arXiv:2305.04302v1 [math.NT] 7 May 2023

由退化玻色子正规序导出的广义退化斯特林数

TAEKYUN KIM 1、DAE SAN KIM 2 和 HYE KYUNG KIM [3], *

摘要。值得注意的是，近年来，人们对许多特殊多项式和数的退化版本进行了深入研究，并取得了许多有趣的成果。本文旨在研究第二类广义退化 (r,s)-斯特林数及其自然推广——广义退化 (r,s)-贝尔多项式；它们源自某种“退化玻色子正规序”。我们推导了这些数和多项式的一些性质、显式表达式及生成函数。第二类广义退化 (r,s)-斯特林数和退化玻色子正规序，分别是 Blasiak-Person-Solomon 先前研究的第二类广义 (r,s)-斯特林数和玻色子正规序的退化版本。

1. 引言

第二类斯特林数 $S_2(n, k)$ 表示将一个含有 n 个对象的集合划分为 k 个非空子集的方法数（见 (3)）。第二类斯特林数出现在各种不同的背景中，并有许多应用，例如计数组合学和量子力学。近年来，人们对许多特殊数和多项式的退化版本进行了深入研究；这项研究始于 Carlitz 对退化伯努利多项式和退化欧拉多项式的工作。研究中使用了组合方法、生成函数、p进分析、示性演算技巧、概率论、数理物理、算子理论、特殊函数、解析数论和微分方程等工具。将 $S_2(n, k)$ 的定义方程中的幂 x^n 替换为广义下降阶乘多项式 $(x)_{n,\lambda}$ 时，自然会出现退化第二类斯特林数 $S2_{,\lambda}(n, k)$（见 (3)、(6)）。事实证明，在研究许多特殊多项式和特殊数的退化版本时，它们频繁出现。

用玻色子算符 a 和 $a^\dagger$ 表示 $(a^\dagger a)^n$ 的正规序，可写成如下形式

$$(a^\dagger a)^n = \sum_{l=0}^{n} S_2(n,l)(a^\dagger)^l a^l. \tag{1}$$

用玻色子算符 a 和 $a^\dagger$ 表示 $(a^\dagger a)_{n,\lambda}$ 的正规序（这是式 (1) 的退化版本），可写成如下形式

$$(a^\dagger a)_{n,\lambda} = \sum_{l=0}^{n} S_{2,\lambda}(k,l)(a^\dagger)^l a^l,$$

其中，广义下降阶乘 $(x)_{n,\lambda}$ 由式 (5) 给出。

设 r、s 为满足 $r \geq s$ 的正整数，n 为任意正整数。Blasiak-Person-Solomon 引入了广义第二类 (r,s)-Stirling 数 $S_{r,s}(n, k)$，其最终可化为

2020年数学学科分类：11B73；11B83。关键词和短语：广义退化第二类 (r,s)-Stirling 数；广义退化 (r,s)-Bell 多项式；广义第二类 (r,s)-Stirling 数。* 为通讯作者。

$S^{1,1}(n,k) = S_2(n,k)$，其中 $r = s = 1$，这是通过考察 $((a^\dagger)^r a^s)^n$ 的玻色子正规序得到的：

$$((a^\dagger)^r a^s)^n = (a^\dagger)^{n(r-s)} \sum_{k=s}^{ns} S_{r,s}(n,k)(a^\dagger)^k a^k. \tag{2}$$

本文通过考虑式 (2) 的一个退化版本，即对 $\prod_{k=0}^{n-1}\left((a^\dagger)^r a^s - k\lambda (a^\dagger)^{r-s}\right)$ 进行玻色子正规序，介绍广义退化第二类 (r,s)-Stirling 数。它们是广义第二类 (r,s)-Stirling 数的退化版本：

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1}\left[(a^\dagger)^{r-s}\left((a^\dagger)^s a^s - k\lambda\right)\right] &= \prod_{k=0}^{n-1}\left((a^\dagger)^r a^s - k\lambda (a^\dagger)^{r-s}\right)\\ &= (a^\dagger)^{n(r-s)} \sum_{k=0}^{ns} S_\lambda^{(r,s)}(n,k)(a^\dagger)^k a^k.\end{aligned}$$

本文旨在推导广义退化第二类 (r,s)-Stirling 数的若干性质、显式表达式和生成函数，并将其自然推广到多项式，即广义退化 (r,s)-Bell 多项式。本文的创新之处在于，通过考虑“退化玻色子正规序”，以自然的方式引入了广义退化第二类 (r,s)-Stirling 数。我们认为，这些新数将在研究许多特殊多项式和数的各种退化版本时发挥重要作用。

具体而言，本文的安排如下。在定理 2 中，我们推导了广义退化 (r, s)-贝尔多项式 $\phi^{(r,s)}{}_{n\lambda}(x)$ 的若干表达式（见 (19)），并在定理 2 和定理 3 中推导了广义退化 (r, s)-贝尔数 $\phi^{(r,s)}{}_{n\lambda} = \phi^{(r,s)}_{\lambda}{}_n(1)$ 的若干表达式。在定理 4–6 中，我们得到了广义退化 (r, s)-第二类斯特林数的若干表达式。$\phi^{(r,r)}{}_{n\lambda}(|z|^2)$ 及其生成函数 $\sum_{n=0}^{\infty}\phi^{(r,r)}_{\lambda}{}_n(|z|^2)\frac{t^n}{n!}$ 分别在定理 7 和定理 8 中用狄拉克符号表示。我们推导了退化 r-贝尔多项式 $\phi^{(r)}{}_{n\lambda}(x)$ 的生成函数 $\sum_{n=0}^{\infty}\phi^{(r)}_{\lambda}{}_n(|z|^2)\frac{t^n}{n!}$；这些多项式不同于 $\phi^{(r,r)}{}_{n\lambda}(x)$，并且是退化 r-第二类斯特林数在多项式上的自然推广（见 (43)、(44)）。定理 10 中给出了 $\phi^{(r)}{}_{n\lambda}(|z|^2)$ 的一些递推关系。定理 11 中则利用相干态以数态表示的形式，得到了 $\phi^{(r,r)}{}_{n\lambda}(|z|^2)$ 的另一种表达式。最后，我们通过引入两个新记号，定义了无符号退化拉赫数和有符号退化拉赫数，它们分别是拉赫数和带符号拉赫数的退化版本。本节其余部分将回顾本文所需的相关事实。

对于 $n \geq 0$，第二类斯特林数定义为搭配

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S_2(n,k)(x)_k, \quad (n \geq 0), \quad (\text{see } [1,4,5,10,14,16]). \tag{3}$$

对于任意 $\lambda \in \mathbb{R}$，退化指数函数定义为

$$e_\lambda^x(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(x)_{k,\lambda}\frac{t^k}{k!}, \quad e_\lambda(t) = e_\lambda^1(t), \quad (\text{see } [10, 12]), \tag{4}$$

其中，广义下降阶乘定义为

$$(x)_{0,\lambda} = 1, (x)_{n,\lambda} = x(x-\lambda)\cdots(x-(n-1)\lambda), \quad (n \geq 1). \tag{5}$$

最近，退化第二类斯特林数定义为

$$(x)_{n,\lambda}=\sum_{k=0}^{n}S_{2,\lambda}(n,k)(x)_k,\quad (n\geq 0),\quad (\text{see [7,8,10,11,12]}), \tag{6}$$

其中 $(x)_0=1$、$(x)_n=x(x-1)\cdots(x-n+1)$、$(n\geq 1)$。
注意，$\lim_{\lambda\to 0}S2,\lambda(n,k)=S_2(n,k),(n,k\geq 0)$。由 (6) 可知，

$$\frac{1}{k!}(e_\lambda(t)-1)^k=\sum_{n=k}^{\infty}S_{2,\lambda}(n,k)\frac{t^n}{n!},\quad (k\geq 0),\quad (\text{see [10]}). \tag{7}$$

众所周知，普通贝尔多项式定义为

$$e^{x(e^t-1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\phi_n(x)\frac{t^n}{n!},\quad (\text{see [9, 13, 14]}). \tag{8}$$

当 $x=1,\phi_n=\phi_n(1),(n\geq 0)$ 时，称为贝尔数。
由 (8) 可知，$\phi_n(x)=\sum_{k=0}^{n}S_2(n,k)x^k,(n\geq 0)$。
最近，退化贝尔多项式定义为

$$e^{x(e_\lambda(t)-1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\phi_{n,\lambda}(x)\frac{t^n}{n!},\quad (\text{see [8, 9, 11, 12]}). \tag{9}$$

由（9）可得

$$\phi_{n,\lambda}(x)=\sum_{k=0}^{n}S_{2,\lambda}(n,k)x^k,\quad (n\geq 0). \tag{10}$$

当 $x=1,\phi_{n,\lambda}=\phi_{n,\lambda}(1),(n\geq 0)$ 时，称为退化贝尔数。
回忆一下，a 和 $a^\dagger$ 是玻色子湮灭算符和产生算符，满足

$$[a,a^\dagger]=aa^\dagger-a^\dagger a=1,\quad (\text{see [2,3,6-8,11-13,15]}). \tag{11}$$

数态 $|m\rangle,m=0,1,\cdots$ 定义为

$$a|m\rangle=\sqrt{m}|m-1\rangle,\ a^\dagger|m\rangle=\sqrt{m+1}|m+1\rangle. \tag{12}$$

相干态 $|z\rangle$（其中 z 是复数）满足 $a|z\rangle=z|z\rangle,\langle z|z\rangle=1$。为说明其与相干态的联系，我们回顾一下，谐振子的哈密顿量为 $H=a^\dagger a$（忽略零点能），其通常的本征态 $|n\rangle(n\in\mathbb{N})$ 满足

$$H|n\rangle=n|n\rangle\ \text{ and }\ \langle m|n\rangle=\delta_{m,n},\quad (\text{see [8, 11, 13]}), \tag{13}$$

其中 $\delta_{m,n}$ 是克罗内克符号。

数算符 $a^\dagger a$ 的退化整数次幂关于玻色子算符 a 和 $a^\dagger$ 的正规序可以写成如下形式

$$(a^\dagger a)_{n,\lambda}=\sum_{k=0}^{n}S_{2,\lambda}(n,k)(a^\dagger)^k a^k,\quad (n\geq 0),\quad (\text{see [7, 8, 11]}). \tag{14}$$

我们注意到，标准的玻色子对易关系 $[a,a^\dagger]=aa^\dagger-a^\dagger a=1$ 可以在适当的函数空间 f 中形式化地考虑，令 $a=d/dx$ 且 $a^\dagger=x$（即乘以 x 的算符）。

由式 (14)，我们得到

$$\left(x\frac{d}{dx}\right)_{n,\lambda}f(x)=\sum_{k=0}^{n}S_{2,\lambda}(n,k)x^k(\frac{d}{dx})^k f(x),\quad (\text{see [7, 8, 11]}).$$

根据相干态的定义，我们注意到 $a|z\rangle = z|z\rangle$，等价地，$\langle z|a^\dagger = \langle z|\bar{z}$，其中 $z \in \mathbb{C}$，且 $\bar{z}$ 是 z 的复共轭。

在 [2, 3], Blasiak-Person-Solomon 中，考虑了第二类广义斯特林数 $S_{r,s}(n, k)$，其定义为

$$((a^\dagger)^r a^s)^n = (a^\dagger)^{n(r-s)} \sum_{k=s}^{ns} S_{r,s}(n,k)(a^\dagger)^k a^k, \tag{15}$$

其中 r、s 是满足 $r \geq s$ 的正整数，且 n 是任意正整数。他们还考虑了以下多项式，我们称之为 (r, s)-贝尔多项式：

$$\phi_n^{(r,s)}(x) = \sum_{k=s}^{ns} S_{r,s}(n,k)x^k. \tag{16}$$

当 $x = 1$ 时，$\phi_n^{(r,s)} = \phi_n^{(r,s)}(1)$ 称为 (r, s)-贝尔数。

2. 由退化玻色子正规序导出的广义退化斯特林数

在本节中，除非另有说明，r、s 是满足 $r \geq s$ 的正整数，且 n 是任意正整数。根据 (15)，我们引入由退化玻色子正规序导出的广义退化第二类 (r,s)-Stirling 数

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1}\left[x^{r-s}\left(x^s\left(\frac{d}{dx}\right)^s - k\lambda\right)\right] &= \prod_{k=0}^{n-1}\left(x^r\left(\frac{d}{dx}\right)^s - k\lambda x^{r-s}\right) \\ &= x^{n(r-s)}\sum_{k=0}^{ns} S_\lambda^{(r,s)}(n,k)x^k\left(\frac{d}{dx}\right)^k.\end{aligned} \tag{17}$$

由 (15) 和 (17)，我们看到 $\lim_{\lambda\to 0} S_\lambda^{(r,s)}(n, k) = S_{r,s}(n, k)$。

注 1. (a) 在 (17) 及下文中，算子的乘积按与 1、2、. . . 、$n-1$对应的因子顺序书写，即从左到右。(b) 若 $r = s$，则由 (15) 和 (17) 可知，对于 $0 \leq k < r$，有 $S_\lambda^{(r,r)}(n,k) = 0$。

例：令 $n = 2$，$r = 4$，$s = 2$ 代入 (17)。那么，令 $x = X$，$\frac{d}{dx} = D$，可得：

$$X^4D^2(X^4D^2 - \lambda X^2) = (x^4D^2)^2 - \lambda X^4D^2X^2,$$

其中

$$\begin{aligned}D^2X^2 &= D(XD+1)X = (DX)^2 + DX = (XD+1)^2 + XD + 1 \\ &= (XD)^2 + 3XD + 2 = X(XD+1)D + 3XD + 2 = X^2D^2 + 4XD + 2.\end{aligned}$$

因此，由 (15) 可得

$$\begin{aligned}X^4D^2(X^4D^2 - \lambda X^2) &= (x^4D^2)^2 - \lambda X^6D^2 - 4\lambda X^5D - 2\lambda X^4 \\ &= X^4\sum_{k=2}^{4} S_{4,2}(2,k)X^kD^k - \lambda X^6D^2 - 4\lambda X^5D - 2\lambda X^4 \\ &= X^4\left(S_{4,2}(2,4)X^4D^4 + S_{4,2}(2,3)X^3D^3 + (S_{4,2}(2,2) - \lambda)X^2D^2 - 4\lambda XD - 2\lambda\right) \\ &= X^4\left(X^4D^4 + 8X^3D^3 + (12 - \lambda)X^2D^2 - 4\lambda XD - 2\lambda\right).\end{aligned}$$

因此，$S_\lambda^{(4,2)}(2,4) = 1$，$S_\lambda^{(4,2)}(2,3) = 8$，$S_\lambda^{(4,2)}(2, 2) = 12 - \lambda$，$S_\lambda^{(4,2)}(2, 1) = -4\lambda$，$S_\lambda^{(4,2)}(2, 0) = -2\lambda$。

将（17）中的算子作用于 x^p，并令 $x = 1$，对于任意正整数 p，我们得到将 x 替换为 p 的（18），因此该等式作为多项式恒成立。

$$\prod_{k=1}^{n}[(x+(k-1)(r-s))_s-(n-k)\lambda]=\sum_{k=0}^{ns}S_{\lambda}^{(r,s)}(n,k)(x)_k. \tag{18}$$

由 (6) 和 (18) 可知，$S_{\lambda}^{(1,1)}(n,k) = S2_{\lambda}(n,k)$，$(n, k \geq 0)$。

鉴于（10），我们定义如下广义退化（r, s）-Bell 多项式：

$$\phi_{n,\lambda}^{(r,s)}(x)=\sum_{k=0}^{ns}S_{\lambda}^{(r,s)}(n,k)x^k. \tag{19}$$

当 $x = 1, \phi^{(r,s)}{}_{n\lambda} = \phi^{(r,s)}{}_{\lambda n}(1)$ 被称为广义退化 (r,s)-贝尔数。在这里我们看到，$\lim_{\lambda\to 0}\phi^{(r,s)}{}_{n\lambda}(x) = \phi_n^{(r,s)}(x)$。

我们观察到

$$\begin{aligned}
&e^{-x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\prod_{j=1}^{n}[(k+(j-1)(r-s))_s-(n-j)\lambda]\right)x^k\\
&\quad=e^{-x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{l=0}^{ns}S_{\lambda}^{(r,s)}(n,l)(k)_l x^k\\
&\quad=\sum_{l=0}^{ns}S_{\lambda}^{(r,s)}(n,l)e^{-x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k)_l}{k!}x^k\\
&\quad=\sum_{l=0}^{ns}S_{\lambda}^{(r,s)}(n,l)e^{-x}x^l\left(\frac{d}{dx}\right)^l e^x\\
&\quad=\sum_{l=0}^{ns}S_{\lambda}^{(r,s)}(n,l)x^l e^{-x}e^x=\phi_{n,\lambda}^{(r,s)}(x).
\end{aligned} \tag{20}$$

因此，由（20）可得以下定理。

定理 2. 对于 $n \geq 1$ 和 $r \geq s \geq 1$，我们有

$$\phi_{n,\lambda}^{(r,s)}(x)=\frac{1}{e^x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\prod_{j=1}^{n}[(k+(j-1)(r-s))_s-(n-j)\lambda]\right)x^k. \tag{21}$$

特别地，对于 $x = 1$，我们得到

$$\phi_{n,\lambda}^{(r,s)}=\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\prod_{j=1}^{n}[(k+(j-1)(r-s))_s-(n-j)\lambda]\right). \tag{22}$$

由 (21) 可知，

$$\phi_{n,\lambda}^{(r,r)}(x)=\frac{1}{e^x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{((k)_r)_{n,\lambda}}{k!}x^k. \tag{23}$$

特别地，由 (10)、(19) 和 (23) 可知，

$$\phi_{n,\lambda}^{(1,1)}(x)=\frac{1}{e^x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k)_{n,\lambda}}{k!}x^k=\phi_{n,\lambda}(x). \tag{24}$$

由 (22) 可知,

$$
\begin{aligned}
\phi_n^{(r,s)} &= \lim_{\lambda\to 0}\phi_{n,\lambda}^{(r,s)} = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{n-1}(k+j(r-s))_s \\
&= \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{n-1}\big(k+j(r-s)\big)\big(k-1+j(r-s)\big)\cdots\big(k-s+1+j(r-s)\big) \\
&= \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{n-1}(r-s)^s\left(j+\frac{k}{r-s}\right)\left(j+\frac{k-1}{r-s}\right)\cdots\left(j+\frac{k-s+1}{r-s}\right) \\
&= \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(r-s)^{sn}}{k!}\prod_{j=0}^{n-1}\prod_{l=1}^{s}\left(j+\frac{k-l+1}{r-s}\right) = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(r-s)^{sn}}{k!}\prod_{l=1}^{s}\left(n-1+\frac{k-l+1}{r-s}\right)_n \\
&= \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(r-s)^{sn}}{k!}\prod_{l=1}^{s}\frac{\Gamma(n+\frac{k-l+1}{r-s})}{\Gamma(\frac{k-l+1}{r-s})} = \frac{(r-s)^{sn}}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\prod_{l=1}^{s}\frac{\Gamma(n+\frac{k-l+1}{r-s})}{\Gamma(\frac{k-l+1}{r-s})}.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

因此，我们得到 $\phi_n^{(r,s)}$ 的以下另一种表达式。

定理 3. 对于 $r > s \geq 1$ 和 $n \geq 1$，我们有以下表达式:

$$
\phi_n^{(r,s)} = \frac{(r-s)^{sn}}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\prod_{l=1}^{s}\frac{\Gamma(n+\frac{k-l+1}{r-s})}{\Gamma(\frac{k-l+1}{r-s})}. \tag{26}
$$

由（18）和（21），我们有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{ns}S_\lambda^{(r,s)}(n,k)x^k = \phi_{n,\lambda}^{(r,s)}(x) \\
&\quad= e^{-x}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}\left(\prod_{j=1}^{n}[(p+(j-1)(r-s))_s-(n-j)\lambda]\right)x^p \\
&\quad= \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{x^m}{m!}\sum_{p=0}^{\infty}\left(\prod_{j=1}^{n}[(p+(j-1)(r-s))_s-(n-j)\lambda]\right)\frac{x^p}{p!} \\
&\quad= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{k}\frac{(-1)^{k-p}k!}{(k-p)!p!}\left(\prod_{j=1}^{n}[(p+(j-1)(r-s))_s-(n-j)\lambda]\right)\frac{x^k}{k!} \\
&\quad= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\sum_{p=0}^{k}(-1)^p\binom{k}{p}\left(\prod_{j=1}^{n}[(p+(j-1)(r-s))_s-(n-j)\lambda]\right)x^k.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

因此，根据（27），我们得到以下定理。

定理4. 对于 $r \geq s \geq 1$ 和 $n \geq 1$，我们有

$$
\begin{aligned}
&\frac{(-1)^k}{k!}\sum_{p=0}^{k}(-1)^p\binom{k}{p}\left(\prod_{j=1}^{n}[(p+(j-1)(r-s))_s-(n-j)\lambda]\right) \\
&\qquad= \begin{cases} S_\lambda^{(r,s)}(n,k), & \text{if } 0\leq k\leq ns, \\ 0, & \text{if } k>ns. \end{cases}
\end{aligned}
\tag{28}
$$

由（17）和（28），我们注意到

$$\begin{aligned} S_{\lambda}^{(r,s)}(n,k) &= \frac{(-1)^k}{k!}\sum_{p=0}^{k}(-1)^p\binom{k}{p}\prod_{j=1}^{n}\left[(p+(j-1)(r-s))_s-(n-j)\lambda\right] \\ &= \frac{(-1)^k}{k!}\sum_{p=0}^{k}(-1)^p\binom{k}{p}\prod_{j=0}^{n-1}\left[x^r\left(\frac{d}{dx}\right)^s-j\lambda x^{r-s}\right]x^p\Big|_{x=1} \\ &= \frac{(-1)^k}{k!}\prod_{j=0}^{n-1}\left[x^r\left(\frac{d}{dx}\right)^s-j\lambda x^{r-s}\right]\sum_{p=0}^{k}(-1)^p\binom{k}{p}x^p\Big|_{x=1} \\ &= \frac{(-1)^k}{k!}\prod_{j=0}^{n-1}\left[\left(x^r\left(\frac{d}{dx}\right)^s-j\lambda x^{r-s}\right)\right](1-x)^k\Big|_{x=1}. \end{aligned} \tag{29}$$

因此，由 (29) 可得以下定理。

定理 5. 对于 $\mathrm{r}\geq \mathrm{s}\geq 1$ 和 $\mathrm{n}\geq 1$，有

$$S_{\lambda}^{(r,s)}(n,k)=\frac{(-1)^k}{k!}\prod_{j=0}^{n-1}\left[\left(x^r\left(\frac{d}{dx}\right)^s-j\lambda x^{r-s}\right)\right](1-x)^k\Big|_{x=1}. \tag{30}$$

由 (30) 可知

$$\begin{aligned} S_{2,\lambda}(n,k)=S_{\lambda}^{(1,1)}(n,k) &= \frac{(-1)^k}{k!}\prod_{j=0}^{n-1}\left[\left(x\frac{d}{dx}-j\lambda\right)\right](1-x)^k\Big|_{x=1} \\ &= \frac{(-1)^k}{k!}\left(x\frac{d}{dx}\right)_{n,\lambda}\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}(-1)^p x^p\Big|_{x=1} \\ &= \frac{(-1)^k}{k!}\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}(-1)^p(p)_{n,\lambda}, \quad (n\geq 1). \end{aligned}$$

由 (18) 可知

$$\sum_{k=0}^{nr}S_{\lambda}^{(r,r)}(n,k)(x)_k=\prod_{k=1}^{n}[(x)_r-(n-k)\lambda]=((x)_r)_{n,\lambda}. \tag{31}$$

因此，由 (31) 可得

$$((x)_r)_{n,\lambda}=\sum_{k=0}^{nr}S_{\lambda}^{(r,r)}(n,k)(x)_k. \tag{32}$$

特别地，对于 $\mathrm{r}=1$，我们有

$$\sum_{k=0}^{n}S_{\lambda}^{(1,1)}(n,k)(x)_k=(x)_{n,\lambda}=\sum_{k=0}^{n}S_{2,\lambda}(n,k)(x)_k. \tag{33}$$

因此，由（33）可得

$$S_{\lambda}^{(1,1)}(n,k)=S_{2,\lambda}(n,k), \ \ (n,\ k\geq 0). \tag{34}$$

由（30）可知，

$$\begin{aligned} S_{\lambda}^{(r,r)}(n,k) &= \frac{(-1)^k}{k!}\prod_{j=0}^{n-1}\left(x^r\left(\frac{d}{dx}\right)^r-j\lambda\right)\sum_{p=0}^{k}(-1)^p\binom{k}{p}x^p\Big|_{x=1} \\ &= \frac{(-1)^k}{k!}\sum_{p=0}^{k}(-1)^p\binom{k}{p}((p)_r)_{n,\lambda}. \end{aligned} \tag{35}$$

因此，由（35）可得以下定理。

定理6。对于 r,n ≥ 1，有

$$S_{\lambda}^{(r,r)}(n,k)=\frac{(-1)^k}{k!}\sum_{p=0}^{k}(-1)^p\binom{k}{p}((p)_r)_{n,\lambda}. \tag{36}$$

由式 (36)，可知

$$S_{\lambda}^{(r,r)}(1,r)=\frac{(-1)^r}{r!}\sum_{p=r}^{r}\binom{r}{p}(p)_r(-1)^p=\frac{(-1)^r}{r!}\binom{r}{r}(-1)^r r!=1. \tag{37}$$

我们回顾一下，$\phi_{n,\ \lambda}$ 和 S2, λ(n,k) 与称为相干态的特殊量子态有关，这些相干态定义为谐振子本征态的线性组合，$H=a^{\dagger}a$，$H|n\rangle=n|n\rangle$，$\langle n|m\rangle=\delta_{m,\ n}$并定义为 $|z\rangle=e^{-\frac{|z|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z}{\sqrt{n}}|n\rangle$，其中 $\langle z|z\rangle=1$，z 为复数，（参见 [3,7,11-14]）。

由式 (17)，有

$$\prod_{k=0}^{n-1}[(a^{\dagger})^{r-s}((a^{\dagger})^s a^s-k\lambda)]=(a^{\dagger})^{n(r-s)}\sum_{k=0}^{rs}S_{\lambda}^{(r,s)}(n,k)(a^{\dagger})^k a^k. \tag{38}$$

由式 (24) 和 (38)，得到

$$\begin{aligned}\langle z|e_{\lambda}^{a^{\dagger}a}(t)|z\rangle&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\langle z|(a^{\dagger}a)_{n,\lambda}|z\rangle\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\langle z|\prod_{k=1}^{n}(a^{\dagger}a-(n-k)\lambda)|z\rangle\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}S_{2,\lambda}^{(1,1)}(n,k)(\overline{z})^k z^k\langle z|z\rangle\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\phi_{n,\lambda}^{(1,1)}(|z|^2)=e^{|z|^2(e_{\lambda}(t)-1)}.\end{aligned} \tag{39}$$

由（35）和（38）可知,

$$\begin{aligned}\langle z|\prod_{k=0}^{n-1}[(a^{\dagger})^r a^r-k\lambda]|z\rangle&=\sum_{k=0}^{nr}S_{\lambda}^{(r,r)}(n,k)\langle z|(a^{\dagger})^k a^k|z\rangle=\sum_{k=0}^{nr}S_{\lambda}^{(r,r)}(n,k)(\overline{z})^k z^k\langle z|z\rangle\\&=\sum_{k=0}^{nr}S_{\lambda}^{(r,r)}(n,k)(|z|^2)^k=\phi_{n,\lambda}^{(r,r)}(|z|^2)\\&=\sum_{k=0}^{nr}\frac{(-1)^k}{k!}\sum_{p=0}^{k}(-1)^p\binom{k}{p}((p)_r)_{n,\lambda}(|z|^2)^k\\&=\sum_{p=0}^{nr}\sum_{k=p}^{nr}\frac{(-1)^{k-p}}{k!}\binom{k}{p}((p)_r)_{n,\lambda}(|z|^2)^k.\end{aligned} \tag{40}$$

特别地，当 $|z|=1$ 时，我们有

$$\begin{aligned}\langle z|\prod_{k=0}^{n-1}[(a^{\dagger})^r a^r-k\lambda]|z\rangle&=\phi_{n,\lambda}^{(r,r)}=\sum_{k=0}^{nr}S_{\lambda}^{(r,r)}(n,k)\\&=\sum_{p=0}^{nr}\sum_{k=p}^{nr}\frac{(-1)^{k-p}}{k!}\binom{k}{p}((p)_r)_{n,\lambda}.\end{aligned} \tag{41}$$

因此，由（40）和（41）可得以下定理。

定理 7. 对于 r,n ≥ 1，我们有

$$\phi_{n,\lambda}^{(r,r)}(|z|^2) = \langle z|\prod_{k=0}^{n-1}[(a^\dagger)^r a^r - k\lambda]|z\rangle = \sum_{p=0}^{nr}\sum_{k=p}^{nr}\frac{(-1)^{k-p}}{k!}\binom{k}{p}((p)_r)_{n,\lambda}(|z|^2)^k.$$

特别地，当 $|z| = 1$ 时，我们得到

$$\phi_{n,\lambda}^{(r,r)} = \langle z|\prod_{k=0}^{n-1}[(a^\dagger)^r a^r - k\lambda]|z\rangle = \sum_{p=0}^{nr}\sum_{k=p}^{nr}\frac{(-1)^{k-p}}{k!}\binom{k}{p}((p)_r)_{n,\lambda}.$$

现在，我们观察到 (40)，即

$$\begin{aligned}\langle z|e_\lambda^{(a^\dagger)^r a^r}(t)|z\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\langle z|((a^\dagger)^r a^r)_{n,\lambda}|z\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\langle z|\prod_{k=0}^{n-1}[(a^\dagger)^r a^r - k\lambda]|z\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\phi_{n,\lambda}^{(r,r)}(|z|^2).\end{aligned} \tag{42}$$

因此，由（42）式，我们得到以下定理。

定理 8. 设 r 为正整数。则 $\phi^{(r,r)}$ n λ $(|z|^2)$ 的生成函数为

$$\langle z|e_\lambda^{(a^\dagger)^r a^r}(t)|z\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\phi_{n,\lambda}^{(r,r)}(|z|^2)\frac{t^n}{n!}.$$

我们回顾一下，退化 r-第二类斯特林数定义为

$$(x+r)_{n,\lambda} = \sum_{k=0}^{n}\left\{{n+r \atop k+r}\right\}_{r,\lambda}(x)_k,\ \ (n\geq 0),\ \ (\text{see [8, 12]}). \tag{43}$$

退化 r-贝尔多项式定义为

$$\phi_{n,\lambda}^{(r)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\left\{{n+r \atop k+r}\right\}_{r,\lambda}x^k,\ \ (n\geq 0),\ \ (\text{see [8, 12]}). \tag{44}$$

$x = 1$, $\phi^{(r)}{}_{n\,\lambda} = \phi^{(r)}{}_{\lambda\,n}(1)$ 称为退化 r-贝尔数。

现在，我们从 [8] 回顾到的是。

$$(a^\dagger a + r)_{n,\lambda} = \sum_{k=0}^{n}\left\{{n+r \atop k+r}\right\}_{r,\lambda}(a^\dagger)^k a^k,\ \ (n\geq 0). \tag{45}$$

由（45）可得

$$\begin{aligned}\langle z|e_{\lambda}^{a^{\dagger}a+r}(t)|z\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\langle z|(a^{\dagger}a+r)_{n,\lambda}|z\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\begin{Bmatrix} n+r \\ k+r \end{Bmatrix}_{r,\lambda}\langle z|(a^{\dagger})^k a^k|z\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\begin{Bmatrix} n+r \\ k+r \end{Bmatrix}_{r,\lambda}(\overline{z})^k z^k\langle z|z\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\begin{Bmatrix} n+r \\ k+r \end{Bmatrix}_{r,\lambda}(|z|^2)^k = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\phi_{n,\lambda}^{(r)}(|z|^2) \\ &= e_{\lambda}^{r}(t)e^{|z|^2(e_{\lambda}(t)-1)}.\end{aligned} \tag{46}$$

因此，由（46）可得以下定理。

定理 9. 设 \(r\) 为非负整数。则我们有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\phi_{n,\lambda}^{(r)}(|z|^2)\frac{t^n}{n!} = \langle z|e_{\lambda}^{a^{\dagger}a+r}(t)|z\rangle = e_{\lambda}^{r}(t)e^{|z|^2(e_{\lambda}(t)-1)}.$$

令 g(t) 为 $=\sum_{n=0}^{\infty}\phi_{\lambda}^{(r)}{}_{n}(|z|^2)\frac{t^n}{n!}$ $=\langle z|e_{a^{\dagger}a+r\lambda}(t)|z\rangle = e_{\lambda}^{r}(t)e^{|z|^2(e_{\lambda}(t)-1)}$。那么，由级数表达式可得

$$\frac{dg(t)}{dt} = \sum_{n=0}^{\infty}\phi_{n+1,\lambda}^{(r)}(|z|^2)\frac{t^n}{n!}. \tag{47}$$

由 g(t) 在括号记法中的表达式可得

$$\begin{aligned}\frac{dg(t)}{dt} &= \langle z|(a^{\dagger}a+r)e_{\lambda}^{a^{\dagger}a+r-\lambda}(t)|z\rangle \\ &= e_{\lambda}^{-\lambda}(t)\Big(\langle z|a^{\dagger}e_{\lambda}^{aa^{\dagger}+r}(t)a|z\rangle + r\langle z|e_{\lambda}^{a^{\dagger}a+r}(t)|z\rangle\Big) \\ &= e_{\lambda}^{-\lambda}(t)\Big(|z|^2\langle z|e_{\lambda}^{a^{\dagger}a+r+1}(t)|z\rangle + r\langle z|e_{\lambda}^{a^{\dagger}a+r}(t)|z\rangle\Big) \\ &= e_{\lambda}^{-\lambda}(t)\Big(|z|^2\sum_{k=0}^{\infty}\phi_{k,\lambda}^{(r+1)}(|z|^2)\frac{t^k}{k!} + r\sum_{k=0}^{\infty}\phi_{k,\lambda}^{(r)}(|z|^2)\frac{t^k}{k!}\Big) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}(-\lambda)^l l!\frac{t^l}{l!}\sum_{k=0}^{\infty}\Big(|z|^2\phi_{k,\lambda}^{(r+1)}(|z|^2) + r\phi_{k,\lambda}^{(r)}(|z|^2)\Big)\frac{t^k}{k!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\Bigg(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-\lambda)^{n-k}(n-k)!\Big(|z|^2\phi_{k,\lambda}^{(r+1)}(|z|^2) + r\phi_{k,\lambda}^{(r)}(|z|^2)\Big)\Bigg)\frac{t^n}{n!}.\end{aligned} \tag{48}$$

由 g(t) 的最后一个表达式，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{dg(t)}{dt} &= \Big(re_{\lambda}^{-\lambda}(t) + |z|^2 e_{\lambda}^{1-\lambda}(t)\Big)e_{\lambda}^{r}(t)e^{|z|^2(e_{\lambda}(t)-1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\big(r(-\lambda)_{k,\lambda} + |z|^2(1-\lambda)_{k,\lambda}\big)\frac{t^k}{k!}\sum_{m=0}^{\infty}\phi_{m,\lambda}^{(r)}(|z|^2)\frac{t^m}{m!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\big(r(-\lambda)_{k,\lambda} + |z|^2(1-\lambda)_{k,\lambda}\big)\phi_{n-k,\lambda}^{(r)}(|z|^2)\frac{t^n}{n!}.\end{aligned} \tag{49}$$

现在，由（47）、（48）和（49）可得下一个结果。

定理 10. 设 r、n 为非负整数，则有以下递推关系：

$$\begin{aligned}\phi_{n+1,\lambda}^{(r)}(|z|^2) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-\lambda)^{n-k}(n-k)!\Big(|z|^2\phi_{k,\lambda}^{(r+1)}(|z|^2)+r\phi_{k,\lambda}^{(r)}(|z|^2)\Big)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\big(r(-\lambda)_{k,\lambda}+|z|^2(1-\lambda)_{k,\lambda}\big)\phi_{n-k,\lambda}^{(r)}(|z|^2).\end{aligned}$$

特别地，对于 $|z|=1$，我们得到

$$\begin{aligned}\phi_{n+1,\lambda}^{(r)} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-\lambda)^{n-k}(n-k)!\Big(\phi_{k,\lambda}^{(r+1)}+r\phi_{k,\lambda}^{(r)}\Big)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\big(r(-\lambda)_{k,\lambda}+(1-\lambda)_{k,\lambda}\big)\phi_{n-k,\lambda}^{(r)}.\end{aligned}$$

利用相干态关于数态的表示计算（40）的左侧，我们得到

$$\begin{aligned}&\langle z|((a^\dagger)^r a^r)_{k,\lambda}|z\rangle = \langle z|\Pi_{l=0}^{k-1}[(a^\dagger)^r a^r - l\lambda]|z\rangle\\ &= e^{-\frac{|z|^2}{2}}e^{-\frac{|z|^2}{2}}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\overline{z})^m(z)^n}{\sqrt{m!}\sqrt{n!}}((n)_r)_{k,\lambda}\langle m|n\rangle\\ &= e^{-|z|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(|z|^2)^n}{n!}((n)_r)_{k,\lambda} = e^{-|z|^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(|z|^2)^n}{n!}((n)_r)_{k,\lambda},\end{aligned}\tag{50}$$

其中，r 和 k 为正整数。

因此，由（40）和（50）可得下一个定理。

定理 11. 设 r、k 为正整数。则有

$$\phi_{k,\lambda}^{(r,r)}(|z|^2) = e^{-|z|^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(|z|^2)^n}{n!}((n)_r)_{k,\lambda}.$$

特别地，当 $|z|=1$ 时，我们得到

$$\phi_{k,\lambda}^{(r,r)} = \frac{1}{e}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}((n)_r)_{k,\lambda}.$$

最后，我们引入以下两种记号：

$$\langle\langle x\rangle\rangle_{0,\lambda}=1, \langle\langle x\rangle\rangle_{n,\lambda} = \prod_{k=1}^{n}(x+(k-1)-(n-k)\lambda), \quad (n\geq 1).\tag{51}$$

and

$$((x))_{0,\lambda}=1, ((x))_{n,\lambda} = \prod_{k=1}^{n}(x-(k-1)+(n-k)\lambda), \quad (n\geq 1).\tag{52}$$

我们可以考虑如下定义的无符号退化拉赫数：

$$\langle\langle x\rangle\rangle_{n,\lambda} = \sum_{k=0}^{n}L_\lambda(n,k)(x)_k, \quad (k\geq 0), \quad (n\geq 0).\tag{53}$$

此外，有符号退化拉赫数由下式给出

$$((x))_{n,\lambda} = \sum_{k=0}^{n}L_\lambda^1(n,k)\langle x\rangle_k, \quad (n\geq 0).\tag{54}$$

注意，$\lim_{\lambda\to 0} L_\lambda(n,k) = L(n,k)$（$n, k \geq 0$）是普通拉赫数，其由 $\langle x\rangle_n = \sum_{k=0}^{n} L(n,k)(x)_k$ 给出，其中 $\langle x\rangle_0 = 1$，$\langle x\rangle_n = x(x+1)\cdots(x+n-1)$（$n \geq 1$）（见 [3]）。此外，$\lim_{\lambda\to 0} L_\lambda^{1}(n,k) = L^{1}(n,k)$，其中 $L^{1}(n,k)$ 是有符号拉赫数，由 $(x)_n = \sum_{k=0}^{n} L^{1}(n,k)\langle x\rangle_k$ 给出。我们还可由式（18）和（53）观察到

$$S_\lambda^{(2,1)}(n,k) = L_\lambda(n,k), \quad (n \geq 1).$$

3. 结论

近年来，对一些特殊数和多项式的退化版本的研究引起了许多数学家的关注，并取得了许多有趣的成果。这些退化版本包括第一类和第二类退化斯特林数、第二类退化伯努利数以及退化贝尔数与多项式。

本文通过考察 $\prod_{k=0}^{n-1}\left((a^\dagger)^r a^s - k\lambda(a^\dagger)^{r-s}\right)$ 的玻色子正规序，引入了广义退化第二类 (r,s)-Stirling 数和广义退化 (r,s)-Bell 多项式。我们研究了这些数与多项式的一些性质、显式表达式及生成函数。它们是 Blasiak-Person-Solomon 早期研究中相应对象的退化版本（见 [4]）。

预计这些新数将在研究各种特殊多项式和数的退化版本时发挥重要作用，正如退化第二类斯特林数在这类研究中发挥了重要作用一样。

我们希望继续研究许多特殊多项式和数的各种退化版本，以及它们在物理学、科学、工程学和数学中的应用。

致谢
Th作者感谢 Jangjeon数学科学研究所对本研究的支持。 .

数据和材料的可获取性 不适用。

经费支持
第三位作者获韩国国家研究基金会基础科学研究项目（NRF-2021R1F1A1050151）资助。

伦理审批与参与知情同意
作者声明，本文的撰写不存在任何伦理问题。

参考文献

[1] Aydin, M. S.; Acikgoz, M.; Araci, S. 关于退化 Hurwitz-ζ 函数的一种新构造及其若干应用。Proc. jangjeon Math. Soc. 25 (2022), no. 2, 195-203. [2] Blasiak, P.; Horzela, A.; Person, K. A.; Solomon, A. I.; Duchamp, G. H. E. 组合学与玻色子正规序：入门介绍。Amer. J. Phys. 75 (2007), no. 7, 639-646. [3] Blasiak, P.; Penson, K. A.; Solomon, A. I.; 玻色子正规序的一般问题。Phys. Lett. A 309 (2003), no. 3-4, 198-205.[4] Carlitz, Leonard 数组研究。Amer. J. Math. 54 (1932), no. 4, 739-752. [5] Comtet, L. 高等组合学：有限与无限展开的艺术。修订增补版。D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1974. [6] Katriel, J. 贝尔数与相干态。Phys Lett A. 2000;273(3):159-161. [7] Kim, T.; Kim, D. S.; 通过玻色子算符得到的一些退化 r-斯特林数恒等式。Russ. J. Math. Phys. 29 (2022), no. 4, 508-517.

[8] Kim, T.; Kim, D. S. 通过玻色子算符得到的退化 r-惠特尼数与退化 r-道林多项式。Adv. in Appl. Math. 140 (2022), Paper No. 102394, 21 pp. [9] Kim, T.; Kim, D. S. 与退化贝尔多项式相关的截断多项式的一些恒等式。Russ. J. Math. Phys. 28 2021 3, 342 355 ( ), no. - Kim, T.; Kim, D. S.; Dolgy, D. V.; Park, J.-W. 与退化 Lah-贝尔多项式相关的退化二项分布和泊松随机变量。Open Math. 19 (2021), no. 1, 1588-1597. [11] Kim, T.; Kim, D. S.; Kim, H. K. 数算符退化积分幂的正规序及其应用。Appl. Math. Sci. Eng. 30 (2022), no. 1, 440-447. [12] Kim, T.; Kim, D. S.; Kim, H. K. 源自退化正规序的退化 r-贝尔多项式。J. Math. 2022, Art. ID 2626249, 6 pp. [13] Perelomov A. 广义相干态及其应用。物理学丛书与专著。Berlin: Springer-Verlag; 1986. [14] Roman, S. 示性演算。纯数学与应用数学丛书，第 111 卷。Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jo- vanovich, Publishers], New York, 1984.[15] Schork, M. 正规序组合学方面的最新进展。Enumer. Comb. Appl. 1 (2021), no. 2, Paper No. S2S2, 40 pp. [16] Simsek, Y. 关于 q-变形斯特林数。Int. J. Math. Comput. 15 (2012), no. 2, 70-80.

韩国首尔 139-701 光云大学数学系 电子邮箱：tkkim@kw.ac.kr 韩国首尔 121-742 西江大学数学系 电子邮箱：dskim@sogang.ac.kr 韩国庆山市 38430 大邱天主教大学数学教育系 电子邮箱：hkkim@cu.ac.kr