦等价意义下是一个 $\mathbb{S}^{r-1}$-丛，其基空间为 $\mathbb{S}^n$。 *(2)* 如果 $\mathcal{M}^n$ 是开的，那么它必定是一个可缩开流形；在这种情况下， $\mathcal{N}$ 是一个 $(n+r-1)$-球面，并且 $\mathcal{E}\cong\mathbb{R}^{n+r}$。微分同胚

推论 1.8。 设 $\mathcal{E}^r$ 是一个位于开流形 $\mathcal{M}^n$ 上的top-ALE 向量丛，则 $\mathcal{M}$ 是可缩的，因此 $\mathcal{E}$ 是平凡的，从而是一个top-AE。

定理 1.9。 假设 $\mathcal{E}^r$ 是一个建立在闭 $\mathcal{M}^n$ 上的 top-ALE 向量丛，则

(1) $\mathcal{E}_{\text{slit}}$ 具有非零欧拉类；因此，若 $\mathcal{E}$ 是可定向丛，则 $\mathcal{E}_{\text{slit}}$ 也具有非零欧拉类； *(2)* 若 $r\geqslant n$，则 $\mathcal{M}=\mathbb{S}^n$ 和 $n=r$； *(a)* 若另外 $\pi_1(\mathcal{M})=\pi_1(\mathcal{N})$，则 $n=r=2,\ 4,\ 8$；

(b) 若另外， $\mathcal{E}=\bar{\mathrm{p}}^*\mathcal{E}$ 的链接对于某个正规覆盖 $\bar{\mathrm{p}}:\ \mathcal{M}\to\mathcal{M}$而言是一个 H-空间，则 $n=r=4$；

推论 1.10。设 $\mathcal{TM}^n$ 是top-ALE ，则

(1) 若 $\mathcal{M}$ 是闭的， $n=2$ 和 $\widetilde{\mathcal{M}}=\mathbb{S}^2$，且 $\widetilde{\mathcal{E}}$ 的链接为 $\mathbb{RP}^2$； *(2)* 若 $\mathcal{M}$ 是开的，则 $\mathcal{M}$ 是一个开可缩流形，因此， $\mathcal{T}M\underset{\text{homeo}}{\cong}\mathbb{R}^{2n}$ （$\overset{\cong}{\underset{\text{diffeo}}{}}$ 当 $n\neq 2$时）。

定理 1.11。 假设 $\mathcal{E}^2$ 是一个适当的 top-ALE向量丛，其底空间是一个第二斯蒂费尔–惠特尼类消失的开可定向自旋 *4*-流形 $\mathcal{M}$，那么 $\mathcal{M}$ 要么是单连通的，要么其基本群属于命题 *2.10*中所列的类型。特别地，不存在定义在基本群为偶阶的自旋 $\mathcal{E}^2$ 上的自旋$\mathcal{M}^4$ 。

1.2.2. 几何评注。

定理 1.12 (非负曲率)。

(1) 假设 $(\mathcal{M}^n, g)$ 是开且完备的，并且是 top-ALE，具有 $sec \geqslant 0$，且有一个余维为 r、满足 $\lfloor n/2 \rfloor + 1 \leqslant r \leqslant n-2$, 的非平凡 ***soul***，那么 n 为偶数，且 $= 2r$，并且该 ***soul*** 同胚于 $\mathbb{S}^r$ 的一个商。~*(2)* 假设 $\mathcal{E}^r$ 是闭 $\mathcal{M}^n$ 上的 拓扑渐近锥，且 $\mathcal{N}$ 是 k-连通的，并满足 $n-1 \leqslant (r-1) \wedge k$。如果 $\mathcal{E}$ 或 $\mathcal{M}$ 存在具有渐近增长 $v_0 > 1/m$，的完备非负 ***Ricci*** 曲率度量，那么 $\mathcal{M} = \mathbb{S}^n/\Gamma$，其中 $|\Gamma| < m$；*(3)* 设 $\mathcal{E}^{r\geqslant 3}$ 是开 $\mathcal{M}^3$ 上的一个 拓扑渐近锥 丛，$\widetilde{\mathcal{N}}$ 对于 $k \geqslant 2$ 是 k-连通的，并假设 $\mathcal{M}$ 存在非负标量曲率的完备度量。那么 $\mathcal{M} \underset{\text{diffeo}}{\cong} \mathbb{R}^3$。

定理 1.13 （渐近平坦性）。 假设 $(\mathcal{E}^r, g)$ 满足 $r \geqslant n$

(1) 是弱渐近平坦的，且在无穷远处具有唯一的切锥度量（特别是，若其满足强渐近平坦性），并且 $\mathcal{E}_{\mathsf{slit}}$ 的 π_i 对 $2 \leqslant i \leqslant n-1$消失；或者，*(2)* 是强渐近平坦的，且在尺度 $\kappa \in (0下，\ 1/2)$ 具有强全纯性控制，并且$b_1(\mathcal{E}_{\mathsf{slit}}) = 0$ （第一贝蒂数为零）；

那么， M 要么是微分球面空间形式，要么是开可缩流形。在情形 *(2)* 中， $\mathcal{E}$ 也是top-ALE。

以下结果讨论由度量 g 构造于 $\mathcal{M}$上的丛上的特殊度量；关于以下度量的精确定义，请参见 §3.3。

• “联络度量”: 丛 $\mathcal{E}$ 上的度量 g_{cm}，由给定的纤维度量 $g_{\mathcal{E}}$、与 g_{ε} 相容的联络 $\nabla^{\mathcal{E}}$ 以及 $\mathbb{R}^r$上的旋转对称度量 g_0 构造而成；其丛映射成为具有全测地纤维的黎曼浸没 $\underset{\text{isom}}{\cong} (\mathbb{R}^r,\ g_0)$; • “自然度量”: 切丛 g_{nat} 上的度量，它们是解耦的，并使切丛成为黎曼浸没；• “可容许度量”: 切丛 g_{ad} 上的度量，是解耦度量，利用给定仿射联络 ∇ 的提升来定义，且其垂直部分具有特殊形式（3.2）。

定理 1.14 （特殊度量）。

(1) 若 $(\mathcal{E},\ g_{\mathsf{cm}})$ 是黎曼渐近局部欧几里得，则 $(\mathcal{M},\ g)$ 是平坦的，且 $\nabla^{\mathcal{E}}$ 是仿射平坦丛联络。

(2) 若 $(\mathcal{T}\mathcal{M},\ g_{\mathsf{nat}})$ 是黎曼渐近局部欧几里得，则 $(\mathcal{M},\ g)$ 是平坦的；*(3)* 若 $(\mathcal{T}\mathcal{M},\ g_{\mathsf{ad}})$ 是黎曼渐近局部欧几里得，则 ∇ 是仿射平坦联络。

在上述所有情形中， $\mathcal{M}$ 是开且可缩的；此外，若 $\mathcal{M}$ 是 ∇-测地完备的（前两种情形中， ∇ 是 *Levi-Civita* 联络），则 $\mathcal{M} \underset{\text{diffeo}}{\cong} \mathbb{R}^n$。

~**注 1.15.** 存在复合怀特黑德流形 $\mathcal{M}$，其无限覆盖一个开~流形 $\mathcal{M}$。因此， $\mathcal{E}$ 是 top-AE，而 $\mathcal{E}$ 不是 top-ALE。特别地， $\pi_1(\mathcal{M})$ 没有挠元，也没有有限指数子群 [47]。

致谢

▪ FA 部分获得科学部资助，以访问 IUT。▪ SL 感谢获得*Kazemi Ashtiani* 早期职业奖 的部分资助，以及来自*IPM*，资助编号 *1402530316*的驻地研究员资助的部分支持。▪ ZF 部分获得来自*IPM*，资助编号 *1402530045*的非驻地研究员资助。

2. 拓扑刚性

$\mathcal{M}$ 上的向量丛比 $\mathcal{M}$ 遭遇的拓扑（或几何）异常少。事实上，闭流形上所有秩为 $\geqslant 2$ 的丛都具有拓扑渐近锥端结构；即使知道 $\mathcal{E}$的黎曼渐近圆柱端信息，通常也无法确定 $\mathcal{M}$的拓扑结构和微分结构。为说明这一点，我们先来看一些或多或少广为人知的切丛例子，它们是向量丛的原型。

2.1. **函子 $\mathcal{T}$ 下原像的复杂性**。

例 1.（具有微分同胚欧几里得切丛的不同同胚类型）设$\mathcal{W}^n\,(n\geqslant 3)$ 是任意一个开可缩流形，那么 $\mathcal{TW}$ 是平凡丛，因此必与 $\mathbb{R}^{2n}$ [34]同胚，因而也与 $\mathbb{R}^{2n}$微分同胚。由 [35, 17, 21], 可知，存在不可数多个拓扑上不同的开可缩流形 $\mathcal{W}^n$，其中 $n\geqslant 3$。

例 2.（同胚但不同胚，且具有相同的欧几里得切丛）一个其切丛仍然平凡且与 $\mathbb{R}^8$ 微分同胚的奇异 $\mathbb{R}^4$。

例 3.（透镜空间）切丛微分同胚但不同胚的闭流形的例子，包括任意两个满足以下条件的三维透镜空间 $L(p、q_1)$ 和 $L(p、q_2)$：

$$\pm q_1q_2\equiv n^2\pmod p,\quad q_1\not\equiv\pm q_2^{\pm1}\pmod p.$$

它们具有相同的同伦型 [50], ，因此它们与 $\mathbb{R}^3$ 的乘积（回想一下，这三个流形都是平行化的）彼此微分同胚 [36], ，但它们并不同胚 [9]。

2.2. **同伦刻画**。

引理 2.1.

(1) 假设 $\mathcal{E}^{r\geqslant 2}$（在流形 $\mathcal{M}^n$ 上）是具有端部 $\mathbb{R}^+\times\mathcal{N}$ 的拓扑渐近锥，则对所有 $1\leqslant m<r$, $\pi_m(\mathcal{M})\leqslant\pi_m(\mathcal{N})$；*(2)* $\mathcal{E}^{r\geqslant 2}$ 裂缝变形收缩到 $\mathcal{N}$；因此，链接在同伦等价意义下唯一；*(3)* 每个紧致 $\mathcal{M}^n$ 上的向量丛 $\mathcal{E}^{r\geqslant 2}$ 都是正则拓扑渐近锥，其链接在同伦等价意义下唯一，并且是 $\mathcal{M}^n$ 上的一个 $\mathbb{S}^{r-1}$-丛。

证明。

(1) 设 $f\colon\mathbb{S}^m\to\mathcal{E}$ 是一个以点 $p=(x$ 为基点的连续映射，$q)$ 位于 $\mathcal{E}\smallsetminus\mathcal{K}$ 中，其中 $q\in\mathcal{N}$。只需将 f 通过保持基点的同伦变形为一个像包含于 $\{q\}\times\mathcal{N}$ 的映射。证明分为四步：

(i)（光滑逼近）注意到，根据逼近定理，为了计算流形的同伦群，我们可以使用从 $\mathbb{S}^m$ 到 $\mathcal{E}$ 的光滑定点映射之间的光滑同伦；例如参见 [8, 推论 17.8.1]。因此，我们假设 f 是光滑的，且对于基点 $a\in\mathbb{S}^m$，$f(a)=p$。

(ii)（局部横截化）由于

$$\dim(\mathcal{M})+m=m+n<n+r=\dim(\mathcal{E}),$$

又由于存在 $a\in\mathbb{S}^m$ 的一个开邻域 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{M}$ 的一个开邻域 $\mathcal{W}$，使得 $f(U)\subset\mathcal{E}\smallsetminus\mathcal{W}$，根据横截性定理（例如 [28, 定理 2.1]），我们¯ ¯可以通过光滑的基同伦将 f 变为一个映射 f，使得 $f\pitchfork_{\mathbb{S}^m}\mathcal{M}$（即沿着 $\mathbb{S}^m$ 横截于 $\mathcal{M}^-$）。考虑到维数差，这意味着 f 的像与$\mathcal{M}$ 不相交（这正是微分拓扑中通常用来将几何上不横截的对象彼此分开的方法）。关于如何在开集之外进行这种横截化的更多细节，参见 [22, 推论 4.1.2(b)]。

(iii)（截断膨胀）考虑 $a\in\mathbb{S}^m$ 的一个开邻域 $\mathcal{V}$，满足 $f(\mathcal{V})\subset\mathcal{E}\smallsetminus\mathcal{K}$。令$0\leqslant\varphi\leqslant 1$ 为定义在 $\mathbb{S}^m$ 上的光滑截断函数，满足 $\varphi(a)=1$ 且 $\operatorname{supp}(\varphi)\subset\mathcal{V}$。令 Ψ_χ^t 表示 $\mathcal{E}$ 的欧拉向量场 χ 所生成的流，则

$$\lambda\mapsto f_\lambda:=\Psi_\chi^{\lambda(1-\varphi(\cdot))}(f(\cdot))\colon\mathbb{S}^m\to\mathcal{E},$$

是一个光滑的 f 同伦，它保持 V 的像不变；特别地，这是一个基点同伦。由于 f 的像与 $\mathcal{M}$ 不相交，由 $\mathcal{K}$ 的紧致性可知，当 λ 充分大时，$\operatorname{Im}(f_\lambda)\subset\mathcal{E}\smallsetminus\mathcal{K}$。

(iv)（径向收缩）现在，由于 $\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{E}\smallsetminus\mathcal{K}$ 的变形收缩，通过收缩径向锥纤维，我们得到一个像包含于 $\mathcal{N}$ 的映射。

步骤 I–III 为我们提供了所需的基点同伦。这表明对所有 $m<r$，$\pi_m(\mathcal{E})\leqslant\pi_m(\mathcal{N})$。

(2) 证明可由与条目（1）类似的膨胀和径向收缩得到。

(3) 通常可以在 $\mathcal{E}$ 上选取一个纤维度量。于是， $\mathcal{E}_{\mathsf{slit}}$ 与 $\mathbb{R}^{+}\times\mathcal{N}$ 微分同胚，其中 $\mathcal{N}$ 是相对于该纤维度量的单位球面丛。由于取 $\mathcal{K}$ 为相对于所选纤维度量的圆盘丛， $\mathcal{E}\smallsetminus\mathcal{K}$ 又是一个以 $\mathcal{N}$ 为链接的拓扑去心锥，而且这次该同胚可延拓至 $\partial\mathcal{K}$，因此 $\mathcal{E}$ 甚至是正则的。

❑

命题 2.2 (周期性)。 假设 $\mathcal{E}^{r\geqslant 2}$ 是一个拓扑渐近锥，其链接 $\mathcal{N}$ 的高阶同伦群（从 π_5 开始）与 $\mathbb{S}^{\ell}$相同。那么，

$$\pi_{\ell+4}\left(\mathcal{M}^{n}\right)=\pi_{\ell+4}\left(\mathbb{S}^{r-1}\right),\quad whenever\quad \ell\geqslant 7;$$

特别地，对于所有top-ALE丛 $\mathcal{E}^{r\geqslant 2}$,

$$\pi_{n+r+3}\left(\mathcal{M}^{n}\right)=\pi_{n+r+3}\left(\mathbb{S}^{r-1}\right),\quad whenever\quad n+r\geqslant 8.$$

证明. 假设 $\pi_m(\mathcal{N})=\pi_{m+1}(\mathcal{N})=0$。由同伦长正合列，对于纤维化$\mathbb{R}^{r*}\hookrightarrow\mathcal{E}_{\mathsf{slit}}\to\mathcal{M}$，我们得到正合序列

$$\cdots\to\pi_{m+1}\left(\mathcal{E}_{\mathsf{slit}}\right)\to\pi_m\left(\mathbb{R}^{r*}\right)\to\pi_m(\mathcal{M})\to\pi_m\left(\mathcal{E}_{\mathsf{slit}}\right)\to\cdots.$$

由引理 2.1， $\pi_k\left(\mathcal{E}_{\mathsf{slit}}\right)=\pi_k\left(\mathcal{N}\right)$ 对所有 k均成立；特别地 $\pi_{m+1}\left(\mathcal{E}_{\mathsf{slit}}\right)=\pi_m\left(\mathcal{E}_{\mathsf{slit}}\right)=0$。这意味着 $\pi_m(\mathcal{M})=\pi_m(\mathbb{R}^{r*})=\pi_m(\mathbb{S}^{r-1})$。

现在，利用 Frudehnthal 悬挂定理和低维球面同伦群（或者将 Frudehnthal 悬挂定理与稳定同伦群列表结合起来；例如参见 [29]），我们知道 $\pi_{l+4}(\mathbb{S}^{\ell})=\pi_{l+5}(\mathbb{S}^{\ell})=0$。❑

$\sim$定理 1.7 的证明。假设 $\mathcal{M}^n$ 是闭的。由引理 2.1 可知， $\pi_1(\mathcal{M})$ 是有限的，且 M 是 $\sim$ $\sim(n-1)$-连通的。由 Hurewicz 定理， $\pi_n(\mathcal{M})\equiv H_n(\mathcal{M})=\mathbb{Z}$。现在考虑连续的$\widetilde{}$映射 $f:\mathbb{S}^n\to\mathcal{M}$ ，它诱导出第 n 个同伦类。这个映射显然在所有同调群上都诱导出同构，因此由 Hurewicz 定理（需要单连通性），它是一个弱同伦$\widetilde{}$等价；进而由 Whitehead 定理，它也是一个同伦等价。因此， $\mathcal{M}$ 是一个拓扑 n-球面。特别地， $\widetilde{\mathcal{E}}^{r\geqslant 2}$ 是 $\mathbb{S}^n$ 上的拓扑渐近锥向量丛，并且由引理 2.1 可知，链接在同伦意义下是一个 $\mathbb{S}^n$上的 $\mathbb{S}^{r-1}$-丛。

$\widetilde{}$如果 $\mathcal{M}$ 是开的，那么根据 $(n-1)$ 含量条件和开性，可以推知 $\mathcal{M}$ 具有平凡同调。因此，再由 Hurewicz 定理可知， $\widetilde{\mathcal{M}}$ 也具有平凡的同伦群 $\pi_i\left(\widetilde{\mathcal{M}}\right)$，其中 $i=1$、$\cdots$、n均成立。所以$\widetilde{}$再次根据 Whitehead 定理， $\mathcal{M}$ 中一点的包含映射是一个同伦等价，即 $\mathcal{M}$ 是可缩的。根据[52, 引理 2，2],开可缩流形不可能以非平凡且有限的方式覆盖另一个流形。因此， $\mathcal{M}$ 本身是可缩的。

因此， $\mathcal{E}^{r\geqslant 2}$ 与 $\mathcal{M}\times\mathbb{R}^r$ 微分同胚，并且根据 [34], ，它与 $n+r\neq 4$）同胚（若 $\mathbb{R}^{n+r}$，则也微分同胚）。因此，该链接是一个同伦球面，从而是一个拓扑球面（根据上一段中的论证）；由引理 2.1 可知， $\mathcal{E}^{r\geqslant 2}$ 的链接与 $\mathbb{S}^{n+r-1}$同胚。❑

对于偶数维闭 $\mathcal{M}$，我们可以得到更强的结论。

定理 2.3. 设 $\mathcal{E}^{r\geqslant 2}$ 是闭 $\mathcal{M}^{2n}$ 上的一个向量丛，其链接为 $\mathcal{N}$，且 $\widetilde{\mathcal{N}}$ 是 k-连通的，带有 $n\leqslant(r\sim-1)\wedge k$。则 $\mathcal{M}$ 是 $2n$-球面。

证明。Whitehead 定理的一个推论是：具有给定有限生成同调群的流形具有最小细胞结构；例如，参见 [25, 命题 4.C.1]。一个著名的推论是，一个 $(n-1)$-连通的闭单连通流形 $\widetilde{M}^{2n}$ 具有如下同伦类型：一个 $2n$ 维圆盘通过附着映射 f 附着到由 b_n 个 2-球面组成的楔和上，其中 b_n 是第 n 个贝蒂数的 $b_n=$秩(H_n)；综述请参见 [37] 。

因此，根据假设，我们推得 $\widetilde{\mathcal{M}}^{2n}$ 是一个 n-连通空间，因此具有一个 $2n$-圆盘的同伦型，$\widetilde{}$其边界粘合到一个点上；因此 $\mathcal{M}$ 具有 $2n$-球面的同伦型，故同胚于 $\mathbb{S}^{2n}$。❑

2.3. **覆盖**。假设 $\mathcal{E}^{r\geqslant 2}$ 是具有链接 $\mathcal{N}$ 的拓扑渐近锥，且 $\bar{\mathrm{p}}\colon \overline{\mathcal{M}} \to \mathcal{M}$ 是一个覆盖。那么，可以将 $\mathcal{E}$ 等变地提升为 $\bar{\mathcal{E}}^{r\geqslant 2}$ 上的一个向量丛，该向量丛定义在 $\overline{M}$ 上，即 $\bar{\mathcal{E}} = \bar{\mathrm{p}}^*\mathcal{E}$。

命题 2.4。设 $\bar{\mathrm{p}}\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 是一个正规覆盖

(1) 若 $\mathcal{M}$ 是一个简单的拓扑渐近锥，则 $\mathcal{M}$ 是一个简单的 σ-拓扑渐近锥。若该覆盖是有限的，则 $\bar{p}^{-1}(\mathcal{M}\setminus\mathcal{K})$ 的每个连通分支 $\bar{\mathcal{C}}_{\alpha j}$ 都是一个简单的拓扑渐近锥端，$\mathbb{R}^+\times\mathcal{N}_j/\bar{\Gamma}_{\alpha j}$ 它覆盖 $\mathcal{M}$ 的拓扑渐近锥端 $\mathcal{M}_j = \mathbb{R}^+\times\mathcal{N}_j/\Gamma_j$，并且我们有 $\bar{\Gamma}_{\alpha j}\trianglelefteq\Gamma_j$。*(2)* 若 $\mathcal{E}$ 是紧致 $\mathcal{M}$ 上的向量丛，且 $\bar{p}$ 是有限覆盖，则作为一个位于 $\mathcal{M}$ 上的纤维化，$\bar{\mathcal{N}}$ 在同伦等价意义下是 $\mathcal{N}$ 经覆盖 $\bar{p}$ 的提升（或拉回丛）；特别地，$\bar{p}$ 的甲板变换群满足 $\bar{\mathcal{G}} = \pi_1^\infty(\mathcal{E})/\pi_1^\infty(\bar{\mathcal{E}})$。*(3)* 一般而言，若 $\bar{p}$ 是有限覆盖，则 $\mathcal{E}$ 是简单的拓扑渐近锥，当且仅当 $\mathcal{E}$ 也是简单的拓扑渐近锥；此外，$\bar{\mathcal{G}} = \pi_1^\infty(\mathcal{E})/\pi_1^\infty(\bar{\mathcal{E}})$ 成立。*(4)* 因此，假设 $\pi_1(\mathcal{M})$ 是有限的，则 $\mathcal{E}$ 是简单的拓扑渐近锥，当且仅当 $\mathcal{E}$ 也是简单的拓扑渐近锥，且 $\pi_1(\mathcal{M}) = \pi_1^\infty(\mathcal{E})/\pi_1^\infty(\tilde{\mathcal{E}})$ 成立。

注意 *t hat*，在光滑范畴中，将 diff-AC 替换为 拓扑渐近锥后，同样的结论仍然成立 .

证明。

(1) 假设 $\mathcal{K}\Subset\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{M}_j$ 是一个拓扑渐近锥端。令 $\bar{\mathcal{K}} := \bar{\mathrm{p}}^{-1}(\mathcal{K})$。根据路径提升性质、提升的唯一性以及正规覆盖的定义，可以推出，$\bar{\mathrm{p}}^{-1}(\mathcal{M}_j)$ 的每个路径连通分支 $\overline{\mathcal{M}}_{\alpha j}$ 都是 $\mathcal{M}_j$ 的正规覆盖，其覆盖变换群为 $\bar{\mathcal{G}}_j^\alpha\trianglelefteq\bar{\mathcal{G}}$。由于任意流形的基本群都是可数的，我们推得 $\mathcal{K}$ 是 σ-紧的。因此，

$$\bar{G}_j^\alpha = \pi_1(\mathcal{M}_j)/\bar{\mathrm{p}}_*\pi_1(\overline{\mathcal{M}}_j^\alpha), \quad \text{and} \quad \mathcal{G} = \pi_1(\mathcal{M})/\bar{\mathrm{p}}_*\,\pi_1(\overline{\mathcal{M}}).$$

端的任意正规覆盖 $\mathbb{R}^+\times\mathcal{N}_j/\Gamma_j$ 本身都被普遍覆盖所覆盖，即 $\mathbb{R}^+\times\mathcal{N}_j$从而 $\overline{\mathcal{M}}_{\alpha j} = \mathbb{R}^+\times\mathcal{N}_j/\bar{\Gamma}_{\alpha j}$ 且 $\bar{\Gamma}_{\alpha j}\trianglelefteq\Gamma_j$ 由正规覆盖的标准性质可得；例如参见 [25,命题 1。40]以了解更多细节。

当覆盖是有限的，$\mathcal{K}$ 也是紧的，因此 $\mathcal{M}$ 成为一个简单的拓扑渐近锥。

(2) 在 $\mathcal{E}$ 上选取一个所有度量的纤维球面丛，也是 $\mathcal{N}$ 在覆盖映射 $\bar{\mathrm{p}}$ 下的提升。链接意味着 $\mathcal{N}$ 可与轨道空间 $\bar{\mathcal{N}}/\bar{\mathcal{G}}$ 等同，我们有正规覆盖$\bar{\mathcal{N}}\to\bar{\mathcal{N}}/\bar{\mathcal{G}}$。由此可直接推出结论 $\bar{\mathcal{G}} = \pi_1(\mathcal{N})/\pi_1(\bar{\mathcal{N}}) = \pi_1^\infty(\mathcal{E})/\pi_1^\infty(\bar{\mathcal{E}})$。

(3) 这是由第 (1) 项以及 $\mathcal{E}^r$ 和 $\mathcal{E}^r$ 都只有一个端这一事实，再加上链接在同伦意义下的唯一性，直接得到的。( )
4 直接推论 f 2 和 3。

❑

2.4. top-ALE**向量丛**。

推论的证明 1.8。这是定理 1.7的直接推论。

定理的证明1.9。

(1) 假设 $\mathcal{E}$ 是 top-ALE。根据命题 2.4，$\mathcal{E}$ 也是 top-ALE 且是一个可定向丛。现在假设 $\mathcal{E}_{\text{slit}}$ 的欧拉类消失。存在一个闭的全局角形式，因此 Leray-Hirsch 定理适用 [8, 第 11] 章，因此 de Rham 上同调群满足

$$\mathrm{H}^*\left(\tilde{\mathcal{E}}_{\text{slit}}\right) = \mathrm{H}^*(\mathcal{M})\otimes\mathrm{H}^*\left(\mathbb{S}^{r-1}\right) = \mathrm{H}^*\left(\mathcal{M}\times\mathbb{S}^{r-1}\right),$$

作为双分次代数，这显然矛盾，例如可通过计算 $*=r-1$ 阶上同调得出。

（2）（a）由引理2.1，我们推得链接 $\mathbb{S}^{n+r-1}/\tilde{\Gamma}$ 的 $\tilde{\mathcal{E}}$ 是 $\mathbb{S}^n$ 上的 $\mathbb{S}^{r-1}$-丛。上同调的 Gysin 序列给出

$$\cdots\to\mathrm{H}^m(\mathbb{S}^{n+r-1}/\tilde{\Gamma})\to\mathrm{H}^{m-r+1}(\mathbb{S}^n)\to\mathrm{H}^{m+1}(\mathbb{S}^n)\to\mathrm{H}^{m+1}(\mathbb{S}^{n+r-1}/\tilde{\Gamma})\to\cdots;$$

由于 $(/\tilde{\Gamma})^*$ 在上同调群上是单射，对于 $m=n-1$，我们推得 $\mathrm{H}^{n-r}(\mathbb{S}^n) = \mathrm{H}^n(\mathbb{S}^n)=\mathbb{Z}$ 因此 $n=r$。

现在，若进一步有 $\pi_1(\mathcal{M})=\pi_1(\mathcal{N})$，命题 2.4 便意味着 $\tilde{\mathcal{E}}$的链接是球面 $\mathbb{S}^{2n-1}$，并且是一个 $\mathbb{S}^{n-1}$-丛，其底空间为 $\mathbb{S}^n$。可以论证，所得丛映射 $\mathfrak{p}\colon\mathbb{S}^{2n-1}\to\mathbb{S}^n$ 的 Hopf 不变量为 ±1 [40]。为清楚起见，证明概要如下：

如下。映射柱 $M_{\mathfrak{p}}$ 是 $\mathfrak{p}$ 在 $\mathbb{S}^n$上的圆盘丛。令 τ 为此圆盘丛的托姆类。由相对 Leray–Hirsch 定理， $\mathfrak{p}^*\tau$ 是 $\mathsf{H}^n(C_{\mathfrak{p}})$ 的生成元，其中 $C_{\mathfrak{p}} = {}^{M_{\mathfrak{p}}}\!/_{\mathbb{S}^{2n-1}}$ 是 p的映射锥。然后直接应用 Tom 同构，可得 Hopf 不变量为 ± 1；更多细节见 [40] 。因此，或许经过与一个反定向丛同构复合后， $\mathfrak{p}$ 的 Hopf 不变量为 1；现在根据 [2], 中的分类，我们可得出关于可能维数的结论。(b) 第二个结论直接由第 (2) 项和 [10]得出。

命题 2.5.

(1) $\mathbb{S}^2$ 上的 top-ALE 丛与透镜空间 $\mathrm{L}_{m,1}$ 一一对应；*(2)* 存在 *1* 个标准diff-AE 丛和 *15* 个奇异diff-AE 丛 $\mathcal{E}^4$ ，它们定义在 $\mathbb{S}^4$ 上。

证明。

(1) 球面上的所有圆丛都是 Seifert 纤维流形。因此，所有非平凡的丛都是透镜空间 $\mathrm{L}_{m,1}$ ，其中 m 是欧拉数；此外，它们都来自向量丛（也就是说，它们的结构群是 $\mathsf{O}(n)$），这表明球面上的所有非平凡向量丛都是 top-ALE。(2) 根据 [18], ，我们知道存在 16 个拓扑 $\mathbb{S}^7$ ，它们具有不同的微分结构，并且是 $\mathbb{S}^3$-丛，基底为 $\mathbb{S}^4$。由于它们的结构群是 $\mathsf{O}(4)$ ，这些丛都可延拓为 $\mathbb{S}^4$ 上的秩 4 向量丛；由此得到的向量丛必定具有不同的微分结构（因为它们的去零截面丛显然如此）。

❑

注 2.6. 文献 [16] 对 $\mathbb{S}^3$-丛在同伦、同胚和微分同胚意义下进行了完整分类。

推论 2.7.

(1) 不存在一个在闭 $\mathcal{M}^n$ 上、具有非消失整体截面的top-ALE 丛 $\mathcal{E}^r$ ； *(2)* $\mathcal{T}\mathbb{S}^{2n-1}$ 不是 top-ALE。

2.4.1. 切丛的渐近局部欧几里得分类。 除了 Eguchi–Hanson 空间 $\mathcal{T}\mathbb{S}^2$ 和开可缩流形的切丛之外，没有其他流形具有渐近局部欧几里得切丛。本节将对此进行论证。

引理 2.8.

(1) $\mathcal{T}\mathbb{S}^n$ 的任意渐近锥链接都与 ***Steifel*** 流形${}^{\mathrm{SO}(n+1)}\!/_{\mathrm{SO}(n-1)}$同伦等价；*(2)* 对于 $n > 2$， ${}^{\mathrm{SO}(n+1)}\!/_{\mathrm{SO}(n-1)}$ 与 $\mathbb{S}^{2n-1} = {}^{\mathrm{SO}(2n)}\!/_{\mathrm{SO}(2n-1)}$ 的高阶同伦群并不相同。对于 $n = 2$，后者是前者的双重覆盖。

证明。

(1) 首先注意到 $\mathcal{T}\mathbb{S}^n_{\mathsf{slit}}$ 与 $\mathbb{R}^+ \times {}^{\mathrm{SO}(n+1)}\!/_{\mathrm{SO}(n-1)}$同胚。为此，令 $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{C}^{n+1}$ 为由方程 $\sum_{j=1}^{j=n+1} z_j^2 = 1$ 定义的仿射超二次曲面。于是存在一个 $\mathsf{SO}(n+1)$-等变微分同胚 $\varphi : \mathcal{T}\mathbb{S}^n \to \mathbb{Q}^n$ ，其定义如下:

$$(x, u) \to \cosh(\|u\|)x + i\,({}^{\sinh(\|u\|)}\!/_{\|u\|})\,u,$$

在 [44] 中给出。注意， $(x、\ u)$ 位于 $\mathbb{R}^{2n+2}$ 中的反德西特空间上，并且 u 被视为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中垂直于 x 的向量（详见 [44]） 。$\mathsf{SO}(n+1)$ 对 $\mathbb{S}^n$ 的等距作用可以自然地扩展到单位球面丛（即集合 $\|u\| = 1$）上。 $(x、\ u)$ 的稳定子显然是 $\mathsf{SO}(n-1)$。因此，单位切丛与 ${}^{\mathrm{SO}(n+1)}\!/_{\mathrm{SO}(n-1)}$ 微分同胚，所以挖去零截面的切丛与 $\mathbb{R}^+ \times {}^{\mathrm{SO}(n+1)}\!/_{\mathrm{SO}(n-1)}$ 微分同胚。无

(2) ${}^{\text{特殊正交群}(n+1)}\!/_{\mathrm{SO}(n-1)}$ 结论由引理 .1. 和 $\mathbb{S}^{2n-1} = {}^{\text{特殊正交群}(2n)}\!/_{\mathrm{SO}(2n-1)}$ 得出2 确实是施蒂费尔流形 $\mathsf{O}(n+1, 2)$ 和 $\mathsf{O}(n+1, 1)$。$\mathsf{O}(n, k)$ 适合纳入同伦长正合列。

$$\cdots \to \pi_m\left(\mathsf{O}(n-1, k-1)\right) \to \pi_m\left(\mathsf{O}(n, k)\right) \to \pi_m\left(\mathbb{S}^n\right) \to \pi_{m-1}\left(\mathsf{O}(n-1, k-1)\right) \to \cdots .$$

一个推论是 $\mathsf{O}(n,k)$ 是 $n-k-1$连通的，因此第一个结论成立。由于 $\mathbb{S}^3$ 是 $\mathbb{RP}^3$ =$\mathsf{SO}(3)$ 的双重覆盖，第二个结论成立。

❑

推论 1.10 的证明。假设 $\mathcal{M}^n$ 是闭的。由于 $\mathcal{TM}^n$ 是 渐近局部欧几里得，由引理 2.1可知， $\mathcal{M}$ 的基本群是有限群，并且其链接在同伦意义下是 $\mathbb{S}^{2n-1}/\Gamma$。由定理 1.7，$\widetilde{\mathcal{M}}=\mathbb{S}^n$ 以及命题 2.4， $\mathcal{TM}$ 是一个 渐近局部欧几里得 流形，其链接为 $\mathbb{S}^{2n-1}/\tilde{\Gamma}$，其中 $\tilde{\Gamma}\trianglelefteq\Gamma$。由引理 2.8，我们得出$n=2$。

对于开集 $\mathcal{M}$，这一结论可直接由定理 1.7 得出。 ❑

2.4.2. 低维子秩情形。 刻画子秩 ALE 丛（即当 $r<n$ 时）是一个更为微妙的问题，而这些丛也是有趣现象的温床。例如，[31] 中构造的黎曼渐近局部欧几里得流形上的“正质量定理”的第一个反例，是 $\mathbb{CP}^1$ 上的一个线丛。

我们完成了本节将通过以下两个子秩情形加以说明：一个以闭基为底，另一个以开基为底。 .

定理 2.9。对于 $n>2$， $\mathbb{S}^n$ 上不存在 top-ALE 丛 $\mathcal{E}^2$ 。

证明. 根据 [45], ，我们知道 $\mathbb{S}^n$ $(n>2)$上的唯一 1-球面丛是积丛，因此与 $\mathbb{S}^3$的商不同伦等价。❑

有关球面空间形式的分类及相关术语，请参阅 [51] 。

命题 2.10。 在 $\mathrm{SO}(6)$ 中，能够提升为 $\mathrm{Spin}(6)$ 中同构群的球面空间形式群，是奇数阶循环群（类型 I，满足 $d=1$），或具有奇数阶的特定类型 I 群（对应于 $d=3$），其表示为

$$A^m=B^n=\mathbf{1},\quad BAB^{-1}=A^r,$$
$$n\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 6),\quad m\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2),\quad (n(r-1),m)=1,\quad r\not\equiv r^3\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ m).$$

证明。 首先回顾向量表示 $\rho\colon \mathsf{Spin}(n)\to\mathsf{SO}(n)$，它给出 $\mathsf{Spin}(n)$ 到 $\mathsf{SO}(n)$ 的双重覆盖。该表示的切映射为 $d\rho\colon \mathfrak{spin}(n)\to\mathfrak{so}(n)$，由 $d\rho(e_ie_j)=2(e_i\wedge e_j)$ 给出，其中 $e_i\wedge e_j$ 是 e_i-e_j 平面内旋转的生成元；例如参见 [30]。因此，元素 $\mathsf{Rot}(2\pi\theta)\in\mathsf{SO}(n)$ 的提升为 $\pm\mathsf{exp}(\theta\pi e_ie_j)\in\mathsf{Spin}(n)$。

按照 [51], 型群的表示，其中 $d=1$ 是循环群，并由一个矩阵生成

$$A=\begin{pmatrix}\mathrm{Rot}(1\pi/m) & 0 & 0\\ 0 & \mathrm{Rot}(2\pi a/m) & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{Rot}(2\pi b/m)\end{pmatrix},$$

其中 $(a、\ m)=1$，以及 $(b、\ m)=1$。因此，提升为

$$\bar{A}=\mathrm{sign}_A^{\bar{A}}\exp\left(\pi/m\ \bar{e}_{12}+\pi a/m\ \bar{e}_{34}+\pi b/m\ \bar{e}_{56}\right),\quad \mathrm{sign}_A^{\bar{A}}=\pm 1,$$
$$\bar{A}^m=\left(\mathrm{sign}_A^{\bar{A}}\right)^m(-1)^{1+a+b}\ \mathbf{1}.$$

¯如果 m 是偶数，那么 $1+a+b$ 必须是奇数，因此 $A^m=-\epsilon_A^m\mathbf{1}=-\mathbf{1}$；所以在这种情况下，我们得不到相同的表示关系。如果 m 是奇数，那么令 $\epsilon_A=(-1)^{1+a+b}$，便得到 A 的一个提升，它满足相同的幂等关系。

带有 $d=3$ 的 I 型群由生成元 A 和 B 给出，其中 A 与前文相同，且 $a=r$、$b=r^2$ 和

$$B=\begin{pmatrix}0 & I & 0\\ 0 & 0 & I\\ \mathrm{Rot}(3l/n) & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

附带条件

$$n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 3),\quad (n(r-1),m)=1,\quad r\not\equiv r^3\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ m).$$

作为分块矩阵，有 $B^3=\mathsf{Rot}(3l/n)\mathbf{1}$；令 $\bar{B}:=\mathsf{sign}_B^{\bar{B}}\hat{B}$，其中 $\hat{B}$ 是 B 的提升，且具有

$$\hat{B}^3=\exp\left(3\pi l/n\ e_1e_2+3\pi l/n\ e_3e_4+3\pi l/n\ e_5e_6\right).$$

由 $\overline{B^3}=\bar{B}^3$ 可推得

$$\bar{B}^3=\left(\mathrm{sign}_B^{\bar{B}}\right)^3\exp\left(3\pi l/n\ e_1e_2+3\pi l/n\ e_3e_4+3\pi l/n\ e_5e_6\right),$$

从而

$$\bar{B}^n = \left(\bar{B}^3\right)^{\frac{n}{3}} = \left(\operatorname{sign}_B^{\bar{B}}\right)^n (-1)^{3l}\mathbf{1}.$$

我们已经知道 $3|n$。若 $n = 6k$，则得到 $\bar{B}^n = (-1)^{3l}\mathbf{1}$，因此 l 必须是偶数，这与 $(l, n/3) = 1$ 矛盾。对于 $n = 6k+3$，我们得到

$$\bar{B}^n = \left(\operatorname{sign}_B^{\bar{B}}\right)^3 (-1)^{3l}\mathbf{1} = \left(\operatorname{sign}_B^{\bar{B}}\,(-1)^l\right)^3 \mathbf{1},$$

因此，令 $\operatorname{sign}_B^{\bar{B}} = (-1)^l$，便得到一个满足相同幂等关系的提升。

我们来检验关系 $\bar{B}\bar{A}\bar{B}^{-1} = \bar{A}^r$。根据提升，我们知道 $\bar{B}\bar{A}\bar{B}^{-1} = \delta\bar{A}^r$。将两边提升到$m$次幂（这是奇数次幂），得到 $\delta^m = 1 \Longrightarrow \delta = 1$。这意味着我们至少得到一个自旋结构，并且$m$ 和 n 都是奇数。❏

定理 1.11 的证明。设 $\mathcal{E}^2$ 是一个自旋向量丛，定义在一个自旋 4 维流形上，且该流形是适当的 拓扑渐近局部欧几里得，其链接为 $\mathbb{S}^5/\Gamma$。由斯蒂费尔–惠特尼类的自然性可直接证明 $\mathcal{E}$ 作为流形是可自旋的。因此，开子流形 $\mathcal{E}\setminus\mathcal{K}$ 也同胚于 $\mathbb{R}^{6*}/\Gamma$。这意味着$\Gamma \leqslant \mathrm{SO}(6)$ 是一个球面空间形式群，且存在其到 Spin (6)的等距提升。由命题 2.10， Γ必为所列群之一，特别地，必为奇数阶群。❏

2.5. 的拓扑刚性 $\mathcal{K}$。 我们已经看到， $\mathcal{E}_{\mathsf{slit}} = \mathcal{E}\setminus\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{E}\setminus\mathcal{K}$ 都变形收缩到 $\mathcal{N}$。下面我们将证明，在 $\partial\mathcal{K}$ 满足一些温和的正则性条件时，它们的边界具有相同的基本群，即 $\pi_1(\mathcal{K}) = \pi_1(\mathcal{M})$。此外，我们还将讨论关于 $\mathcal{K}$的一些推论性同调信息。

回顾一下，拓扑子流形 $\mathcal{W}^{n-1} \subset \mathcal{M}$ 称为局部平坦的，是指每个 $b \in \mathcal{B}$ 都存在一个邻域 $\mathcal{N}_b$和一个同胚 h_b: $\mathcal{N}_b \to \mathbb{R}^n$，使得 $h_b(\mathcal{N}_b \cap \mathcal{W}) \subset \mathbb{R}^{n-1}$。换言之，若$\mathcal{W}$ 具有由来自 $\mathcal{M}$的“适配 $\mathcal{C}^0$ 图”组成的 $\mathcal{C}^0$ 图册，则它在 $\mathcal{M}$ 中局部平坦。

定义 2.11。 当 $\partial\mathcal{K}$ 是 $\mathcal{M}$中的一个双侧局部平坦 $\mathcal{C}^0$-子流形，且同胚于 $\mathcal{N}$时，我们称 $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}$ 为正则。

定理 2.12. 假设 $\mathcal{E}^r$ 是拓扑渐近锥，其链接为 $\mathcal{N}$，且被省略的正则紧集为 $\mathcal{K}$；那么 $\pi_1(\mathcal{M}) =\pi_1(\mathcal{K})$。

证明. 由假设可知， $\partial\mathcal{K}$ 存在管状邻域 [11]。我们可以如下考虑 $\mathcal{K}$ 的开加厚与变薄。设 $\psi:\ \partial\mathcal{K}\times(-\epsilon, \epsilon) \to \mathcal{U}_{\mathcal{K}}$ 是 $\partial\mathcal{K}$的管状邻域。定义开集

$$\mathcal{U}_\alpha := \begin{cases} \mathcal{K}\cup\psi\left(\partial\mathcal{K}\times(-\epsilon,\alpha)\right), & \text{for} \quad 0<\alpha<\epsilon \quad \text{fattening} \\ \mathcal{K}\setminus\psi\left(\partial\mathcal{K}\times[\beta,\epsilon)\right), & \text{for} \quad -\epsilon<\beta<0 \quad \text{thinning} \end{cases}.$$

对于 $\alpha > 0$ 和 $\beta < 0$ 足够接近 0 的情形，令 $U_1 := \mathcal{K}_\alpha$ 和 $U_2 := \mathcal{E}\setminus\mathcal{K}_\beta$，于是 $U_1 \cap U_2 = \partial\mathcal{K}\times(\alpha,\beta)$, 它与 $\partial\mathcal{K} = \mathcal{N}$ 同伦等价。

选取基点 $q \in \partial\mathcal{K} = \mathcal{N}$，我们注意到每个基环 γ 都与 $\mathcal{N}$ 中的一个环基同伦。由塞弗特-范坎彭定理，我们可得

$$\pi_1(M) = \pi_1(\mathcal{E}) = {\pi_1(U_1)\star\pi_1(U_2)}/{\iota_*\pi_1(U_1\cap U_2)} = {\pi_1(\mathcal{K}_\alpha)\star\pi_1(\mathcal{N})}/{\iota_*\pi_1(\partial\mathcal{K})} = \pi_1(\mathcal{K}).$$

其中 ι 表示从 $U_1 \cap U_2$ 到 U_1 和 U_2的包含映射。 ❏

推论 2.13。 假设 $\mathcal{E}^r$ 是一个简单的拓扑渐近锥，其被省略的正则紧集为 $\mathcal{K}$，且 $\widetilde{p}:\ \widetilde{\mathcal{M}} \to \mathcal{M}$ 是万有覆盖，则 $\widetilde{p}^{-1}(\mathcal{K}) = \widetilde{\mathcal{K}}$。

定理 2.14。 假设对于某个 $m \geqslant 0$， $\mathcal{M}$ 是 $(m,\ m+1)$-局部连通的，且 $\mathcal{E}^r$ 是一个拓扑渐近锥，其链接为 $\mathcal{N}$，正则的被省略紧集为 $\mathcal{K}$。那么，$\mathsf{H}_m(\mathcal{K}) = 0$。

证明。对证明定理 U_i， $i = 1,\ 2$ 中的集合应用梅耶-维托里斯定理 2.12，并注意到同伦等价 $\mathcal{E} \sim \mathcal{M}$ 和 $U_1 \cap U_2 \sim \partial K$， $U_1 \sim \mathcal{K}$ 和 $U_2 \sim \mathcal{N}$，可得正合序列

$$\cdots \to \mathsf{H}_{m+1}(\mathcal{M}) \to \mathsf{H}_m(\mathcal{N}) \to \mathsf{H}_m(\mathcal{K}) \oplus \mathsf{H}_m(\mathcal{N}) \to \mathsf{H}_m(\mathcal{M}) \to \cdots,$$

因此，根据假设，两个中间空间同构，从而得到 $\mathrm{H}_m(\mathcal{K}) = 0$。 ❏

推论 2.15. 假设 $\mathcal{N}$是 k-连通的，则 $\mathcal{K}$ 的同调在 $(r-2)\wedge(k-1)$度以下均为平凡。

~**推论 2.16.** 假设 $\mathcal{E}^r$ 是 top-ALE，其被省略的正则紧集为 $\mathcal{K}$，则 $\mathcal{K}$ 的同调在 $r-2$度以下均为平凡。

我们来说明，一个“正则”拓扑渐近锥流形 $\mathcal{M}$ （见定义1.3）， $\mathcal{K}$ 实际上是一个正则的省略项按照定义2.11所述的紧集。

命题 2.17。设 $\mathcal{M}$ 是拓扑渐近锥，其省略紧集为 $\mathcal{K}$。那么， $\mathcal{M}$ 是正则拓扑渐近锥，当且仅当 $\mathcal{K}$ 是正则省略紧集。

证明。根据假设，存在一个同胚 $\varphi\colon \mathbb{R}^+ \times \mathcal{N} \to \mathcal{M} \setminus \mathcal{K}$，它可延拓至 $\partial\mathcal{K}$。因此， ∂K 与 $\mathcal{N}$ 同胚，即与某个带边界光滑流形的边界同胚。这意味着 $\partial\mathcal{K}$ 在 $\varphi(\mathbb{R}^+ \times \mathcal{N})$ 中具有领圈邻域，因为它等于 $\varphi(\{0\} \times \mathcal{N})$。此外，由于 ∂K 与某个光滑流形的边界同胚，它是局部平坦的。这也意味着 $\partial\mathcal{K}$ 在 $\mathcal{K}$ 中具有领圈邻域 [11]。综合以上结果， $\partial\mathcal{K}$ 是双侧且局部平坦的。

反过来，如果 $\partial\mathcal{K}$ 是一个正则遗漏紧集，根据 [11], ，它有一个管状邻域；这一点结合 $\partial\mathcal{K} \underset{\text{homeo}}{\cong} \mathcal{N}$，使我们能够将 φ 延拓到 $\partial\mathcal{K}$，实际上还可以通过将 φ 延拓到 $\partial\mathcal{K}$ 的一个领圈而延伸得更远。❑

3. 几何刚性

本节简要探讨在对给定黎曼度量 g 施加进一步限制时，拓扑 AC 向量丛的刚性；特别地，这些结果均适用于黎曼 ALE 丛。

3.1. **非负曲率**。 回顾一下，具有非负 Ricci 曲率的度量 g 的渐近体积增长定义为

$$v_0 := \lim_{r\to\infty} {}^{\mathrm{vol}_g(B_r(p))}\!/_{\mathrm{vol}_0(B_r(0))} \in [0,1].$$

定理的证明1.12。

(1) 设 $\mathcal{M}$ 是开且具有非负截面曲率的；那么根据 Cheeger-Gromoll 灵魂定理， $\mathcal{M}$ 是一个紧致全测地灵魂 $\mathcal{S}$上的法丛。由于灵魂的余维大于维数的一半，定理 1.9 中的第 (2) 项验证了这一断言。(2) 根据 [33, 3], ，我们知道 $\mathcal{E}$ （因此 $\mathcal{M}$）的基本群是有限群，且元素个数小于 m。由此根据拓扑分类定理即可得出该断言。(3) 利用拓扑刚性，我们推得 $\mathcal{M}$ 是一个开可缩 3 维流形。根据 [49] 中关于非负标量曲率的最新结果，它与 $\mathbb{R}^3$微分同胚。

❑

3.2. **渐近平坦性**。

定理的证明1.13。

(1) 由 [39], 可知 $\mathcal{E}^r$ 是 渐近圆锥，于是应用定理1.7。(2) 由 [14], $\mathcal{E}$ 是 渐近圆锥 ，且其端部是一个 $\mathbb{T}^{b_1}$-纤维化，底空间为一个 渐近局部欧几里得 端部。

❑

3.3. **从上的特殊度量**。

定义 3.1. 当存在满足 $G(p)=0$ 的次（超）调和函数 G，使得对于 $0<\lambda<\Lambda<\infty$ 有 $\lambda G \leqslant F \leqslant \Lambda G$ 时，具有 $F(p)=0$ 的函数 $F\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ 称为容许的。

容易看出，容许函数满足刘维尔型定理，即 F 的有界性意味着 $F\equiv 0$。

引理 3.2。 假设g 是 $\mathcal{E}^r$ 和 g上的黎曼度量，并且是 $\mathcal{M}$上的度量，使得相对于该度量，$\mathfrak{p}\colon \mathcal{E}\to\mathcal{M}$ 是一个黎曼浸没；令 $\mathcal{V}_{(x,u)} = \mathcal{T}_{(x,u)}\mathcal{E}_x$ 表示垂直提升。假设对于每个固定的 x 和 $X,Y\in\mathcal{T}_x\mathcal{M}$，函数

$$F_{X,Y,x}(u) := \|\mathrm{Proj}_{\mathcal{V}_{(x,u)}}[X^h,Y^h]_{(x,u)}\|^2_{g_{\mathcal{E}_x}} : \mathcal{E}_x \to \mathbb{R},$$

是可容许的。若 $(\mathcal{E},\ g)$ 是黎曼渐近局部欧几里得，则 $(\mathcal{M},\ g)$ 是平坦的。特别地，若 $r\geqslant n$，则 $\mathcal{M}$ 是一个开可缩流形。

证明。根据黎曼浸没的 O'Neil 基本方程，我们有

$$\|\mathrm{Proj}_{\mathcal{V}_{(x,u)}}[X^h,Y^h]_{(x,u)}\|^2 = 4/3\left(\mathrm{K}_{\mathcal{E}}(X,Y)_{(x,u)} - \mathrm{K}_{\mathcal{M}}(X,Y)_x\right).$$

我们注意到，右端有界，因为假设 $\mathcal{E}$ 是黎曼渐近局部欧几里得。可容许性意味着 $\mathrm{K}_{\mathcal{E}}(X,Y)_{(x,\ u)} = \mathrm{K}_{\mathcal{M}}(X,Y)_{x\circ}$ 将 u 替换为 λu 并令 $\lambda \to \infty$，可知该量必为零，因为根据黎曼渐近局部欧几里得假设，$\mathrm{K}_{\mathcal{E}}(X,Y)_{(x,\ u)}$ 在无穷远处趋于零。

当 $r \geqslant n$ 时，由拓扑刚性，并注意到 $\mathbb{S}^n$ 不存在平坦度量（例如，根据 Cartan-Hadamard 定理），可得可缩性结论。❑

3.3.1. 在 $\mathcal{E}$ 上的联络度量。选取一个纤维度量 $g_{\mathcal{E}_p}$ 以及一个向量丛联络 $\nabla^{\mathcal{E}}$，使其与 $g_{\mathcal{E}_p}$相容；取一个度量 g 于 $\mathcal{M}$，并在 $g_0 = dr^2 + \psi(r)^2 g_{\mathbb{S}^{r-1}}$ 上取一个旋转对称度量 $\mathbb{R}^r$，则存在唯一的度量 g_{cm}（联络度量），使得 $\mathfrak{p}:\ \mathcal{E} \to \mathcal{M}$ 是一个黎曼浸没，其水平分布由 $\nabla^{\mathcal{E}}$ 确定，且纤维为与($\mathbb{R}^r$等距的全测地子流形，g_0)；参见 [7]。

定理1.14的证明，第一部分。由 [43, 引理 2.2], 可知，对于 $u \neq 0$

$$F_{X,Y,x}(u) = -3/4\ \ (\psi(\|u\|)/\|u\|)^2 \left|\mathrm{Rm}^{\nabla^{\mathcal{E}}}(X,Y)(u)\right|^2,$$

且在 $u=0$处消失。由于 $\left|\mathrm{Rm}^{\nabla^{\mathcal{E}}}(X,\ Y)(u)\right|^2$ 在 u上是次调和的，因此我们推出$F_{X,\ Y,\ x}(u)$ 当 $|\psi(r)| \leqslant O(r)$ 时是可容许的，因为 $r \nearrow \infty$。根据渐近局部欧几里得假设，后一衰减性质在 ψ 上成立，因此 $\nabla^{\mathcal{E}}$ 是仿射平坦的，因为其曲率为零；由引理3.2，我们推出 $(M,\ g)$ 是平坦的。第二个结论由拓扑刚性得出。❑

3.3.2. 自然解耦的渐近局部欧几里得度量 $\mathcal{TM}$。给定 M上的线性联络 ∇， M上的任意黎曼度量 g 都可写成如下形式

$$\begin{cases} g_{(p,u)}\left(X^h,Y^h\right) = g^h_{(p,u)}(X,Y) \\ g_{(p,u)}\left(X^h,Y^v\right) = a^c_{(p,u)}(X,Y) \\ g_{(p,u)}\left(X^v,Y^v\right) = g^v_{(p,u)}(X,Y) \end{cases}, \tag{3.1}$$

其中$g^h_{(\cdot,\ u)}$ 和$g^v_{(\cdot,\ u)}$ 构成了由 u 和$a^c_{(\cdot}$参数化的 $\mathcal{M}$ 上的黎曼度量族，$_{u)}$是一个对称二阶张量。给定 $\mathcal{TM}$ 的标准局部坐标(x^i中的联络系数 $\mathcal{H}^j_i = u^b\Gamma^j_{ib}$， TM上的任意度量 $\tilde{g}$都可表示为如下形式

$$g = g^h_{ij}(\delta x^i)^\flat \otimes (\delta x^j)^\flat + a^c_{ij}(\delta x^i)^\flat \otimes du^j + a^c_{ij} du^i \otimes (\delta x^j)^\flat + g^v_{ij} du^i \otimes dy^j,$$

其中 $\delta x^i := \partial/\partial x^i - \mathcal{H}^j_i \partial/\partial u^j$。

定义 3.3。 当 $a^c(X,Y) \equiv 0$ 时，我们称 g 是解耦的。

以下是一个主流概念。

定义 3.4。 若 g 是解耦的，且 $g^h = g$ 与 u 无关，并且 ∇ 是度量 g 的 Levi-Civita 联络，则称 g 为自然度量。换言之，若 g 关于满足 $\boldsymbol{\pi}$: ($\mathcal{TM}$ 的情形是解耦的，则 g) $\to (\mathcal{M},g)$ 是一个黎曼浸没。我们将自然度量记为 $\mathsf{g}_{\mathsf{nat}}$。

T 的证明　定理 1.14，第二部分。注意到，对于一个自然的……，这可直接由引理 3.2 得出

度量，O'Neil 公式给出

$$\mathrm{K}_{\mathcal{E}}(X^h,Y^h)_{(x,u)} = \mathrm{K}(X,Y)_x - \frac{3}{4}\|(\mathrm{R}(X,Y)u)^v_x\|^2,$$

对于正交归一对 XY [23, 推论 6.4]。❑

回顾一下，Sasaki 度量和 Cheeger-Gromoll 度量是分别由 $\mathsf{g}_{\mathsf{s}}\ (X^v,Y^v) := g_p(X,Y)$ 和 $\mathsf{g}_{\mathsf{CG}}(X^v,Y^v) :$ $= {}^{(g_p(X,\ Y)+g_p(X,\ u)g_p(Y,\ u))}/_{1+r^2}$ 确定的两种自然度量。

注 3.5。 [4], 平坦性 g_{s} 可由关于 $\mathcal{TM}$截面曲率有界这一弱得多的假设推出。

命题 3.6. $(\mathcal{TM},\ g_{\mathsf{CG}})$ 绝非黎曼渐近局部欧几里得。

证明。由 [23, 推论 8。9],

$$\widetilde{\mathrm{K}}(X^v, Y^v) = {}^{(1-\alpha)}\!/_{\alpha^2} + \left({}^{\alpha+2}\!/_{\alpha}\right) {}^{1}\!/_{\left(1+g(X,u)^2+g(Y,u)^2\right)}.$$

因此，若我们选择 $u \perp \mathrm{span}\{X, Y\}$，取向量 λu 并令 $\lambda \to \infty$，则得到 $\mathrm{K}(X^v, Y^v)_{(p,\ \lambda u)} \to \mathbf{1}$，这与黎曼渐近局部欧几里得条件相矛盾。❑

下面我们证明切丛上一族不来源于黎曼浸没的度量是平坦的。

定义 3.7 节（可容许度量）。考虑坐标图 $(\Omega\ \psi)$ 及度量 $g_0 := \psi^* \qquad \delta.$

（1）若度量 g 在坐标图的区域 $\mathcal{T}\Omega$ 中是可容许的，则称其满足解耦 条件，并且有

$$g^v_{(p,u)} = \varphi(p,u)\mathrm{g}_p + (1-\varphi)g_0, \quad \varphi \in \mathcal{C}^\infty\left(\mathcal{T}\Omega, [0,1]\right), \tag{3.2}$$

对于 Ω 上的某个黎曼度量 $\mathrm{g} \neq g_0$。

(2) 假设 $\mathcal{TM}$ 在无穷远处（紧集 $\mathcal{K}$之外）具有标准坐标 x^i、u^i。$\mathcal{TM}$ 上的度量 g 若关于坐标 x^i、u^i在 $\mathcal{TM} \setminus \mathcal{K}$ 上满足可容许性，则称其为“无穷远处可容许的”。下文中，g_{ad} 表示 $\mathcal{TM}$的一个无穷远处可容许度量。

定理 1.14第三部分的证明。 设 $(\mathcal{TM},\ g = g_{\mathsf{ad}})$ 是 具有标准坐标 x^i的黎曼渐近局部欧几里得度量，u^i在无穷远处。利用（3.2），并令 $\partial_{\bar{i}} := \partial^v_i$，我们得到 $\partial^h_i = \partial_i - \mathcal{H}^k_i \partial_{\bar{k}}$，从而得到度量的局部项

$$\begin{cases} g_{ij} & = g^h_{ij} + \mathcal{H}^l_j a^c_{il} + \mathcal{H}^k_i a^c_{jk} + \mathcal{H}^k_i \mathcal{H}^l_j g^v_{kl} \\ g_{i\bar{j}} & = \mathcal{H}^k_i \phi \mathrm{g}_{kj} + (1-\varphi)\mathcal{H}^k_i \\ g_{\bar{i}\bar{j}} & = \varphi \mathrm{g}_{ij} + (1-\varphi)\delta_{ij} \end{cases}.$$

由渐近局部欧几里得假设，我们得到 $\lim_{\|u\|\to\infty} \varphi(p,u) = 0$。因此，由 $\lim_{\|u\|\to\infty} \mathrm{g}_{i\bar{j}} = 0$，我们推出 $\lim_{\|u\|\to\infty} \mathcal{H}^j_i = 0$。现在，对于固定的 i、j，并在固定的 p处，令 $u^b = t\Gamma^j_{ib}$，利用 $\mathcal{H}^j_i = u^b \Gamma^j_{ib}$，再令 $t \nearrow \infty$，我们推出 $\Gamma^j_{ib}(p) = 0$。因此，∇ 是一个平坦联络。❑

备注 3.8。 回忆一下，根据平坦流形的分类并应用 Cartan-Hadamard 定理，完备可缩的平坦 n-流形与 $\mathbb{R}^n$ 微分同胚。更一般地，利用 Cartan-Ambrose-Hicks 定理，我们可以推出：相对于给定的 ∇，一个可缩的仿射平坦流形若是 ∇-测地完备的，则必与 $\mathbb{R}^n$ 微分同胚。

参考文献

[1] *U. Abresch*，《曲率下界、*Toponogov*定理与有界拓扑》，《数学年刊》（高等师范学校年刊，第*4*辑）*18 (4) (1985), 651–670*。[2] *J. F. Adams*，《*Hopf* 不变量为一的元素不存在》，《数学年刊》*72 (1) (1960), 20–104*。[3] *M. T. Anderson*，《非负里奇曲率完备流形的拓扑》，《拓扑学》*29 (1990), 41–55*。[4] *K. Aso*，《关于切丛截面曲率若干性质的札记》，《横滨数学杂志》*29 (1981), 1–5*。[5] *R. H. Bamler* 和 *Q. S. Zhang*，《有界标量曲率*Ricci*流中的热核与曲率界》，《数学进展》*319 (2017), 396–450*。[6] *S. Bando*、*A. Kasue* 和 *H. Nakajima*，《关于在曲率快速衰减且具有最大体积增长的流形上构造无穷远坐标》，《数学发明》*97 (1989), 313–349*。[7] *A. Besse*，《*Einstein*流形》，施普林格，*1987*。[8] *R. Bott* 和 *L. W. Tu*，《代数拓扑中的微分形式》，施普林格，*1982*。[9] *E. Brody*，《透镜空间的拓扑分类》，《数学年刊》（第*2*辑）*71 (1) (1960), 163–184*。[10] *R. R. Douglas* 和 *F. Sigrist*，《球面上的球丛与*H*空间》，《拓扑学》*8 (1969), 115-118*。[11] *M. Brown*，《拓扑流形的局部平坦嵌入》，《数学年刊》*75 (1962), 331–341*。[12] *P. Candelas* 和 *X. de la Ossa*，《关于锥形流形的评论》，《核物理*B*》*342 (1990), 246–268*。[13] *J. Cheeger* 和 *D. Gromoll*，《非负曲率完备流形的结构》，《数学年刊》*96 (1972), 413–443*。[14] *X. Chen* 和 *Y. Li*，《关于渐近平坦流形的几何》，《几何与拓扑》*25(5) (2021), 2469–2572*。[15] *R. J. Conlon* 和 *H. J. Hein*，《渐近锥形*Calabi–Yau*流形的分类》，*arXiv:2201.00870*。[16] *D. Crowley* 和 *C. M. Escherb*，《 $\mathbb{S}^4$上的 $\mathbb{S}^3$丛分类》，《几何应用》*18 (2003) 363–380*。[17] *M. L. Curtis* 和 *K. W. Kwijn*，《流形的*Inkrite*和》，《拓扑学》*3 (1965). 31–42*。

[18] *J. Eells* 和 *N. Kuiper*，《某些光滑流形的一个不变量》，《数学年刊》*60 (1962), 93–110*。[19] *T. Eguchi* 和 *A. J. Hanson*，《欧几里得引力的渐近平坦自对偶解》，《物理快报*B*》*74 (3) (1978), 249–251*。[20] *G.W. Gibbons* 和 *S.W. Hawking*，《引力多瞬子》，《物理快报*B*》*78 (4) (1978), 430–432*。[21] *L. C. Glaser*，《不可数多个可缩开*4*维流形》，《拓扑学》*6 (1967), 37–42*。[22] *M. Golubitsky* 和 *V. Guillemin*，《稳定映射及其奇点》，施普林格，*1973*。[23] *S. Gudmundsson* 和 *E. Kappos*，《关于切丛的几何》，《数学展望》*20 (2002), 1–41*。[24] *V. Guillemin* 和 *M. Stenzel*，《*Grauert*管与齐次蒙日-安培方程》，《微分几何杂志》*34 (2) (1991), 561–570*。[25] *A. Hatcher*，《代数拓扑》，剑桥大学出版社，*2002*。[26] *S.W. Hawking*，《引力瞬子》，《物理快报*A*》*60 (2) (1977), 81–83*。[27] *H. J. Hein*、*R. Rădeaconu* 和 *I. Şuvaina*；《*ALE*凯勒流形的分类》，《国际数学研究》*14 (2021), 10957–10980*。[28] *M. Hirsch*，《微分拓扑》，施普林格，*1976*。[29] *D. C. Isaksen*、*G. Wang* 和 *Z. Xu*，《球面的稳定同伦群》，《美国国家科学院院刊》*117 (40) (2020), 24757–24763*。[30] *J. Jost*，《黎曼几何与几何分析》，施普林格，第*7*版，*2017*。[31] *C. LeBrun*，《广义正作用猜想的反例》，《数学物理通讯》*118 (1988), 591–596*。[32] *L. Lempert* 和 *R. Szöke*，《黎曼流形切丛上的复结构》，《数学年刊》*290 (4) (1991), 689–712*。[33] *P. Li*，《非负里奇曲率完备流形上热方程的大时间行为》，《数学年刊》*124 (1986), 1–21*。[34] *D. R. McMillan Jr.*，《可缩开流形的笛卡尔积》，《美国数学会通报》*67(5) (1961), 510–514*。[35] ———，《某些可缩开三维流形》，《美国数学会汇刊》*102 (1962), 373–382*。[36] *J. Milnor*，《两个同胚但在组合意义上不同的复形》，《数学年刊》（第*2*辑）*74 (1961), 575–590*。[37] ———，《$(n-1)$连通的*2n*维流形分类与奇异球面的发现》，《手术理论综述》（*AM-145*），第*1*卷，普林斯顿大学出版社，第*25–30*页，*2000*。[38] *G. Perelman*，《几乎最大体积的正里奇曲率流形》，《美国数学会杂志》*7 (1994), 299–305*。[39] *A. Petrunin* 和 *W. Tuschmann*，《渐近平坦性与无穷远处的锥结构》，《数学年刊》*321 (2001), 775–788*。[40] *D. Price*，《*Gysisn*序列与*Hopf*不变量》，网上未发表的札记。[41] *S. Sasaki*，《黎曼流形切丛的微分几何》，《东北数学杂志》*10 (1958), 338–354*。[42] *M. Simon*，《延拓标量曲率有界的四维里奇流》，《分析与几何通讯》*28 (2020), 1683–1754*。[43] *M. Strake* 和 *G. Walschap*，《向量丛上的非负曲率联络度量》，《数学手稿》*66 (1990), 309–318*。[44] *R. Szőke*，《黎曼流形切丛上的复结构》，《数学年刊》*291 (1991), 409–428*。[45] *N. E. Steenrod*，《球丛的分类》，《数学年刊》（第*2*辑）*45 (2) (1944), 294–311*。[46] *M. Stenzel*，《紧致秩一对称空间复化上的里奇平坦度量》，《数学手稿》*80 (1993), 151–163*。[47] *F. C. Tinsley* 和 *D. G. Wright*，《某些可缩开流形及流形的覆盖》，《拓扑学及其应用》*77 (1997), 291–301*。[48] *W. Thurston*，《三维流形的几何与拓扑》，数学科学研究所讲义。[49] *Jian Wang*，《常曲率空间、拓扑刚性与正标量曲率》，*arXiv:2105.07095*。[50] *J.H.C. Whitehead*，《关于关联矩阵、核与同伦类型》，《数学年刊》（第*2*辑）*42 (1941), 1197–1239*。[51] *J. A. Wolf*，《常曲率空间》，美国数学会；第*6*版，*2010*。[52] *D. G. Wright*，《非覆盖空间的可缩开流形》，《拓扑学》*31 (2) (1992), 281–291*。