arXiv:2305.04350v1 [math.CV] 7 May 2023

# 向量丛自同构的全纯分解

˘乔治·约尼特˛和 FRANK KUTZSCHEBAUCH

Abstract. 我们证明，Stein 空间$X$ 上的全纯秩 2 向量丛 $E$ 的任意零伦特殊全纯向量丛自同构，都可以写成有限个幺幂全纯向量丛自同构的乘积，也可以写成有限个指数的乘积。

Contents

1. 引言 1 2. 预备知识 5 3. 幺幂全纯自同构。对的构造 8 4. 分解为适用于某个对的自同构 11 4.1. 拓扑解 12 4.2. Oka 对的 Oka 原理的应用 14 5. 适当自同构分解为幺幂因子 17 5.1. 为分层椭圆子浸没的 Oka 原理做准备 18 5.2. 拓扑解 24 5.3. 分层椭圆子浸没的 Oka 原理的应用 32 参考文献 34

## 1. Introduction

我们考虑 Stein 空间 $X$ 上的全纯向量丛 $E \to X$。用 $E_x$ 表示丛 $E$ 在点 $x \in X$ 上的纤维。令 $F\colon X \to \mathrm{SAut}(E)$ 是 $E$ 的特殊全纯向量丛自同构。这里的“特殊”是指全纯函数 $\det F\colon X \to \mathbb{C}^*$ 恒等于 1。回顾 [Ca58]，$F$ 是自同构丛 $\mathrm{Aut}(E)$ 的整体截面；该丛是一个全纯纤维丛，其典型纤维为 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$，并且它按 Cartan 的意义是一个群丛 [Ca58]。条件是 $F$ 的行列式（请注意，

日期：2023年5月9日。2020年数学主题分类。主要分类32Q56；次要分类19B14。关键词和短语。Oka 原理、Stein空间、向量丛自同构、幺幂分解、全纯函数环。本研究部分得到瑞士国家科学基金会资助，项目编号200021-178730。

向量空间上端omorphism的行列式的定义独立于向量空间的基的选择）可以表述为 $F$ 是子丛 SAut($E$) $\subset$ Aut($E$) 中的一个截面，该子丛同样是一个群丛，其中纤维 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 被 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ 所替代，即过渡函数（通过共轭 $= \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 的外自同构作用）保持不变。我们有相应的李代数丛 End$^0$($E$) $\subset$End($E$)，其中上标 0 指的是迹为零条件 $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) := \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) : \mathrm{trace}\, A = 0\}$。存在一个全局丛映射（即纤维映射），指数映射 exp : End($E$) $\to$Aut($E$)，它限制到子丛上为: exp : End$^0$($E$) $\to$ SAut($E$)。

我们称 $E$, $\alpha \in$ Aut($E$) 的自同构为幺幂自同构，当且仅当 $\alpha$ –Id 作为 $E$ 纤维上的一个端omorphism 是幂零的；也就是说，对于每个点 $x$，线性映射 $\alpha(x) - \mathrm{Id}_{E_x} : E_x \to E_x$ 都是幂零的。显然，这样的 $\alpha$ 必然行列式为 1，即 $\alpha \in$ SAut($E$)。我们用 U($E$) 表示幺幂自同构的子集。

我们的主要结果如下:

定理 1.1. 设 $X$ 是一个 Stein 空间， $E \to X$ 是其上的一个秩 2 全纯向量丛。则 $F \in$ SAut($E$) 是幂零全纯自同构 $u_i \in$U($E$) 的一个（有限）乘积，其中 $i = 1$、2、.....、$K$、

$$F(x) = u_1(x) \cdot u_2(x) \cdot \ldots \cdot u_K(x)$$

当且仅当 $F$ 是零伦。

对于平凡向量丛 $E \cong X \times \mathbb{C}^n$，特殊全纯自同构对应于全纯映射 $f : X \to \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$。存在“典范的”幺幂自同构，即映射到上三角幺幂矩阵（即对角线上元素均为 1）或下三角幺幂矩阵的映射。

系数取自环 $R$ 的矩阵分解为系数取自环 $R$ 的上、下三角幺幂矩阵的交错乘积，是一个受到广泛研究的课题。在本文中， $R = \mathcal{O}(X)$ 是 Stein 空间 $X$ 上全纯函数构成的环。对于多项式函数环，最著名的结果由 Suslin 给出 [Sus77],，他证明了 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}[z_1, z_2, \ldots z_k])$ 中的每个矩阵都可以表示为系数取自 $\mathbb{C}[z_1, z_2, \ldots, z_k]$ if$n \geq 3$ 的上、下三角矩阵的乘积。Cohn 在 [Co66] 中早已证明，对于 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}[z_1, z_2, \ldots z_k])$ 和 $k \geq 2$，这一结论并不成立。对于连续函数环，这个问题由 Thurston 和 Vaserstein 解决 [ThurVas88]。关于环 $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$，即定义在$\mathbb{C}^n$上的全纯函数环，Gromov 在 [Gro89] 中提出了矩阵分解问题。他将其称为“全纯 Vaserstein 问题”，该问题已于 [IK12a] 针对一般 Stein 流形得到解决。由于开黎曼曲面上的任何向量丛都是平凡的，我们关于 $X$ 黎曼曲面的主定理已包含在该论文的主要结果中；此外，该定理早在 1986 年就已于 [KR88] 中得到证明。

在线性代数中，这个问题称为 LU 分解。它不仅在域上得到研究，在环上也得到了广泛研究 [VS13] ，而这类分解存在性的问题则通过环的第一（特殊）$K1$-群的定义形式化（见 [B68]）。对于 Banach 代数，Milnor 的教材中证明了这一分解结果 [Mil71]。环上的分解与 Bass 稳定秩的概念相关；若环的 Bass 稳定秩等于 1，则足以保证该环 $R$ 能够对所有 $n \geq 2$ 上的 $\mathrm{SL}_n(R)$ 实现分解。复分析中的此类环例如圆盘代数 [JMW86] ，或更一般地，带边黎曼曲面上在内部全纯的连续函数所构成的环 [Lei20]。

对于上述多项式函数、连续函数或全纯函数构成的环，可以将这种分解视为高斯消元过程的参数化版本，而其可解的充要条件是映射到 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ 的映射为零伦。

从上／下三角矩阵乘积推广到幺幂矩阵乘积，这一做法在 [KS19] 中被用于证明，$\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}(\mathbb{C}))$ 中的任意矩阵都是两个指数的乘积。

上述所有结果都可以用环上矩阵的 $K$-理论术语表述。本文所讨论的向量丛情形超出了 $K$-理论的框架。针对本文所考虑的向量丛自同构情形，Hultgren 和 Wold [HW20] 首先在拓扑情形下作出了推广。他们将 Vaserstein 在 [Vas88] 中提出的策略应用于向量丛情形。遗憾的是，我们无法依赖他们的结果，因为他们并未证明，由预先构造的一组幺幂全纯自同构的“连续副本”组成的乘积能够解决问题。另一方面，我们在第 4.1 和 5.2 小节提出的策略可以推广到有限维拓扑流形上任意秩的连续向量丛情形，从而证明 Hultgren 和 Wold 的结果。我们将具体细节留给感兴趣的读者。

证明策略如下。由于我们的向量丛 $E$ 不一定是平凡的，因此在平面映射 $X \to \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ 的情形下，由上/下三角幺幂矩阵给出的全局幺幂自同构并不存在。我们必须在全纯范畴中构造相应的替代对象。该构造将在第 3 节完成。如果秩 2 向量丛 $E$ 不含平凡子丛，那么 $E$ 的全纯幺幂自同构必须在一个（余维 1）解析子集内“退化”为恒等映射 $\mathrm{Id}_{E_x}$。我们将成对构造全纯幺幂自同构，即“上/下”三角自同构 $(U_i^+, U_i^-) \in \mathrm{U}(E) \times \mathrm{U}(E)$，其中 $U_i^+ = \mathrm{Id} + N_i^+$、$U_i^- = \mathrm{Id} + N_i^-$ 具有这样的性质：$N_i^+, N_i^- \in \mathrm{End}(E)$ 可被全纯函数 $f_i \in \mathcal{O}(X)$，$i = 1, 2, \ldots, n+1$ 整除，并且这些 $f_i$ 没有公共零点。在集合 $X \setminus \{f_i = 0\}$ 上，丛 $E$ 是平凡的，且这对 $(N_i^+, N_i^-)$ 与

“标准”对

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

接下来我们分两步进行。

在第一步（第4节）中，我们将 $F$ 分解为零伦特殊自同构 $G_i$的乘积,

$$F = G_1 \cdot G_2 \cdot \ldots \cdot G_{n+1},$$

使得 $G_i - \mathrm{Id}$ 可被 $f_i^4$ 整除，并且零伦满足条件 $(G_i)_t(x) = \mathrm{Id}$，其中 $f(x) = 0$。这样的自同构 $G_i$ 称为适用于对 $(U_i^+, U_i^-)$。在这一步中，我们采用 Forster 和 Ramspott 提出的 Oka 对的 Oka 原理。不过，我们选择使用 Studer 提出的同伦原理来展示证明。Studer 定理所需的技术细节引自 Forster 和 Ramspott 的论文 [FR66]。我们希望这能帮助并非 Oka 对领域专家的读者更好地理解相关内容，并让他们对 Oka 原理有更全面的认识。

相应拓扑问题的解在第4.1小节中以直接构造的方式给出。

在第5节的第二步中，我们将每个适用于配对 $(U_i^+, U_i^-)$ 的 $G_i$ 分解为该配对的全纯“复制”的交织乘积，即存在 $h_i \in \mathcal{O}(X)$ 使得

$$G_i(x) = U_i^-(h_1(x)) \cdot U_i^+(h_2(x)) \cdot \ldots. \tag{□}$$

这里，幺幂自同构 $U = \mathrm{Id} + N \in \mathrm{Aut}(E)$ 的复制 $U(f)$（由函数 $f$ 给出）简单定义为 $U(f(x)) = \mathrm{Id} + f \cdot N$。

这遵循 [IK12b] 的策略，并且仅适用于秩 2 向量丛。这是论文中唯一一处大量用到向量丛秩 2 条件的地方。其他所有结果都适用于（或稍加努力即可证明适用于）任意秩 $n \geq 2$ 的向量丛。因式分解 (□) 的拓扑解见第5.2小节，它依赖于一个关于“接近”单位矩阵的连续复值矩阵的特殊因式分解结果，即引理 5.7。特别地，我们给出了适用于复值连续函数环的怀特海德引理的一种新形式，即引理 5.7 (3)。

然后利用第5.3小节中的分层椭圆子浸没的冈纳原理，从拓扑结果推导出全纯结果。

最后，我们提及主要结果的一个直接推论（Doubtsov 与第二作者在 [DK19] 中发现），它适用于 Mortini 和 Rupp 在 [MoRu18] 中引入的所谓指数乘积分解。为此，记 $\exp : \mathrm{End}^0(E) \to \mathrm{SAut}(E)$ 为从迹为零的自同态（李代数丛）到特殊自同构丛的指数映射。注意到对于幂零自同构 $N$，$\log(U)$ $\log(\mathrm{Id} + N)$ 的泰勒公式

只是 $N$ 的一个多项式，因此在 $X$ 上全局收敛，我们由此证明了以下结论。

推论 1.2. 设 $X$ 是一个 Stein 空间， $E \to X$ 是 $X$ 上的秩 2 全纯向量丛。那么， $F \in \mathrm{SAut}(E)$ 是有限个全纯指数映射的乘积，即存在 $a_i \in \Gamma(\mathrm{End}^0(E)\ X)$、 $i = 1$、2、...、 $K$，

$$F(x) = \exp(a_1)(x) \cdot \exp(a_2)(x) \cdot \ldots \cdot \exp(a_K)(x)$$

当且仅当 $F$ 是零伦的。

## 2. Preliminaries

我们使用的主要技术工具是 Oka 原理的两个实例。其中之一，即分层椭圆子浸没的截面的 Oka 原理，在现代文献中广为人知且占据重要地位。为了介绍这一原理，我们需要按照 [Gro89] 和 [FP02] 的做法，引入与全纯淹没映射相关的喷流概念。我们先介绍一些记号和术语。设 $h\colon Z \to X$ 是从复流形 $Z$ 到复流形 $X$ 的全纯淹没映射。对于任意 $x \in X$，该淹没映射在 $x$ 上的纤维记为 $Z_x$。在每一点 $z \in Z$ 处，切空间 $T_zZ$ 包含垂直切空间 $VT_zZ = \ker Dh$。对于全纯向量丛 $p\colon E \to Z$，我们用 $0_z$ 表示纤维 $E_z$ 中的零元素。

定义 2.1。设 $h\colon Z \to X$ 是复流形 $Z$ 到复流形 $X$的全纯淹没映射。与 $h$ 相关联的 $Z$ 上的喷流是一个三元组 $(E, p, s)$，其中 $p\colon E \to Z$是一个全纯向量丛，且 $s\colon E \to Z$是一个全纯映射，使得对每个 $z \in Z$，我们都有

(i) $s(E_z) \subset Z_{h(z)}$, (ii) $s(0_z) = z$，以及 (iii) 导数 $Ds(0_z) : T_{0_z}E \to T_zZ$ 将子空间 $E_z \subset T_{0_z}E$满射到垂直切空间 $VT_zZ$。

注 2.2. 我们也称该次浸没 admits a 喷流。与全纯淹没映射相关联的喷流有时称为（纤维）支配喷流。

构造支配喷流的一种方法，正如 Gromov 所指出的，是找出有限多个 $\mathbb{C}$-完备向量场，使其与纤维相切，并且在 $Z$ 中的所有点处张成纤维的切空间。然后可以利用这些向量场 $V_j$ 的流 $\varphi_j^t$，通过 $s(z, t_1, \ldots, t_N) = \varphi_1^{t_1} \circ \cdots \circ \varphi_N^{t_N}(z)$ 来定义 $s\colon Z \times \mathbb{C}^N \to Z$，从而得到一个喷流。

定义 2.3. 设 $X$ 和 $Z$ 是复空间。若全纯映射 $h\colon Z \to X$在每个点 $z_0 \in Z$ 处都局部等价于一个投影 $p\colon U \times V \to U$（该等价由保纤维双全纯映射给出），则称其为次浸没；其中 $U \subset X$是包含 $h(z_0)$ 的开集， $V$ 是某个 $\mathbb{C}^d$中的开集。

我们将需要使用分层喷流，其定义如下。

定义 2.4。若次浸没映射 $h\colon Z \to X$ 具有分层喷流，是指存在一个闭复子空间的递降链 $X = X_m \supset \cdots \supset X_0$，使得每个分层 $Y_k = X_k \setminus X_{k-1}$ 都是正则的，并且限制次浸没映射$h\colon Z|_{Y_k} \to Y_k$ 在任意点 $x \in Y_k$的某个小邻域上具有喷流。

注 2.5。我们称分层 $X = X_m \supset \cdots \supset X_0$ 与该分层喷流相关联。

在 [FP01], 中另见 [For10，定理 8.3],证明了以下定理 .

定理 2.6。设 $X$ 为一个 Stein 空间，并具有一个闭复子空间的递降链 $X = X_m \supset \cdots \supset X_0$，使得每个分层 $Y_k = X_k \setminus X_{k-1}$ 都是正则的。假设 $h\colon Z \to X$ 是一个具有分层喷流的全纯淹没映射，则任意连续截面 $f_0\colon X \to Z$，只要 $f_0|_{X_0}$ 是全纯的，都可以通过一个在 $X_0$上保持不变的同伦变形为全纯截面 $f_1\colon X \to Z$。

我们（主要）使用的第二个 Oka 原理是 Forster 和 Ramspott 提出的 Oka 对的 Oka 原理。然而，它在现代 Oka 理论文献中并不突出，而且原始论文 [FR66] 是用德语写的。因此，我们选择从 Studer [Stu20a]提出的、用于证明同伦（因而也包括 Oka）原理的一般统一方法中推导出这一原理。

为了表述他的结果，我们需要回顾复几何中的一些基本概念。设 $X$ 为一个约化复空间。若一个紧集 $C \subset X$ 具有由 Stein 邻域组成的基，则称其为 Stein 紧集。若 $C \subset B$ 对某个 $B \subset X$成立，则称紧集 $C$为 $\mathcal{O}(B)$-凸的，如果 $C = \{p \in B\colon |f(p)| \leq \max_{x\in C} |f(x)|, f \in \mathcal{O}(B)\}$。
这里， $\mathcal{O}(B)$表示定义在 $B$某些未具体指定的邻域上的全纯函数的集合。

定义 2.7. 设 $X$ 是一个复空间，并设 $A$、$B \subset X$。有序对 $(A, B)$ 是一个 $C$-对，如果

(1) $A$、$B$、$A \cap B$ 和 $A \cup B$ 都是 Stein 紧集；
(2) $A \cap B$ 是 $\mathcal{O}(B)$-凸的；(3) $A \setminus B \cap B \setminus A = \emptyset$。

Studer 所使用的拓扑空间层概念如下。

定义 2.8. 设 $X$ 是一个拓扑空间。$X$ 上的拓扑空间层是一个层 $U \mapsto \Phi(U)$，$U \subset X$ 为开集；其局部截面的集合是拓扑空间，其限制映射连续，并且具有良好的性质，即对于任意实维数为 $n \geq 1$ 的闭单位球 $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^n$，预层$U \mapsto \Phi^{\mathbb{B}}(U)$ 实际上是一个层。这里， $\Phi^{\mathbb{B}}(U)$ 表示连续映射 $\mathbb{B} \mapsto \Phi(U)$ 的集合。

如果每个局部截面集合都是度量空间，则称拓扑空间层为度量的；如果每个局部截面集合都是完备度量空间，则称度量层为完备的。若 $\Phi$ 是拓扑空间层 $\Psi$ 的子层，且其局部截面集合赋有来自 $\Psi$ 的局部截面集合的子空间拓扑，则称 $\Phi \hookrightarrow \Psi$ 是拓扑空间层的一个包含。

拓扑空间层的以下性质对于 Oka 原理至关重要。在下文中， $s$和 $t$ 表示单位区间中的实数，并且我们总是通过将它们用作下标来表示通常意义下的同伦。我们约定，单点集（其边界为空）是维数为 $n = 0$的闭单位球$^{\circ}$。对于 $X$ 的子集 $A$，我们用 $A$ 表示其内部。如果不存在关于定义域的歧义，则层 $\Phi$ 的限制映射$\Phi(U) \to \Phi(V)$记为 $r_V$。

定义 2.9. 如果对于拓扑空间 $X$ 上的拓扑空间层的包含 $\Phi \hookrightarrow \Psi$ 满足：对于每个点 $p \in X$、$p$ 的每个开邻域 $U$，以及从任意实维数 $n \geq 0$ 的闭单位球 $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^n$ 到 $\Psi(U)$ 的每个连续映射 $f$，其中 $f|_{\partial\mathbb{B}} \subset \Phi(U)$，都存在一个邻域 $p \in V \subset U$ 和一个同伦 $f_t\colon \mathbb{B} \to \Phi(V)$，使得 $f_0 = r_V \circ f$，$f_t|_{\partial\mathbb{B}}$ 与 $t$ 无关，并且 $f_1$ 的值属于 $\Phi(V)$，则称其为局部弱同伦等价。

定义 2.10. 设 $\Phi$ 是 $X$ 上的拓扑空间层，且 $A$、$B \subset X$ 是紧集。若满足以下条件，则称有序对 $(A, B)$ 对于 $\Phi$ 是弱柔性的。给定分别为 $A$、$B$ 和 $A \cap B$ 的开邻域 $U$、$V$ 和 $W$，以及三个映射 $a\colon \mathbb{B} \to \Phi(U)$、$b\colon \mathbb{B} \to \Phi(V)$ 和 $c_s\colon \mathbb{B} \to \Phi(W)$，使得 $c_0 = r_W \circ a$、$c_1 = r_W \circ b$ 和 $c_s|_{\partial\mathbb{B}}$ 不依赖于 $s$，则存在分别更小的邻域 $A \subset U' \subset U$、$B \subset V' \subset V$ 和 $A \cap B \subset W' \subset W$，以及同伦 $a_t\colon \mathbb{B} \to \Phi(U')$、$b_t\colon \mathbb{B} \to \Phi(V')$ 和 $c_s$、$_t\colon \mathbb{B} \to \Phi(W')$，满足 $a_0 = r_{U'} \circ a$、$b_0 = r_{V'} \circ b$ 以及 $c_s$、$_0 = r_{W'} \circ c_s$，分别使得

(1) $c_{0,t} = r_{W'} \circ a_t$和 $c_{1,t} = r_{W'} \circ b_t$，(2) 限制映射 $a_t|_{\partial B}$、$b_t|_{\partial B}$ 和 $c_{s,t}|_{\partial B}$ 均独立于 $t$，(3) $c_{s,1}$ 独立于 $s$、$^{\circ}$，(4) $r_{\mathring{A}} \circ a_t$ 位于 $r_{\mathring{A}} \circ a_0$ 的一个预先指定的邻域内：对于所有 $t$，相对于紧开拓扑，$\mathbb{B} \to \Phi(A)$。

如果 $(A, B)$ 是 $\Phi$ 的弱灵活对，且定义结论中的同伦 $a_t$ 可以选取为对所有 $t$ 满足 $r_{\mathring{A}} \circ a_t = r_{\mathring{A}} \circ a_0$，则称 $(A, B)$ 为有序灵活对。

下面给出 Studer 提出的通用同伦定理。

定理 2.11. 设 $X$ 是第二可数约化 Stein 空间，且 $\Phi \hookrightarrow \Psi$ 是 $X$ 上拓扑空间层的局部弱同伦等价。假设以下两个陈述之一成立：

(1) $\Phi$ 是完备度量，且每个点 $p \in X$ 都有一个邻域 $U$，使得每个满足 $B \subset U$ 的 $C$-对 $(A, B)$ 对于 $\Phi$ 都是弱柔性的。(2) 每个点 $p \in X$ 都有一个邻域 $U$，使得每个满足 $B \subset U$ 的 $C$-对 $(A, B)$ 对于 $\Phi$ 都是有序柔性的。

那么 $\Psi(X) \neq \emptyset$ 当且仅当 $\Phi(X) \neq \emptyset$。此外，若 $\Psi$ 也属于这两类层中的任意一类，则 $\Phi(X) \hookrightarrow \Psi(X)$ 是弱同伦等价。

注 2.12。由于解析延拓是唯一的，定理 2.11 中的假设 (2) 对解析映射层而言过于严苛，无法满足。因此，该假设更适用于连续映射层，因为可以使用截断函数。假设 (1) 是当 $\Phi$为复解析层时试图证明的性质。

## 3. Unipotent Holomorphic Automorphisms. Construction of the幺幂全纯自同构

设 $\pi : E \to X$ 是一个秩 2 的全纯向量丛，其中 $X$ 是维数为 $n$的 Stein 空间。本节将构造 $E$的全局幺幂全纯自同构（等价地，幂零端同态）。

我们先进行一些初步讨论。设 $N \in \mathrm{End}_{\mathrm{hol}}(E)$为一个全局幂零端同态。二维复向量空间上的任意幂零端同态，要么是零映射，要么与.....共轭。

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

相应的向量空间的基称为若尔当基。如果对于 $N$ 存在一个全局全纯若尔当基（即，存在两个全纯截面 $s_1$、$s_2$，使得$s_1(x)$ $s_2(x)$相对于 $N_x$ 是若尔当基: $E_x \to E_x$，且第二种情形在每个点 $x \in X$都成立），那么向量丛 $E$ 将包含一个由 $\mathrm{Ker}(N)$定义的平凡线子丛。由于并非所有 Stein 空间上的全纯秩 2 向量丛都包含一个平凡全纯线丛，因此我们不能指望这种情形一般成立。因此，一般而言，任何幂零端同态$N \in \mathrm{End}_{\mathrm{hol}}(E)$都必须在$X$的某个解析子集上“退化”为零映射。

为了构造 $N$，我们从两个截面 $s_1, s_2 \in \Gamma_{\mathrm{hol}}(E, X)$ 开始，它们在 $X$ 的一个真解析子集之外线性无关。由于凝聚层的截面可以从解析子集上延拓，我们可以在 $X$ 中任意选取一个离散子集 $T$，使得其中的 $s_1(x)$ $s_2(x)$ 构成 $E_x$ 的一个基。

设 $E$ 具有平凡化 $X = \cup_{i=1}^{\infty} U_i$，其转移函数的上循环为$f_{i,j} : U_{i,j} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$。设 $s_1^i, s_2^i : U_i \to \mathbb{C}^2$ 是两个截面的局部表示。设 $A$ 为 $X$ 中满足 $s_1(x)$ 与 $s_2(x)$线性相关的点集。在 $U_i$ 上，这个点集由一个行列式为零来刻画。因此，$A \cap U_i = \{x \in U_i : \det(s_1^i(x)\ s_2^i(x)) = 0\}$ (这表明 $A$ 是余维为

1 的解析集合，位于 $X$中)。由于 $f_{i,j}s_1^i(x) = s_1^j(x)$ 且$f_{i,j}s_2^i(x) = s_2^j(x)$，局部行列式按上循环变换

$$\alpha_{i,j} := \det(f_{i,j}) = \det(s_1^j(x), s_2^j(x))(\det(s_1^i(x), s_2^i(x)))^{-1} : U_{i,j} \to \mathbb{C}^*.$$

由这个上循环定义的全纯线丛 $L$ 未必是平凡的，因此可能不存在全纯函数 $f \in \mathcal{O}(X)$，使其解对应于柯辛分布 $\det(s_1^i(x)\ s_2^i(x))$ 的柯辛问题。然而， $L^{-1}$ 中任意一个全局全纯截面都会给出一个全纯函数 $f \in \mathcal{O}(X)$，并且在 $U_i$ 上，商 $f(x)(\det(s_1^i(x)\ s_2^i(x)))^{-1}$ 是全纯的。事实上，若在 $U_i$ 上，该截面由全纯映射 $f_i : U_i \to \mathbb{C}$ 给出，那么在$U_i$ 上，我们有 $_j(x)\det(s_1^i(x)\ s_2^i(x))(\det(s_1^j(x)\ s_2^j(x)))^{-1} = f_j(x)$；因此，若在 $U_i$ 上定义 $f(x) = f_i(x)\det(s_1^i(x)\ s_2^i(x))$，则函数 $f$ 在全局上定义良好，并且如所需，在 $U_i$ 上，我们得到 $f(x)\det(s_1^i(x)\ s_2^i(x))^{-1} = f_i(x)$ 是全纯的。

再次利用凝聚层的截面可以从解析子集延拓这一事实，我们可以选取该线丛的截面，使函数 $f$ 在 $X$ 的（与上文相同的）离散子集 $T$ 上不消失。

现在我们可以通过以下方式定义一个全局幂零全纯自同态 $N^-$：

$$N^-(s_1(x)) = f(x)s_2(x) \text{ and } N^-(s_2(x)) = 0$$

在 $x$ 点，其中 $s_1(x)\ s_2(x)$ 构成 $E_x$ 的基。为了说明这可全纯延拓到 $X$ 的全部范围，我们在 $U_i$ 中计算它，即在向量 $s_1^i(x)\ s_2^i(x)$ 构成 $\mathbb{C}^2$ 的基的点处，也就是 $s_1(x)\ s_2(x)$ 构成 $E_x$ 的基的点处。若我们记

$$s_1^i(x) = \begin{pmatrix} a(x) \\ c(x) \end{pmatrix} \text{ and } s_2^i(x) = \begin{pmatrix} b(x) \\ d(x) \end{pmatrix},$$

那么在标准基 $e_1, e_2 \in \mathbb{C}^2$ 下， $N^-$ 的矩阵为

$$\begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ f(x) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \frac{f(x)}{\det(s_1^i(x), s_2^i(x))} \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d(x) & -b(x) \\ -c(x) & a(x) \end{pmatrix}.$$

根据我们对 $f$ 的选择，可以看出它能够全纯地延拓到整个 $U_i$，因此 $N^-$ 在全局上定义良好。在满足 $x$ 且 $s_1(x)\ s_2(x)$ 构成一组基、同时 $f(x)$ 消失的点上， $N^-$ 是零映射；而在满足 $x$ 且 $s_1(x)\ s_2(x)$ 线性相关的点上，它可能为零映射，也可能具有秩 1。在 $f$ 不消失的点上，它具有秩 1。

定义 $N^+$ 的方式，方法是

$$N^+(s_1(x)) = 0 \text{ and } N^+(s_2(x)) = f(x)s_1(x),$$

我们已经证明了以下引理。

引理 3.1. 设 $\pi\colon\ E \to X$ 是 Stein 空间 $X$ 上的秩 2 全纯向量丛。给定 $X$ 的离散子集 $T$，存在一对幂零全纯自同构 $N^+$、$N^- \in \mathrm{End}(E)$，以及一个（非零）全纯函数 $f \in \mathcal{O}(X)$，其在 $T$ 上处处不为零，并满足：在 $X \setminus \{f = 0\} \supset T$ 上，丛 $E$ 是平凡的，并且局部地，偶对（$N^+$，$N^-$）全纯共轭于“标准”偶对

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

通过按维数进行标准归纳，我们可以推出以下结论。

命题 3.2. 设 $\pi\colon\ E \to X$ 是定义在维数为 $n$ 的 Stein 空间 $X$ 上的秩 2 全纯向量丛。那么存在 $n+1$ 对幂零全纯自同构 $N_i^+, N_i^- \in \mathrm{End}(E)$，$i = 1, 2, \ldots, n+1$，以及（非零）全纯函数 $f_i \in \mathcal{O}(X)$，它们没有公共零点，并具有如下性质：在每个集合 $X \setminus \{f_i = 0\}$ 上，丛 $E$ 都是平凡的，而且局部地，数对 $(N_i^+, N_i^-)$ 在 $X \setminus \{f_i = 0\}$ 上全纯共轭于 “ 标准 ” 数对

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

证明。选取一个离散集 $T$，使其在 $X$ 的每个不可约分支的光滑部分中至少包含一个点。引理 3.1 给出了幂零全纯自同构 $N_1^+, N_1^- \in \mathrm{End}(E)$，以及一个函数 $f_1 \in \mathcal{O}(X)$，使得丛 $E$ 在 $X \setminus \{f_1 = 0\}$ 上平凡，并且数对 $(N_1^+, N_1^-)$ 局部全纯共轭于“标准”数对。此外，根据 $T$ 的选取，解析集 $\{f_1 = 0\}$ 的维数严格小于 $X$ 的维数，即至多为 $n-1$。这里，复空间的维数指其光滑部分的维数（这等于各不可约分支的光滑部分维数的最大值）。

现在，我们将对离散集 $T \subset \{f_1 = 0\}$ 应用引理 3.1，其中该离散集的选取方式是：它至少包含 $\{f_1 = 0\}$ 的每个不可约分支的光滑部分中的一个点。由此可得到第二对幂零全纯自同构 $N_2^+$、$N_2^- \in \mathrm{End}(E)$，以及一个函数 $f_2 \in \mathcal{O}(X)$，它在 $\{f_1 = 0\}$ 的任何不可约分支上都不恒为零，并且丛 $E$ 在 $X \setminus \{f_2 = 0\}$ 上是平凡的，且局部而言，$(N_2^+, N_2^-)$ 这一对与“标准”对全纯共轭。注意，共同零点集 $\{f_1 = 0\} \cap \{f_2 = 0\}$ 的维数严格小于 $\{f_1 = 0\}$ 的维数，即至多为 $n-2$。经过 $n$ 步后，我们有 $\dim(\{f_1 = 0\} \cap \cdots \cap \{f_n = 0\})$ 至多为零，因此它是一个离散集。最后再对 $T = \{f_1 = 0\} \cap \cdots \cap \{f_n = 0\}$ 应用一次引理 3.1，即可得到第 $n+1$ 对，并完成证明。

□

定义 $U_i^+ = \mathrm{Id} + N_i^+, U_i^- = \mathrm{Id} + N_i^-$，我们找到了幺幂全纯自同构对 $U_i^+$，$U_i^-$ in U($E$)，$i = 1, 2, \ldots, n+1$，以及（非零）全纯函数 $f_i \in \mathcal{O}(X)$，它们没有公共零点，即 $\{x \in X : f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_{n+1}(x) = 0\}$，并且具有如下性质：在每个集合 $X \setminus \{f_i = 0\}$ 上，丛 $E$ 是平凡的，且这一对 $(U_i^+, U_i^-)$ 与“标准”对全纯共轭。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

对于函数 $h : X \to \mathbb{C}$（我们只使用连续函数或全纯函数）以及满足 $U = \mathrm{Id} + N$ 的幂零端omorphism $N \in \mathrm{End}(E)$，我们定义“复制” $N(h) := h \cdot N$，以及 $U(h) := \mathrm{Id} + N(h)$。

给定 $(U_1^+, U_1^-) \ldots, (U_{n+1}^+, U_{n+1}^-)$，我们的最终目标是将任意零伦特殊全纯自同构 $F$ of $E$ 写成形如 $U_i^-(z_{2k-1})U_i^+(z_{2k})$ 的幺幂自同构的有限乘积，其中 $z_{2k-1}, z_{2k}, k = 1$ 是全纯函数，$2, \ldots, N_i$，并使用所有的配对 $(U_i^+, U_i^-)$，其中 $i = 1, 2, \ldots, n+1$。也就是说

$$F = \prod_{i=1}^{n+1} \prod_{k=1}^{N_i} U_i^-(z_{2k-1}) U_i^+(z_{2k}).$$

4. 适用于一对对象的自同构分解

与前文一样，$\pi : E \to X$ 是 Stein 空间 $X$上的全纯向量丛。正如我们在第 3 节所看到的，$E$ 上的一对幺幂自同构 $(U^+, U^-)$ 可能会在子簇 $\{f = 0\}$ 中的某些点（例如函数 $f$为零且用于构造这对自同构的截面 $s_1, s_2$ 构成一组基的点）处“退化”为恒等映射，其中 $f \in \mathcal{O}(X)$。

因此，任何由幺幂自同构构成的乘积，作为一对自同构的复制，必然在这些点处等于恒等映射。本节将提出一个必要条件，以判定一个特殊全纯自同构能否写成一对自同构的复制所构成的幺幂自同构乘积。我们称满足该条件为适用于这对自同构。随后我们证明，$E$ 的任意特殊全纯自同构都可以写成特殊自同构 $G_i$的乘积，其中每个 $G_i$ 都适用于这对自同构 $(U_i^+, U_i^-)$。

由于计算表明，这种单幺对的复制乘积的矩阵与恒等映射之差是可被 $f^3$ 整除的矩阵，因此只有满足这一整除条件时，我们才能将特殊自同构 $G$ 写成一对的复制乘积。这里，如果矩阵 $M_G(x)$ 中的每个元素都能被 $g$ 整除，我们就称 $G \in \mathrm{End}(E)$ 可被 $g$ 整除，其中 $M_G(x) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ 是相对于向量丛$E$的某个局部平凡化表示 $G$ 的矩阵。显然，这一条件与平凡化的选取无关。我们将记作 $g \mid (G - \mathrm{Id})$。为了解决第5.2小节中的连续问题，我们需要更强的条件，即可被 $f^4$ 整除。

因此，我们将把特殊自同构分解为有限个因子，每个因子在 $\{f=0\}$ 上都等于恒等映射。此外，我们要求它们与恒等映射之差能被 $f^4$ 整除。要将这些自同构 $G$ 进一步分解为幺幂自同构的乘积，另一个显而易见的必要条件是它们必须是零伦的。为了用拓扑方法解决这个问题，我们甚至必须要求这些 $G$ 强零伦。我们的意思是，整个同伦在 $\{f=0\}$ 上恒等于 $G_t=\mathrm{Id}$, $\forall t\in[0,1]$。注意，根据定义， $G_0$ 和 $G_1$ 在 $\{f=0\}$ 上等于恒等映射。

定理 4.1. 设 $X$ 是一个 Stein 空间，且 $f_i\in\mathcal{O}(X)$、$i=1$、2、.....、$m$ 是有限个没有公共零点的全纯函数。那么，每个零伦的特殊全纯向量丛自同构 $F\in$ SAut($E$) 都可以写成如下乘积

$$F=\prod_{i=1}^{m}G_i,$$

其中，每个 $G_i\in$SAut($E$) 都是特殊全纯向量丛自同构，其与恒等映射之差可被 $f_i^4$ 整除。此外， $G_i$ 都是强零伦的，也就是说，它们是零伦的，并且在 $\{f_i=0\}$ 上，同伦 $(G_i)_t=\mathrm{Id}$, $\forall t\in[0,1]$。

4.1. 拓扑解。

定理 4.2. 设 $X$ 是一个 Stein 空间，且 $f_i\in\mathcal{O}(X)$、$i=1$、2、.....、$m$ 是有限个没有公共零点的全纯函数。那么，每个零伦的特殊连续向量丛自同构 $F\in$ SAut($E$) 都可以写成如下乘积

$$F=\prod_{i=1}^{m}G_i,$$

其中每个 $G_i\in$ SAut($E$) 都是特殊连续向量丛自同构，并且当 $f_i(x)=0$ 时，$G_i(x)=\mathrm{Id}_{E_x}$。此外，每个 $G_i$ 都是强零伦的，即以这样的方式零伦：在集合 $f_i(x)=0$ 上，整个同伦始终为 $\mathrm{Id}_{E_x}$。

证明。给定纤维丛 SAut($E$) 在 $X$ 上的一个零伦截面 $F$，我们将构造同一纤维丛的连续截面 $G_i$，使得它们的乘积等于 $F$ 和 $G_i|_{A_i}=\mathrm{Id}_{E_x}$，其中 $A_i=\{f_i=0\}$ 和 $f_i$ 是 $X$ 上没有公共零点的全纯函数。因此 $\cap A_i=\emptyset$。

由于 $F$ 是零伦的，因此存在一个连续映射 $F_t: X\to$ SAut($E$),$\forall t\in[0,1]$，使得 $F_0=\mathrm{Id}$ 且 $F_1=F$。

首先考虑 $m=2$ 的情形。令 $U_i$ 为 $A_i$ 在 $X$中的开邻域。由于 $A_1\cap A_2=\emptyset$，我们可以定义一个光滑截断函数 $\chi$： $X\to[0,1]$ 使得

$\chi\equiv 0$ 在 $U_1$ 上，在 $\chi\equiv 1$ 上，在 $U_2$上。现在我们令

$$\alpha(x)=F_{\chi(x)}(x),\ \beta(x)=F_{\chi(x)}^{-1}F(x),\ \forall x\in X.$$

显然， $\alpha\cdot\beta=F$。与此同时， $\alpha|_{A_1}=F_0=\mathrm{Id}$ 和 $\beta|_{A_2}=F_1^{-1}\cdot F=F^{-1}\cdot F=\mathrm{Id}$。请记住， $\alpha$ 和 $\beta$ 正是我们所寻找的 $G_1$ 和 $G_2$。

现在，为了证明 $\alpha$ 和 $\beta$ 是零伦的，并且分别使整个同伦在集合 $A_1$ 和 $A_2$ 上恒等于 Id，我们只需在 $\chi$ 前面加上一个 $t$：

$$\alpha_t(x)=F_{t\chi(x)}(x),\ \beta_t(x)=F_{t\chi(x)}^{-1}F_t(x),\ \forall x\in X.$$

我们很容易看出，

$$\alpha_0=F_0=\mathrm{Id},\ \beta_0=F_0^{-1}F_0=\mathrm{Id},$$

$$\alpha_1=F_\chi=\alpha,\ \beta_1=F_\chi^{-1}F_1=F_\chi^{-1}F=\beta,$$

$$\alpha_t|_{A_1}=F_0=\mathrm{Id},\ \beta_t|_{A_2}=F_t^{-1}\cdot F_t=\mathrm{Id}\,.$$

此外，我们还得到了 $\alpha_t\beta_t=F_t$ 关于 $X$。

现在我们处理 $m=3$ 的情形。设 $U$ 是 $A_1\cap A_2$ 的一个开邻域。那么在 $Y$ 上:$=X\setminus\overline{U}$，集合 $A_1$ 和 $A_2$ 的交集为空，因此我们可以应用上一步。于是，我们得到零伦的特殊连续向量丛自同构 $\widehat{\alpha}$ 和 $\beta$，它们分别在 $A_1\cap Y$ 和 $A_2\cap Y$ 上恒等于恒等映射。同时，我们有同伦 $\widehat{\alpha}_t$ 和 $\widehat{\beta_t}$，使得 $\widehat{\alpha}_t=$ 在 $A_1\cap Y$ 上为 Id，$\beta_t=$ 在 $A_2\cap Y$ 上为 Id，且 $\widehat{\alpha}_t\beta_t=F_t$ 在 $Y$ 上。我们只需令 $\widehat{\gamma}_t:=\mathrm{Id}$，并令 $\widehat{\gamma}:=\widehat{\gamma}_0$ 在 $Y$ 上。显然，$\widehat{\alpha}\beta\widehat{\gamma}=F$ $Y$ $\widehat{\alpha}$ $\beta$ $\widehat{\gamma}$ 在和上，并且具有所需性质。此外，$\widehat{\alpha}_t\beta_t\widehat{\gamma}_t=\widehat{F_t}$ 在 $Y$ 上。

考虑一个光滑截断函数 $\chi\colon\ X\to[0,1]$，使得在 $\overline{U}$ 上 $\chi\equiv 0$，并且在 $X\setminus U_0$ 上 $\chi\equiv 1$，其中 $U_0\supset U$ 是 $U$ 的开邻域，且 $U_0\cap A_3=\emptyset$。定义 $\alpha,\beta\colon\ X\to\mathrm{SAut}(E)$ 如下。

$$\alpha(x)=\begin{cases}\widehat{\alpha}_{\chi(x)}, & x\in X\setminus U\\ \mathrm{Id}, & x\in U\end{cases},\ \beta(x)=\begin{cases}\widehat{\beta}_{\chi(x)}, & x\in X\setminus U\\ \mathrm{Id}, & x\in U\end{cases},$$

分别。我们令 $\gamma=\beta^{-1}\alpha^{-1}F$。显然， $\alpha\beta\gamma=F$ 在 $X$ 上，且 $\gamma=\mathrm{Id}$在 $A_3$ 上，因为$F=F_1=\widehat{\alpha}_1\beta_1=\alpha\beta$ 在 $A_3$上。这里我们用到了这样一个事实:$U_0\cap A_3=\emptyset$。在这种情况下， $\alpha$、 $\beta$ 和 $\gamma$ 分别是定理结论中的 $G_1$、 $G_2$ 和 $G_3$。

现在，如前所述，在 $\chi$ 前面放置一个 $t$，我们便构造出这些同伦。

$$\alpha_t(x)=\begin{cases}\widehat{\alpha}_{t\chi(x)}, & x\in X\setminus U\\ \mathrm{Id}, & x\in U\end{cases},\ \beta_t(x)=\begin{cases}\widehat{\beta}_{t\chi(x)}, & x\in X\setminus U\\ \mathrm{Id}, & x\in U\end{cases},$$

分别。我们还定义了 $\gamma_t=\beta_t^{-1}\alpha_t^{-1}F_t$。

根据定义可知， $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = \mathrm{Id}$ 在 $U$ 上。在 $U$ 之外，我们处于$\widehat{}$情形 $m = 2$，并且有 $\alpha_0 = \widehat{\alpha}_0 = \mathrm{Id}$、$\beta_0 = \beta_0 = \mathrm{Id}$ 和 $\gamma_0 = F_0 = \mathrm{Id}$。显然， $\alpha_1 = \alpha$、$\beta_1 = \beta$ 和 $\gamma_1 = \beta_1^{-1}\alpha_1^{-1}F_1 = \beta^{-1}\alpha^{-1}F = \gamma$。

按照前面的类似论证， $\alpha_t|_{A_1} = \mathrm{Id}$、$\beta_t|_{A_2} = \mathrm{Id}$ 和$\gamma_t|_{A_3} = (\beta_t^{-1}\alpha_t^{-1}F_t)|_{A_3} = \mathrm{Id}$。这里我们使用了 $\alpha_t\beta_t = F_t$ 这一事实，其来自情形 $m = 2$。同样，显然 $\alpha_t\beta_t\gamma_t = F_t$ 在 $X$上。

现在讨论一般情形。不失一般性，我们可以假设 $A_1 \cap \cdots \cap A_{m-1} \neq \emptyset$（否则我们只需令 $G_m = \mathrm{Id}$，并取同伦 $(G_m)_t = \mathrm{Id}$）。接着，我们按照前一种情形中的相同步骤，考虑该交集的一个开邻域 $U$，定义 $Y := X \setminus \overline{U}$，依此类推。

□

注记 4.3. 根据命题 3.2，在前面的定理中，我们需要 $m \leq n+1$，其中 $n$ 是 Stein 空间 $X$的维数。

4.2. Oka 对的 Oka 原理的应用。我们将应用 Studer 定理 2.11。下面指定这些层。与前面一样， $f_i \in \mathcal{O}(X)$、$i = 1$、2、.....、$m$是有限多个没有公共零点的全纯函数，令 $A_i$ 表示它们的零点集 $A_i := \{x \in X : f_i(x) = 0\}$。

我们通过指定预层来定义层 $\mathcal{F}_i$： 对于任意在 $X$ 中开集的 $U$，令其为

$$\mathcal{F}_i(U) := \{\alpha \in \mathrm{SAut}_{\mathrm{hol}}(E|_U) : f_i \mid (\alpha - \mathrm{Id})\},$$

类似地，层 $\mathcal{G}_i$ 定义为

$$\mathcal{G}_i(U) := \{\alpha \in \mathrm{SAut}_{\mathrm{cont}}(E|_U) : \alpha|_{U\cap A_i} = \mathrm{Id})\}.$$

层 $\Phi$ 作为预层定义为

$$\Phi(U) := \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m) \in \mathcal{F}_1(U) \times \mathcal{F}_2(U) \times \cdots \times \mathcal{F}_m(U) : \alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \ldots \circ \alpha_m = f|_U\},$$

and similarily the sheaf $\Psi$ as

$$\Psi(U) := \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m) \in \mathcal{G}_1(U) \times \mathcal{G}_2(U) \times \cdots \times \mathcal{G}_m(U) : \alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \ldots \circ \alpha_m = f|_U$$

**Lem引理 4.4.** 层 $\Phi \hookrightarrow \Psi$ 的包含是弱同伦等价 .

证明。设 $x_0 \in X$。由于 $f_i$ 没有公共零点，存在一个整数$k$， $1 \leq k \leq m$ 使得 $f_k(x_0) \neq 0$。因此，存在 $x_0$ 的一个开邻域 $U = X \setminus A_k$，使得 $f_k$ 在 $U$ 上处处不为零。在这个邻域 $U$ 上，层 $\mathcal{F}_k$ 的限制映射与层 $\mathrm{SAut}_{\mathrm{hol}}$ 的限制映射同构。因此，通过表示

$$\alpha_k(x) = \alpha_{k-1}^{-1}(x) \circ \cdots \circ \alpha_1^{-1} \circ f(x) \circ \alpha_m^{-1}(x) \circ \cdots \circ \alpha_{k+1}^{-1}(x) \tag{4.2.1}$$

$\Phi$ 到 $U$ 的限制映射同构于层 $\mathcal{A}_k$， 该层对于开集$V \subset U$ 定义为

$$\mathcal{A}_k(V) := \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \widehat{\alpha}_k, \ldots, \alpha_m) \in \mathcal{F}_1(V) \times \mathcal{F}_2(V) \times \cdots \times \widehat{\mathcal{F}}_k(V) \cdots \times \mathcal{F}_m(V)\},$$

类似地，根据（4.2.1），$\Phi$ 到 $U$ 的限制映射同构于层 $\mathcal{B}_k$，其定义为

$$\mathcal{B}_k(V) := \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \widehat{\alpha}_k, \ldots, \alpha_m) \in \mathcal{G}_1(V) \times \mathcal{G}_2(V) \times \cdots \times \widehat{\mathcal{G}}_k(V) \times \cdots \times \mathcal{G}_m(V)\}.$$

层 $\mathcal{A}_k$ 按照 Forster-Ramspott 的意义是乘积层 $\mathrm{SAut}_{\mathrm{hol}}(E)^{(k-1)}$ 的一个凝聚子层（参见 [FR66] 2.1. 第 265、266 页上的定义）。换言之，若以 exp : $\mathrm{End}^0(E) \to \mathrm{SAut}(E)$ 表示从迹零端omorphism（李代数丛）到特殊自同构（李群丛）的指数映射，那么凝聚子层中零点邻域内的截面

$$f_1 \operatorname{End}^0_{\mathrm{hol}}(E) \times \cdots \times f_k \widehat{\operatorname{End}^0_{\mathrm{hol}}(E)} \times \cdots \times f_m \operatorname{End}^0_{\mathrm{hol}}(E)^m$$

经指数映射（在此情形下，它是上述指数映射的 $(k-1)$ 重乘积）映射到 $\mathcal{A}_k \subset \mathrm{Aut}_{\mathrm{hol}}(E)^{(k-1)}$ 中恒等映射的一个邻域。

层 $\Psi$ 被定义为 $\mathrm{SAut}^k_{\mathrm{cont}}(E)$ 的子层，定义方式恰好使其满足 Forster 和 Ramspott 的逐点同伦条件（PH）（参见第 268 页的 [FR66] Beispiel b)）。这里有 $\Psi(x) = \Phi(x)$。表达式 $\Psi(x)$ 和 $\Phi(x)$ 表示这些层的可达点。关于可达点的定义，参见 [FR66] 第 267 页中部，或我们论文中命题 5.3 之前的讨论。

可达点的等式对于层对 $\mathcal{A}_k \hookrightarrow \mathcal{B}_k$ 也成立。这些层的包含映射是弱同伦等价，这正是 Forster-Ramspott 在第 275 页末至第 276 页中部证明的条件 (RH.0)。这是该文第 269 页引理 1 的推论。

□

注 4.5。 [FR66] 中的代数／群结构未免过于强大。将支配喷流限制在向量丛的凝聚子层上就足够了（参见 Studer 的博士论文，命题 4.1）。指数映射只是喷流的一个特例。

利用截断函数（单位分解），可得:

引理 4.6。层 $\Psi$ 满足定理 2.11 的条件 (2)。

引理 4.7。层 $\Phi$ 满足定理 2.11 的条件 (1)。

证明。我们使用第 2 节定义 2.10 中弱灵活对 $(A, B)$ 的记号。与引理 4.4 的证明中一样，我们可以假设 $B$ 包含于 $U = X \setminus A_k$ 中。证明通常分两步进行：逼近以及粘合相近的截面。

逼近部分，即通过逼近在（一个邻域内的） $A \cap B$ 上连接 $a$ 和 $b$ 的同伦，将（参数化的）截面 $b$ 在 $A \cap B$的一个邻域内逼近到任意接近 $a$ 的程度。

$b_s$ 在相干层情形下（在某个邻域上）关于 $B$ 。更确切地说，如引理 4.4 的证明中所解释的，截面 $b$ 是乘积层 $\mathrm{SAut}_{\mathrm{hol}}(E)^{(k-1)}$的凝聚子层（依照 Forster-Ramspott 的定义）的一个截面。因此，逼近是在命题 2 的证明中从第 275 页开始进行的。命题 2 的证明中与逼近相关的部分，是第 276 页中段 b) 的证明，该证明基于第 271 页的引理 2。引理 2 讨论的是接近恒等映射的截面。通过将同伦分成有限多个步骤，就可以归结到这种情形：这样，两个步骤之间的“差”（=自同构的商）便接近恒等映射。

为了将（参数化的）截面 $a$ 和 $b_1$ 在 $A \cap B$ 的一个（邻域）上粘合成 $A \cup B$ 的一个（邻域）上的整体截面，我们使用以下“加厚”（Forstnerič 也称之为局部喷流）：

由下式给出的（逐纤维）映射 $\mathrm{SAut}(E)^{m-1} \times \mathrm{SAut}(E)^m$

$$(4.2.2)\quad (\beta_1(x), \beta_2(x), \ldots, \beta^{m-1}(x)) \times (\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_k(x))$$
$$\mapsto (\alpha_1(x)\beta_1(x)^{-1}, \beta_1(x)\alpha_2(x)\beta_2(x)^{-1}, \ldots, \beta_{l-1}(x)\alpha_l(x)\beta_l(x)^{-1}, \ldots, \beta_{m-1}(x)\alpha_m(x))$$

是 $\mathrm{SAut}(E)^m$ 中由 $\mathcal{H}_f$ 定义的全纯截面子层的“加厚”

$$\mathcal{H}_f(U) := \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) : \alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \ldots \circ \alpha_m = f|_U\}.$$

由 $\mathcal{J}$ 给出的 $\mathrm{SAut}(E)^{m-1}$ 的子层

$$(4.2.3)\quad \mathcal{J} = \{(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta^{m-1}) \in \mathrm{SAut}(E)^{m-1} :$$
$$f_1 \mid (\beta_1 - \mathrm{Id}), f_2 \mid (\beta_1^{-1}\beta_2 - \mathrm{Id}), \ldots, f_{m-1} \mid (\beta_{m-2}^{-1}\beta_{m-1} - \mathrm{Id}), f_m \mid (\beta_{m-1} - \mathrm{Id})\}$$

使层 $\Phi$ 保持不变。

定义与 $\mathcal{J}$ 对应的 $\mathrm{End}^0(E)^{m-1}$ 的子层 $\mathrm{Lie}(\mathcal{J})$ 为

$$(4.2.4)\quad \mathrm{Lie}(\mathcal{J}) = \{(v_1, v_2, \ldots, v_{m-1}) \in \mathrm{End}^0(E)^{m-1} :$$
$$f_1 \mid v_1, f_2 \mid (v_1 - v_2), \ldots, f_{m-1} \mid (v_{m-2} - v_{m-1}), f_m \mid v_{m-1}\},$$

它是 $\mathrm{End}^0(E)^{m-1}$ 的一个凝聚子层。

映射

$$(4.2.5)\quad v = (v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}) \mapsto a(x)\exp(v)$$
$$:= (\alpha_1(x)\exp(-v_1), \exp(v_1)\alpha_2(x)\exp(-v_2), \ldots,$$
$$\exp(v_{l-1})\alpha_l(x)\exp(-v_{l)}, \ldots, \exp(v_{m-1})\alpha_k(x)$$

是所需的 在截面 $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) \in \Phi$ 附近的喷流（甚至是全局喷流） .

现在，过渡函数来自 $\log(a(x)\exp(v(x))$，并且可以通过 [Stu20b] 中的推论 3.1 实现粘合。或者，借助 Cartan 方法，可在 [FR66] 第 273 页的引理 3 中完成粘合。

□

引理 4.8. 层 $\Phi$ 是完备的。

证明。自由 $\mathcal{O}$-模层的子层是完备的，当且仅当它是凝聚的（参见第 266 页的 [FR66] 辅助定理 1）。由于 $\Phi$中任意截面的邻域都由凝聚层 Lie($\mathcal{J}$) 在零点附近的截面参数化（参见公式 4.2.5），结论得证。

□

定理 4.1 的证明。首先注意，若全纯函数 $f_1$、$f_2$、$\dots f_m$没有公共零点，则它们的四次方 $f_1^4$、$f_2^4$、$\dots f_m^4$也没有公共零点，并且 $f_i(x) = 0$ 当且仅当 $f_i^4(x) = 0$。定理 4.2 给出了层 $\Psi$的一个整体截面 $\psi \in \Gamma(\Psi, X)$。若将层 $\Phi$ 中的 $f_i$ 替换为 $f_i^4$，则由定理 2.11 可知，$\psi$ 同伦于层 $\Psi$的一个整体截面$\phi \in \Gamma(\Phi, X)$，且该同伦由整体截面给出。设 $G_1$、.....、$G_m$ 是这个全纯截面$\phi$的分量。它们满足所有要求的性质。首先，$\phi$ 是零伦的，因此其各分量也是如此。这是因为根据构造，$\psi$ 是零伦的，且 $\phi$同伦于 $\psi$。其次，$\psi$ 的各分量都是强零伦的；由于从 $\psi$ 到 $\phi$ 的同伦由层 $\Phi$的截面给出，$\psi$的分量 $G_i$ 也具有同样的性质。

□

## 5. Factorization of Suitable Automorphisms into UnipotentFactors

设 $\pi : E \to X$ 是秩 2 的全纯向量丛，其中 $X$ 是维数为 $n$ 的 Stein 空间。给定一个 $F$ of $E$ 的零伦特殊全纯自同构。

由命题 3.2，我们得到 $n+1$对 $N_i^+$、$N_i^-$，以及引理 3.1 中构造的全纯函数 $f_i$，使得 $f_i$ 没有公共零点。应用定理 4.1，我们可以将 $F$ 分解为一个乘积。

$$F = \prod_{i=1}^{m} G_i,$$

其中，每个 $G_i \in$SAut($E$) 都是一个特殊的全纯向量丛自同构，其与恒等映射之差可被 $f_i^4$ 整除。此外，这些 $G_i$ 都是强零伦的，即它们是零伦的，并且在 $\{f_i = 0\}$ 上，该同伦 $(G_i)_t = \mathrm{Id}$, $\forall t \in [0,1]$。

本节的目标是证明，每个自同构 $G_i$ 都可以进一步写成相应幺幂对的复制的有限乘积。

$$G_i = U_i^-(z_1)U_i^+(z_2)\cdots U_i^-(z_{2k-1})U_i^+(z_{2k}),$$

其中数值 $k$ 可能取决于 $i$。

从现在起，我们将专注于这个问题，并回顾第 3 节中的局部情形。在某个平凡化 $E \simeq U_i \times \mathbb{C}^2$ 中， $E$ 的截面 $s_1$、$s_2$ 由向量 $s_1^i(x)$ $s_2^i(x) \in \mathbb{C}^2$ 表示，它们可能在某些点 $x$ 处变得线性相关。我们将 $S_i(x)$ 记为以上述截面为列的矩阵。我们有

$$N^+(x) = S_i(x) \cdot \begin{pmatrix} 0 & f(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot S_i^{-1}(x) = S_i(x) \cdot \begin{pmatrix} 0 & f_i(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot S_i^{\#}(x)$$

and

$$N^-(x) = S_i(x) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ f(x) & 0 \end{pmatrix} \cdot S_i^{-1}(x) = S_i(x) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ f_i(x) & 0 \end{pmatrix} \cdot S_i^{\#}(x),$$

其中 $S_i^{\#}(x)$ 是 $S_i(x)$ 的伴随矩阵，而 $f_i = \underline{f \det S_i} \in \mathcal{O}(U_i)$（见第3节）。注意， $U^{\pm} = \mathrm{Id} + N^{\pm}$，且 $U^{\pm}(h) = \mathrm{Id} + h \cdot N^{\pm}$。我们的主要结果，即定理 1.1，将立即由以下结果推出。

定理 5.1。设 $U^+$、$U^-$ 和 $f \in \mathcal{O}(X)$ 如上所述，并设 $G \in SAut(E)$ 满足以下性质：$f^4 \mid G - \mathrm{Id}$，且 $G$ 是强零伦的。那么

$$G = U^-(h_1) \cdot U^+(h_2) \cdot \ldots \cdot U^-(h_{2k-1}) \cdot U^+(h_{2k})$$

对于某个整数 $k$ 以及全纯函数 $h_i \in \mathcal{O}(X)$、$i = 1$、2、.....、$k$。

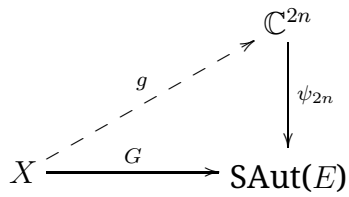
该定理的证明见第5.3小节。作为准备，我们将在第5.1小节证明，对于某个纤维化，分层椭圆子浸没的 Oka 原理，即定理 2.6，适用。在第5.2小节，我们将为这个问题给出一个拓扑解法。

5.1. 为分层椭圆子浸没的 Oka 原理做准备。我们先进行一些初步考察。考虑一个具有如下性质的自同构 $G$： $G - \mathrm{Id}$ 可被 $f^3$ 整除。我们希望求解的方程是

$$G(x) = U^-(h_1(x)) \cdot U^+(h_2(x)) \cdot \ldots \cdot U^+(h_{2n}(x)), \tag{5.1.1}$$

其中 $h_i \in \mathcal{O}(X)$。

换言之，我们希望证明存在一个全纯映射$g = (z_1, \ldots, z_{2n}) : X \to \mathbb{C}^{2n}$，使得下图交换：



其中 $\psi_{2n}$ : $\mathbb{C}^{2n}$ →SAut($E$) 定义为

$$(z_1, \ldots, z_{2n}) \longmapsto U^-(z_1) \cdot U^+(z_2) \cdot \ldots U^-(z_{2n-1}) \cdot U^+(z_{2n}).$$

这等价于求丛 $\xi$ =($\mathbb{C}^{2n}$, $\psi_{2n}$, SAut($E$)) 经 $G$ 拉回后的丛的全纯截面。回忆一下，拉回丛 $G^*\xi$ =($G^*$($\mathbb{C}^{2n}$) $G^*\psi_{2n}$, $X$)，其中

$$G^*(\mathbb{C}^{2n}) = \{(x, z) \in X \times \mathbb{C}^{2n} : G(x) = \psi_{2n}(z)\} \subset X \times \mathbb{C}^{2n}$$

投影为 $G^*\psi_{2n}(x, z) = x$。我们还定义 $G_\xi$ : $G^*$($\mathbb{C}^{2n}$) → $\mathbb{C}^{2n}$ by$G_\xi(x, z) = z$。由此得到以下交换图，因此左侧丛的截面等价于上图中的一个提升 $g$ 。

$$\begin{array}{ccc} G^*(\mathbb{C}^{2n}) & \xrightarrow{G_\xi} & \mathbb{C}^{2n} \\ \downarrow{\scriptstyle G^*\psi_{2n}} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_{2n}} \\ X & \xrightarrow{G} & \text{SAut}(E) \end{array} \tag{5.1.2}$$

下面的技术引理将用于理解纤维化 $G^*\xi$ 到 $\{f = 0\}$ 的限制映射。

引理 5.2。定义矩阵

$$\begin{pmatrix} Q^k_{11}(z,f) & Q^k_{12}(z,f) \\ Q^k_{21}(z,f) & Q^k_{22}(z,f) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & z_2 f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_3 f & 1 \end{pmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{pmatrix} 1 & z_{2k} f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_{2k+1} f & 1 \end{pmatrix}.$$

*Then*

$$Q^k_{11}(z,f) = 1 + f^2 \sum_{1 \le i \le j \le k} z_{2i} z_{2j+1} + f^3 \widetilde{Q}^k_{11}(z,f).$$

证明。直接归纳可得，不仅能得到所需的公式 (5.2)，还能得到其他项模 $f^3$ 的公式:

$$Q^k_{12}(z,f) = f \sum_{1 \le i \le k} z_{2i} + f^3 \widetilde{Q}^k_{12}(z,f),$$

$$Q^k_{21}(z,f) = f \sum_{1 \le j \le k} z_{2j+1} + f^3 \widetilde{Q}^k_{21}(z,f),$$

$$Q^k_{22}(z,f) = 1 + f^2 \sum_{1 \le j < i \le k} z_{2i} z_{2j+1} + f^3 \tilde{Q}^k_{22}(z,f).$$

□

下一个结果对于应用分层椭圆下沉的冈纳原理至关重要。

回忆一下，在纤维化（即全纯映射） $\varphi\colon A \to B$ over $b \in B$ 的纤维 $A_b = \varphi^{-1}(b)$中，全纯可达点的集合A($b$)由以下给出

$$\mathrm{A}(b) = \bigcup_{U \subseteq_{\mathrm{op}} X,\, b \in U,\, s \in \Gamma_{\mathrm{hol}}(U,\varphi)} s(b)$$

截面 $\Gamma_{\mathrm{hol}}(U,\varphi) = \{s$ 的取值： $B \to A$： $s$ 是全纯的 $\varphi \circ s = \mathrm{Id}_B\}$。纤维化的全纯可达点集合是所有纤维的全纯可达点的并集。对于全纯映射，可以讨论全纯可达点或连续可达点。对于我们所使用这一概念的纤维化，这两个集合将会重合。

命题 5.3。设 $f \in \mathcal{O}(X)$ 是复空间$X$ 上的全纯函数，且 $n \geq 2$。给定一个全纯映射 $G\colon X \to \mathrm{SAut}(E)$，满足 $G - \mathrm{Id}$ 可被 $f^3$ 整除，则纤维化 $(G^*(\mathbb{C}^{2n}) \setminus \mathrm{Sing}\ G^*\psi_{2n}, X)$ 的可达点构成一个分层椭圆子浸没。

这里，Sing 表示纤维化 $G^*\xi$ 的奇点集合，其定义为

$$\mathrm{Sing} = \{(x,z) \in X \times \mathbb{C}^{2n} : G(x) = \psi_{2n}(z) \text{ and } z_2 = z_3 = \ldots = z_{2n-1} = 0\}.$$

证明。我们要解的方程（它描述了纤维化$G^*\xi$ ）为

$$G(x) = U^-(z_1(x)) \cdot U^+(z_2(x)) \cdot \ldots \cdot U^+(z_{2n}(x)), \tag{5.1.3}$$

其中 $z_i \in \mathcal{O}(X)$。

根据构造，向量丛 $E$ 在 $X \setminus \{f = 0\}$ 上是平凡的（由截面 $s_1$、$s_2$平凡化）。因此，映射 $G$ 可视为映射 $G\colon X \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$，而这一对幺幂自同构由下式给出

$$U^+ = \begin{pmatrix} 1 & f(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

and

$$U^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f(x) & 1 \end{pmatrix}.$$

因此，我们的问题在 $X \setminus \{f = 0\}$ 上等价于 Ivarsson 和第二作者在 [IK12b]中解决的标准分解问题。其中证明了定理 1.1 所需的所有结论。在上述论文中， $f(x)$这一项实际上是常数 1。不过，通过对 $X \setminus \{f = 0\}$上的纤维化作限制映射并重新缩放，可以找到沿纤维的全局可积向量场，使其在每一点都张成切空间。请注意，在每个纤维上，数值 $f(x)$都是一个非零常数，而全局可积向量场乘以常数后仍然全局可积。 [IK12b] 中的分层定义如下：

$$X_0 = X \setminus \{f = 0\} \supset X_1 = \{a = 0\} \supset \emptyset,$$

其中 $a \in \mathcal{O}(X)$是矩阵中的左上项

$$G(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix}.$$

详细内容请参阅论文 [IK12b]。

在我们的情形中，我们将分层定义为

$$X_0 = X \subset X_1 = (\{f = 0\} \cup \{a = 0\}) \supset X_2 = \{f = 0\} \supset \emptyset.$$

注意，在 $\{f = 0\}$ 上，自同构 $G$ 等于恒等映射。因此，在我们的局部平凡化中，当趋近于 $X$ 的解析子集 $\{f = 0\}$ 时，矩阵的 $a$ 项趋于 1。因此，$\{a = 0\}$ 不仅是 $X \setminus \{f = 0\}$ 的闭解析子集，也是 $X$ 的闭解析子集。由此，$X_1 = (\{f = 0\} \cup \{a = 0\})$ 是 $X$ 的闭解析子集。

假设 [IK12b], 中的结果成立，现在我们只需分析 $\{f = 0\}$ 上的纤维化。分层椭圆次浸没这一性质是局部性的（分层除外），因此我们进入命题 5.3 之前所述的局部情形。在 $U_i$ 上，除去截面 $s_1$、$s_2$ 线性相关的解析子集后，方程 5.1.3 等价于

$$S_i(x)^{-1} \operatorname{Mat}(G)(x) S_i(x) = S_i(x)^{-1} U^-(z_1(x)) S_i(x) \cdot S_i^{-1}(x) U^+(z_2(x)) S_i(x) \cdot \ldots,$$

其中，$\operatorname{Mat}(G)(x) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 是在局部坐标中表示自同构 $G(x)$ 的矩阵。由于 $G - \mathrm{Id}$ 可被 $f^3$ 整除，我们将记

$$\operatorname{Mat}(G)(x) = \mathrm{Id} + f^3(x) \begin{pmatrix} a_1(x) & b_1(x) \\ c_1(x) & d_1(x) \end{pmatrix}.$$

因此

$$\mathrm{Id} + f^3(x) S_i^{-1}(x) \begin{pmatrix} a_1(x) & b_1(x) \\ c_1(x) & d_1(x) \end{pmatrix} S_i(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_1 f(x) & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & z_2 f(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \ldots,$$

或者等价地

$$\begin{aligned} \mathrm{Id} + f^2(x) f_i(x) S_i^{\#}(x) \begin{pmatrix} a_1(x) & b_1(x) \\ c_1(x) & d_1(x) \end{pmatrix} S_i(x) = \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_1 f(x) & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & z_2 f(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \ldots. \end{aligned} \tag{5.1.4}$$

由于这个最后方程的两边在整个 $U_i$ 上都是全纯的，关于全纯/连续映射的恒等原理（$X \setminus \{f = 0\}$ 在 $X$ 中稠密）表明，我们的问题 (5.1.3) 等价于在整个 $U_i$ 上成立的这个最后方程，即方程 (5.1.4)，而不只是在这些截面线性无关的地方成立。

我们引入以下记号

$$\begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix} := f_i(x) S_i^{\#}(x) \begin{pmatrix} a_1(x) & b_1(x) \\ c_1(x) & d_1(x) \end{pmatrix} S_i(x).$$

现在， $G^*(\xi)$ 的可达点由下式描述

$$\mathrm{Id}+f^2(x)\begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_1 f(x) & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & z_2 f(x) \\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\ldots. \tag{5.1.5}$$

为了进一步研究这个方程，我们将右侧第一个和最后一个矩阵移到等式左侧。得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -z_1 f & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+f^2(x)a(x) & f^2(x)b(x) \\ f^2(x)c(x) & 1+f^2(x)d(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -z_{2n} f \\ 0 & 1\end{pmatrix}= \\ =\begin{pmatrix} 1 & z_2 f(x) \\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\ldots.\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_{2n-1} f(x) & 1\end{pmatrix}.$$

采用引理 (5.2) 中的记号，我们可以将其写成如下形式:

$$\begin{pmatrix} 1+f^2(x)a(x) & f^2(x)b(x)-z_{2n}(1+f^2(x)a(x)) \\ f^2(x)c(x)-z_1(1+f^2(x)a(x)) & * \end{pmatrix}= \\ =\begin{pmatrix} Q_{11}^{n-1}(z,f) & Q_{12}^{n-1}(z,f) \\ Q_{21}^{n-1}(z,f) & Q_{22}^{n-1}(z,f)\end{pmatrix}. \tag{5.1.6}$$

现在我们考虑点 $x$ with $f(x) = 0$ such tha 的邻域 t

$$1+f^2(x)a(x)\neq 0.$$

在该邻域内，由 (5.1.6) 各项给出的四个方程满足：前面三个方程通过两边的行列式为 1 的条件蕴含第四个方程。这就是为什么我们在矩阵中将未指定的项写作 $*$。

$$1+f^2(x)a(x)=Q_{11}^{n-1}(z,f), \tag{1}$$

$$f^2(x)b(x)-z_{2n}(1+f^2(x)a(x))=Q_{12}^{n-1}(z,f), \tag{2}$$

$$f^2(x)c(x)-z_1(1+f^2(x)a(x))=Q_{21}^{n-1}(z,f), \tag{3}$$

$$*=Q_{22}^{n-1}(z,f). \tag{4}$$

由于我们有 $1+f^2(x)a(x)\neq 0$，可以利用方程 (2) 和 (3) 用其他变量 $z_2, z_3, \ldots, z_{2n-1}$ 表示 $z_1$ 和 $z_{2n}$。这样，我们的问题就归结为一个方程，即方程 (1)。

我们继续分析这个方程。由引理 5.2 可知， $Q_{11}^{n-1}(z,f)-1$ 能被 $f^2$ 整除。这正是我们使用整除条件 $f^3\,|(G-\mathrm{Id})$ 的地方。如果不满足这一条件，该方程就没有全纯解；也就是说，在满足 $x$ where$f(x) = 0$ 的点上，纤维化 $G^*(\xi)$ 的可达点集将为空。

定义 $\widetilde{Q}_{11}^{n-1} := (Q_{11}^{n-1}(z,f) - 1)/f^2(x)$。将方程 (1) 两边都减去 1，再分别除以 $f^2$，即可证明下面的引理 5.4。这里除以 $f^2$ 是我们第二次利用所考虑的是可达点这一事实。显然，在满足 $x$ where $f(x) = 0$ 的点上，方程 (1) 的左右两边相等，且均为 1，与 $z_i$ 取何值完全无关。$G^*(\xi)$ 的纤维在这些点处为 $\mathbb{C}^{2n}$；然而，可达点由方程 $\widetilde{Q}_{11}^{n-1}(z,f) =$ const 描述，其维数与邻近纤维相同。事实上，在接下来的步骤中，我们将证明，可达点（去掉奇异集后）构成一个次浸没。

引理 5.4. 若 $x$ 满足 $f(x) = 0$，则在 $x$ 的某个邻域内，纤维化 $G^*(\xi)$ 与纤维化 $A$：$\mathbb{C}^{2n-2} \times X \to \mathbb{C} \times X$ 同构，其中

$$(z_2, z_3, \ldots, z_{2n-1}, x) \mapsto (\widetilde{Q}_{11}^{n-1}(z,f), x).$$

T关于奇异集的断言现在可由以下引理推出。

引理 5.5. 函数 $\widetilde{Q}_{11}^{n-1}(z,f)$ 的纤维恰好在零点之外是光滑的；也就是说，$G^*(\xi)$ 的奇异集由满足 $z_2 = z_3 =$ 的那些点组成
$\cdots = z_{2n-1} = 0$。

证明。在 $\{f = 0\}$ 之外，该纤维化只是对 [IK12b] 中所考察纤维化的重新缩放。因此我们略去证明；也可以通过对数目 $n$ 作简单的归纳论证来证明。例如，当 $n \geq 4$~ 时，纤维化的满射性直接源于这样一个简单事实：对于固定的 $x$，$Q^{n-1}$ 是一个非常数多项式，因此不会遗漏任何值。

在$Q\{f^1 =$由引理,5.2我们使用对于 $f(x) \widetilde{=} 0$，我们有
$\widetilde{Q}_{11}^{n-1} = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n-1} z_{2i} z_{2j+1}$。对偶变量求偏导，可得

$$\frac{\partial \widetilde{Q}_{11}^{n-1}}{\partial z_{2k}} = \sum_{l=k}^{n-1} z_{2l+1}.$$

如果这些偏导数全为零，那么从 $n-1$ 开始递减到 2，利用归纳论证可知，所有奇变量都必须为零。

同理可得，如果对奇变量的偏导数全为零，那么所有偶变量都必须为零。

□

作为命题 5.3 证明的最后一步，我们证明，将我们的纤维化限制映射到 $\{f = 0\}$ 并去除奇异集后，所得纤维化是椭圆的。正如 [IK12a] 和 [IK12b]，中所解释的，对于任意全纯函数 $P$，向量场 $\Theta_{i,j} := \dfrac{\partial P}{\partial z_i}\dfrac{\partial}{\partial z_j} - \dfrac{\partial P}{\partial z_j}\dfrac{\partial}{\partial z_i}$

遍历所有不同变量对 $(i,j)$，张成任意纤维的任意光滑点处的切空间。

函数 $P = \widetilde{Q}_{11}^{n-1}$ 对每个变量分别是线性的，因此这些关于 $\widetilde{Q}_{11}^{n-1}$ 的向量场在全局上可积。因此它们给出了标准的 Gromov 喷流。这就完成了命题 5.3 的证明。

□

5.2. 拓扑解。本小节中，我们证明以下定理。

定理 5.6. 设 $U^+$、$U^-$ 和 $f \in \mathcal{O}$（$X$）如第5节开头所述，并考虑连续丛自同构 $G \in \mathrm{SAut}^{\mathrm{top}}$（$E$），满足性质 $f^4 \mid G - \mathrm{Id}$，且 $G$ 是强零伦的。那么

$$G = U^-(h_1) \cdot U^+(h_2) \cdot \ldots \cdot U^-(h_{2k-1}) \cdot U^+(h_{2k})$$

对于某个整数 $k$ 以及连续函数 $h_i \in \mathcal{O}$（$X$）、 $i = 1$、2、.....、 $k$,

我们将采用 Vaserstein [Vas88] 提出的策略，并利用 Calder 和 Siegel [CS78], [CS80] 关于一致同伦的结果。由于这些结果针对的是映射到 $\mathrm{SL}_2$（$\mathbb{C}$）和 $\mathrm{SU}_2$, 的映射，而非映射到丛自同构，因此我们尝试将丛的情形转化为 $X \setminus \{f = 0\}$ 上的平凡丛情形，使得我们在 $X \setminus \{f = 0\}$ 上构造的解能够连续地延拓到 $\{f = 0\}$ 上，只需令其取零解，即当 $f$（$x$）$= 0$ 时， $h_i = 0$ 。为此，我们将先在 $\{f = 0\}$ 附近局部求解问题，将四个因子的局部解拼接起来。如上所述，我们希望在 $\{f = 0\}$ 的某个邻域内，解具有这样的性质：当 $f$（$x$）$= 0$ 时， $h_i$（$x$）$= 0$ ，以便将丛的情形转化为 $X \setminus \{f = 0\}$ 上的平凡丛情形。乍看之下，这似乎很简单；然而，点 $z_2 = z_3 = \cdots = z_{2n-1}$ 是命题 5.3 之前引入的纤维化 $G^*\xi$ 的奇异点。这使得这一性质难以处理。特别是，在寻求全纯解时无法实现这一点（见注 5.8）。我们必须发展一种特殊形式的怀特海德引理，它仅适用于连续函数，而不适用于任意交换环。这一条件对我们很重要，原因如下。根据 Calder 和 Siegel 的结果，映射 $\alpha : X \to \mathrm{SU}_2$ 的任意零伦 $\alpha_t$ 都可以替换为一致零伦 $\tilde{\alpha}_t$。仔细考察 Calder 和 Siegel 的证明可知，在同伦 $\alpha_t$（$x$）恒为恒等映射 $\alpha_t$（$x$）$= \mathrm{Id}$ 的点 $x$ 上，可以使一致同伦也具有这一性质，即 $\tilde{\alpha}_t$（$x$）$=$Id。

我们首先给出一个包含上述创新内容的引理，例如我们新提出的怀特海德引理。

引理5.7. (1) 对于

$$A(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathcal{C}^{\mathbb{C}}(X)),$$

也就是说，在复值连续函数环 $\mathcal{C}^{\mathbb{C}}(X)$ 上，并在特殊条件 $a(x) \neq 0$ 下，可以求解方程

$$\begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_1(x) & 1 \end{pmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{pmatrix} 1 & z_4(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

满足插值条件

$$A(x) = \mathrm{Id} \implies z_1(x) = \cdots = z_4(x) = 0$$

在以下条件下：

- $z_1(x) = \dfrac{c(x) - \dfrac{a(x)-1}{\sqrt{|a(x)-1|}}}{a(x)}$;
- $z_2(x) = \sqrt{|a(x)-1|}$;
- $z_3(x) = \dfrac{a(x)-1}{\sqrt{|a(x)-1|}}$;
- $z_4(x) = \dfrac{b(x) - \sqrt{|a(x)-1|}}{a(x)}$.

（2）在 $f^3 \mid$ 能被 $A - \mathrm{Id}$ 整除的情况下，可以求解方程

$$\begin{pmatrix} 1+f^3a & f^3b \\ f^3c & 1+f^3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ fz_1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{pmatrix} 1 & fz_4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

在假设 $1 + f^3a \neq 0$ 满足插值条件的情况下

$$A(x) = \mathrm{Id} \implies z_1(x) = \cdots = z_4(x) = 0$$

通过选择 $g$

- $z_1 = \dfrac{f^2c - \dfrac{af}{\sqrt{|af|}}}{1+f^3a}$;
- $z_2 = \sqrt{|af|}$;
- $z_3 = \dfrac{af}{\sqrt{|af|}}$;
- $z_4 = \dfrac{f^2b - \sqrt{|af|}}{1+f^3a}$.

(3) 特殊四元组。将行列式为 1 的可逆对角矩阵 $D$ 写成复值连续矩阵环上四个初等矩阵的乘积，并满足插值条件

$$D(x) = \mathrm{Id} \implies z_1(x) = \cdots = z_4(x) = 0$$

以此方式实现。对于 $\lambda \in \mathcal{C}^{\mathbb{C}}(X)^*$，有如下结论：

$$D(x) = \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-\lambda}{\sqrt{|\lambda-1|}} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{|\lambda-1|} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\lambda-1}{\sqrt{|\lambda-1|}} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{|\lambda-1|}}{\lambda} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

注 5.8. 怀特海德引理的标准证明如下:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \lambda^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda^{-1} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \lambda-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \lambda^{-1}-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

该解法确实适用于任意环。然而，它不满足插值条件。此外，对于 Stein 空间上满足插值条件的全纯函数环，不可能存在怀特海德引理。事实上，设 $f \in \mathcal{O}(X)$ 是 Stein 空间 $X$ 上的不可约函数。令$A(x) = \begin{pmatrix} e^{f(x)} & \\ & e^{-f(x)} \end{pmatrix} \in$ $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}(X))$。该矩阵 $A$ 在$\{f=0\}$上等于恒等映射。然而，它与单位矩阵之差的 (1,1) 元仅能被 $f$ 整除，而不能被 $f^2$整除。类似于引理 5.2，可以证明：具有插值性质的标准幺幂对的任意有限个上/下复制 $U^{\pm}(z_i(x))$ 在 $\{f=0\}$ $(f \mid z_i)$ 上的乘积，其 (1,1) 和 (2,2) 元都具有可被 $f^2$整除的性质。因此，对于环 $\mathcal{O}(X)$，不可能存在如 (3) 中所述的特殊怀特海德引理。

定理 5.6 的证明。第一步是将 $G$ 与 $U^{\pm}$ 的连续副本 $(z)$、 $z \in \mathcal{C}^{\mathbb{C}}(X)$ 相乘，使所得自同构在 $\{f=0\}$ 的某个开邻域内为恒等映射。为此，我们利用截断函数将局部解拼接起来。我们可以假设存在一个有限覆盖 $X = \cup_{i=1}^{M} U_i$ ，使得丛 $E$ 在 $U_i$ 上是平凡的（甚至是全纯平凡的）。

回顾第 3 节中的记号。在某个平凡化 $E \simeq U_i \times \mathbb{C}^2$ 中，丛 $E$ 的截面 $s_1$、$s_2$ 表示为向量 $s_1^i(x)$ $s_2^i(x) \in \mathbb{C}^2$，它们在包含于集合 $\{f=0\}$ 中的某些点 $x$ 处可能线性相关。我们用 $S_i(x)$ 表示以上述截面为列的矩阵。于是有

$$N^+(x) = S_i(x) \cdot \begin{pmatrix} 0 & f(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot S_i^{-1}(x) = S_i(x) \cdot \begin{pmatrix} 0 & f_i(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot S_i^{\#}(x)$$

and

$$N^-(x) = S_i(x) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ f(x) & 0 \end{pmatrix} \cdot S_i^{-1}(x) = S_i(x) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ f_i(x) & 0 \end{pmatrix} \cdot S_i^{\#}(x),$$

其中 $S_i^{\#}(x)$ 是 $S_i(x)$ 的伴随，且 $f_i = \frac{f}{\det S_i} \in \mathcal{O}(U_i)$（见第 3 节）。请记住， $U^{\pm} = \mathrm{Id} + N^{\pm}$和 $U^{\pm}(h) = \mathrm{Id} + h \cdot N^{\pm}$。

与命题 5.3 证明开头一样，我们作如下考量。在 $U_i$ 解析子集之外，此处截面 $s_1, s_2$ 线性相关，方程 5.1.3 等价于方程

$$S_i^{-1}(x)\,\mathrm{Mat}(G)(x)S_i(x) = S_i^{-1}(x)U^-(z_1(x))S_i(x)\cdot S_i^{-1}(x)U^+(z_2(x))S_i(x)\cdot\dots.$$

其中 $\mathrm{Mat}(G)(x) \in SL_2(\mathbb{C})$ 是在局部坐标下表示自同构 $G(x)$ 的矩阵。由于 $G - \mathrm{Id}$ 可被 $f^4$ 整除，我们将写成

$$\mathrm{Mat}(G)(x) = \mathrm{Id} + f^4(x)\begin{pmatrix} a_1(x) & b_1(x) \\ c_1(x) & d_1(x)\end{pmatrix}.$$

因此

$$\mathrm{Id} + f^4(x)\cdot S_i^{-1}(x)\begin{pmatrix} a_1(x) & b_1(x) \\ c_1(x) & d_1(x)\end{pmatrix}S_i(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_1 f(x) & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & z_2 f(x) \\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\dots,$$

或者等价地

$$\mathrm{Id} + f^3(x)\cdot f_i(x)S_i^{\#}(x)\begin{pmatrix} a_1(x) & b_1(x) \\ c_1(x) & d_1(x)\end{pmatrix}S_i(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_1 f(x) & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & z_2 f(x) \\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\dots. \tag{5.2.1}$$

由于这个最后方程的两边在整个 $U_i$上都是连续的，连续映射的恒等原理（（$X\setminus\{f=0\}$ 在 $X$中稠密））表明，我们的问题 (5.1.3) 等价于在整个 $U_i$ 上成立的这个最后方程 (5.2.1)（而不仅仅是在这些截面线性无关的地方）。

我们引入记号

$$\begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x)\end{pmatrix} := S_i^{\#}(x)\begin{pmatrix} a_1(x) & b_1(x) \\ c_1(x) & d_1(x)\end{pmatrix}S_i(x)$$

现在， $G^*(\xi)$ 的可达点由下式描述

$$\mathrm{Id} + f^3(x)f_i(x)\begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_1 f(x) & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & z_2 f(x) \\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\dots. \tag{5.2.2}$$

~现在我们用开集 $\Omega_i \Subset \Omega_i$, $i = 1, 2, \dots, M$覆盖 $\{f = 0\}$，其中每个开集在另一个开集内相对~紧，且每个 $\Omega_i$ 都包含于 $U_i$ 中，并且在 $\Omega_i$上，相应的函数 $1 + f^3(x)f_i(x)a(x) \neq 0$。原则上，我们应该用指标 $i$来标记 $a, b, c, d$，但我们应该可以清楚地知道当前使用的是哪种平凡化，因此为提高可读性，省略 $i$ 。

我们从 $\Omega_1$ 开始，并利用引理 5.7 (2) 求解方程

$$\begin{pmatrix} 1 + f^3 f_i a & f^3 f_i b \\ f^3 f_i c & 1 + f^3 f_i d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f z_1 & 1\end{pmatrix}\cdot\dots\cdot\begin{pmatrix} 1 & f z_4 \\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

我们选择

- $z_1 = \dfrac{f^2 f_i c - \dfrac{a f_i f}{\sqrt{|a f_i f|}}}{1 + f^3 f_i a}$;
- $z_2 = \sqrt{|a f_i f|}$;
- $z_3 = \dfrac{a f_i f}{\sqrt{|a f_i f|}}$;
- $z_4 = \dfrac{f^2 f_i b - \sqrt{|a f_i f|}}{1 + f^3 f_i a}$.

为了实现整体化，我们选取一个连续截断函数 $\chi\colon\ X \to [0,1]$ 使得$\widetilde{\ }$在 $\Omega_1$ 上 $\chi \equiv 0$ 并且在 $X \setminus \Omega_1$ 上，并考虑整体连续丛自同构。

$$U_j := U_j^{\pm}(\chi(x) z_j(x)),\ j = 1,2,3,4. \tag{5.2.3}$$

那么在 $\Omega_1$ 上，我们有

$$G = U_1 \cdot U_2 \cdot U_3 \cdot U_4. \tag{5.2.4}$$

我们提及以下性质：

$$G(x) = \mathrm{Id} \implies \text{the whole homotopy } t \mapsto (U_j)_t := U_j^{\pm}(t\chi(x) z_j(x)) \equiv \mathrm{Id}\,. \tag{5.2.5}$$

这源于一项重要的插值性质：若 $G(x) = \mathrm{Id}$，则$z_i(x) = 0, \forall i$。

我们将在下文的引理 5.9 中验证，$U_j$ 的乘积在 $X$ 上全局仍满足整除条件 $f^4 \mid (U_1 \cdot U_2 \cdot U_3 \cdot U_4 - \mathrm{Id})$。在 $\Omega_1$ 上，这由方程 5.2.4 得出。接着用 $G_1 := G U_4^{-1} \cdot U_3^{-1} \cdot U_2^{-1} \cdot U_1^{-1}$ 替换 $G$ 后，我们得到新的自同构 $G_1$，它满足与 $G$ 相同的条件，此外，$G_1$ 在 $\Omega_1$ 上恒等于 Id。

现在，我们在 $U_2$ 上重复在 $U_1$ 上所做的相同过程，使用 $G_1$ 而非 $G$。我们找到 $U^{\pm}$ 的四个全局一致复制 $U_i$，使得在 $\Omega_2$ 上有

$$G_1 = U_1 \cdot U_2 \cdot U_3 \cdot U_4. \tag{5.2.6}$$

由于每个 $U_j$ 以及整个同伦 $(U_j)_t$ 在 $G_1(x) = \mathrm{Id}$ 时都是恒等映射，因此我们发现，$G_2 := G_1 U_4^{-1} \cdot U_3^{-1} \cdot U_2^{-1} \cdot U_1^{-1}$不仅在 $\Omega_2$ 上恒等于 Id（方程 5.2.6 表明了这一点），在 $\Omega_1 \cup \Omega_2$ 上也是如此。又如下面的引理 5.9 所示，$U_j$ 的乘积在全局上仍满足 $f^4 \mid (U_1 \cdot U_2 \cdot U_3 \cdot U_4 - \mathrm{Id})$ 在 $X$ 上的整除条件，因此 $G_2$ 也满足同样的条件。

经过 $M$ 步，我们将原来的 $G$ 替换为一个新的零伦自同构。为简单起见，仍将其记为 $G$。除了整个零伦 $f^4 \mid G_t - \mathrm{Id}$ 的可除性之外，我们还使得该自同构在 $\{f = 0\}$的某个开邻域 $\Omega$ 上等于 Id。

根据这一性质并利用连续性，我们可以找到一个邻域 $\Omega_1$ ，使得 $\{f = 0\} \subset \Omega_1 \subset \Omega$，且 $G(\Omega_1) \subset U(\mathrm{Id})$，其中 $U(\mathrm{Id})$ 是 $\mathrm{Aut}(E)$ 中恒等截面的一个开邻域，并且可沿纤维收缩至恒等截面。例如，可以取一个邻域 $U(\mathrm{Id})$，使得 log 将其双全纯地映射到相应李代数丛 $\mathrm{End}^0(E)$ 中零截面的一个凸邻域，并取如下收缩

$$\alpha_t(x, A) := (x, \exp((1-t)\cdot\log(x, A)),\ x \in \Omega_1,\ A \in \mathrm{SAut}(E_x),\ t \in [0,1].$$

现在，我们将 $G$ 的零伦改为一个同伦，使其在 $\{f = 0\}$的整个邻域 $\Omega_2$ 内恒等于 Id。为此，我们选取一个开邻域 $\widetilde{\Omega}_2$ ，使得 $\{f = 0\} \subset \Omega_2 \subset \Omega_2 \subset \Omega_2 \subset \Omega_1 \subset \Omega$，并取一个连续函数$\chi$ ： $X \to [0,1]$ ，满足 $\chi|_{\Omega_2} \equiv 0$ 和 $\chi|_{X\setminus\widetilde{\Omega}_2} \equiv 1$。我们定义新的同伦$G_t^{\mathrm{new}}(x)$：$= \alpha_{1-\chi(x)}$。由于函数 $\chi$ 只在集合 $\Omega_1$内非零，而在该集合内 $G$ 是恒等映射，因此我们没有改变 $G = G_0$。不过，我们将同伦 $G_t$ 改成了在 $\{f = 0\}$的邻域 $\Omega_2$ 内恒等不变，$\forall t \in [0,1]$。这使我们能够从向量丛情形转到 $X_f$ 上的平凡丛：$= X \setminus \{f = 0\}$。以截面 $s_1$、$s_2$ 为坐标，我们用映射 $G_t$ ： $X_f \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 表示 $G_t\widehat{\ }$。现在，我们可以遵循 Vaserstein 在 [Vas88] 中的策略，并作必要调整。为了能够将解从 $X_f$ 连续延拓到 $X$，我们需要使所有幺幂复制在 $\Omega_2 \setminus \{f = 0\} \subset X_f$ 上恒等不变。具体做法是，将复制 $U^{\pm}(h)$中出现的所有函数 $h$ 在 $\{f = 0\}$上都设为 0。

首先，通过乘以复制，我们希望将映射 $G_t$ 变为取值于 $\mathrm{SL}_2$ 的映射。为此，我们使用 Gram–Schmidt 正交化过程，乘以一个形如

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f(x)z_1(x,t) & 1 \end{pmatrix},$$

的矩阵，其中 $z_1(x,t)$： $X_f \times [0,1] \to \mathbb{C}$ 是一个连续函数，用来使 $G_t$ 的 $\widehat{\ }$ 列彼此正交。因子 $f(x)$ 在 $X_f$ 上非零，因此 Gram–Schmidt 正交化过程得到的函数只需除以 $f$ ，即可得到 $z_1$。注意，当 $G_t$ 是恒等映射时，Gram–Schmidt 正交化过程给出 $z_1 = 0$。因此，只需在 $\{f = 0\}$ 上将 $z_1$ 设为 0，便可将其延拓到整个 $X$ 。由此，上述矩阵产生了一个 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ 连续副本 $U^{-}(z_1)$。将 $G_t$ 替换为 $U^{-}(z_1)\cdot G_t$ 后，我们可以假设同伦 $G_t$ 的 $\widehat{\ }$ 列彼此正交。

接下来，我们希望利用怀特海德引理将各列归一化为长度 1。这里我们使用特殊怀特黑德引理 5.7 (3)，它给出了一个由 $\widehat{\ }$ 个幺幂矩阵构成的乘积，具有这样的性质：当 $G_t$ 是恒等映射时，函数 $z_1(x,t)\ldots, z_4(x,t)$ 均为零。与上面一样，我们可以将这些函数除以 $f$，再通过补零的方式将它们延拓到整个 $X$ 上，从而得到定义良好的连续副本 $U^{\pm}$ ，使得当我们将 $\widehat{G}_t$ 与它们相乘时，就得到了这些列。

长度为 1 的同伦。因此，我们可以假设该同伦是酉的$G_t: X_f \to \mathrm{SU}_2$，并且该同伦在 $\Omega_2 \setminus \{f=0\}$ 上仍恒等于 Id。

现在我们使用 Calder 和 Siegel [CS78], [CS80] 的结果，将同伦替换为一致同伦。他们的结果适用于更一般的目标空间 $Y$，而不只是 $\mathrm{SU}_2$。他们的结果要求 $Y$ 是紧的，并且具有有限基本群 $\pi_1(Y)$。由于 $\mathrm{SU}_2$ 与 $S^3$微分同胚，因此它是紧的且单连通的。Hultgren 和 Wold 在 [HW20]中证明了这一结果的丛版本。

我们还需要 Calder和 Siegel 构造的一致同伦具备一个额外性质：当同伦 $G_t$ 在某一点 $x$ 处恒等于恒等映射时，一致同伦也具有相同的性质。

我们相信这在一般情形下也成立。在我们的情形中，对于 $Y = \mathrm{SU}_2$，，可以如下调整 Calder 和 Siegel 的证明。他们证明中的主要要点是：带基点的环空间 $C_0(S^1, \mathrm{SU}_2)$与一个有限型 CW 复形 $K$ 同伦等价（即每个维数中只有有限个胞腔，但复形本身是无限的）。对于球面的情形——由于 $\mathrm{SU}_2$ 与 $S^3$微分同胚，这正是我们的情形——关于 $C_0(S^1, S^n)$的这一结果，在 Milnor 的著作 [Mil63]中有非常清楚的解释。复形 $K$ 在每个维数 0、$n-1$、2（$n-1$）、3（$n-1$）.....以及 $K = C_0 \cup C_{n-1} \cup C_{2(n-1)} \cup \ldots$中恰好有一个胞腔。首先，将带基点的环空间 $C_0(S^1, S^n)$收缩到由分段测地环组成的某个子集。然后，在该子集中找出胞腔 $C_i$。零维胞腔是恒等映射的常值环。胞腔 $C_{n-1}$ 由这样的测地环组成：当标记点为球面的南极时，它们恰好一次经过球面的北极；胞腔 $C_{2(n-1)}$ 由恰好两次经过球面北极的测地环组成，依此类推。零伦 $\widehat{G}_t$ 是一个连续映射 $X_f \to C_0(S^1, S^3)$，它可以被同伦为到 $K$ 的映射；由于我们的 Stein 空间 $X_f$ 是有限维 CW 复形，只要 $l$ 大于或等于 $X_f$的实维数，还可以进一步将其同伦为映入 $l$的 $K$-骨架的映射。由于 $l$-骨架是紧的，我们得到了一个一致零伦。所有这些同伦都可以安排成不移动 $K$ 的零胞腔 $C_0$；换句话说，原本同伦恒等于南极的地方，仍然恒等于南极。

现在利用同伦的一致性，给定任意一个包含 Id 的开邻域 $V$，我们可以找到实数 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = 1$，使得 $\widehat{G}_{t_{i+1}} \cdot \widehat{G}_{t_i}^{-1}(X_f) \subset V, \forall i = 0, 1, \ldots, n-1$。对于 $V$，我们选择由下式定义的 $\mathrm{SU}_2$ 的开子集

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}_2 \,:\, a \neq 0 \right\}.$$

于是，由于 $G_n = G$ 且 $G_0 =$ Id,

$$\widehat{G} = (\widehat{G}_n\widehat{G}_{n-1}^{-1})(\widehat{G}_{n-1}\widehat{G}_{n-2}^{-1})\cdots(\widehat{G}_i\widehat{G}_{i-1}^{-1})\cdots(\widehat{G}_1\widehat{G}_0^{-1}) \tag{5.2.7}$$

并且，括号中的每个表达式都可根据引理 5.7 (1) 写成四个在 $\Omega_2 \cap X_f$ 上恒等于 Id 的幺幂矩阵的乘积。这些幺幂矩阵产生幺幂复制 $U^{\pm}(z)$，其中函数 $z \equiv 0$定义在 $\Omega_2 \cap X_f$ 上，因此可以连续延拓到整个 $X$。最后，由方程 5.2.7 得到

$$G = \prod_{i=1}^{n} U_{i,1}^{-}U_{i,2}^{+}U_{i,3}^{-}U_{i,4}^{+}.$$

这就完成了定理 5.6 的证明。

□

引理 5.9. 在 5.2.3 中定义的幺幂复制 $U_1, \ldots, U_4$ 满足 $f^4 \mid (U_1 \cdot U_2 \cdot U_3 \cdot U_4 - \mathrm{Id})$。

证明。我们必须证明，若 $z_i$ 的定义如下

- $z_1 = \dfrac{f^2 f_i c - \dfrac{a f_i f}{\sqrt{|a f_i f|}}}{1 + f^3 f_i a}$,
- $z_2 = \sqrt{|a f_i f|}$,
- $z_3 = \dfrac{a f_i f}{\sqrt{|a f_i f|}}$,
- $z_4 = \dfrac{f^2 f_i b - \sqrt{|a f_i f|}}{1 + f^3 f_i a}$,

为了满足

$$\begin{pmatrix} 1 + f^3 f_i a & f^3 f_i b \\ f^3 f_i c & 1 + f^3 f_i d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f z_1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{pmatrix} 1 & f z_4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.2.8}$$

那么二者之差为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \chi f z_1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{pmatrix} 1 & \chi f z_4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

到恒等映射可被 $f^3 f_i$ 整除。事实上，仿照从等式 5.2.2 回到等式 5.2.1 的过程，由于可被 $f_i$ 整除，我们可推出还可被额外因子 $f$ 整除，因此得到可被 $f^4$ 整除。我们先计算

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f z_1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{pmatrix} 1 & f z_4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + f^2 z_2 z_3 & f z_2 + f z_4 + f^3 z_2 z_3 z_4 \\ f z_1 + f z_3 + f^3 z_1 z_2 z_3 & * \end{pmatrix}.$$

我们省略位置 (2,2) 处的元素，因为行列式为 1 的条件将根据其他三个元素满足右可除性这一点，推出该元素也满足可除性

元素（见下文引理 5.10）。接下来我们计算

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \chi f z_1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{pmatrix} 1 & \chi f z_4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 1 + f^2 z_2 z_3 \chi^2 & f z_2 \chi + f z_4 \chi + f^3 z_2 z_3 z_4 \chi^3 \\ f z_1 \chi + f z_3 \chi + f^3 z_1 z_2 z_3 \chi^3 & * \end{pmatrix}.$$

根据上述 $z_2$ 和 $z_3$ 的公式，我们看到乘积 $z_2 z_3$ 可被 $f_i f$ 整除。因此，(1, 1) 项，即 $1 + f^2 z_2 z_3$，具有正确的形式。根据方程 (5.2.8)，我们得到

$$f^3 f_i b = f z_2 + f z_4 + f^3 z_2 z_3 z_4.$$

由于 $f f_i \mid z_2 z_3$，我们得出 $f^2 f_i \mid z_2 + z_4$。这意味着 (1, 2) 项，即 $f z_2 \chi + f z_4 \chi + f^3 z_2 z_3 z_4 \chi^3$，可被 $f^3 f_i$ 整除。(2, 1) 项的处理方式类似。正如前面所述，未计算的 (2, 2) 项具有正确形式，这一点由引理 5.10 得出。

□

**Lem理 5.10.** 若一个由连续函数构成的行列式为 1 的矩阵具有以下形式 *rm*

$$\begin{pmatrix} 1 + a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 1 + a_{22} \end{pmatrix}$$

且连续函数 $g$ 满足 $g \mid a_{11}$, $g \mid a_{12}$, $g \mid a_{21}$，则 $g \mid a_{22}$。

证明。行列式为 1 的条件是

$$(1 + a_{11}) \cdot (1 + a_{22}) - a_{12} a_{21} = 1.$$

将 $a_{11} = g\tilde{a}_{11}$, $a_{12} = g\tilde{a}_{12}$, $a_{21} = g\tilde{a}_{21}$ 写成连续函数 $\tilde{a}_{ij}$，经过一些代数运算后，我们得到

$$a_{22} = g(g\tilde{a}_{12}\tilde{a}_{21} - \tilde{a}_{11} a_{22} - \tilde{a}_{11}).$$

这表明 $a_{22}$ 可被 $g$整除。

□

## 5.3. Oka 原理在分层椭圆子浸没中的应用 **s.**

定理 5.1 的证明。我们需要找到某个 $n \in \mathbb{N}$ 以及纤维化 $G^*(\xi) : G^*(\mathbb{C}^{2n}) \to X$ 中的一个全纯截面 $S_{\text{hol}}$。由命题 5.3，纤维化 $(G^*(\mathbb{C}^{2n}) \setminus \text{Sing } G^*\psi_{2n}, X)$ 的可达点构成一个分层椭圆子浸没。由定理 5.6，我们找到一个 $k \in \mathbb{N}$ 以及纤维化$G^*(\xi) : G^*(\mathbb{C}^{2k}) \to X$ 的一个连续截面 $S_{\text{cont}}$。当然，这个截面会与奇异集相交，因为按照我们的证明方法，我们特意确保它在 $\{f = 0\}$ 上经过奇异集。我们在乘积为 $G$ 的 $2k$ 连续副本之外，再添加四个复制，即 $U^-(1)\ U^+(0)\ U^-(-1)\ U^+(0)$，其乘积为恒等映射 $U^-(1) \cdot U^+(0) \cdot U^-(-1) \cdot U^+(0) = \text{Id}$，因此得到 $G^*(\xi) : G^*(\mathbb{C}^{2k+4}) \to X$ 的一个连续截面$S_{\text{cont}}$。该截面在 $n \in \mathbb{N}$ 的任意点上方都避开奇异集

因为奇异集是 $z_2 = z_3 = \ldots z_{2k+3} = 0$ 所在的集合，并且我们有 $z_{2k+3} \equiv -1$。现在令 $n = k + 2$，我们可以结合命题 5.3 与分层椭圆下沉的冈纳原理，即定理 2.6，找到纤维化 $G^*(\xi) : G^*(\mathbb{C}^{2n}) \to X$ 中一个与 $S_{\mathrm{cont}}$ 同伦的全纯截面 $S_{\mathrm{hol}}$。由此完成定理 5.1 的证明。

□

定理 1.1 的证明。显然，必要条件是零伦。事实上，对于幺幂向量丛自同构 $U$，有 $U = \mathrm{Id} + N$，其中 $N$ 是幂零的。同伦 $t \mapsto \mathrm{Id} + tN$ 将 $U$ 与恒等映射连接起来。因此，任意幺幂向量丛自同构的乘积都是零伦的。

充分性部分由命题 3.2、定理 4.1 和定理 5.1 得出。

□

定理 5.11。存在一个自然数 $K$（取决于 Stein 空间 $K = K(n)$ 的维数 $n$），使得对于任意满足 $\dim(X) = n$ 的 Stein 空间 $X$，以及其上的任意秩 2 全纯向量丛 $E \to X$，任意零伦的全纯向量丛自同构 $F \in \mathrm{SAut}(E)$ 都是幺幂全纯自同构 $u_i \in \mathrm{U}(E)$ 的乘积，其中 $i = 1, 2, \ldots, K$，

$$F(x) = u_1(x) \cdot u_2(x) \cdot \ldots \cdot u_K(x).$$

证明。反设，存在无穷多个维数为 $n$ 的 Stein 空间 $X_i$，以及全纯向量丛 $E_i \to X_i$ 和零同伦的全纯向量丛自同构 $F_i \in \mathrm{SAut}(E_i)$，它们都是不少于 $i$ 个幺幂自同构的乘积。于是，取它们的不交并，即 $X = \dot\cup X_i$（其维数为 $n$）和 $E = \dot\cup E_i$，所有 $F_i$ 一起定义了 $E$ 上的幺幂丛自同构 $F$。根据定理 1.1，自同构 $F$ 可分解为有限个（设为 $K$ 个）幺幂自同构；将其限制到 $X_i$ 上，便意味着每个 $F_i$ 也都如此。这与我们对 $F_i$ 的假设矛盾。

□

注 5.12。要确定最优数量 $K(n)$ 非常困难。对于维数为 1 的 Stein空间，所有向量丛都是平凡的，因此最优数量与映射 $X \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 的最优数量相同。已在[IK12b]中证明该数量为 4。因此我们看到，$K(1) = 4$。

对于维数为 2 的 Stein 空间，按照我们的方法，我们将找到一个由 3 个子集构成的丛的平凡化，以及适当的配对 $U^-, U^+$。然后，我们将把自同构分解为三个自同构的乘积 $G_i$，每个自同构都适用于一个相应的配对。推测 [IK12b] 中的方法将得到一个分解为五个幺幂因子的结果，从而给出一个上界 $K(2) \leq 15$。为此，需要分析 5.1.2 中针对奇数个因子的纤维化，即

5 个因子。本文选择只分析因子个数为偶数的情形，因为我们的主要目的是证明分解的存在性，而非寻找最优的因子个数。

## References

[B68] Bass, H.，《代数K理论》。W. A. Benjamin, Inc.，纽约—阿姆斯特丹，1968 年，xx +762页。[BMS67] Bass, H.; Milnor, J.; Serre, J.-P.，《关于$SL_n$($n \geq 3$)和 $Sp_{2n}$($n \geq 2$)的同余子群问题的解》。法国高等科学研究所数学出版物第 33 号（1967），59—137。[CS78] Allan Calder 和 Jerrold Siegel，《同伦与一致同伦》，《美国数学会汇刊》235（1978），245–270。[CS80] Allan Calder 和 Jerrold Siegel，《同伦与一致同伦 II》，《美国数学会会刊》78（1980），第 2 期，288–290。[Ca58] Cartan, Henri，《解析纤维丛空间》，《国际代数拓扑研讨会论文集》，墨西哥国立自治大学与联合国教科文组织，墨西哥城（1958），97–121。[Co66] Cohn, P. M.，《关于环的 $GL_2$ 结构》，法国高等科学研究所数学出版物第 30 号（1966），5—53。[DK19] Doubtsov, Evgueni; Kutzschebauch, Frank，《环上可逆矩阵的初等矩阵分解、零伦同伦与指数乘积》，《数学物理分析》9（2019），第 3 期，1005—1018。[FR66] O. Forster, K.J. Ramspott，《非阿贝尔群层的 Oka 对》，《数学发明》1，260–286（1966）。[For10] Franc Forstneriˇc，《分层纤维丛截面的 Oka 原理》，《纯粹与应用数学季刊》6（2010），843–874。[For11] Franc Forstneriˇc，《Stein 流形与全纯映射》，Springer-Verlag，2011。[FP01] Franc Forstneriˇc 和 Jasna Prezelj，《从复子簇延拓全纯截面》，《数学杂志》236（2001），43–68。[FP02] Franc Forstneriˇc 和 Jasna Prezelj，《带喷流的全纯淹没映射的 Oka 原理》，《数学年刊》322（2002），633–666。[Gro89] Mikhael Gromov，《椭圆丛全纯截面的 Oka 原理》，《美国数学会杂志》2（1989），851–897。[GMV91] Fritz Grunewald, Jens Mennicke 和 Leonid Vaserstein，《多项式环上的辛群》，《数学杂志》206（1991），35–56。[HW20] Hultgren, Jakob; Wold Erlend，《向量丛自同构的幺幂分解》，即将发表于《国际数学杂志》。[IK12b] Ivarsson, Bj¨orn; Kutzschebauch, Frank，《全纯映射到 $SL_2(\mathbb{C})$ 的幺幂分解所需因子数》，《美国数学会会刊》140（2012），第 3 期，823–838。[IK12a] Bj¨orn Ivarsson 和 Frank Kutzschebauch，《映射到 $SL_n(\mathbb{C})$ 的全纯分解》，《数学年刊》（第二辑）175（2012），45–69。[IKL19] Bj¨orn Ivarsson, Frank Kutzschebauch 和 Erik Løw，《辛矩阵分解为初等因子》，《美国数学会会刊》148（2020），第 5 期，1963—1970。[JMW86] P.W.Jones, D.Marshall 和 T.Wolff，《圆盘代数的稳定秩》，《美国数学会会刊》96，第 4 期（1986），603–604。

[KR88] Manfred Klein 和 Karl Josef Ramspott, 《全纯函数理想基的一个变换定理》, 巴伐利亚科学院数学与自然科学部《会议报告》1987（1988）, 93–100。[Kop78] Kopeĭko, V. I., 《多项式环上辛群的稳定化》（俄文）, 《数学文集》（新辑）106(148)（1978）, 第 1 期, 94—107, 144。[KS19] Kutzschebauch, Frank; Studer, Luca, 《全纯映射的指数分解》, 《伦敦数学会通报》51（2019）, 第 6 期, 995–1004。[Ku14]Kutzschebauch, Frank, 《复分析与仿射代数几何中的柔性性质》, 载于《双有理与仿射几何中的自同构》, 387–405, Springer 数学与统计学论文集第 79 卷, Springer, Cham, 2014。[Lei20] Leiterer, J¨ urgen, 《带边黎曼曲面上的全纯矩阵》, 《伦敦数学会通报》53（2021）, 第 3 期, 906—916。[Mil71] Milnor, J., 《代数K理论导论》, 普林斯顿大学出版社, 新泽西州; 东京大学出版社, 东京（1971）, 《数学年刊研究》丛书第 72 号。[Mil63] J. Milnor, 《莫尔斯理论》。根据 M. Spivak 和 R. Wells 的讲义编写。《数学年刊研究》丛书第 51 号, 普林斯顿大学出版社, 普林斯顿, 新泽西州（1963）, vi+153页。[MoRu18] Mortini, Raymond; Rupp, Rudolf, 《矩阵代数$\mathcal{M}_2(A)$中的对数与指数》, 《计算方法与函数理论》18（2018）, 第 1 期, 53–87。[Stu20a] Studer, Luca, 《Oka 理论的同伦定理》, 《数学年刊》378（2020）, 第 3–4 期, 1533—1553。[Stu20b] Studer, Luca, 《凝聚层的分裂引理》, 《分析与偏微分方程》14（2021）, 第 6 期, 1761—1772。[Sus77] A. A. Suslin, 《多项式环上特殊线性群的结构》, 《苏联科学院消息: 数学辑》41（1977）, 第 2 期, 235–252, 477（英文译本见《苏联数学消息》11（1977）, 221–238）。[ThurVas88] Thurston, W. Vaserstein, L., 《欧几里得空间上的K1理论》, 《拓扑学及其应用》23（1986）, 第 2 期, 145–148。[Vas88] L. Vaserstein, 《通过加法运算将依赖参数的矩阵约化为对角形式》, 《美国数学会会刊》103（1988）, 第 3 期, 741–746。[VS13] Vavilov, N. A.; Stepanov, A. V., 《一般环上的线性群 I: 概论》（俄文）, 《圣彼得堡数学研究所科学研讨会札记》394（2011）, 《表示论问题: 代数与群》22, 33—139, 295; 英文译本见《数学科学杂志》（纽约）188（2013）, 第 5 期, 490—550。

Departement Mathematik, Universität Bern, Sidlerstrasse 5, CH–3012 Bern,Switzerland电子邮箱: george.ionita@math.unibe.ch 电子邮箱: frank.kutzschebauch@math.unibe.ch