N超越自发对称性破缺的新现象

Y. Contoyiannis[1], P. Papadopoulos[1], L. Matiadou[1],
S.G. Stavrinides[2], M. Hanias[2], S.M. Potirakis[1]

[1]希腊雅典西阿提卡大学电气与电子工程系[2]希腊卡瓦拉国际希腊大学物理系

摘要： 众所周知，有限大小的热力学系统经历二级相变时，在自发对称性破缺（SSB）完成之前，序参量涨落的动力学遵循临界间歇性 [6]。自发对称性破缺之后，临界间歇性不再成立；因此，序参量时间序列中等待时间的分布预计不会呈现任何幂律。

然而，我们首次揭示，在自发对称性破缺之后，幂律仍会在一个狭窄的温度区间内出现。这些幂律源于另一种间歇性，它决定了三临界交叉初期序参量涨落的动力学，而该交叉过程在一级相变中始终不会完成。

在本文中，我们展示并解释了随着温度降至自发对称性破缺温度以下，序参量涨落的动力学如何发生变化。最后，我们指出，这种现象已在震前过程中观测到。

关键词： 自发对称性破缺、临界现象、相变、间歇性、三临界点、三维伊辛模型。

1. 引言

研究发现，根据 ϕ^4 理论 [1-3], ，任何呈现二级相变的有限热力学物理系统中，都会在临界温度以下出现一个温度区间；对于有限尺寸系统而言，该区间可视为赝临界区间 [4-7]。此类系统的一个例子是经典范式三维伊辛自旋系统。

在这个区间内，尽管朗道自由能中的数学对称性已被破坏，二级相变临界点仍然存在。临界（实际上是赝临界）温度 T_c 与温度 T_{SSB} (T_{SSB}<T_c)之间的这一区域被称为滞后区，其间临界点最后一次出现；我们已在自己的研究中详细考察了它的性质 [4,6]。

本研究旨在探究紧邻T_{SSB}、略低于自发对称性破缺温度的区域内会发生什么。具体而言，我们考察了标度律是否仍符合临界间歇性的动力学，或者序参量涨落的动力学是否已经发生变化。相关结果表明，在略低于自发对称性破缺的区域出现了新的动力学。最后，我们对这种动力学变化提供了一种解释。

2. 自发对称性破缺之后的三维伊辛模型

介绍基本符号和理论背景。对于*Z(N)*自旋系统，自旋变量定义为： $s(a_i) = e^{i2\pi a_i/N}$ （晶格顶点 $i = 1 \dots i_{max}$），其中$a_i = 0,1,2,3 \dots N-1$。众所周知，伊辛模型对应于*N*=2的情况。另一方面，Metropolis 是一种有效的算法，可生成构型；在该算法中，恒定温度下的构型按照玻尔兹曼统计权重 $e^{-\beta H}$ 选取，其中*H*表示自旋系统的哈密顿量；于是，最近邻相互作用可写为：

$$\mathrm{H} = -\sum_{<i,j>} \mathrm{J_{ij} s_i\, s_j.} \qquad (1)$$

众所周知，[1,3], 根据该模型，当温度降至临界值以下时，会发生二级相变。因此，对于一个32^3 三维晶格（3D 伊辛模型），临界温度（有限尺寸晶格对应伪临界温度）已被确定为$T_c = 4.515$ (J_{ij} =1) [6]。考虑到对整个晶格进行一次扫描代表一个算法时间单位，且可能的自旋取值为±1，那么数值计算得到的平均磁化强度M 时间序列构成序参量，并呈现出该序参量的涨落轨迹。

根据我们此前的一项研究 [6], ，对于晶格 32^3 ，自发对称性破缺温度已被计算为 T_{SSB}=4.45（J_{ij} =1）。图1展示了在自发对称性破缺温度下，300.000 个构型的磁化强度分布。显然，该分布的两个峰瓣已完全分离。

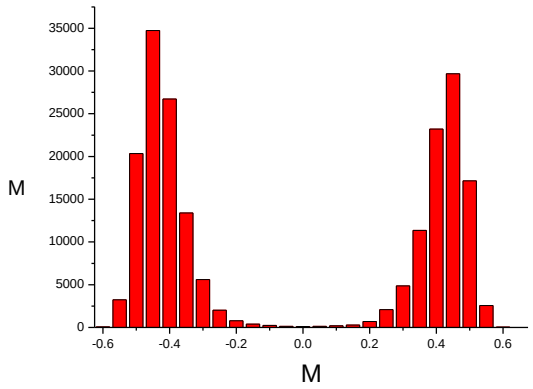

图***1***。 *T_{SSB}=4.45* 中平均磁化强度的分布（两个峰瓣已完全分离）。

在图2中，展示了紧随自发对称性破缺之后（采用小数点后两位近似）温度为 T=4.44 时，以及较低温度 T= 4.2 时的磁化强度分布。可以看到，对于紧随自发对称性破缺之后的温度，如图2(a)所示，该分布并不对称，而是表现为最大值向较高值偏移，尾部则向较低值延伸。但随着我们逐渐远离自发对称性破缺，如图2(b)所示，该分布趋于变得对称。

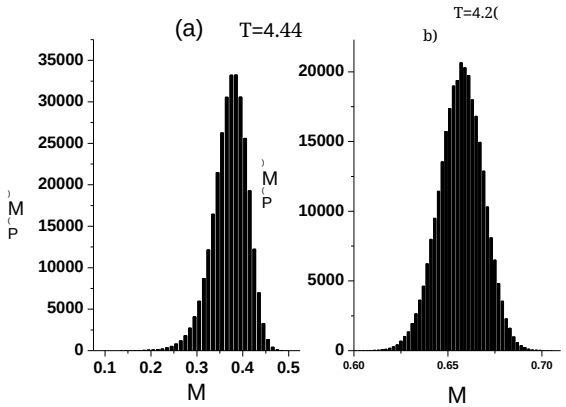

图***2***。 *(a) T=4.44* 时自发对称性破缺后立即测得的平均磁化强度分布（精确到小数点后两位）。（*b*）*T=4.2* 时平均磁化强度的分布。

临界态在平衡条件下的动力学属于间歇性动力学。在数学上，这通过 I 型间歇映射表示（见下文方程4） [8,9]。间歇性现象由小幅涨落区域交替组成，这些区域被称为层流区，并会被混沌爆发打断；而在层流区内的等待时间称为层流长度。在临界间歇性的情况下，层流长度（L）分布服从如下形式的幂律[9,10]：

$$P(L) \sim L^{-p} \tag{2}$$

条件为 [9]：

$$p = 1 + \frac{1}{\delta} \tag{3}$$

其中，δ 是六个临界指数之一[1]；对于热力学系统，它称为等温临界指数。鉴于δ>1，预计该临界指数应处于$p \in$(1,2) [1]范围内。因此，在上述区间内找到指数为 p 的层流长度分布幂律，表明存在临界性。

3. 数据分析

在[11] 中，我们引入了新颖的临界涨落法（MCF），以揭示时间序列中临界动力学的存在；我们引入了[11] 临界涨落法（MCF）。该方法应用于温度为*T*=4.44时平均磁化强度的时间序列，对应于图2(a)中的分布。利用该分布，可将层流区域定义为位于峰值M_0 （不动点）对应边缘与一条经过分布较平缓区域中某点M_l 的边缘之间的区域。我们将M_l 的位置视为自由参数，其取值使分布最接近幂律。然后，将平均磁化强度值处于区间[M_0, M_l]内的等待时间计算为层流长度。对于图2(a)中的分布，这一区间为 [0.45, 0.32] ，由此得到以下层流长度分布（图3）。

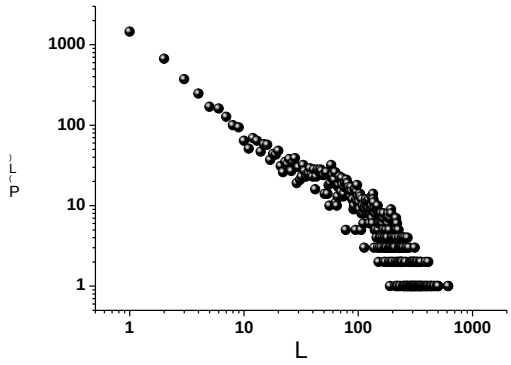

图 ***3***。 温度 *T=4.44* 下平均磁化强度的层流长度分布。

用于计算临界指数 $p1$ 和 $p1$ 的拟合函数通常具有$\mathrm{f(x) = p_1 x^{-p_2} e^{-p_3 x}}$的形式。然而，在这种情况下，由于曲率从某一点开始发生变化，先前的关系式并不适合用于拟合实验点，除非我们只考虑小尺度而忽略较大的尺度。此外，已知任何具有式（2）形式的幂律仅在*L*>>1 [10-16]范围内成立。因此，我们需要

一种能够揭示较大尺度下幂律的方法；在较大尺度下，由于分布尾部的点数统计量较小，经典最小二乘法无法给出可靠结果。

在 [17] 中介绍了这样一种方法。根据该方法，将考虑所有尺度上的所有点，尤其是较大尺度上的点，而忽略通常出现在此类分布尾部的噪声。该方法基于Haar小波基的发展，并揭示幂律（如果存在），无论噪声有多强。小波基是一种线性基，适用于表现出自相似性质的现象，例如临界现象。为便于理解，本文在附录中介绍了该方法及其算法，而正文则直接给出结果。我们强烈建议读者在继续阅读正文其余部分之前，先阅读附录

在图4中，我们展示了参数 λ的最后十个值；根据小波分析，这些值表示其与单位的距离。λ值根据公式（A2）进行计算。按照算法的第二步，计算量 D_λ 被计算出来（公式4A）。

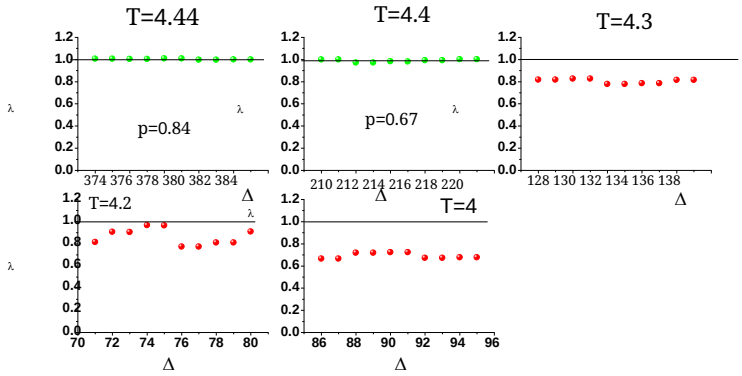

图***4***。对于温度 *T=4.44* 和 *T=4.4*，计算得到的指数分别为 *0.84* 和 *0.67*。对于低于 *T=4.4* 的温度，由于我们已经偏离幂律关系，因此无法计算指数。

这样便提供了一个定量指标，用于估算与幂律的接近程度。量值 D_λ 越接近零，就表示越接近理想幂律。我们提到一条适用的经验法则：当 λ 收敛到 1 时，即出现理想幂律，此时D_λ <4·10^{-4}。在表1中，我们给出了图4中各温度对应的基于小波的分析结果。

表1

温度 T	Dλ	Δ_{max}	幂律	指数 p
4.44	$4.3 \cdot 10^{-5}$	334	YES	0.84
4.4	$2.23 \cdot 10^{-4}$	219	YES	0.67
4.3	$3.8 \cdot 10^{-2}$	137	NO	-
4.2	$8.5 \cdot 10^{-2}$	80	NO	-
4	$9.56 \cdot 10^{-2}$	95	NO	-

4. 自发对称性破缺之外的区域

如前所述，临界动力学可用 I 型间歇映射在数学上表示，其形式如下 [9]:

$$M_{n+1} = M_n + uM_n{}^z + \varepsilon_n, \qquad (4)$$

其中 ε_n 表示系统保持遍历性所必需的附加噪声 [18]。非线性项的指数 *z*与等温临界指数 *δ* 之间的关系为 *z= δ+1* [9]。若将式 (4) 所描述的动力学应用于处于滞后区内的系统，即 $T_{SSB}< T <T_{cr}$ [4,6]，则指数 *p*应取区间 [1,2内的值。观察图4可见，指数值被限制在区间 [0.66, 1) 内，因此自然会追问这些值为何存在?

在 [19], 中，介绍了遵循不同于公式（4）所用映射的映射的间歇性动力学，并研究了相关动力学。该映射形式如下：

$$M_{n+1} = M_n - vM_n{}^{-z} + \varepsilon_n, \tag{5}$$

由此生成的层流长度分布呈现出一个指数，该指数由以下关系给出：

$$p = \frac{z}{z+1} = \frac{\delta+1}{\delta+2}. \tag{6}$$

若等温临界指数的取值位于区间 (1,∞) 内，则可得 p∈[0.66,1)。在这种动力学中，亚稳态过程开始时的序参量经历三临界交叉，最终进入一级相变；这一过程由 ϕ^6 Landau 理论 [19]研究。该特定动力学的一个特征是，映射的不动点从零（公式 4）移至无穷大（公式 5）。

对于有限尺寸的真实系统，不动点取有限值。在图 5 中，我们展示了应用公式（5）的间歇映射时 *M,* 的分布，所用参数值为：z =4, $v = 0.2, \varepsilon_n \in [-0.01, 0.01], fixed\ point = 3,$ $number\ iterations = 100.000$ 。

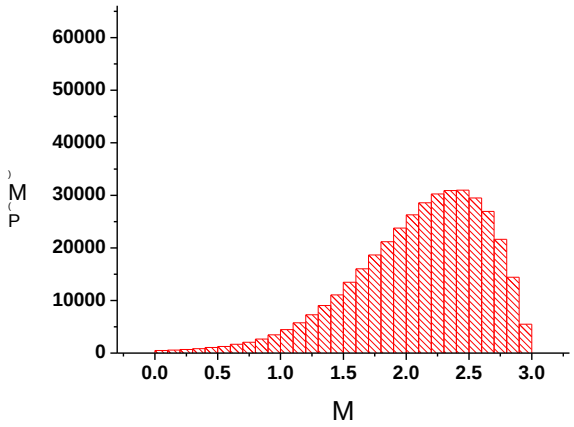

图 ***5.*** 公式（*5*）中的间歇映射所产生的 *M* 值分布。

比较图 5 和图 2(a) 可知，两者具有共同的特征，尤其是峰值两侧不对称：峰值已移向较大的数值，同时，小数值一侧的尾部延伸至接近零。

因此可以认为，在自发对称性破缺之后不久，随着温度降低，序参量涨落的动力学不再由公式（1）的临界间歇性决定；相反，此时序参量涨落由公式（5）的间歇动力学决定，这正是三临界交叉初期的动力学。

为了定量确定这一温度区间的范围，我们绘制了 D_λ 与 T 的关系图，如图 6 所示。如上所述，量 D_λ 是一个定量判据，用于表示相关动力学与根据小波法分析得出的幂律的接近程度。

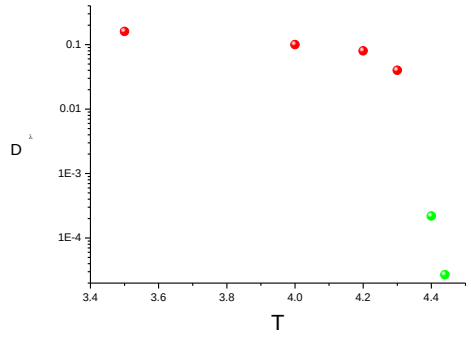

图 ***6***。 D_λ 与 T 关系图。绿色点属于公式（*5*）动力学区域，红色点则位于该区域之外，处于较低温度下。我们可以看到一个明显的转变：从层流长度分布呈现幂律的区域（绿色），转变到温度 $T<4.4$ 时的区间 $(1,0.66]$，此时层流长度分布偏离幂律。

因此，根据我们的研究，在自发对称性破缺之后，存在一个非常狭窄的温度区间，在此区间内幂律得以保持，但指数处于 [0.66 到 1 之间，即小于 1。该区间从 T=4.44 到 T=4.4。

上述结果可通过设定 δ=4.8 得到验证，该数值是三维伊辛模型 [20]，所属普适类的等温线临界指数，并根据公式（6）计算指数 p 的理论值，得到 p=0.85。该数值与我们在本研究中针对温度 T=4.44 下的三维伊辛模型通过数值计算得到的结果非常接近；根据小波法（见表1），该结果为p=0.84。

5. 讨论

众所周知，Z(2)自旋理论是一种 ϕ^4 理论，并不能说明三临界点的存在。考虑到上文所呈现的结果，一个非常严峻的挑战随之出现：如何解释自发对称性破缺之后紧接着出现的这一极窄温度区间。

为了解释这一点，我们提醒读者，在自发对称性破缺之后（图2a），不稳定临界点（此时平均磁化强度为零）不再作为不动点存在，而是从零值偏移到有限值。由于ϕ^4理论的二级相变是连续相变，而非突变相变，因此，出于连续性的原因，在自发对称性破缺之前一直存在的间歇性动力学仍会继续存在。不同之处在于，该不动点将不再具有零值；相反，新的不动点现在位于更高的数值处。

正如我们在[19], 中已详尽讨论的那样，间歇性动力学发展的区域可以在朗道自由能图中确定；在本例中，这些区域由呈现平台的曲面确定。我们在朗道自由能图中寻找这类区域，并在图7中展示了它们在所研究现象演化过程中的形态。

在图7 (a)中，根据理论ϕ^6，在向一级相变发生三临界交叉的初始阶段，会出现两个小平台，相应的不动点并不位于零值处，而是位于这些区域的边缘（势能的壁垒处）。这是因为，对称性破缺之后，由于相变的连续性，系统在进入新相后也需要维持间歇行为。这说明自发对称性破缺之后立即存在三临界动力学，因此也解释了

存在幂律，其取值范围为[0.66,1)。经过一个非常狭窄的温度区间后，这些平台便会消失。
然而，如图7(b)和图7(c)所示，系统并不按照ϕ^6 理论演化。这是因为ϕ^6 理论预言存在3个不动点，其中位于中间的不动点是初始的零点不动点（图7b和图7c）。由于在ϕ^4 理论中，这个不动点在自发对称性破缺后不再是不动点，因此，该理论框架的适用性仅限于初始阶段。可以说，φ^6 理论在极窄的温度范围内“借用了”三临界点，而在ϕ^4 理论中，这是为了以新形式保持间歇性动力学的连续性。

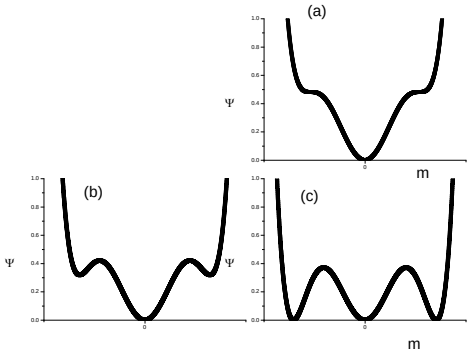

图***7***。 朗道自由能Ψ 与序参量m的关系。*(a)* 三临界交叉的开始阶段。*(b)* 一个中间亚稳态，其中出现了ϕ^6 理论的稳定不动点。*(c)* 三个不动点的简并。这是一级相变的临界点。

正如我们将在下文所述，本节所呈现的一切都与参考文献 [1,21] 中所阐述的三临界点理论完全相容。根据该理论，在朗道自由能首项中两个系数φ^2 和 φ^4 的参数图中，存在点 (0,0)，此时两个参数趋于零，因此二级相变线与一级相变线相交。该点就是三临界点（根据 Griffiths [1]）。

我们在本工作中揭示的是，确实存在一个自发对称性破缺的温度，在此处两种动力学相遇，即临界间歇性（式 4）与三临界间歇性（式 5）。因此，在自发对称性破缺处，二级相变的动力学结束，而一级相变开始。当然，正如我们所提到的，由于φ^4, φ^6 理论的对称性不同，即分别为 Z(2) 和 Z(3)，因此只能出现三临界交叉的起始阶段。由此我们得出结论：正如理论在参数图中所示，相变线的交汇对应于自发对称性破缺中临界间歇性与三临界间歇性之间的“耦合”，这种耦合作用于序参量的涨落。

6. 结论

在根据φ^4 理论发生二级相变、且自发对称性破缺完成后的有限尺寸热力学系统中，会出现一个狭窄的温度区间，其特别之处在于，等待时间分布的标度律得以维持，指数范围为$p\in[0.66,1)$。该区间内序参量涨落的动力学并不遵循表征二级相变的 I 型临界间歇性动力学；相反，另一种间歇形式

决定三临界交叉初期序参量涨落动力学的间歇形式出现了。探究这种窄带现象能变得多强，从而能够在真实系统中被检测到，以及由此产生的后果，是很有意思的。这种异常动力学可能的应用已在震前过程中显现。这些应用将成为未来工作的主题。

参考文献。

[1] Huang, K.《统计力学》，第2版；Wiley：美国纽约州纽约，1987年。2. Ryder, L.H.《量子场论》；剑桥大学出版社：英国剑桥，1985年。3. Kaku, M.《量子场论：现代导论》；牛津大学出版社：美国纽约州纽约，1993年。4. 场论框架下自发对称性破缺中的快子与孤子，Contoyiannis, Y., Hanias, M.P., Papadopoulos, P.,Potirakis, S.M., Balasis, G.,《Symmetry》，2021年，13(8), 1358。5. Contoyiannis, Y.; Potirakis, S.M.; Stavrinides,S.G.; Hanias, M.P.; Tassis, D.; Theodorou, C.G. 纳米尺度UTBB FD-SOI MOSFET随机电报噪声中的间歇性诱发临界性。《Microelectron. Eng.》**2019年**，216，111027。6. 亚临界跳跃概率与反常序参量自相关。F. K. Diakonos, Y. F. Contoyiannis and S. M. Potirakis.《EPL》，140（2022年）11002。7. 震前电磁发射中的对称性破缺现象特征，Contoyiannis, Y., Potirakis, S.M.《统计力学杂志：理论与实验》，2018年，2018(8), 083208。8. 序参量空间中的临界性与间歇性，Contoyiannis, Y.F., Diakonos, F.K.《Physics Letters》，A辑：综合、原子与固体物理，2000年，268(4-6)，第286–292页。9. 临界涨落的间歇性动力学，Contoyiannis, Y.F., Diakonos, F.K., Malakis, A.《Physical Review Letters》，2002年，89(3)。10. Schuster H G 1988年，确定性混沌：导论，第2版（魏因海姆：VCH）。11. 根据电磁前兆监测震前阶段，Contoyiannis, Y.F., Kapiris, P.G., Eftaxias, K.A.，《Physical Review E—统计、非线性与软物质物理》，2005年，71(6)。12. Alemany, P. and Zanette, D.：Tsallis熵变分形式主义导出的分形随机游走，《Phys. Rev. E》，49，R956–R958，1994年。13. Koponen, I.：截断Lévy飞行向高斯随机过程收敛问题的解析方法，《Rev. E》，52，1197–1199，1995年。14. Peng, C-K, S.V. Buldyrev, A.L Goldberger, S.Havlin, F. Sciortino, M.Simons, and H.E. Stanley（1992年），《Nature》，356，168-170。15. Stauffer, D.（1985年），《概率论导论》及其应用，Willey，纽约。16. Provata, A.,（1999年），《Physica A》，264，570-580。17. 含噪实验数据中标度行为的基于小波检测，Contoyiannis, Y.F., Potirakis, S.M., Diakonos, F.K.，《Physical Review E》，2020年，101(5)。18. 临界区域中的单峰映射与序参量涨落，Contoyiannis, Y.F., Diakonos, F.K.，《Physical Review E—统计、非线性与软物质物理》，2007年，76(3), 031138。19. 通过分析震前电磁发射研究地震孕育过程中的三临界交叉，Contoyiannis, Y., Potirakis, S.M., Eftaxias, K., Contoyianni, L.《地球动力学杂志》，2015年，84，第40–54页。20. 简单立方晶格上三维伊辛类系统的25阶高温展开结果，Massimo Campostrini, Andrea Pelissetto, Paolo Rossi, and Ettore Vicari.，《Phys. Rev. E》65, 066127, 2002年。21. 三临界O(N)对称Φ^6 模型超越1/N次领项的重整化函数，S Sakhi.，《Journal of Physics Communications》，第5卷，第5期。

附录

最近，我们提出了一种新的分析方法 [17], ，适用于也必须考虑大尺度的情况。这种方法基于小波基的发展而来；无论噪声有多强，只要幂律存在，它都能揭示幂律。小波基是线性基，适用于呈现自相似性质的现象，例如临界现象。小波经过两种变换：尺度 j 的改变和位移 k。因此，分析系数为 $d_{j,\ k}$。当 j = k = 0 时，我们就得到了分析的粗粒化描述。在这一描述框架下，分析系数能够并且确实可以忽略待分析信号中的噪声 [17]。我们利用这一特性开发了一种算法，它适用于每个不同的数值信号或实信号 f (i)，i = 1,...Δ_{max}，其中 Δ_{max} 为信号的最大长度。在实践中，Δ_{max} 将

在分布的尾部找到作为取值点，使我们能够找到最理想的幂律（下文算法的第 2 步）。该算法能够回答信号是否服从幂律、它与幂律有多接近或相差多远，还能计算相应的指数 p。换言之，它起到拟合函数的作用，却不会像拟合函数那样因噪声而产生病态影响，尤其是在层流长度较大的取值处。新方法使用所有尺度。我们用于开发该算法的小波基是哈尔小波基。哈尔小波以以下由空间上的 Theta 函数定义的函数为母函数 [0, Δ]：

$$\psi_H = \Theta\left(\frac{\Delta}{2} - x\right)\Theta(x-0) - \Theta\left(x - \frac{\Delta}{2}\right)\Theta(\Delta - x). \tag{1A}$$

我们定义以下量 [17]：

$$\lambda = \frac{\frac{d_{00}}{d_{10}}}{\frac{d_{10}}{d_{20}}} = \frac{d_{00}d_{20}}{d_{10}^2} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{\frac{\Delta}{2}} f(i) - \sum_{\frac{\Delta}{2}}^{\Delta} f(i)\right)\left(\sum_{i=1}^{\frac{\Delta}{8}} f(i) - \sum_{\frac{\Delta}{8}}^{\frac{\Delta}{4}} f(i)\right)}{\left(\sum_{i=1}^{\frac{\Delta}{4}} f(i) - \sum_{\frac{\Delta}{4}}^{\frac{\Delta}{2}} f(i)\right)^2} \tag{2A}$$

and

$$R = \frac{d_{00}}{d_{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sum_{i=1}^{\frac{\Delta}{2}} f(i) - \sum_{\frac{\Delta}{2}}^{\Delta} f(i)\right) / \left(\sum_{i=1}^{\frac{\Delta}{4}} f(i) - \sum_{\frac{\Delta}{4}}^{\frac{\Delta}{2}} f(i)\right). \tag{3A}$$

用于揭示临界性并确定层流长度分布幂律指数的所提出方法包括以下步骤：

1. 我们应用方程（2A）计算 λ 作为 Δ 的函数，直至 Δmax。正如我们从（2A）中所看到的，能够提供信息的最小 Δ 是 Δ = 8。我们绘制 λ 与 Δ 的关系图，由于我们关注 λ [17] 的收敛性，因此最后 10 个（10>8）点就足以得出结论。

2. 我们通过计算 λ 与数值 λ = 1 之间的距离来量化上一步，其中 λ = 1 是完美的幂律 [17], ，具体通过计算该量来实现。

$$D_\lambda = \frac{1}{10}\sum_{i=\Delta_{max}-9}^{\Delta_{max}} (1-\lambda_i)^2 \tag{4A}$$

显然，随着 D_λ 越来越接近零，层流长度的分布将越来越接近幂律分布。这就是决定 Δ_{max} 的判据。

3. 根据方程 (3A)，绘制 R 与 Δ 的关系图。从图 (≤ 10) 的收敛区域中，可以得到量 R 的平均值。4. 我们将 $f(i) = ci^{-p}$, $i = 1,2,3 \ldots \Delta_{max}$ 作为方程 (3A) 中的检验函数（c 无关紧要，因为它在方程 (3A) 中会消失），通过数值求解方程 (3A)，计算使 R 接近步骤 3 中所得平均值的指数 p。

为了创建用于计算上述量的程序，我们根据以下关系使用dj的离散形式: k [17]

$$d_{j,k} = \sqrt{\frac{2^j}{\Delta}}\left(\sum_{i=\max\left(\left[\frac{k\Delta}{2^j}\right],1\right)}^{\left[k\frac{\Delta}{2^j}+\frac{\Delta}{2^{j+1}}\right]} f(i) - \sum_{i=\left[k\frac{\Delta}{2^j}+\frac{\Delta}{2^{j+1}}\right]+1}^{\left[(k+1)\frac{\Delta}{2^j}\right]} f(i)\right), \tag{A5}$$

其中，[z] 表示变量 z 的整数部分。