基于 Pegram 算子的全新有符号整数值自回归模型推断

Yinong Wu[1], Dehui Wang[2]

摘要。本文基于扩展二项分布和 Pegram 算子，为定义在 $\boldsymbol{Z}$ 上的平稳离散时间序列提出一种全新的 SINARS(1) 模型。该模型能够有效刻画某些非平稳时间序列经差分后生成的正负整数值序列。本文探讨了该模型的性质。针对模型参数估计，本文考虑了条件最大似然法和尤尔-沃克法，并证明了条件最大似然法的渐近正态性。通过这两种方法，我们对该模型进行了模拟，并与此前提出的若干相关模型进行了比较。该模型能够处理正自相关或负自相关数据。最后，本文使用所提出的模型分析巴巴多斯差分后的每日新增病例数。

arXiv:2305.04319v1 [stat.AP] 7 May 2023

关键词和短语：渐近分布、Skellam 分布、扩展二项分布、Pegram 算子、条件最大似然估计。

1 引言

众所周知，对计数时间序列进行建模在金融和医学应用中都发挥着至关重要的作用。在某些情况下，一些非平稳时间序列经差分后会产生由正整数和负整数组成的序列。因此，对整数值序列进行建模极为重要。已有许多模型用于分析定义在 $\boldsymbol{Z}$.

[1]吉林大学数学学院，中国吉林省长春市前进大街2699号，邮编130012。[2]辽宁大学数学学院，中国辽宁省沈阳市崇山中路66号，邮编110000。

例如，Andersson 和 Karlis [8] 提出了具有 Skellam 创新的 SINAR 过程（SINARS），能够处理取值为正整数和负整数的数据。Kachour 等人 [21], 还提出了带有有符号二项稀疏算子的 p 阶整数值自回归过程（INARS(p)），将阶数从一阶扩展至 p 阶。作为 INARS(p) 的扩展，Zhang 等人 [45] 提出了带有有符号广义幂级数稀疏化算子的 INAR(p)过程，可用于处理负整数值时间序列。作为补充，Wang 等人 [39] 提出了带有有符号稀疏化算子的广义RCINAR(p)过程。此外，Chesneau 和 Kachour [12] 考虑了具有 Rademacher(p)分布的 P-INAR(1)过程，以处理定义在 $\boldsymbol{Z}$上的数据。

ZOIPLINAR(1)模型由Mohammadi等人于 [29] 2021年提出，是一种创新项服从零膨胀和一膨胀泊松-林德利分布的平稳INAR(1)模型。本文提出一种一阶整数值时间序列模型，其创新项结构为零膨胀和一膨胀类型，用于描述含有大量零和一的非负数据。随后，采用零膨胀和一膨胀INAR模型，对两个医学序列进行分析，其中包括来自巴巴多斯的新增COVID-19感染序列数量以及 [30], 脊髓灰质炎数据。

Shirozhan 和 Mohammadpour [37], 提出了一种基于 Pegram 算子与稀疏化算子（MPT）相结合、具有序列相依创新的 INAR(1) 模型，该模型为经验建模提供了更大的灵活性。

由于 PDINAR 模型主要用于处理具有 Skellam 边缘分布的序列，我们希望将其扩展到无约束边缘分布。基于这些研究，我们将 PDINAR 模型与 Pegram 算子相结合。以下方程描述了 PDI-NAR(1) 时间序列模型：$Z_t = \delta S_{\alpha,\ \theta}(Z_{t-1}) + \varepsilon_t$，其中 δ 是自相关的符号，$S_{\alpha,\ \theta}(Z)$ 是扩展二项算子，$\{\varepsilon_t\}$ 是一个由独立同分布的 Skellam 随机变量组成的序列，其均值为 $\theta_1 - \theta_2$，方差为 $\theta_1 + \theta_2$。该模型由 Alzaid 和 Omair [7] 提出，并应用于金融数据、沙特电信公司（STC）股票以及

电力库存。

本文基于 Pegram 算子提出了一种新的带符号整数值自回归过程。本文其余部分安排如下：首先介绍预备知识。第 2 节给出扩展二项分布和 Skellam 分布的定义及基本性质，并介绍所提出模型的性质。第 3 节介绍用于估计未知参数的条件最大似然法（CML）和 Yuler-Walker 法。结果表明，CML 估计量具有一致性和渐近正态性。第 4 节报告一些模拟结果。第 5 节介绍该模型在 Barbodos 新增病例数上的应用。第 6 节总结研究结果并展望后续工作。证明的详细内容见附录。

2 定义与基本性质

本部分首先介绍 Skellam 分布的定义，随后介绍这两个分布的基本性质，最后介绍模型的基本性质。

2.1 Skellam 分布

根据 [20], 的定义，若随机变量 $Z \in \mathrm{Z}$ 服从参数为 $\theta_1 \geq 0$ 和 $\theta_2 \geq 0$ 的 Skellam 分布，则当

$$P(Z=z) = e^{-\theta_1-\theta_2}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{z/2} I_z\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right), \quad z = \ldots,-1,0,1,\ldots$$

其中

$$I_y(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^y \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x^2}{4}\right)^k}{k!(y+k)!} \tag{1}$$

是第一类修正贝塞尔函数。为方便起见，我们用 $PD(\theta_1,\theta_2)$ 来表示 Skellam 分布。

备注 1。Alzaid 等人 *[5]* 给出了 Skellam 分布 $P(Z =$的另一种等价公式

$$z) = e^{-\theta_1-\theta_2}\left(\theta_1\theta_2\right)^{\max\{0,-z\}} \theta_{10}^{y} \widetilde{F}_1\left(|z|+1,\theta_1\theta_2\right), \quad z = \cdots,-1,0,1,\cdots$$

2.2 扩展二项分布

首先考虑由 Alzaid 和 Omair [6] 首次提出的扩展二项分布的原始定义，我们可以令 $W \sim PD(\theta_1, \theta_2)$与 $R \sim PD(\theta_3, \theta_4)$相互独立，则其和为 $Z = W + R \sim PD(\theta_1 + \theta_3, \theta_2 + \theta_4)$,

t于是，条件分布 $W|Z \sim ConditionalPD(z, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ 即

$$P(W = w|Z = z) = \frac{P(W = w)P(R = z - w)}{P(Z = z)}$$
$$= \frac{\left(\frac{\theta_1}{\theta_1+\theta_3}\right)^w {}_0^w\widetilde{F}_1\left(;w+1;\theta_1\theta_2\right)\left(\frac{\theta_3}{\theta_1+\theta_3}\right)^{z-w} {}_0\widetilde{F}_1\left(;z-w+1;\theta_3\theta_4\right)}{{}_0\widetilde{F}_1\left(;z+1;\left(\theta_1+\theta_3\right)\left(\theta_2+\theta_4\right)\right)},$$
$$w = \ldots, -1, 0, 1, \ldots \tag{2}$$

根据约束条件 $\theta_1\theta_4 = \theta_2\theta_3$ 以及以下重新参数化:

$z = z$, $p = \frac{\theta_1}{\theta_1+\theta_3}$, $q = 1 - p$, $\theta = (\theta_1 + \theta_3)(\theta_2 + \theta_4)$，我们推导出扩展二项分布。

若随机变量 $X \in$ Z 具有参数为 $0 < p < 1$、$q = 1 - p$、 $\theta > 0$ 和 $z \in \in$Z 的扩展二项分布，记为 $X \sim EB(z, p, \theta)$，则

$$P(X = x) = \frac{p^x q^{z-x} {}_0\widetilde{F}_1\left(;x+1;p^2\theta\right) {}_0\widetilde{F}_1\left(;z-x+1;q^2\theta\right)}{{}_0\widetilde{F}_1(;z+1;\theta)} \qquad x = \ldots, -1, 0, 1, \ldots \tag{3}$$

~其中，正则化超几何函数 ${}_0F_1$ 定义为:

$${}_0\widetilde{F}_1\left(;y;\theta\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!\Gamma(y+k)}. \tag{4}$$

为方便起见，我们用 $EB(z, p, \theta)$ 来描述扩展二项分布。

2.2.1 扩展二项薄化算子

Alzaid 和 Omair 提出的扩展二项薄化算子 [7] 表示如下

$$S_{\alpha,\theta}(Z) = (\operatorname{sgn} Z)\sum_{i=1}^{|Z|} Y_i + \sum_{i=1}^{W(Z)} B_i \tag{5}$$

其中 Y_i 是一列独立同分布的随机变量，与 B_i、 Z 和 $W(Z)$ 相互独立，且满足

$P(Y_i = 1) = 1 - P(Y_i = 0) = \alpha$， $\{B_i\}$ 是一个独立同分布且独立于 Y_i的随机变量序列,

Z 和 $W(Z)$，使得

$P(B_i = 1) = P(B_i = -1) = \alpha(1-\alpha)$ and $P(B_i = 0) = 1 - 2\alpha(1-\alpha)$,

且 $W(Z)|Z = z$是一个服从参数为（$|z|,\theta$）的贝塞尔分布的随机变量 [19]。

由于 $\sum_{i=1}^{|Z|} Y_i|Z = z \sim$ binomial($|z|,\alpha$), $\sum_{i=1}^{W(Z)} B_i|Z = z$的分布的特征函数为

$$\Phi(t) = \frac{{}_0\widetilde{F}_1\left(;|z|+1;\theta\left(\alpha(1-\alpha)e^{it} + \alpha(1-\alpha)e^{-it} + 1 - 2\alpha(1-\alpha)\right)\right)}{{}_0\widetilde{F}_1(;|z|+1;\theta)}. \tag{6}$$

并且显然，$S_{\alpha,\theta}(Z)|Z = z \sim EB(z,\alpha,\theta)$。

2.3 模型与性质

定义平稳 MESINAR(1) Z_t 如下

$$Z_t = (\phi, \delta S_{\alpha,\theta}(Z_{t-1})) * (1-\phi, \varepsilon_t) \tag{7}$$

其中 $\delta = 1$ 或 -1 由相关性的符号决定，Pegram算子 '*' 将两个独立的 P 和 Q 按相应的混合权重 ϕ 和 $1-\phi$进行混合，从而生成随机变量 $Z = (\phi, P) * (1-\phi, Q)$。$\{\varepsilon_t\}$ 是一列均值为 $\theta_1 - \theta_2$、方差为 $\theta_1 + \theta_2$的独立同分布的Skellam随机变量。

由于该过程具有马尔可夫性，一步转移概率为

$$\begin{aligned}
P(Z_t = z_t|Z_{t-1} = z_{t-1}) &= \phi P(\delta S_{\alpha,\theta}(Z_{t-1}) = z_t) + (1-\phi)P(\varepsilon_t = z_t) \\
&= \phi P(S_{\alpha,\theta}(Z_{t-1}) = \delta z_t) + (1-\phi)P(\varepsilon_t = z_t) \\
&= \phi p^{\delta z_t}(1-p)^{z_{t-1}-\delta z_t}\frac{{}_0\widetilde{F}_1(;\delta z_t+1;p^2\theta)_0\widetilde{F}_1(;z_{t-1}-\delta z_t+1;(1-p)^2\theta)}{{}_0\widetilde{F}_1(;z_{t-1}+1;\theta)} \\
&\quad + (1-\phi)e^{-\theta_1-\theta_2}(\theta_1\theta_2)^{\max(0,-z_t)}\theta_1^{z_t}{}_0\widetilde{F}_1(;|z_{t-1}|+1;\theta_1\theta_2)
\end{aligned} \tag{8}$$

条件均值为

$$E[Z_t|Z_{t-1}] = \phi p\delta Z_{t-1} + (1-\phi)(\theta_1 - \theta_2). \tag{9}$$

条件方差为

$$Var[Z_t|Z_{t-1}] = \phi\left(p(1-p)Z_{t-1} + 2p(1-p)\theta\frac{{}_0\widetilde{F}_1(;Z_{t-1}+2;\theta)}{{}_0\widetilde{F}_1(;Z_{t-1}+1;\theta)}\right) + (1-\phi)(\theta_1+\theta_2)$$
$$+ \phi(1-\phi)(p\delta Z_{t-1} - (\theta_1-\theta_2))^2. \tag{10}$$

无条件均值为

$$E[Z_t] = \frac{(1-\phi)(\theta_1-\theta_2)}{1-\phi p\delta}. \tag{11}$$

无条件方差为

$$\begin{aligned} Var[Z_t] = &\frac{p(1-p)\phi(1-\phi)(\theta_1-\theta_2)}{(1-\phi^2p^2-(1-\phi)p^2)(1-\phi p\delta)} - \frac{2\phi(1-\phi)^3p\delta(\theta_1-\theta_2)^2}{(1-\phi^2p^2-(1-\phi)p^2)(1-\phi p\delta)} \\ &- \frac{(1-\phi)^2(\theta_1-\theta_2)^2}{(1-\phi p\delta)^2} + \frac{2\phi p(1-p)\theta}{(1-\phi^2p^2-(1-\phi)p^2)}E_{Z_{t-1}}[\frac{{}_0\widetilde{F}_1(;Z_{t-1}+2;\theta)}{{}_0\widetilde{F}_1(;Z_{t-1}+1;\theta)}] \\ &+ \frac{(1-\phi)(\theta_1+\theta_2+(2-\phi)(\theta_1-\theta_2)^2)}{(1-\phi^2p^2-(1-\phi)p^2)}. \end{aligned} \tag{12}$$

对于任意 $k \in$Z，协方差为

$$\gamma_k = Cov\left[Z_{t+k}, Z_t\right] = (\phi p\delta)^k Var[Z_t]. \tag{13}$$

3 估计

接下来，我们通过两种方法估计未知参数：CML估计法和 Yule-Walker 法。所有估计均基于观测数据（Z_0， Z_1，…， Z_n）。

3.1 CML估计法

3.1.1 模型的条件最大似然法估计

为简化起见，令 $\beta^2 = \theta$, $\boldsymbol{\omega} = (\phi, p, \beta, \theta_1, \theta_2)^\top$，且 $\boldsymbol{\omega}_0$是$\boldsymbol{\omega}$的真实参数值。该模型的条件似然函数定义为

$$L_n(\boldsymbol{\omega}) = P(Z_0 = z_0)\prod_{t=1}^{n} P(Z_t = z_t|Z_{t-1} = z_{t-1})$$

$$
\begin{aligned}
&= P(Z_0 = z_0)\prod_{t=1}^{n} \phi P(S_{p,\beta^2}(Z_{t-1}) = \delta z_t) + (1-\phi)P(\varepsilon_t = z_t) \\
&= P(Z_0 = z_0)\prod_{t=1}^{n} \phi p^{\delta z_t}(1-p)^{z_{t-1}-\delta z_t} \frac{{}_0\widetilde{F}_1(;\delta z_t+1;p^2\theta){}_0\widetilde{F}_1(;z_{t-1}-\delta z_t+1;(1-p)^2\beta^2)}{{}_0\widetilde{F}_1(;z_{t-1}+1;\beta^2)} \\
&\qquad + (1-\phi)e^{-\theta_1-\theta_2}(\theta_1\theta_2)^{\max\{0,-z_t\}}\theta_1^{z_t}{}_0\widetilde{F}_1(;|z_{t-1}|+1;\theta_1\theta_2) \qquad (14)
\end{aligned}
$$

注 2. 我们可以利用第一类修正贝塞尔函数重写转移概率，以便估计 $\boldsymbol{\omega}$。回顾 $\beta^2 = \theta$ ($\theta > 0$, $\beta > 0$)，因此

$$
\begin{aligned}
P(Z_t = z_t | Z_{t-1} = z_{t-1}) &= \phi P(S_{\alpha,\theta}(Z_{t-1}) = \delta z_t) + (1-\phi)P(\varepsilon_t = z_t) \\
&= \phi \frac{I_{\delta z_t}(2p\beta) I_{z_{t-1}-\delta z_t}(2(1-p)\beta)}{I_{z_{t-1}}(2\beta)} \\
&\quad + (1-\phi)e^{-\theta_1-\theta_2}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{z_t/2} I_{z_t}\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right). \qquad (15)
\end{aligned}
$$

此外， $l_n(\boldsymbol{\omega})$ 是条件对数似然函数，其表达式为

$$
\frac{\partial l_n(\boldsymbol{\omega})}{\partial \phi} = \sum_{t=1}^{n} \frac{\frac{I_{\delta z_t}(2\beta p) I_{z_{t-1}-\delta z_t}(2\beta(1-p))}{I_{z_{t-1}}(2\beta)} - e^{-\theta_1-\theta_2}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{z_t/2} I_{z_t}\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)}{\frac{\phi I_{\delta z_t}(2\beta p) I_{z_{t-1}-\delta z_t}(2\beta(1-p))}{I_{z_{t-1}}(2\beta)} + (1-\phi)e^{-\theta_1-\theta_2}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{z_t/2} I_{z_t}\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)},
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial l_n(\boldsymbol{\omega})}{\partial p} = \sum_{t=1}^{n} &\frac{\frac{\beta\phi(I_{\delta z_t-1}(2\beta p)+I_{\delta z_t+1}(2\beta p)) I_{z_{t-1}-\delta z_t}(2\beta(1-p))}{I_{z_{t-1}}(2\beta)}}{\frac{\phi I_{\delta z_t}(2\beta p) I_{z_{t-1}-\delta z_t}(2\beta(1-p))}{I_{z_{t-1}}(2\beta)} + (1-\phi)e^{-\theta_1-\theta_2}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{z_t/2} I_{z_t}\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)} \\
&- \frac{\frac{\beta\phi I_{\delta z_t}(2\beta p)(I_{z_{t-1}-\delta z_t-1}(2\beta(1-p))+I_{z_{t-1}-\delta z_t+1}(2\beta(1-p)))}{I_{z_{t-1}}(2\beta)}}{\frac{\phi I_{\delta z_t}(2\beta p) I_{z_{t-1}-\delta z_t}(2\beta(1-p))}{I_{z_{t-1}}(2\beta)} + (1-\phi)e^{-\theta_1-\theta_2}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{z_t/2} I_{z_t}\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial l_n(\boldsymbol{\omega})}{\partial \beta} = \sum_{t=1}^{n} &\frac{\frac{(-1)\phi(I_{z_{t-1}-1}(2\beta)+I_{z_{t-1}+1}(2\beta)) I_{\delta z_t}(2\beta p) I_{z_{t-1}-\delta z_t}(2\beta(1-p))}{I_{z_{t-1}}(2\beta)^2}}{\frac{\phi I_{\delta z_t}(2\beta p) I_{z_{t-1}-\delta z_t}(2\beta(1-p))}{I_{z_{t-1}}(2\beta)} + (1-\phi)e^{-\theta_1-\theta_2}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{z_t/2} I_{z_t}\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)} \\
&+ \frac{\frac{(1-p)\phi I_{\delta z_t}(2\beta p)(I_{z_{t-1}-\delta z_t-1}(2\beta(1-p))+I_{z_{t-1}-\delta z_t+1}(2\beta(1-p)))}{I_{z_{t-1}}(2\beta)}}{\frac{\phi I_{\delta z_t}(2\beta p) I_{z_{t-1}-\delta z_t}(2\beta(1-p))}{I_{z_{t-1}}(2\beta)} + (1-\phi)e^{-\theta_1-\theta_2}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{z_t/2} I_{z_t}\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)} \\
&+ \frac{\frac{p\phi(I_{\delta z_t-1}(2\beta p)+I_{\delta z_t+1}(2\beta p)) I_{z_{t-1}-\delta z_t}(2\beta(1-p))}{I_{z_{t-1}}(2\beta)}}{\frac{\phi I_{\delta z_t}(2\beta p) I_{z_{t-1}-\delta z_t}(2\beta(1-p))}{I_{z_{t-1}}(2\beta)} + (1-\phi)e^{-\theta_1-\theta_2}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{z_t/2} I_{z_t}\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)},
\end{aligned}
$$

$$\frac{\partial l_n(\boldsymbol{\omega})}{\partial \theta_1} = \sum_{t=1}^{n} \frac{(1-\phi)\left(-e^{-\theta_1-\theta_2}\right)\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{z_t/2} I_{z_t}\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)}{\frac{\phi I_{\delta z_t}(2\beta p) I_{z_{t-1}-\delta z_t}(2\beta(1-p))}{I_{z_{t-1}}(2\beta)} + (1-\phi)e^{-\theta_1-\theta_2}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{z_t/2} I_{z_t}\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)}$$
$$+ \frac{\frac{\theta_2(1-\phi)e^{-\theta_1-\theta_2}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{z_t/2}\left(I_{z_t-1}\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)+I_{z_t+1}\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)\right)}{2\sqrt{\theta_1\theta_2}}}{\frac{\phi I_{\delta z_t}(2\beta p) I_{z_{t-1}-\delta z_t}(2\beta(1-p))}{I_{z_{t-1}}(2\beta)} + (1-\phi)e^{-\theta_1-\theta_2}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{z_t/2} I_{z_t}\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)}$$
$$+ \frac{\frac{z_t(1-\phi)e^{-\theta_1-\theta_2}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{\frac{z_t}{2}-1} I_{z_t}\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)}{2\theta_2}}{\frac{\phi I_{\delta z_t}(2\beta p) I_{z_{t-1}-\delta z_t}(2\beta(1-p))}{I_{z_{t-1}}(2\beta)} + (1-\phi)e^{-\theta_1-\theta_2}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{z_t/2} I_{z_t}\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)},$$

$$\frac{\partial l_n(\boldsymbol{\omega})}{\partial \theta_2} = \sum_{t=1}^{n} \frac{-\frac{\theta_1 z_t(1-\phi)e^{-\theta_1-\theta_2}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{\frac{z_t}{2}-1} I_{z_t}\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)}{2\theta_2^2}}{\frac{\phi I_{\delta z_t}(2\beta p) I_{z_{t-1}-\delta z_t}(2\beta(1-p))}{I_{z_{t-1}}(2\beta)} + (1-\phi)e^{-\theta_1-\theta_2}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{z_t/2} I_{z_t}\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)}$$
$$+ \frac{(1-\phi)\left(-e^{-\theta_1-\theta_2}\right)\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{z_t/2} I_{z_t}\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)}{\frac{\phi I_{\delta z_t}(2\beta p) I_{z_{t-1}-\delta z_t}(2\beta(1-p))}{I_{z_{t-1}}(2\beta)} + (1-\phi)e^{-\theta_1-\theta_2}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{z_t/2} I_{z_t}\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)}$$
$$+ \frac{\frac{\theta_1(1-\phi)e^{-\theta_1-\theta_2}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{z_t/2}\left(I_{z_t-1}\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)+I_{z_t+1}\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)\right)}{2\sqrt{\theta_1\theta_2}}}{\frac{\phi I_{\delta z_t}(2\beta p) I_{z_{t-1}-\delta z_t}(2\beta(1-p))}{I_{z_{t-1}}(2\beta)} + (1-\phi)e^{-\theta_1-\theta_2}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{z_t/2} I_{z_t}\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)}.$$

未知参数 $(\phi, p, \beta, \theta_1, \theta_2)^\top$ 的条件极大似然估计量 (CMLEs) 可通过最大化条件对数似然函数，或求解与得分函数相关的方程数值求得。

˜注记 3. $I_y(\theta)$ 与 ${}_0F_1$ 之间的关系为

$$I_y(\theta) = \left(\frac{\theta}{2}\right)^y {}_0\tilde{F}_1\left(;y+1;\frac{\theta^2}{4}\right). \tag{16}$$

令 $\frac{\theta^2}{4} = m$ ，则有

$${}_0\tilde{F}_1(;y+1;m) = m^{-y/2} I_y(2\sqrt{m}). \tag{17}$$

以下定理给出了条件最大似然法的渐近性质。

我们将转移概率 $P(Z_t = z_t | Z_{t-1} = z_{t-1})$ 记作 $f(z_{t-1}, z_t, \boldsymbol{\omega})$。我们希望应用 Billingsley 和 Patrick [9] 关于未知

参数估计的定理 2.1 的结果。我们只需逐一验证 Billingsley 和 Patrick [9] 中的条件是否满足。等价条件已在 Franke 和 Seligmann [14], 中详细说明，我们也可以施加这些条件。

设 $P(m,n) = P(Z_t = n|Z_{t-1} = m) = \phi Z(m,n) + (1-\phi)q(m,n)$，其中 $Z(m,n) = {}^{I_{\delta n}(2p\beta)I_{m-\delta n}(2(1-p)\beta)\, I_m(2\beta)}$ 且 $q(m,n) = e^{-\theta_1-\theta_2}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{n/2} I_n\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)$。

基于 [14], [28] 和 [37]，我们需要验证以下条件 (C1)-(C7) 是否满足：

(C1) 对于任意 z_{t-1}，使得 $f(z_{t-1}, z_t, \boldsymbol{\omega}) > 0$ 的 z_t 集合不依赖于 $\boldsymbol{\omega}$.
(C2) $E\left[\varepsilon_t^3\right] = \sum_{n=0}^{\infty} n^3 q(m,n) < \infty, E\left[Y_t^3\right] = \sum_{n=0}^{m} n^3 Z(m,n) < \infty$

(C3) 对任意 z_{t-1} 和 z_t，$f_u(z_{t-1}, z_t, \boldsymbol{\omega})$、$f_{uv}(z_{t-1}, z_t, \boldsymbol{\omega})$ 及 $f_{uvw}(z_{t-1}, z_t, \boldsymbol{\omega})$ 均存在，且在 Ω 上连续。于是，对任意 z_{t-1},

$$g(z_{t-1}, z_t, \boldsymbol{\omega}) = \log f(z_{t-1}, z_t, \boldsymbol{\omega})$$

几乎必然定义良好，且 $g_u(z_{t-1}, z_t, \boldsymbol{\omega})$、$g_{uv}(z_{t-1}, z_t, \boldsymbol{\omega})$ 及 $g_{uvw}(z_{t-1}, z_t, \boldsymbol{\omega})$ 在 Ω 上连续。

(C4) 对于 任意 $\boldsymbol{\omega} \in \Omega$，存在 N的一个邻域，使得对于任意 u, v, w, z_{t-1},

$$\sum_{z_t \in \boldsymbol{Z}} \sup_{\boldsymbol{\omega}' \in N} \left| f_u\left(z_{t-1}, z_t; \boldsymbol{\omega}'\right)\right| \lambda(dz_t) < \infty$$

$$\sum_{z_t \in \boldsymbol{Z}} \sup_{\boldsymbol{\omega}' \in N} \left| f_{uv}\left(z_{t-1}, z_t; \boldsymbol{\omega}'\right)\right| \lambda(dz_t) < \infty$$

$$E_{\boldsymbol{\omega}}[\sup_{\boldsymbol{\omega}' \in N} \left| g_{uvw}\left(z_{t-1}, z_t; \boldsymbol{\omega}'\right)\right|] < \infty.$$

其中 λ 为勒贝格测度。

对于任意 $\eta' \in B$；存在 η' 的一个邻域 U，并且对于任意 $\rho' \in B$；存在 ρ' 的一个邻域 H，使得：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sup_{\eta \in U} q(m,n) < \infty, \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sup_{\rho \in H} Z(m,n) < \infty,$$

and

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sup_{\eta \in U} |q_u(m,n)| < \infty, \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sup_{\eta \in U} |q_{uv}(m,n)| < \infty.$$

(C5) 对于任意 $\eta \in B$；存在 η' 的一个邻域 U，以及递增序列（取决于 η' 和 U），使得对所有非消失的

$$|q_u(m,n)| \leq \psi_u(m,n)q(m,n)$$

$$|q_{uv}(m,n)| \leq \psi_{uv}(m,n)q(m,n)$$

$$|q_{uvw}(m,n)| \leq \psi_{uvw}(m,n)q(m,n)$$

并且相对于 INAR(l) 过程 $\{Z_t\}$ 的平稳分布

$$E\left[\psi_u^3(Z_1,Z_2)\right] < \infty, \quad E\left[Z_1\psi_{uv}(Z_1,Z_2)\right] < \infty,$$

$$E\left[\psi_u(Z_1,Z_2)\,\psi_{vw}(Z_1,Z_2)\right] < \infty, \quad E\left[\psi_{uvw}(Z_1,Z_2)\right] < \infty.$$

(C6) 若 $(\sigma_{uv}(\boldsymbol{\omega}))_{u,\ v=1,\ \ldots..5}$ 由下式定义

$$\sigma_{uv}(\boldsymbol{\omega}) = E_{\boldsymbol{\omega}}[g_u(z_{t-1},z_t;\boldsymbol{\omega})\,g_v(z_{t-1},z_t;\boldsymbol{\omega})] \qquad u,v = 1,...5$$

则费希尔信息矩阵 $\sigma(\boldsymbol{\omega}) = \sigma_{uv}(\boldsymbol{\omega})$ 是非奇异的。

(C7) 对每个 $\boldsymbol{\omega} \in \Omega$，假设存在的平稳分布是唯一的，并且具有如下性质：对每个 $\xi \in Z$，$p_{\boldsymbol{\omega}}(\xi,\cdot)$ 关于 $p_{\boldsymbol{\omega}}(\cdot)$ 绝对连续。

定理 1. 假设 $[z_n, L_n(;\boldsymbol{\omega}), \Omega]$ 满足条件 (C1)-(C7)，$\boldsymbol{\omega}_0$ 是参数的真值，且 $\hat{}\boldsymbol{\omega}_n$ 是极大似然方程的一个相合解。那么当 $n \to \infty$ 时，

(a) $\hat{\boldsymbol{\omega}}_n \to \boldsymbol{\omega}_0$ *almost surely,*

(b) $\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\omega}}_n - \boldsymbol{\omega}_0) \xrightarrow{d} N\left(0, G^{-1}\right)$, *where* $G = (\sigma_{uv})$,

$$\sigma_{uv} = -E_{\boldsymbol{\omega}}\left[\frac{\partial l_n(\boldsymbol{\omega})}{\partial\omega_u\omega_v}\right] = E_{\boldsymbol{\omega}}\left[\frac{\partial l_n(\boldsymbol{\omega})}{\partial\omega_u}\cdot\frac{\partial l_n(\boldsymbol{\omega})}{\partial\omega_v}\right], 1 \leq u,v \leq 5.$$

证明。详情请见附录 A。 □

3.2 尤尔-沃克估计

为应用 Mileti´c Ili´c 等人 [28] 以及 Shirozhan 和 Mohammadpour [37], 所采用的修正的尤尔-沃克方法，我们的估计过程如下。以下方程组用于估计 ϕ、 p、 θ、 θ_1 和 θ_2:

$$\hat{\phi p} = \hat{\delta} r_1 = \hat{\delta} \frac{\sum_{t=1}^{n} (z_t - \bar{z})(z_{t+1} - \bar{z})}{\sum_{t=1}^{n+1} (z_t - \bar{z})^2}, \quad S_z^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n+1} (z_t - \bar{z})^2, \tag{18}$$

其中 $\bar{z}$ 是 样本均值， S_z^2 是样本方差， r_1 是样本自相关 .

$$E[Z_t] = \frac{(1-\phi)(\theta_1 - \theta_2)}{(1 - \phi p \hat{\delta})} = \bar{z}. \tag{19}$$

无条件方差为

$$\begin{aligned} Var[Z_t] = & \frac{p(1-p)\phi(1-\phi)(\theta_1 - \theta_2)}{(1-\phi^2 p^2 - (1-\phi)p^2)(1-\phi p\delta)} - \frac{2\phi(1-\phi)^3 p\delta(\theta_1 - \theta_2)^2}{(1-\phi^2 p^2 - (1-\phi)p^2)(1-\phi p\delta)} \\ & - \frac{(1-\phi)^2(\theta_1 - \theta_2)^2}{(1-\phi p\delta)^2} + \frac{2\phi p(1-p)\theta}{(1-\phi^2 p^2 - (1-\phi)p^2)} E_{Z_{t-1}}[\frac{{}_0\widetilde{F}_1(;Z_{t-1}+2;\theta)}{{}_0\widetilde{F}_1(;Z_{t-1}+1;\theta)}] \\ & + \frac{(1-\phi)(\theta_1 + \theta_2 + (2-\phi)(\theta_1 - \theta_2)^2)}{(1-\phi^2 p^2 - (1-\phi)p^2)}, \end{aligned} \tag{20}$$

ˆ 其中我们将 p 和 θ 替换为 ˆp_{ml} 和 θ_{ml}，即参数 p和θ的极大似然估计量，作为参数的初始估计值。并使用以下方程:

$$E_{Z_{t-1}}[\frac{{}_0\widetilde{F}_1(;Z_{t-1}+2;\theta)}{{}_0\widetilde{F}_1(;Z_{t-1}+1;\theta)}] = \frac{1}{n} \sum_{t=2}^{n} \frac{{}_0\widetilde{F}_1(;Z_{t-1}+2;\theta)}{{}_0\widetilde{F}_1(;Z_{t-1}+1;\theta)}. \tag{21}$$

那么我们有三个方程来求解未知参数 ϕ、 θ_1 和 θ_2，也就是说，我们可以应用修正的尤尔-沃克法。

4 模拟

本节首先概述模型数据的生成过程，然后给出五组参数设置，并展示条件最大似然法和尤尔-沃克法的表现。

4.1 模型生成步骤

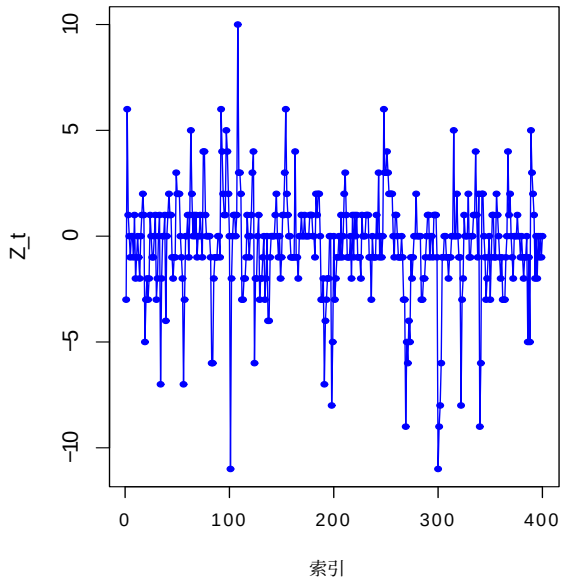
该模型的生成步骤如下:

1. 从 $PD(\theta_1, \theta_2)$ 中生成 n 个独立观测值，并将其作为 $\{\varepsilon_t\}_{t=1}^{n}$。 2. 从 $binomial(1, \phi)$ 中生成 n 个独立观测值，并将其作为 $\{V_t\}_{t=1}^{n}$。 3. 从 $PD(\theta_1, \theta_2)$ 中选取一个初始值作为 z_1。 4. 从 $EB(z_1, \alpha, \theta)$ 中生成一个独立观测值，并将其记为 $S_{p,\theta}(z_1)$。5. 令 $z_2 = V_2 S_{p,\theta}(z_1) + (1 - V_2)\varepsilon_2$.6. 从 $EB(z_2, \alpha, \theta)$ 中生成一个独立观测值，并将其记为 $S_{p,\theta}(z_2)$。 7. 令 $z_3 = V_3 S_{p,\theta}(z_2) + (1 - V_3)\varepsilon_3$。 8. 重复步骤 5 和 6，直到得到第 n^{th} 个观测值。

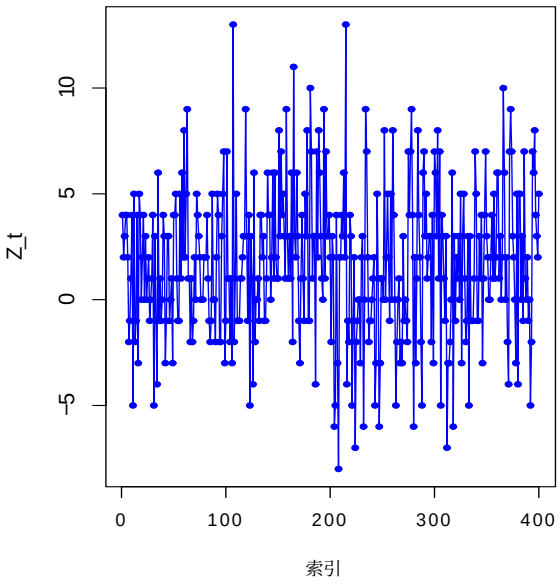
4.2 参数设置

为报告条件最大似然法和尤尔-沃克法的表现，我们在以下设置下进行模拟研究，并将四组参数记为 $\boldsymbol{\omega}_1$、 $\boldsymbol{\omega}_2$、 $\boldsymbol{\omega}_3$、 $\boldsymbol{\omega}_4$。我们考虑序列具有正相关（$\delta = 1$）和负相关（$\delta = -1$）两种情况。

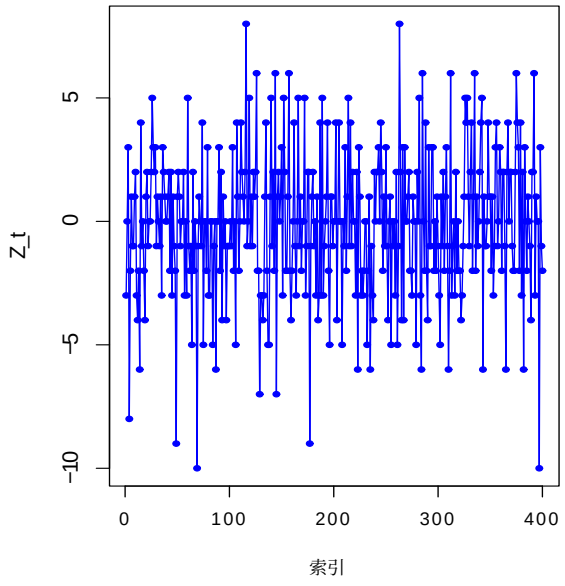
1. $(\phi, p, \beta, \theta_1, \theta_2)^\top = (0.8, 0.5, \sqrt{5}, 10, 10)^\top = \boldsymbol{\omega}_1$, $\delta = 1$, 2. $(\phi, p, \beta, \theta_1, \theta_2)^\top = (0.2, 0.4, 2, 9, 7)^\top = \boldsymbol{\omega}_2$, $\delta = 1$, 3. $(\phi, p, \beta, \theta_1, \theta_2)^\top = (0.2, 0.4, \sqrt{5}, 5, 5)^\top = \boldsymbol{\omega}_3$, $\delta = -1$, 4. $(\phi, p, \beta, \theta_1, \theta_2)^\top = (0.2, 0.8, \sqrt{5}, 10, 10)^\top = \boldsymbol{\omega}_4$, $\delta = -1$,



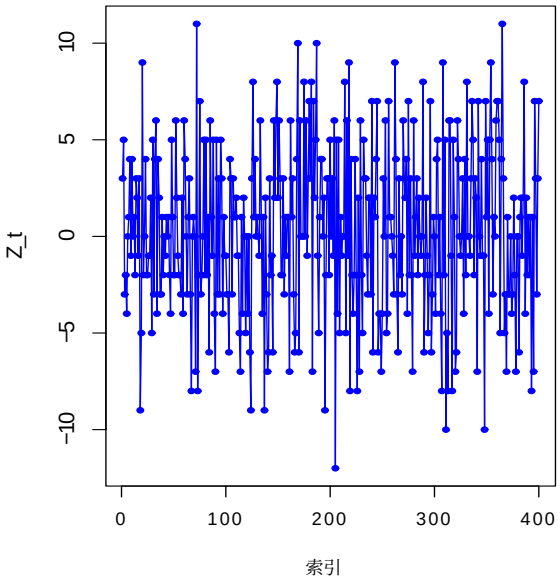
(a) ω_1 的样本路径。



(b) ω_2 的样本路径。



(c) ω_3 的样本路径。



(d) ω_4 的样本路径。

图1：四组参数的样本路径。

4.3 一些数值结果

4.3.1 CML与尤尔-沃克法的结果

通过使用不同样本量（$n = 200$、400、4000）进行小规模蒙特卡罗模拟，检验估计量的表现。本研究中的所有模拟均基于 $N = 100$ 次重复，在R 软件下进行。表2给出了条件最大似然法和尤尔-沃克法的均值和均方误差。根据该表，我们发现估计值收敛于其真实值。在每种情形下，参数 ϕ分别取较小值0.2和较大值0.8、0.9。此外，我们选择情形 $\theta_1 = \theta_2$ 和情形 $\theta_1 \neq \theta_2$。由于 δ 的值可以为1或 -1，我们也考虑了负相关情形的估计。表1和表2表明，在所有情形下，所得估计量均收敛于其真实值。此外，样本量增大意味着均方误差减小。我们还注意到，尤尔-沃克法估计量在几乎所有情形下的均方误差都较大。综上所述，我们可以得出结论：在大多数情形下，条件最大似然估计量在所有参数上的表现良好，这也符合预期。

表 1：巴巴多斯每日新增病例一阶差分的描述性统计 .

变量	no.	Mean	方差	最小值	中位数	最大值	范围
巴巴多斯。病例	292	1.3527	5.6037	0	0	16	16
巴巴多斯。差值	291	-0.0068	8.4879	-14	0	14	28

5 真实数据示例

在本节中，我们将模型应用于从网站 [1] 获取的一组真实计数数据。该序列记录的是巴巴多斯的每日新增病例。我们旨在研究数据增量的变化。该序列表示巴巴多斯从2020年3月17日到2021年1月2日的每日新增病例。

样本路径、样本路径的差分、自相关函数（ACF）以及

表2：通过条件最大似然法和尤尔-沃克法报告了 $mymodel^{+}$ 和 $mymodel^{-}$的均值和均方误差（均方误差），对应于（$\phi, p, \beta, \theta_1, \theta_2$）$^{\top}$，且 $n = 200$分别为 400、800 和 4000。

N	ϕ_{ml}	p_{ml}	β_{ml}	θ_{1ml}	θ_{2ml}	ϕ_{yw}	θ_{1yw}	θ_{2yw}	$\theta_{1yw} - \theta_{2yw}$
(i) 真实值 $\boldsymbol{\omega}_1 = (0.8, 0.5, \sqrt{5}, 10, 10)^{\top}, \delta = 1$									
200	0.8004	0.5009	2.2356	10.5380	10.3026	0.7908	15.3333	15.3913	-0.0580
MSE	0.0019	0.0024	0.1454	9.7403	9.7399	0.0185	332.3275	325.2845	1.5563
400	0.7952	0.4998	2.2161	10.1775	10.1759	0.7936	19.0681	19.2959	-0.2278
MSE	0.0014	0.0010	0.0662	4.0363	4.2060	0.0104	4347.6635	4729.4396	9.3705
800	0.7962	0.5006	2.2319	10.0079	10.0324	0.7893	12.0170	12.0429	-0.0258
MSE	0.0004	0.0006	0.0306	2.2122	1.9988	0.0050	32.7616	33.0771	0.2485
4000	0.8002	0.4996	2.2441	10.0126	10.0012	0.7938	11.0958	11.0919	0.0039
MSE	0.0001	0.0001	0.0079	0.3718	0.3577	0.0013	6.2700	6.2717	0.0288
(ii) 真实值 $\boldsymbol{\omega}_2 = (0.2, 0.4, 2, 9, 7)^{\top}, \delta = 1$									
200	0.2304	0.4192	1.9630	9.1064	7.0075	0.1872	9.2269	7.1646	2.0622
MSE	0.0063	0.0128	3.7185	0.9755	0.9086	0.0397	8.6072	6.1845	0.2958
400	0.2125	0.3956	1.7688	9.0346	7.0050	0.2091	8.9010	6.8413	2.0597
MSE	0.0026	0.0044	2.5326	0.5209	0.4666	0.0152	1.8819	1.3431	0.1247
800	0.2043	0.4060	1.4135	9.0057	6.9987	0.2061	8.7288	6.6983	2.0304
MSE	0.0011	0.0027	0.3711	0.2784	0.2365	0.0112	1.2221	0.9268	0.0535
4000	0.1995	0.3994	1.4436	9.0136	7.0057	0.2058	8.5688	6.5613	2.0075
MSE	0.0002	0.0004	0.0836	0.0700	0.0603	0.0020	0.3844	0.3418	0.0110
(iv) 真实值 $\boldsymbol{\omega}_3 = (0.2, 0.4, \sqrt{5}, 5, 5)^{\top}, \delta = -1$									
200	0.2354	0.4093	3.6901	5.2991	5.2297	0.1782	4.9700	5.0335	-0.0635
MSE	0.0196	0.0326	26.8456	2.0729	1.9893	0.0372	2.5206	2.6660	0.0768
400	0.2127	0.4028	2.7968	5.0779	5.0616	0.1893	4.9007	4.8959	0.0047
MSE	0.0091	0.0120	7.9427	0.3761	0.3408	0.0191	0.8230	0.8166	0.0405
800	0.2227	0.3805	2.8852	5.1111	5.0912	0.1979	4.8497	4.8575	-0.0078
MSE	0.0067	0.0058	4.9466	0.2222	0.2192	0.0078	0.3244	0.3160	0.0175
4000	0.2026	0.4002	2.3019	4.9971	5.0057	0.2021	4.8513	4.8653	-0.0140
MSE	0.0005	0.0009	0.2648	0.0254	0.0258	0.0020	0.0894	0.0881	0.0039
(v) 真实值 $\boldsymbol{\omega}_4 = (0.2, 0.8, \sqrt{5}, 10, 10)^{\top}, \delta = -1$									
200	0.2150	0.7982	2.7313	9.9927	10.0072	0.1984	9.8042	9.7416	0.0626
MSE	0.0047	0.0062	7.8927	1.5760	1.4650	0.0088	1.7339	1.8601	0.1320
400	0.2067	0.7956	2.7468	9.9741	9.9550	0.2014	9.8563	9.8964	-0.0400
MSE	0.0012	0.0027	3.0378	0.5707	0.6029	0.0045	0.9554	0.9539	0.0788
800	0.2028	0.8006	2.3352	9.9443	9.9523	0.2010	9,8914	9.8812	0.0103
MSE	0.0008	0.0011	0.7012	0.3170	0.3108	0.0024	0.4759	0.4933	0.0391
4000	0.2018	0.8007	2.3115	10.0136	10.0214	0.2007	9.8885	9.8877	0.0008
MSE	0.0001	0.0002	0.1202	0.0654	0.0629	0.0005	0.1108	0.1094	0.0098

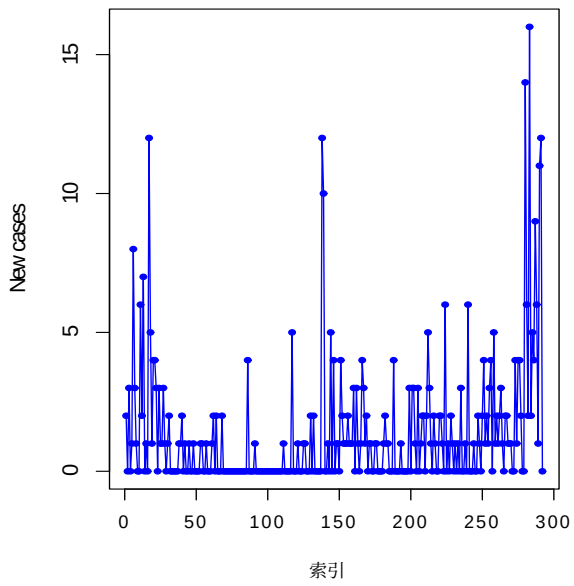
表3：Barbodos{v1}至{v1}新增病例的多种模型参数估计值、赤池信息准则和贝叶斯信息准则

模型	CML估计	AIC	BIC	HQIC	对数似然
PDINAR⁻(1)	$\hat{\alpha} = -0.4187$	1365.8327	1376.8629	1365.0418	-679.9163
	$\hat{\theta}_1 = 1.7735$				
	$\hat{\theta}_2 = 1.8309$				
MESINAR⁻(1)	$\hat{\phi} = 0.5680$	1042.2406	1060.6243	1040.9225	-516.1203
	$\hat{p} = -0.0055$				
	$\hat{\beta} = 17.1567$				
	$\hat{\theta}_1 = 3.8991$				
	$\hat{\theta}_2 = 1.0149$				
MSINARS⁻(1)	$\hat{\phi} = 0.4752$	1229.3335	1244.0405	1228.2790	-610.6668
	$\hat{\alpha} = -0.6932$				
	$\hat{\theta}_1 = 5.3686$				
	$\hat{\theta}_2 = 4.7866$				

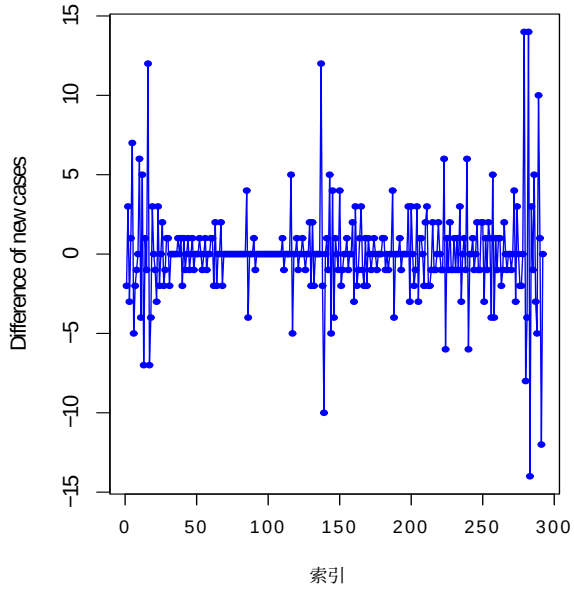
两个序列的偏自相关函数（PACF）显示在图2中。这些图表明，一阶自回归模型适合用于分析给定的数据序列。

一些序列在差分后包含负值，因此，我们所提出模型的优势在于能够拟合可能包含负值且具有正相关或负相关的整数值时间序列。

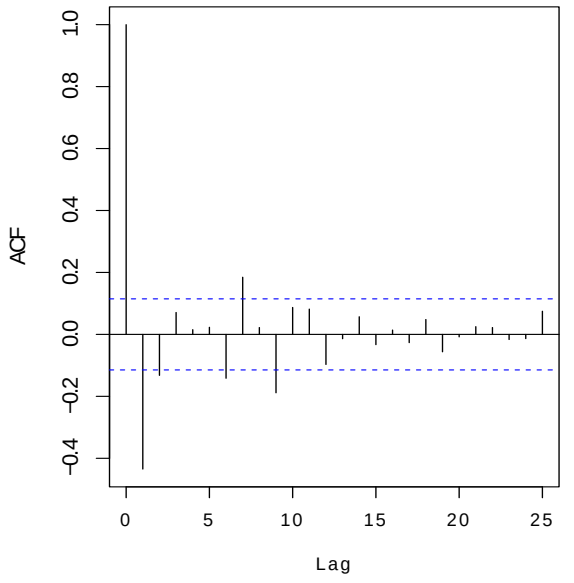
结果见表 1 和表 3。表 1 展示了巴巴多斯差分后的每日新增病例及其一阶差分的描述性统计。根据差分后的每日新增病例的自相关函数，相关性为负，即 $\delta = -1$。为了将我们的模型与其他简单分布或可分析正负数据的 INAR(1) 模型进行比较，我们采用了一些拟合优度统计准则：赤池信息准则、贝叶斯信息准则、汉南-奎因信息准则和对数似然。为了将我们的模型与其他相关的 INAR(1) 模型进行比较，例如 PDINAR(1) 以及过程 $Z_t = U_t(\alpha \odot Z_{t-1}) + (1 - U_t)\varepsilon_t$，其中 U_t 是一列相互独立且服从参数为 ϕ 的伯努利分布的随机变量，“$\odot$”是 Hee-young 和 Yousung [23]，提出的算子，而 $\{\varepsilon_t\}$ 是一列相互独立且同分布的



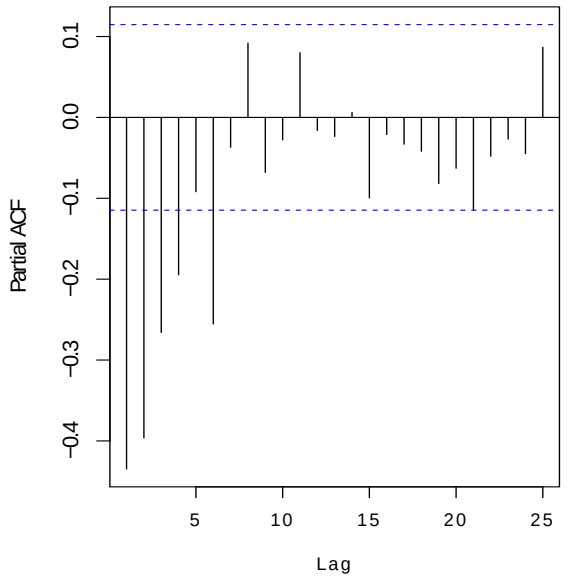
(a) 每日新增病例的样本路径。



(b) 差分后的每日新增病例的样本路径。



（c）差分后的每日新增病例的自相关函数。



(d) 差分后的每日新增病例的偏自相关函数。

图2：差分后的每日新增病例的样本路径、自相关函数和偏自相关函数。

参数为 θ_1、θ_2 的泊松差分分布随机变量。

表3列出了该序列的一些拟合优度统计量。这些统计量的值越小，模型的拟合效果越好。从表中可以看出，我们提出的模型的五项统计量均较小。差异 $\theta_1 - \theta_2 = 2.8842$ 表明，原始序列的创新项可能并非来自单一且不变的泊松分布。因此，我们可以得出结论，该模型对实际数据序列的拟合效果良好。

6 结论与展望

本文基于扩展二项分布和 Skellam 分布，结合 Pegram 算子，构建了一个用于处理定义在 Z 上的正或负自相关数据的模型。通过数值模拟比较，条件最大似然法是所有方法中最优的，并且在巴巴多斯差分后的每日新增病例数量上表现良好。

接下来，我们将自然地把我们的模型扩展为 SINARS 回归模型：

$$Z_t = (\phi, \delta S_{\alpha,\theta}(Z_{t-1})) * (1-\phi, R_t), t = 1, 2, \ldots$$

$$R_t \sim \text{Skellam}\,(\theta_{1t}, \theta_2)$$

$$\theta_{1t} = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \ldots + \beta_k X_{kt}$$

其中 X_{it} 是协变量，β 是相应的系数。

另一种扩展是，我们考虑双变量 Skellam 分布 [33] 与双变量扩展二项分布的混合分布，以处理二元数据。

致谢。我们的研究得到了吉林大学和辽宁大学的支持。

参考文献

[1] https://ourworldindata.org/covid-cases.

[2] Mohamed A Al-Osh 和 Aus A Alzaid。《一阶整数值自回归（INAR（1））过程》。《时间序列分析杂志》，8(3):261–275，1987年。

[3] A Alzaid 和 M Al-Osh。一阶整数值自回归（inar (1)）过程：分布性质与回归性质。Statistica Neerlandica，42(1)：53–61，1988。

[4] Abdulhamid A Alzaid 和 Mohamed A Al-Osh。具有广义泊松边缘分布的若干自回归滑动平均过程。Annals of the Institute of Statistical Mathematics，45：223–232，1993。

[5] Abdulhamid A Alzaid 和 Maha A Omair。泊松差分布的推断及其应用。Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society. Second Series，33(1)：17–45，2010。

[6] Abdulhamid A Alzaid 和 Maha A Omair。一种扩展二项分布及其应用。《统计学通讯：理论与方法》，41(19)：3511–3527，2012。

[7] Abdulhamid A Alzaid 和 Maha A Omair. 一阶泊松差分整数值自回归模型. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 37(2):465–485, 2014.

[8] Jonas Andersson 和 Dimitris Karlis. 一种带有 Z 中整数协变量的参数时间序列模型. 《统计建模》, 14(2):135–156, 2014.

[9] Patrick Billingsley. 马尔可夫链中的统计方法. 《数学统计年刊》, 第12–40页, 1961.

[10] Patrick Billingsley. 概率测度的收敛. John Wiley & Sons, 2013.

[11]Jan Bulla、Christophe Chesneau 和 Maher Kachour。《二元一阶带符号整数值自回归过程》。《统计学通讯：理论与方法》，46(13):6590–6604，2017 年。

[12] Christophe Chesneau 和 Maher Kachour。一阶带符号整数值自回归过程的参数研究。《统计理论与实践杂志》，6:760–782，2012 年。

[13] Luc Devroye。《模拟贝塞尔随机变量》。《统计与概率快报》，57(3):249– 257，2002年。

[14] J Franke 和 TH Seligmann。INAR(1)过程的条件最大似然估计及其在癫痫发作次数建模中的应用。《时间序列分析进展》，第310–330页，1993年。

[15] R Keith Freeland。《真正的整数值时间序列》。《AStA Advances in Statistical Analysis》，94:217–229，2010年。

[16] Arjun K Gupta 和 Saralees Nadarajah。《贝塔-贝塞尔分布》。《国际数学与数学科学杂志》，2006，2006年。

[17] Peter Hall 和 Christopher C Heyde。《鞅极限定理及其应用》。学术出版社，2014年。

[18] Jie Huang 和 Fukang Zhu。具有贝尔创新项的新型一阶整数值自回归模型。《熵》，23(6):713，2021年。

[19] George Iliopoulos 和 Dimitris Karlis。基于贝塞尔分布的模拟及其应用。《统计计算与模拟杂志》，73(7):491–506，2003。

[20] SKELLAMJG。来自不同总体的两个泊松随机变量之差的频数分布。《皇家统计学会杂志》。A辑（综合），109(Pt 3):296–296，1946。

[21] Maher Kachour 和 Lionel Truquet。一种 p 阶有符号整数值自回归（SINAR(p)）模型。《时间序列分析杂志》，32(3):223–236，2011 年。

[22] Dimitris Karlis 和 Ioannis Ntzoufras。计数数据差异的贝叶斯分析。《医学统计》，25(11)：1885–1905，2006 年。

[23] Hee-Young Kim 和 Yousung Park。非平稳整数值自回归模型。Statistical Papers，49：485–502，2008。

[24] Lawrence A Klimko 和 Paul INelson。随机过程的条件最小二乘估计。《统计年鉴》，第629–642页，1978年。

[25] AT McKay。贝塞尔函数分布。Biometrika，第39–44页，1932年 .

[26] Ed McKenzie。离散变量时间序列的一些简单模型1。《美国水资源协会期刊》，21(4)：645–650，1985年。

[27] Ed McKenzie。具有负二项分布和几何边际分布的自回归滑动平均过程。《应用概率进展》，18(3)：679–705，1986年。

[28] Ana V Mileti´c Ili´c、Miroslav M Risti´c、Aleksandar S Nasti´c 和 Hassan S Bakouch。基于混合依赖与独立计数序列的 INAR(1)模型。《统计计算与模拟杂志》，88(2)：290–304，2018年。

[29] Z Mohammadi、Z Sajjadnia、HS Bakouch 和 M Sharafi。用于对含有额外的零值和一值的计数时间序列进行建模的零值和一值膨胀 Poisson–Lindley INAR(1)过程。《统计计算与模拟杂志》，92(10)：2018–2040，2022。

[30] Zohreh Mohammadi、Zahra Sajjadnia、Maryam Sharafi 和 Naushad Mamode Khan。利用带有零值和一值膨胀几何创新的灵活整数值 AR(1)过程对医疗数据进行建模。《伊朗科学与技术期刊：A辑，科学》，46(3)：891–906，2022。

[31] Saralees Nadarajah 和 Arjun K Gupta。《贝塞尔随机变量的乘积与比值》。《国际数学与数学科学杂志》，2005(18):2977–2989，2005。

[32] Aleksandar S Nasti´c、Miroslav M Risti´c 和 Ana V Mileti´c Ili´c。《具有替代相关伯努利计数序列的几何时间序列模型》。《Communications in Statistics- Theory and Methods》，46(2):770–785，2017。

[33] Maha A Omair、Ghadah A Alomani 和 Abdulhamid A Alzaid。《Z^2上的二元分布》。Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society，45(Suppl 1):425–444，2022。

[34] GGS Pegram。《多滞后马尔可夫链的自回归模型》。Journal of Applied Probability，17(2):350–362，1980。

[35] Xiaohong Qi、Qi Li 和 Fukang Zhu。《基于具有零膨胀和一膨胀泊松创新的 INAR(1)模型，对过多零和一的计数时间序列进行建模》。Journal of Computational and Applied Mathematics，346:572–590，2019。

[36] Golnaz Shahtahmassebi 和 Rana Moyeed。《广义泊松差分分布在足球比分贝叶斯建模中的应用》。Statistica Neerlandica，70(3):260–273，2016。

[37] Masoumeh Shirozhan 和 Mehrnaz Mohammadpour。基于 Pegram 算子和稀疏化算子、具有序列相依创新的 INAR(1)模型。Communications in Statistics-Simulation and Computation，49(10)：2617–2638，2020。

[38] Dag Tjøstheim。非线性时间序列模型中的估计。Stochastic Processes and their Applications，21(2)：251–273，1986。

[39] Dehui Wang 和 Haixiang Zhang。具有有符号稀疏化算子的广义RCINAR(p)过程。Communications in Statistics—Simulation and Computation®，40(1)：13–44，2010。

[40] Christian H Weiß. 用于计数时间序列建模的稀疏化运算——综述。AStA Advances in Statistical Analysis，92:319–341，2008年。

[41] Kai Yang、Dehui Wang、Boting Jia 和 Han Li。基于负二项稀疏化的整数值阈值自回归过程。Statistical Papers，59：1131–1160，2018 年。

[42] Lin Yuan 和 John D Kalbfleisch。《贝塞尔分布及相关问题》。Annals of the Institute of Statistical Mathematics，52：438–447，2000。

[43] Scott L Zeger。计数时间序列的回归模型。Biometrika，75(4)：621–629，1988。

[44] Chi Zhang、Guo-Liang Tian 和 Kai-Wang Ng。零膨胀和一膨胀泊松分布的性质及基于似然的推断方法。Statistics and its interface，9(1)：11–32，2016。

[45] Haixiang Zhang、Dehui Wang 和 Fukang Zhu。基于有符号广义幂级数稀疏化算子的INAR(p)过程推断。Journal of Statistical Planning and Inference，140(3)：667–683，2010。

[46] Haitao Zheng、Ishwar V Basawa 和 Somnath Datta。一阶随机系数整数值自回归过程。Journal of Statistical Planning and Inference，137(1)：212–229，2007。

A 附录

A.1 定理1的证明

该定理的证明遵循 Billingsley 的定理 2.1 [9]。我们证明该模型满足条件 (C1)–(C6)。首先给出一个引理，它在其他引理的证明中起着关键作用。

i. $P(m,n)$ 关于 $\phi, p, \theta, \theta_1, \theta_2$ 三次连续可微，且对任意 m,$\{n;\ P(m,n) > 0\}$ 不依赖于 ω。因此，log $P(m,n)$ 除了在

$P(m,\cdot)$-测度为 0 的集合上无定义，而该集合不依赖于参数值。因此，条件

该模型满足 (C1) 和 (C2)。

ii. 回顾一下一步转移概率：

$$\begin{aligned}\pi(z_t|z_{t-1}) &= P(Z_t = z_t|Z_{t-1} = z_{t-1}) \\ &= \phi P(S_{\alpha,\theta}(Z_{t-1}) = \delta z_t) + (1-\phi)P(\varepsilon_t = z_t) \\ &= \phi\frac{I_{\delta z_t}(2p\beta)I_{z_{t-1}-\delta z_t}(2(1-p)\beta)}{I_{z_{t-1}}(2\beta)} + (1-\phi)e^{-\theta_1-\theta_2}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{z_t/2} I_{z_t}\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)\end{aligned}$$

利用第一类修正贝塞尔函数的导数公式：

$$\frac{\partial I_y(\theta)}{\partial\theta} = \frac{y}{\theta}I_y(\theta) + I_{y+1}(\theta).$$

不失一般性，为简化问题，我们考虑 $\delta = 1$ 的情形

（ $\delta = -1$ 的情形可类似地得到）。

Let $P(m,n) = P(Z_t = n|Z_{t-1} = m) = \phi Z(m,n) + (1-\phi)q(m,n)$,

其中

$$Z(m,n) = \frac{I_n(2p\beta)I_{m-n}(2(1-p)\beta)}{I_m(2\beta)},$$

and

$$q(m,n) = e^{-\theta_1-\theta_2}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{n/2} I_n\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right).$$

Thus

$$P(m,n) \le Z(m,n) + q(m,n).$$

对于转移概率的一阶导数，我们有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial P(m,n)}{\partial\phi}\right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|Z(m,n) - q(m,n)| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty}|Z(m,n)| + \sum_{n=-\infty}^{\infty}|q(m,n)| = 2 < \infty,$$

关于 ϕ 的二阶导数等于零。导数可以简化如下：

$$\left|\frac{\partial P(m,n)}{\partial p}\right| = \left|\frac{\partial Z(m,n)}{\partial p}\right|, \left|\frac{\partial P(m,n)}{\partial\beta}\right| = \left|\frac{\partial Z(m,n)}{\partial\beta}\right|,$$

$$\left|\frac{\partial P(m,n)}{\partial \theta_1}\right| = \left|\frac{\partial q(m,n)}{\partial \theta_1}\right|, \left|\frac{\partial P(m,n)}{\partial \theta_2}\right| = \left|\frac{\partial q(m,n)}{\partial \theta_2}\right|.$$

进一步可得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Z(m,n)}{\partial p} &= -\frac{\beta\phi I_n(2p\beta)(I_{m-n-1}(2(1-p)\beta) + I_{m-n+1}(2(1-p)\beta))}{I_m(2\beta)} \\
&\quad + \frac{\beta\phi(I_{n-1}(2p\beta) + I_{n+1}(2p\beta))I_{m-n}(2(1-p)\beta)}{I_m(2\beta)}, \\
\frac{\partial Z(m,n)}{\partial \beta} &= -\frac{\phi(I_{m-1}(2\beta) + I_{m+1}(2\beta))I_n(2p\beta)I_{m-n}(2(1-p)\beta)}{I_m(2\beta)^2} \\
&\quad + (1-p)\phi\frac{I_n(2p\beta)(I_{m-n-1}(2(1-p)\beta) + I_{m-n+1}(2(1-p)\beta))}{I_m(2\beta)} \\
&\quad + \frac{p\phi(I_{n-1}(2p\beta) + I_{n+1}(2p\beta))I_{m-n}(2(1-p)\beta)}{I_m(2\beta)}, \\
\frac{\partial^2 Z(m,n)}{\partial p^2} &= \phi(-\beta I_n(2p\beta)(-\beta(I_{m-n-2}(2(1-p)\beta) + I_{m-n}(2(1-p)\beta)) \\
&\quad - \beta(I_{m-n}(2(1-p)\beta) + I_{m-n+2}(2(1-p)\beta))) \\
&\quad - 2\beta^2(I_{n-1}(2p\beta) + I_{n+1}(2p\beta))(I_{m-n-1}(2(1-p)\beta) + I_{m-n+1}(2(1-p)\beta)) \\
&\quad + \beta(\beta(I_{n-2}(2p\beta) + I_n(2p\beta)) + \beta(I_n(2p\beta) + I_{n+2}(2p\beta)))I_{m-n}(2(1-p)\beta)), \\
\frac{\partial^2 Z(m,n)}{\partial \beta^2} &= \phi\left(\frac{2(I_{m-1}(2\beta) + I_{m+1}(2\beta))^2}{I_m(2\beta)^3} - \frac{I_{m-2}(2\beta) + 2I_m(2\beta) + I_{m+2}(2\beta)}{I_m(2\beta)^2}\right) \\
&\quad \cdot I_n(2p\beta)I_{m-n}(2(1-p)\beta) - \frac{2\phi(I_{m-1}(2\beta) + I_{m+1}(2\beta))}{I_m(2\beta)^2} \\
&\quad \cdot (1-p)I_n(2p\beta)(I_{m-n-1}(2(1-p)\beta) + I_{m-n+1}(2(1-p)\beta)) \\
&\quad + p(I_{n-1}(2p\beta) + I_{n+1}(2p\beta))I_{m-n}(2(1-p)\beta) \\
&\quad (1-p)((1-p)(I_{m-n-2}(2(1-p)\beta) + I_{m-n}(2(1-p)\beta)) \\
&\quad + (1-p)(I_{m-n}(2(1-p)\beta) + I_{m-n+2}(2(1-p)\beta))), \\
\frac{\partial^2 Z(m,n)}{\partial p\partial \beta} &= -\frac{\phi I_n(2p\beta)(I_{m-n-1}(2(1-p)\beta) + I_{m-n+1}(2(1-p)\beta))}{I_m(2\beta)} \\
&\quad + \frac{\beta\phi(I_{m-1}(2\beta) + I_{m+1}(2\beta))I_n(2p\beta)(I_{m-n-1}(2(1-p)\beta) + I_{m-n+1}(2(1-p)\beta))}{I_m(2\beta)^2} \\
&\quad - \frac{\beta\phi I_n(2p\beta)((1-p)(I_{m-n-2}(2(1-p)\beta) + I_{m-n}(2(1-p)\beta))}{I_m(2\beta)} \\
&\quad + \frac{(1-p)(I_{m-n}(2(1-p)\beta) + I_{m-n+2}(2(1-p)\beta)))}{I_m(2\beta)}
\end{aligned}$$

$$+\frac{\phi(I_{n-1}(2p\beta)+I_{n+1}(2p\beta))I_{m-n}(2(1-p)\beta)}{I_m(2\beta)}$$
$$-\frac{\beta\phi(I_{m-1}(2\beta)+I_{m+1}(2\beta))(I_{n-1}(2p\beta)+I_{n+1}(2p\beta))I_{m-n}(2(1-p)\beta)}{I_m(2\beta)^2}$$
$$+\frac{\beta(1-p)\phi(I_{n-1}(2p\beta)+I_{n+1}(2p\beta))(I_{m-n-1}(2(1-p)\beta)+I_{m-n+1}(2(1-p)\beta))}{I_m(2\beta)}$$
$$-\frac{\beta p\phi(I_{n-1}(2p\beta)+I_{n+1}(2p\beta))(I_{m-n-1}(2(1-p)\beta)+I_{m-n+1}(2(1-p)\beta))}{I_m(2\beta)}$$
$$+\frac{\beta\phi(p(I_{n-2}(2p\beta)+I_n(2p\beta))+p(I_n(2p\beta)+I_{n+2}(2p\beta)))I_{m-n}(2(1-p)\beta)}{I_m(2\beta)}.$$

基于第一类修正贝塞尔函数的性质,

$$\sum_{y=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{\frac{y}{2}}I_y\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)=e^{\theta_1+\theta_2},$$

$$\sum_{y=-\infty}^{\infty}y\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{\frac{y}{2}}I_y\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)=(\theta_1-\theta_2)\,e^{\theta_1+\theta_2},$$

$$\sum_{y=-\infty}^{\infty}y^2\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{\frac{y}{2}}I_y\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)=\left(\theta_1+\theta_2+(\theta_1-\theta_2)^2\right)e^{\theta_1+\theta_2},$$

$$I_y(\theta)=I_{-y}(\theta),\ \sum_{y=-\infty}^{\infty}I_y(\theta)=e^{\theta},\ \sum_{y=-\infty}^{\infty}yI_y(\theta)=0,$$

$$\sum_{y=-\infty}^{\infty}y^2I_y(\theta)=\theta e^{\theta}\quad\forall\theta>0,\frac{\partial I_y(\theta)}{\partial\theta}=\frac{1}{2}\left(I_{y-1}(\theta)+I_{y+1}(\theta)\right),$$

因此,

$$\frac{e^{\theta}}{2}\le\sum_{y=0}^{\infty}yI_y(\theta)\le\frac{\theta e^{\theta}}{2},$$

and

$$e^{\theta}\le 2\sum_{y=0}^{\infty}yI_y(\theta)=2\sum_{y=0}^{\infty}|yI_y(\theta)|\le 2\sum_{y=0}^{\infty}y^2\left|I_y(\theta)\right|\le\theta e^{\theta},$$

然后，对于$\frac{\partial z(m,n)}{\partial p}$，问题是估计.....的界

$$\sum_{y=-\infty}^{\infty}\frac{I_y(2p\beta)I_{m-y-1}(2(1-p)\beta)}{I_m(2\beta)},$$

显然,

$$\sum_{y=-\infty}^{\infty}\frac{I_y(2p\beta)I_{m-y-1}(2(1-p)\beta)}{I_m(2\beta)}=\frac{1}{I_m(2\beta)}\sum_{y=-\infty}^{\infty}I_y(2p\beta)I_{m-y-1}(2(1-p)\beta),$$

因此，我们只需对其进行界定

$$\sum_{y=-\infty}^{\infty} I_y(2p\beta)I_{m-y-1}(2(1-p)\beta),$$

由对称性可得，

$$\sum_{y=-\infty}^{\infty} I_y(2p\beta)I_{m-y-1}(2(1-p)\beta) = \sum_{y=-\infty}^{\infty} I_y(2p\beta)I_{y-m+1}(2(1-p)\beta).$$

现在我们考虑 $I_y(\theta)$ 的值。我们知道，对于固定的 θ，

$$\sum_{y=0}^{\infty} I_y(\theta) = \frac{e^\theta}{2},$$

且存在一个常数 M，使得

$$\frac{e^\theta}{2} \leq M,$$

因此，满足 $|I_y(\theta)| \leq 1$ 几乎为 $M-1$的 y 的数量是.....。因此，另有无穷多个 y满足 $|I_y(\theta)| < 1$，此外，$I_y(\theta)^2 \leq |I_y(\theta)|$。记 $I = \sum_{y=-\infty}^{\infty} I_y(2p\beta)I_{y-m+1}(2(1-p)\beta)$。我们可以找到足够大的常数 M，使得

$$\begin{aligned}
I &= \sum_{y=k_1}^{k_M} I_y(2p\beta)I_{y-m+1}(2(1-p)\beta) + \sum_{y=k_{M+1}}^{\infty} I_y(2p\beta)I_{y-m+1}(2(1-p)\beta) \\
&\leq \sum_{y=k_1}^{k_M} I_y(2p\beta)I_{y-m+1}(2(1-p)\beta) + \frac{1}{2}\sum_{y=k_{M+1}}^{\infty} \left(I_y(2p\beta)^2 + I_{y-m+1}(2(1-p)\beta)^2\right) \\
&\leq \sum_{y=k_1}^{k_M} I_y(2p\beta)I_{y-m+1}(2(1-p)\beta) + \frac{1}{2}\sum_{y=k_{M+1}}^{\infty} \left(I_y(2p\beta) + I_{y-m+1}(2(1-p)\beta)\right)
\end{aligned}$$

其中，k_1、k_2、.....、k_M、k_{M+1}、.....是 N的一种重排，使得当 $y \in \{k_1, k_2, \ldots, k_M\}$时，$|I_y(\theta)| \geq 1$；当 $y \in \{k_M, \ldots,\}$时，$|I_y(\theta)| < 1$。可以看出，不等式右侧的前一项是有限的，后一项是收敛的。对于更高阶导数，需要处理的是更多贝塞尔函数的乘积，其余部分遵循相同的模式。因此，我们可以看出，对于固定的 m，

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\frac{\partial Z(m,n)}{\partial p}\right| < \infty, \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\frac{\partial Z(m,n)}{\partial \beta}\right| < \infty,$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial^2 Z(m,n)}{\partial p^2}\right|<\infty,\ \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial^2 Z(m,n)}{\partial \beta^2}\right|<\infty,\ \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial^2 Z(m,n)}{\partial p\partial \beta}\right|<\infty.$$

Next we are on the position to discuss the derivative of $q(m,n)$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial q(m,n)}{\partial \theta_1} &= -e^{-\theta_1-\theta_2}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{n/2} I_n\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)\\
&\quad+\frac{1}{2\theta_2}ne^{-\theta_1-\theta_2}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{\frac{n}{2}-1} I_n\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)\\
&\quad+\frac{1}{2\sqrt{\theta_1\theta_2}}\theta_2 e^{-\theta_1-\theta_2}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{n/2}\left(I_{n-1}\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)+I_{n+1}\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)\right),\\
\frac{\partial q(m,n)}{\partial \theta_2} &= -e^{-\theta_1-\theta_2}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{n/2} I_n\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)\\
&\quad-\frac{1}{2\theta_2^2}\theta_1 ne^{-\theta_1-\theta_2}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{\frac{n}{2}-1} I_n\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)\\
&\quad+\frac{1}{2\sqrt{\theta_1\theta_2}}\theta_1 e^{-\theta_1-\theta_2}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{n/2}\left(I_{n-1}\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)+I_{n+1}\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)\right),\\
\frac{\partial^2 q(m,n)}{\partial \theta_1^2} &= \left(\frac{\left(\frac{n}{2}-1\right)ne^{-\theta_1-\theta_2}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{\frac{n}{2}-2}}{2\theta_2^2}+e^{-\theta_1-\theta_2}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{n/2}-\frac{ne^{-\theta_1-\theta_2}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{\frac{n}{2}-1}}{\theta_2}\right) I_n\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)\\
&\quad+\left(\frac{ne^{-\theta_1-\theta_2}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{\frac{n}{2}-1}}{2\theta_2}-e^{-\theta_1-\theta_2}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{n/2}\right)\left(I_{n-1}\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)+I_{n+1}\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)\right)\frac{\theta_2}{\sqrt{\theta_1\theta_2}}\\
&\quad+\left(I_{n-2}\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)+2I_n\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)+I_{n+2}\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)\right)e^{-\theta_1-\theta_2}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{n/2}\frac{\theta_2}{4\theta_1}\\
&\quad-\left(I_{n-1}\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)+I_{n+1}\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)\right)e^{-\theta_1-\theta_2}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{n/2}\frac{\theta_2^2}{4(\theta_1\theta_2)^{3/2}},\\
\frac{\partial^2 q(m,n)}{\partial \theta_2^2} &= \left(\frac{\theta_1^2\left(\frac{n}{2}-1\right)n\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{\frac{n}{2}-2}}{2\theta_2^4}+\frac{\theta_1 n\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{\frac{n}{2}-1}}{\theta_2^3}\right) I_n\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)e^{-\theta_1-\theta_2}\\
&\quad+\left(\frac{\theta_1 ne^{-\theta_1-\theta_2}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{\frac{n}{2}-1}}{\theta_2^2}+e^{-\theta_1-\theta_2}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{n/2}\right) I_n\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)\\
&\quad+\left(-\frac{\theta_1 ne^{-\theta_1-\theta_2}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{\frac{n}{2}-1}}{2\theta_2^2}-e^{-\theta_1-\theta_2}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{n/2}\right)\frac{\theta_1}{\sqrt{\theta_1\theta_2}}\\
&\quad\cdot\left(I_{n-1}\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)+I_{n+1}\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)\right)\\
&\quad-\left(I_{n-1}\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)+I_{n+1}\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)\right)e^{-\theta_1-\theta_2}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{n/2}\frac{\theta_1^2}{4(\theta_1\theta_2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(I_{n-2}\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)+2I_n\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)+I_{n+2}\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)\right)e^{-\theta_1-\theta_2}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{n/2}\frac{\theta_1^2}{4\theta_1\theta_2},\\
\frac{\partial^2 q(m,n)}{\partial\theta_1\partial\theta_2}&=-\frac{1}{2\theta_2}ne^{-\theta_1-\theta_2}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{\frac{n}{2}-1}I_n\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)+e^{-\theta_1-\theta_2}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{n/2}I_n\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)\\
&-\left(\frac{n}{2}-1\right)ne^{-\theta_1-\theta_2}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{\frac{n}{2}-2}\frac{\theta_1}{2\theta_2^3}I_n\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)\\
&+\frac{(\theta_1-1)}{2\theta_2^2}ne^{-\theta_1-\theta_2}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{\frac{n}{2}-1}I_n\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)\\
&-\frac{\theta_1\theta_2}{4(\theta_1\theta_2)^{3/2}}e^{-\theta_1-\theta_2}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{n/2}\left(I_{n-1}\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)+I_{n+1}\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)\right)\\
&+\frac{(1-\theta_1-\theta_2)}{2\sqrt{\theta_1\theta_2}}e^{-\theta_1-\theta_2}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{n/2}\left(I_{n-1}\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)+I_{n+1}\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)\right)\\
&+\frac{1}{4}\left(I_{n-2}\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)+2I_n\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)+I_{n+2}\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right)\right)e^{-\theta_1-\theta_2}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{n/2}.
\end{aligned}
$$

并将导数改写如下:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial q(m,n)}{\partial\theta_1}&=\left(\frac{n}{2\theta_1}-1\right)q(m,n)+\frac{1}{2}q(m,n-1)+\frac{\theta_2}{2\theta_1}q(m,n+1),\\
\frac{\partial q(m,n)}{\partial\theta_2}&=\left(-\frac{n}{2\theta_1}-1\right)q(m,n)+\frac{\theta_1}{2\theta_2}q(m,n-1)+\frac{1}{2}q(m,n+1),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 q(m,n)}{\partial\theta_1^2}&=\left(\frac{n^2-2n}{4\theta_1^2}-\frac{n}{\theta_1}+1\right)q(m,n)+\left(\frac{2n-1}{4\theta_1}-1\right)q(m,n-1)\\
&+\left(\frac{(2n-\theta_1)\theta_2}{4\theta_1^2}-\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)q(m,n+1)+\frac{1}{2}q(m,n-2),\\
\frac{\partial^2 q(m,n)}{\partial\theta_2^2}&=\left(\frac{n^2-2n}{4\theta_2^2}+e^{-\theta_1-\theta_2}+\frac{2n}{\theta_2}\right)q(m,n)+\left(\frac{\theta_1}{4\theta_2^2}-1-\frac{n\theta_1^2}{2\theta_2^3}\right)q(m,n-1)\\
&+\left(\frac{1}{4\theta_2}-1-\frac{n}{2\sqrt{\theta_1\theta_2}}\right)q(m,n+1)+\frac{\theta_1^2}{2\theta_2^2}q(m,n-2),
\end{aligned}
$$

由于第一类修正贝塞尔函数有界，因此显然可知

$$
\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\partial q(m,n)}{\partial\theta_1}\right|<\infty,\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\partial q(m,n)}{\partial\theta_2}\right|<\infty,
$$

$$
\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 q(m,n)}{\partial\theta_1^2}\right|<\infty,\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 q(m,n)}{\partial\theta_1^2}\right|<\infty.
$$

此外，该级数绝对收敛，因此我们得到

$$
\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial q(m,n)}{\partial\theta_1}\right|<\infty,\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial q(m,n)}{\partial\theta_2}\right|<\infty,
$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial^2 q(m,n)}{\partial\theta_1^2}\right|<\infty,\ \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial^2 q(m,n)}{\partial\theta_1^2}\right|<\infty.$$

因此，条件（C4）得以满足。

现在我们对未知参数的对数偏导数计算如下。

对于一阶导数，我们有

$$\left|\frac{\partial\log P(m,n)}{\partial\phi}\right|=\left|\frac{Z(m,n)-q(m,n)}{P(m,n)}\right|\le\frac{Z(m,n)}{P(m,n)}+\frac{q(m,n)}{P(m,n)}\le\frac{1}{\phi(1-\phi)},$$

$$\left|\frac{\partial\log P(m,n)}{\partial p}\right|=\left|\frac{1}{P(m,n)}\frac{\partial P(m,n)}{\partial p}\right|\le\psi(m,n)\left|\frac{\partial P(m,n)}{\partial p}\right|,$$

$$\left|\frac{\partial\log P(m,n)}{\partial\beta}\right|=\left|\frac{1}{P(m,n)}\frac{\partial P(m,n)}{\partial\beta}\right|\le\psi(m,n)\left|\frac{\partial P(m,n)}{\partial\beta}\right|,$$

$$\left|\frac{\partial\log P(m,n)}{\partial\theta_1}\right|=\left|\frac{1}{P(m,n)}\frac{\partial P(m,n)}{\partial\theta_1}\right|\le\psi(m,n)\left|\frac{\partial P(m,n)}{\partial\theta_1}\right|,$$

$$\left|\frac{\partial\log P(m,n)}{\partial\theta_2}\right|=\left|\frac{1}{P(m,n)}\frac{\partial P(m,n)}{\partial\theta_2}\right|\le\psi(m,n)\left|\frac{\partial P(m,n)}{\partial\theta_2}\right|,$$

其中， ψ 是与 m 和 n相关的常数，结合上述结果，一阶导数分别可以被某个适当的常数所界定。我们知道，在平稳状态下

$$E\left|\frac{\partial\log P\left(Z_1,Z_2\right)}{\partial\phi}\right|^2<\infty,E\left|\frac{\partial\log P\left(Z_1,Z_2\right)}{\partial p}\right|^2<\infty,$$

$$E\left|\frac{\partial\log P\left(Z_1,Z_2\right)}{\partial\beta}\right|^2<\infty,E\left|\frac{\partial\log P\left(Z_1,Z_2\right)}{\partial\theta_1}\right|^2<\infty,E\left|\frac{\partial\log P\left(Z_1,Z_2\right)}{\partial\theta_2}\right|^2<\infty.$$

由于篇幅所限，我们将不列出二阶和三阶导数；估计导数界的核心问题在于：当 m 固定时，如何估计贝塞尔函数乘积的界。

类似地，记 $\boldsymbol{\omega}_1=\phi$、 $\boldsymbol{\omega}_2=p$、 $\boldsymbol{\omega}_3=\beta$、 $\boldsymbol{\omega}_4=\theta_1$、 $\boldsymbol{\omega}_5=\theta_2$,

$$E\left|\frac{\partial^2\log P\left(Z_1,Z_2\right)}{\partial\boldsymbol{\omega}_u\partial\boldsymbol{\omega}_v}\right|^2<\infty,E\left|\frac{\partial^3\log P\left(Z_1,Z_2\right)}{\partial\boldsymbol{\omega}_u\partial\boldsymbol{\omega}_v\partial\boldsymbol{\omega}_w}\right|<\infty,\quad u,v,w=1,2,\ldots,5.$$

费希尔信息矩阵 (σ_{ij}) 定义良好，且根据 (C6)，它是非奇异的。由此可以得出结论，条件 (C1)-(C7) 均得到满足。

□

A.2 平稳解存在性与遍历性的证明

在本部分中，我们首先证明过程 $\{Z_n\}$ 的平稳解存在，并证明其平稳分布唯一，然后说明该过程也是非周期且遍历的。首先，我们介绍以下关于马尔可夫链平稳解存在性的命题。

命题 A.2.1. 若 $\{Z_n\}$ 是状态空间为 Z 的弱费勒链，且对任意 $\eta > 0$，存在一个紧集 $C \subseteq Z$，使得对所有 $z \in Z$，$P(x, C^c) < \eta$，其中 $P(x, C^c) < \eta$ 是从 z 到 C^c 的转移概率，则 $\{Z_n\}$ 在概率意义下有界，且该链至少存在一个平稳分布。

现在我们可以验证该马尔可夫链是否满足命题 A.2.1。

证明。我们取 $C = \{-c, -c+1, \ldots, c-1, c\}$，其中 $c > 0$ 和 $c \in \mathbb{N}$。显然，C 是一个紧集，因为 C 中的元素个数有限。根据马尔可夫不等式，我们有

$$\begin{cases} P(Z_t \geq c | Z_{t-1} = x) \leq \dfrac{E[Z_t | Z_{t-1} = x]}{c} = \dfrac{\phi p \delta x + (1-\phi)(\theta_1 - \theta_2)}{c}, Z_t \geq 0, \\ P(Z_t \leq -c | Z_{t-1} = x) \leq -\dfrac{E[Z_t | Z_{t-1} = x]}{c} = -\dfrac{\phi p \delta x + (1-\phi)(\theta_1 - \theta_2)}{c}, Z_t < 0. \end{cases}$$

然后，给定 $\eta > 0$，选择足够大的 c，使得 $\phi p \delta x + (1-\phi)(\theta_1 - \theta_2) < c\eta$。 □

接下来，我们证明平稳分布的唯一性。我们将说明 $\{Z_n\}$ 满足多布林条件，即存在一个概率测度 ν，具有如下性质：对于某些 $m \geq 1$、$\eta > 0$ 和 $\gamma > 0$，有

$$\nu(B) > \eta \Rightarrow P^m(x, B) \geq \gamma, \quad \forall x \in X.$$

于是，$\{Z_n\}$ 具有唯一的平稳分布，且是一致遍历的。我们需要验证上述条件是否对 $\{Z_n\}$ 成立。

证明。定义测度 ν，使其在 $\{c\}$处具有单位点质量，其中 $c \in \mathbb{N}$。我们只需考虑满足 $c \in B$ 的博雷尔集 B，并且可以发现，我们能够选择适当的 η，使得$\nu(\{c\}) = \nu(B) > \eta$。由于 $P(\{c\}) < P(B)$，因此有

$$\begin{aligned} P(Z_t \in B | Z_{t-1} = x) &\geq P(Z_t = c | Z_{t-1} = x) \\ &= \phi \frac{I_{\delta c}(2p\beta) I_{x-\delta c}(2(1-p)\beta)}{I_x(2\beta)} + (1-\phi) e^{-\theta_1-\theta_2} \left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{c/2} I_c\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right). \end{aligned}$$

情况 1：如果 $\phi = 0$，我们可以选择 γ，使得

$$P(Z_t \in B | Z_{t-1} = x) \geq P(Z_t = c | Z_{t-1} = x) = e^{-\theta_1-\theta_2} \left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{c/2} I_c\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right) = \gamma > 0.$$

情况 2：如果 $\phi = 1$，我们可以选择 γ，使得

$$P(Z_t \in B | Z_{t-1} = x) \geq P(Z_t = c | Z_{t-1} = x) = \frac{I_{\delta c}(2p\beta) I_{x-\delta c}(2(1-p)\beta)}{I_x(2\beta)} = \gamma > 0.$$

情况 3：如果 $0 < \phi < 1$，我们可以选择 γ，使得

$$\begin{aligned} P(Z_t \in B | Z_{t-1} = x) &\geq P(Z_t = c | Z_{t-1} = x) \\ &= \phi \frac{I_{\delta c}(2p\beta) I_{x-\delta c}(2(1-p)\beta)}{I_x(2\beta)} + (1-\phi) e^{-\theta_1-\theta_2} \left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{c/2} I_c\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right). \\ &= \gamma > 0. \end{aligned}$$

因此，我们可以选择 $m = 1$，且满足多布林条件。记 $P(Z_t = x | Z_{t-1} = x) = P_{xx}$，对于，并且我们可以计算

$$P_{xx} = \begin{cases} \phi \frac{I_x(2p\beta) I_0(2(1-p)\beta)}{I_x(2\beta)} + (1-\phi) e^{-\theta_1-\theta_2} \left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{x/2} I_x\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right) > 0, \delta = 1, \\ \phi \frac{I_x(2p\beta) I_{2x}(2(1-p)\beta)}{I_x(2\beta)} + (1-\phi) e^{-\theta_1-\theta_2} \left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{x/2} I_x\left(2\sqrt{\theta_1\theta_2}\right) > 0, \delta = -1. \end{cases}$$

因此，$\{Z_n\}$ 是非周期的，我们可以得出结论：$\{Z_n\}$ 是一致遍历的。 □