arXiv:2305.04353v1 [math.FA] 7 May 2023

关于三阶凸函数的新旧研究

丹-什特凡·马里内斯库和 CONSTANTIN P. NICULESCU

Abstract. 本文旨在综述已有成果，并指出当前仍存在大量相当重要的开放问题。

1. Introduction引言

高阶凸性由 Hopf [13] 和 Popoviciu [26], [28], 提出，他们用函数的差商来定义这一概念。设 f 实区间 I上定义的实值函数为 n，与一组 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ 互不相同的 $n+1$ 点相对应的 0、1、.....阶差商分别由下列公式定义：

$$\begin{aligned}
[x_0; f] &= f(x_0) \\
[x_0, x_1; f] &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \\
&\cdots \\
[x_0, x_1, ..., x_n; f] &= \frac{[x_1, x_2, ..., x_n; f] - [x_0, x_1, ..., x_{n-1}; f]}{x_n - x_0} \\
&= \sum\nolimits_{j=0}^{n} \frac{f(x_j)}{\prod_{k \neq j} (x_j - x_k)}.
\end{aligned}$$

请注意，所有这些差商在点 $x_0, x_1, ..., x_n$. 的排列下均保持不变。因此，我们总可以假设 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$.

若函数 f 满足所有差商 $[x_0, x_1, \ldots, x_n; f]$ 均为非负（分别为非正），则称其为 n-凸（分别为 n-凹）。特别地，

- 零阶凸函数恰好是非负函数；
- 一阶凸函数是非减函数；
- 二阶凸函数就是通常的凸函数，因为在这种情况下，对所有 $x_0 < x_1 < x_2$ 属于 I，

$$[x_0, x_1, x_2; f] = \frac{\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}}{x_0 - x_2} \geq 0,$$

也就是说，$(x_2 - x_0)\ f(x_1) \leq (x_2 - x_1)\ f(x_0) + (x_1 - x_0)\ f(x_2)$。

虽然上述三类 n-凸函数的性质已得到充分理解，但关于 $n \geq 3$. 的相关结果却寥寥无几。除了 Popoviciu 的研究（见 [26], [27], [28], [29] 和 [30]）外，我们还应提及

Date: 2023年5月7日。2000 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：26A51、39B62；次要分类：26D15、15A20。*Key words and phrases.* 高阶凸性、具有正差分的函数、实对称矩阵的谱分解。

以下学者的贡献：Bennett [1], Bessenyei 和 P´ales [2], Boas 与 Widder [4], Bojani´c 和 Roulier [5], Brady [6], Bullen [7], [8], Kuczma [16], Marinescu 和 Monea[17], Pecari´c 及其合作者 [15], [14], [19], [25], Rajba [31], Szostok [37] 以及 Wasowicz [40]。

本文旨在概述当前有关3-凸函数的研究现状，补充一些新结果，并指出一些似乎颇有意义的开放问题。我们将研究范围限制在这一特殊情形，原因有二：它既为展示3-凸函数类的丰富性提供了一个便利框架，也提供了一个使技术层面保持简单直观的背景。

为方便读者起见，第2节回顾了一些非常基础的事实。

第3节主要致力于说明3-凸函数与具有直到3阶正差分的函数是恒等的。见下文定理2。Popoviciu 已知这一结果，但除 Kuczma [16], 的著作也收录了完整证明外，其他各种有关凸函数的著作很少提及它。本文的方法结合了 Hopf [13], 、Popoviciu [26], 、Boas 和 Widder [4] 以及 Bennett [1] 的结果（按其发表先后列举）。一个重要事实是，在开区间上，3-凸函数恰好是导数为凸函数的可微函数。这使我们能够从通常的凸函数的已知结果推导出3-凸函数的结果，反之亦然。见定理 3 和定理 4，以及第4节中随附的评论。

第 5 节概述连续 3-凸函数背景下的 Hermite-Hadamard不等式。核心结果是 Bessenyei 和 P´ales [2], [3], 得到的一个显著推广，它涵盖紧区间 $[a, b]$ 上 Borel概率测度的一般情形。对于通常的凸函数，Hermite-Hadamard不等式的核心在于重心 p 和极值点所起的作用。正如 $f(p) = \delta_p(f)$，在 3-凸性情形下，重心 δ_p 的作用由一个支撑在两点上的离散概率测度承担，其中一点位于区间内部。自然，这引出了一个有趣的问题：在 3-凸函数的框架下，Choquet理论的类似形式是什么？第 5 节末尾提到了与此相关的若干开放问题。

第 6 节介绍了 Ressel [32], 最近一项结果的概貌，该结果涉及连续、非递减、凹且 3-凸的函数与 Hornich-Hlawka 不等式之间的联系。参见定理 。我们证明，这一结果实际上是两个不同结果的并置，它们分别涵盖变量的互补定义域：一个涉及连续性和 3-凸性的性质，另一个则仅涉及单调性和凹性的性质。参见下文的引理 4 和引理 5。

本文最后一节讨论了将整个理论推广到取值于有序巴拿赫空间的函数的情形。

2. Preliminaries

定义在区间 I 上的函数 f 是 3-凸的，如果对于 I 中任意四个元素 $x_0 < x_1 < x_2 < x_3$ ，

$$[x_0, x_1, x_2, x_3; f] = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} - \frac{f(x_1)}{(x_0 - x_1)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \frac{f(x_2)}{(x_0 - x_2)(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)} - \frac{f(x_3)}{(x_0 - x_3)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)} \geq 0,$$

等价地，

$$(x_2 - x_0)(x_3 - x_0)(x_3 - x_2)f(x_1) + (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)f(x_3) \geq (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)f(x_0) + (x_1 - x_0)(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)f(x_2). \tag{2.1}$$

当点 x_0、x_1、x_2、x_3 等距时，即当对于某个 $h > 0$ 有 $x_1 = x_0 + h$、$x_2 = x_0 + 2h$、$x_3 = x_0 + 3h$ 时，最后一个不等式变为

$$f(x_0 + 3h) - 3f(x_0 + 2h) + 3f(x_0 + h) - f(x_0) \geq 0,$$

等价地，

$$f(x_0) + 3f\left(\frac{x_0 + 2x_3}{3}\right) \leq 3f\left(\frac{2x_0 + x_3}{3}\right) + f(x_3). \tag{2.2}$$

若 f 可微 n 次，则反复应用拉格朗日中值定理可知，存在一点 $\xi \in$ （$\min_k x_k$, $\max_k x_k$），使得

$$[x_0, x_1, ..., x_n; f] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

因此，可得到以下关于 n-凸性的实用判据的充分性部分。

引理1. 假设 f 是在区间 I 上定义的连续函数，且在 I. 的内部三次可微。那么， f 是3-凸函数，当且仅当其三阶导数非负。

利用通过迭代差分求导数的标准公式，必要性部分也显而易见，

$$f'''(x_0) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0 + 3h) - 3f(x_0 + 2h) + 3f(x_0 + h) - f(x_0)}{h^3}.$$

关于引理1，值得一提的是Hopf [13], 第24页和Popoviciu [26], 第48页的一个结果：定义在开区间上的每个3-凸函数 f 都是可微的，且 f' 是凸函数。由此可以轻易得到连续函数框架下3-凸性的一个刻画。见下文定理2。

引理1使我们注意到存在种类繁多的3-凸函数：

$$x/(x+1),\ 1 - e^{-\alpha x}\ (\text{for } \alpha > 0),$$
$$\log(1+x),\ -x\log x\,,\ (x-1)/\log x,\ x^{\alpha}\ (\text{for } \alpha \in (0,1] \cup [2,\infty)),$$
$$-x^2 + \sqrt{x},\ \sinh,\ \cosh,\ -\log(\Gamma(x))\,.$$

此外，任意连续凸函数的原函数都是 3-凸函数。

函数 $1 - (x-3) + (x-3)_6^3$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上连续且 3-凸，但对任何 $n \in \{0, 1, 2\}$. 都不是 n-凸

正系数多项式和指数函数对每个 $n \geq 0$. 都是 n-凸的

注 1. 所有次数小于或等于 2 的多项式既是 3-凸函数，也是 3-凹函数。这些函数与系数为正的有限和 $\sum_{i=1}^{m} c_i \left((x-a_i)_+\right)^2$一起，构成任意 3-凸函数的基本组成部分。参见 Popoviciu [28], 第 29–30 页（另见 [5] 和 [38]）。

区间 I 上的连续 3-凸函数构成向量空间 $C(I)$中所有连续函数的一个凸锥，其中的函数均定义在 I. 上。该凸锥对卷积封闭，但对通常的乘积不封闭。

3-凸函数的极值性质与凸函数的极值性质不同。

两个 3-凸函数的最大值（或最小值）不一定是 3-凸函数；考虑函数 $-x$ 和 x. 的情形。此外，3-凸函数的一个内部临界点不一定是极小点。它可能是拐点（三次函数 x^3的情形），也可能是极大点（函数 $-x^2+\sqrt{x}$的情形）。

以下由 Popoviciu 提出的逼近定理 [27] （另见 [12], 定理 1.3.1（i），第 20 页）使我们能够将对 n-凸函数的论证简化为它们同时可微的情形。

定理 1.（Popoviciu 的逼近定理）如果连续函数 $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ 是 k-凸的，那么与之对应的伯恩斯坦多项式也具有这一性质，

$$B_n(f)(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} f\left(\frac{i}{n}\right).$$

此外，由于伯恩斯坦多项式及其导数能够同时一致逼近函数及其导数这一众所周知的性质，可知 $B_n(f)$ 及其任意阶导数分别一致收敛于 f及其相应导数。

通过变量替换可以很容易地看出，该逼近定理可推广到定义在紧区间 $[a,b]$ 上的函数，其中 $a<b$.

推论 1. 如果 $f:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 是一个连续的 3-凸函数，同时也是非递减且凹的，那么当 $\alpha \in (0,1]$. 时， f^α 也具有相同的性质

证明。根据定理 1，我们可以将证明归结为所涉及的函数属于 C^3 类的情形，此时结论由引理1得出。□

注 2。一类重要的函数 $f:\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$，它们是连续、非递减、凹且 3-凸的，即伯恩斯坦函数。回忆一下，若函数 $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上连续，在 $(0,\infty)$ 上无限次可微，且

$$(-1)^{n+1} f^{(n)} \geq 0 \quad for\ all\ n \geq 1.$$

相关理论详见 Schilling、Song 和 Vondra˘cek 的专著 [34]。根据该专著第 28 页的推论 3.8，两个 Bernstein 函数的复合仍是 Bernstein 函数（而 3-凸函数类则不具有这一性质）。

3. Some characterizations of 3-convexity

差分算子 Δ_h （步长为 $h \geq 0$）将每个定义在区间 I 上的函数 f 映射为函数 $\Delta_h f$，其定义如下:

$$(\Delta_h f)(x) = f(x+h) - f(x),$$

对于所有使右侧公式有意义的 x。注意，如果 $I = \mathbb{R}^+$ 或 $I = \mathbb{R}$.，则无需任何限制

差分算子是线性的，且彼此可交换,

$$\Delta_{h_1}\Delta_{h_2} = \Delta_{h_2}\Delta_{h_1}.$$

它们还满足以下平移不变性:

$$\Delta_h(f \circ T_a) = (\Delta_h f) \circ T_a,$$

其中 T_a 是由公式 $T_a(x) = x + a.$ 定义的平移

引理 2. 若 n 是正整数，则以下公式成立:

$$\Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\cdots\Delta_{h_n} f(x) = \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n \in \{0,1\}} (-1)^{n-(\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_n)} f(x + \varepsilon_1 h_1 + \cdots + \varepsilon_n h_n).$$

由数学归纳法可立即证明。

函数 f 具有 $n \geq 1$ 阶正差分，若

$$\Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\cdots\Delta_{h_n} f(x) \geq 0,$$

只要左端有定义即可。为了类比 n-凸性，我们称函数 f 具有 0 阶正差分，若 $f \geq 0.$

注意，函数单调非递减时具有一阶正差分，而函数为凸函数时具有二阶正差分（这是留给读者的一道简单习题）。正如 Popoviciu [28] 所指出的（第 24 节开头，第 49 页），这一观察适用于一般情形下的 n-凸连续函数。详细证明见 Kuczma 的著作 [16]; 参见定理 15.6.1，第 440 页。更多评论见 [24]。下一个结果讨论 3-凸函数的情形。

定理2. 如果 $f\colon [0, A] \to \mathbb{R}$ 是一个连续函数，则以下断言等价:

(i) f 是 3-凸的;

(ii) $\Delta_h\Delta_h\Delta_h f(x) = f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x) \geq 0$ 对所有 $x \in [0, A)$ 以及满足 $x + 3h \leq A.$ 的 $h > 0$

(iii) f 具有三阶正差分，即满足不等式

$$\Delta_x\Delta_y\Delta_z f(t) = f(x+t) + f(y+t) + f(z+t) + f(x+y+z+t) - f(x+y+t) - f(y+z+t) - f(z+x+t) - f(t) \geq 0$$

当 x、y、z、$t \in [0, A]$ 和 $x + y + z + t \leq A$时;

(iv) f 在 $(0, A)$ 上可微，且其导数 f' 是一个凸函数。

证明。蕴含关系（i） $\Longrightarrow$ （ii）显然成立。在连续性条件下，（i） $\Longleftrightarrow$ （ii）这一事实由 Popoviciu 在其著作 [28] 中陈述（见第 24 节开头，第 49 页）。

Hopf [13] 和 Popoviciu [26]（在一般的 n-凸函数情形下）都注意到了蕴含关系（i） $\Longrightarrow$ （iv）。

Boas 和 Widder 的论文涵盖了蕴含关系（ii） $\Longrightarrow$ （iii） $\Longrightarrow$ （iv）（参见引理1和第497页的定理）。

蕴含关系 (iv) $\Longrightarrow$ (i) 是 Bennett 注意到的（[1], 命题1），他使用了恒等函数

$$\begin{aligned}[a,b,c,d;f] = &\frac{1}{(b-a)(c-a)(d-a)}\int_a^b f'(t)dt \\ &- \frac{c+d-a-b}{(c-a)(c-b)(d-a)(d-b)}\int_b^c f'(t)dt \\ &+ \frac{1}{(d-a)(d-b)(d-c)}\int_c^d f'(t)dt,\end{aligned}$$

对所有 $a<b<c<d$. □

值得一提的是，3-凸函数具有直到三阶的正差分这一性质，也可以通过改编 Popoviciu [29] 为其较弱变体所采用的论证来推导。

我们将用到 Hardy-Littlewood-P´olya 主序不等式的以下特例（参见 [23], 定理 4.1.3，第 186 页）：

引理 3. 若 g：$[a,b]\to\mathbb{R}$ 是一个凸函数，且 c 和 d 是 $[a,b]$中的两点，使得 $a+b=c+d$，则

$$g(c)+g(d)\le g(a)+g(b).$$

Popoviciu 对定理2中蕴含关系（i） $\Longrightarrow$ （iii）给出的另一种证明如下：根据 Popoviciu 的逼近定理，我们可以只考虑 f是一个 C^∞. 类的 3-凸函数的情形。接着任取 y、 z、 $t\in[0,A]$，使得 $y+z+t<A$，并考虑函数

$$\begin{aligned}F(x) = &f(x+t)+f(y+t)+f(z+t)+f(x+y+z+t) \\ &-f(x+y+t)-f(y+z+t)-f(z+x+t)-f(t)\end{aligned}$$

定义在区间 $[0,A-y-z-t]$. 上。此函数也属于 C^∞ 类，且

$$F^{'}(x)=f^{'}(x+t)+f^{'}(x+y+z+t)-f^{'}(x+y+t)-f^{'}(z+x+t).$$

由引理1可推知 F'是一个凸函数，因此根据引理 3， $F'\ge 0$。所以

$$F(x)\ge F(0)=0$$

对所有 x均成立，这等价于断言（iii）。证明完成。

定理2（iii）与 Hornich-Hlawka 不等式之间的联系将在第 6 节讨论。下一节将介绍定理2（iv）的应用。

4. 定理2（ Applications of Theorem 2）的应用（iv）

定理2（iv）使我们能够轻易地从3-凸函数的结果推导出通常的凸函数的结果（反之亦然）。下面给出两个例子。第一个例子是对Jensen 不等式的改进。

定理3. 定义在区间 I 上的连续函数 f 是凸函数，当且仅当

$$\frac{1}{|J|}\int_J f(x)\mathrm{d}x \geq \frac{1}{|K|}\int_K f(x)\mathrm{d}x,$$

只要 $K \subset J$ 是 I 中具有相同中点的两个紧子区间。

证明。设 f 是凸的，且所考察的两个区间为$J=[a,b]$和 $K=[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$（其中 $\varepsilon \in (0,(b-a)/2)$）。 f的每个原函数 F都是一个 C^1 类的 3-凸函数，因此，根据公式（2.1）（应用于点 $a<a+\varepsilon<b-\varepsilon<b$），它满足不等式

$$F(b)-F(a) \geq \frac{b-a}{b-a-2\varepsilon}\left[F(b-\varepsilon)-F(a+\varepsilon)\right].$$

Thus

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{b-a}\int_a^b F'(x)\mathrm{d}x = \frac{F(b)-F(a)}{b-a}\\ &\geq \frac{1}{b-a-2\varepsilon}\left[F(b-\varepsilon)-F(a+\varepsilon)\right]\\ &= \frac{1}{b-a-2\varepsilon}\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

必要性部分的证明至此完成。

对于充分性部分，注意到 f 满足条件

$$\frac{1}{|I_n|}\int_{I_n} f(x)dx \searrow f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

只要 $I_0=[a,b]\supset I_1\supset I_2\supset\cdots$是 I的一个嵌套紧子区间序列，且这些区间收缩至 $(a+b)/2$，并假定其公共中点为 f。因此， f是一个连续函数，满足

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

每当 $a<b$ 属于 I. 时，众所周知，这一性质意味着 f 是一个凸函数。参见 [23], 练习1，第63页。□

注3. 同样可以证明，定义在区间 I 上的连续函数 f 是凸函数，当且仅当

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int_a^{a+\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2\varepsilon}\int_{b-\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x \geq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

每当 $a<b$ 属于 I 且 $\varepsilon \in (0,(b-a)/2)$时。这是对 Hermite-Hadamard不等式右侧的改进（参见 [23], 第1.10节，第$59-64$页）。

结合定理3和注3，可以得到如下双重不等式：

$$\begin{aligned}\frac{4}{b-a}\int_a^{(3a+b)/4} f(x)\mathrm{d}x + \frac{4}{b-a}\int_{(a+3b)/4}^b f(x)\mathrm{d}x&\\ \geq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq \frac{3}{b-a}\int_{(2a+b)/3}^{(a+2b)/3} f(x)\mathrm{d}x,&\end{aligned}$$

对于每个凸函数 $f:\ [a,b]\to\mathbb{R}.$ f 的连续性并非必要。见 [23],命题1.1.3，第3页。

同样，也可以利用凸函数理论来刻画 3-凸函数。

定理 4. 设 $f:I\to\mathbb{R}$ 是定义在 I 上连续且在 I.的内部属于C^1 类的函数，则以下断言等价:

(*i*) f 是 3-凸的；(*ii*) f 满足不

等式

$$f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \tag{4.1}$$

对所有属于 int I 的点 $a<b$；

(*ii*) f 验证了该不等式

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{f'(a)+f'(b)}{2}+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right), \tag{4.2}$$

对于所有点 $a<b$，其中 I 为内部区域。

证明。（i）$\Longrightarrow$（ii）根据定理2，f在（a，b）上可微，且 f'在此区间上是凸函数。考虑到 Jensen 不等式（见[23], 推论 1.7.4，第 43 页），对于每个 $\varepsilon\in$（0，（$b-a$）/2），我们有

$$f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{1}{b-a}\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon}f'(x)\mathrm{d}x=\frac{f(b-\varepsilon)-f(a+\varepsilon)}{b-a}$$

并且不等式 (4.1) 在令 $\varepsilon\to 0+.$ 趋于极限时成立。

(*ii*) $\Longrightarrow$(*i*) 事实上，不等式（4.1）保证了函数 f'' 在包含于 int I 的每个紧区间上满足 Jensen 不等式，而众所周知，这意味着 $f'.$ 的凸性。参见 [23], 练习1，第63页。

(*i*) $\Longrightarrow$(*iii*) 不等式 (4.2) 的证明可用同样的方法，借助 [23] 中第 61 页的注记 1.10.5 来完成。从 iii $\Longrightarrow$ (*i*) 可由同上第 63 页的习题 2 推出。）□

例 1. 将定理 4 应用于函数 $f(x)$ = 对数$(1+x)$,$x\geq 0$ 的情形，可得到双重不等式。

$$\frac{b-a}{1+\frac{a+b}{2}}\leq\log\frac{1+b}{1+a}\leq\left(\frac{b-a}{4}\right)\left(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{2}{1+\frac{a+b}{2}}\right),$$

对所有 $0\leq a\leq b.$ 均成立。这提供了一个关于对数$(1+x)$的有理估计，优于麦克劳林展开所给出的估计。

例 2. 如果 $f:\ [a,b]\to\mathbb{R}$ 是一个三次可微函数，且 M =sup$_{x\in[a,b]}f'''(x)<\infty$，那么 $Mx^3/6-f$是一个连续的 3-凸函数。例如，对于正弦函数的情况，这在 $M=1$ 时成立，这意味着

$$\begin{aligned}\frac{(a+b)^2}{2}-\cos\frac{a+b}{2}&\leq\frac{a^2+ab+b^2}{6}-\frac{\sin b-\sin a}{b-a}\\&\leq\frac{1}{4}\left(\frac{a^2+ab+b^2}{2}-\cos a-\cos b-2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\right).\end{aligned}$$

同样，当 m =inf$_{x\in[a,b]}f'''(x)>-\infty$ 时，函数 $f-mx^3/6$ 是 3-凸的，定理 4 的结论适用于它。

定理 2 的另一个应用涉及 3-凸函数的“支撑”。若 f 是定义在区间 I 上的连续 3- 凸函数，则 f' 是 $\operatorname{int} I$ 上的凸函数，因此我们可以对它应用凸函数的次可微理论。根据 [23], 定理 1.6.2，第 36 页，次微分 $\partial f'(a)$（f' 在内点 a 处，且该点属于 I）等于区间 $[f'_-(a)\ f'_+(a)]$，并且

$$f'(x) \geq f'(a) + y(x-a) \quad \text{for all } x \in \operatorname{int} I \text{ and } y \in \partial f'(a).$$

注意，当 f在 a处二阶可微时，$\partial f'(a) = \{f''(a)\}$。

因此

$$f(x) \geq f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''_+(a) \quad \text{if } x \in I \text{ and } x \geq a \tag{4.3}$$

and

$$f(x) \leq f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''_-(a) \quad \text{if } x \in I \text{ and } x \leq a. \tag{4.4}$$

由此可得,

$$f(x) = \sup \left\{ f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} y : a \in \operatorname{int} I,\ a < x,\ y \in \partial f'(a) \right\}$$

对于所有不同于 I.左端点的 $x \in I$

从几何上看，$g = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''_+(a)$（分别为 $y = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''_-(a)$）表示与 f 的图像在 a 处相切，且在 a. 处具有相同右侧（左侧）二阶导数的唯一抛物线。这些“紧切抛物线”相当于凸函数理论中的支撑直线。注意，在点 a处的紧切抛物线，在 $I \cap (-\infty,\ a]$）上方于 f的图像，并在 $I \cap [a, \infty$下方于其图像。

问题 1. 假设 f 是一个在 I 上连续、在 $\operatorname{int} I$ 上可微的函数，并且在 $a \in \operatorname{int} I$ 的每一点都存在一条紧切抛物线。那么 f 必然是 3-凸函数吗?

这个问题的答案似乎是肯定的，正如 Bullen 对 3-凸函数给出的类比所示；熟知的事实是，凸函数的图像总在其弦的下方。

定理 5. 函数 f 在 $[a,b]$ 上是 3-凸函数，当且仅当对于每个在 α、β 和 γ 处与 f 相同的二次函数 Q（其中 $a < \alpha < \beta < \gamma < b$），我们都有

$$Q(t) \geq f(t) \quad \textit{if } x \in [a, \alpha] \cup [\beta, \gamma]$$

and

$$f(t) \geq Q(t) \quad \textit{if } x \in [\alpha, \beta] \cup [\gamma, b].$$

参见 [7], 定理 5，第 85 页，以及定理10，第 88 页。

紧切抛物线的存在自然引出了一个问题：连续 3-凸函数情形下是否存在 Fenchel对偶的类似理论。

问题 2：对于连续的 3-凸函数，是否存在类似于 Fenchel 共轭的对应概念?

关于最后一个问题，请注意，一个既凸又 3-凸的函数，其 Fenchel共轭可能并非 3-凸。以指数函数为例，其 Fenchel共轭是函数 $f^*(x) = x$ 对数 $x-x$当 $x > 0$ 且 $f^*(0) = 0.$

注4。Wasowicz 也研究了 3-凸函数的支撑型性质，并证明了以下结果：若 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 是一个 3-凸函数，则对每个点 $c \in (a,b)$，都存在二次函数 p 和 q，使得

$$p(a) = f(a),\ p(c) = f(c)\ and\ p \le f\ on\ [a,b]$$

and

$$q(c) = f(c),\ p(b) = f(b)\ and\ q \ge f\ on\ [a,b].$$

参见 [40], 推论10和11。

定理2（iv）的另一个应用是下一节中证明的不等式（5.4）。

5. The Hermite-Hadamard inequality in the context of 3-convexfunctions

根据Choquet理论，区间上凸函数的Hermite-Hadamard不等式的含义是：对于每个凸函数 f，相对于定义在 $[a,b]$ 上的Borel概率测度 μ 的积分平均值 $[a,b] \to \mathbb{R}$，有一个双重估计，即

$$f\left(\mathrm{bar}(\mu)\right) \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}\mu \le \frac{b-\mathrm{bar}(\mu)}{b-a}\cdot f(a) + \frac{\mathrm{bar}(\mu)-a}{b-a}\cdot f(b)\,. \tag{5.1}$$

这里，bar(μ)表示 μ 的重心，即 $[a,b]$ 中满足以下条件的唯一点 p

$$f(p) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \tag{5.2}$$

对于每个连续仿射函数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$。容易验证，bar(μ) $= \int_a^b x\mathrm{d}\mu(x)$，即 μ. 的一阶矩

参见 [23]（另请参见 [20] 和 [22]）。

当 μ 是形如 wdx 的绝对连续概率测度时，其中权函数 $w \ge 0$ 关于竖直直线 $x =(a+b)/2$ 连续且对称，即

$$w(x) = w(a+b-x) \quad \text{for all } x \in [a,b],$$

则 bar(μ) $= (a+b)/2$，不等式（5.1）变为

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \int_a^b f(x)w(x)\mathrm{d}x \le \frac{f(a)+f(b)}{2}\,, \tag{5.3}$$

这是经典 Hermite-Hadamard不等式的 Fej´er 变体，也称为 Hermite-Hadamard-Fej´er 不等式。参见第 64 页练习 6 后的 [23], 注释。

注5。不等式（5.1）在概率测度的框架之外也成立，例如适用于所谓的 Hermite-Hadamard 测度，其中一个例子是 $[-1,1].$ 上的 3($x^2 - 1/6$)dx。详情请参见 [11] 和 [23], 第 7.5 节，第 322–324 页。

定理2（iv）使我们能够从 Hermite-Hadamard-Fej´er 不等式推导出关于 3-凸函数的一些推论。

为此，考虑可微的 3-凸函数 $f\colon\ [a,b]\to\mathbb{R}$，以及关于竖直直线 $x=(a+b)/2$ 对称且存在原函数 $W\geq 0$ 的连续实权函数 w。这类例子有三个：1) $w(x)=a+b-2x$ 在 $[a,b]$ 上（其原函数为 $W(x)=(x-a)(b-x)$）；2) $2nx^{2n-1}$ 在 $[-a,a]$ 上（其原函数为 x^{2n}）；3) $\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上（其原函数为 $\sin x$）。

Then

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)w(x)\mathrm{d}x &= fW|_a^b-\int_a^b f'(x)W(x)\mathrm{d}x\\ &= f(b)W(b)-f(a)W(a)-\int_a^b f'(x)W(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

而 Hermite-Hadamard-Fej´er 不等式导出的是

$$\begin{aligned}(5.4)\quad &-\frac{f'(a)+f'(b)}{2}\int_a^b W(x)\mathrm{d}x\\ &\leq\int_a^b f(x)w(x)\mathrm{d}x-(f(b)W(b)-f(a)W(a))\leq -f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b W(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

在特殊情况下，$w(x)=a+b-2x$ 且 $W(x)=(x-a)(b-x)$，我们有

$$\int_a^b W(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}(b-a)^3$$

并且不等式 (5.4) 变为

$$\frac{(b-a)^3}{6}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\int_a^b f(x)(2x-a-b)\mathrm{d}x\leq\frac{(b-a)^3}{12}\left(f'(a)+f'(b)\right).$$

现在我们转而讨论 3-凸函数的 Hermite-Hadamard 不等式类比式的存在性。

与通常的凸函数情形类似，考虑定义在所有关于 $[a,b]$ 的 Borel概率测度所构成的集合 Prob($[a,b]$ 上的以下 3-凸序是有用的：

$$\nu\prec_{3cvx}\mu \text{ if and only if } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\nu(x)\leq\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$$
$$\text{for all continuous and 3-convex functions } f:[a,b]\to\mathbb{R}.$$

Denuit、Lefevre 和 Shaked [9], Rajba [31] 以及 Szostok [37]的论文中给出了一些关于高阶凸序的重要充分必要条件。

关系 $\prec_{3cvx}$确实是一种偏序关系。显然，它具有传递性和自反性；$\nu\prec_{3cvx}\mu$ 和 $\mu\prec_{3cvx}\nu$ 蕴含 $\mu=\nu$ 这一事实，源于由连续 3-凸函数生成的线性空间在$C($$[a,b]$)中是稠密的。

注 6. 对于每个 $\mu\in$ Prob($[a,b]$，都可以选取一个最小的 Borel概率测度 λ，使得 $\lambda\prec_{3cvx}\mu$ （最大测度也同样如此）。事实上，Prob($[a,b]$ 可以视为 $C([a,b])$ 对偶空间中的一个弱星凸紧子集，具体而言是 $\{x^*\in C([a,b])\colon\ x^*\geq 0$ 和 $x^*(1)=1\}$，因此，任何被 μ 支配的测度网都存在一个在弱

星拓扑下收敛的子网。因此，根据佐恩引理，存在被 μ 支配的最小 Borel概率测度。

注 7. 给定定义在 $[a,b]$ 上且其支撑包含多于两个点的 Borel概率测度 μ ，不存在 Dirac 测度 δ_p 使得

$$\delta_p(f) = f(p) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

对于所有连续 3-凸函数均成立。事实上，对函数 $\pm x$ 和 $\pm x^2$ 检验这一点时，我们应有

$$p = \int_a^b x\mathrm{d}\mu(x) \ and \ p^2 = \int_a^b x^2\mathrm{d}\mu(x),$$

这是不可能的，因为只有当所涉及的两个函数中有一个是另一个的数量倍数时，Cauchy-Schwarz 不等式中的等号才会成立。

最后两个注记自然引出了这样一个问题：刻画关于序 $\prec_{3cvx}$.的极小 Borel概率测度

问题 3. 给定 Borel概率测度 μ 在 $[a,b]$上，求数值 λ、μ、$\nu \in [0,1]$，使得对于每个连续 3-凸函数 $f\colon\ [a,b]\to\mathbb{R}$ 我们都有

$$\lambda f((1-\mu)a+\mu b)+(1-\lambda)f((1-\nu)a+\nu b) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}\mu(x). \tag{3J}$$

Bessenyei 和 P´ales 的一个结果（ [3], 定理 3.4），结合对 [37], 中引理 3.2论证的仔细考察表明，只要 μ 的支撑至少包含 3 个点，该问题就有唯一解。在 μ 等于（ $1/$ （ $b-a$ ）） $\mathrm{d}x$ 的特殊情形下，该解对应于

$$\lambda = 1/4,\ \mu = 0 \text{ and } \nu = 2/3,$$

他们的结果如下:

定理 6. 对于连续函数 $f\colon\ I\to\mathbb{R}$，以下陈述等价:

（i） f 是 3-凸函数；（ii）对于所有满足 $a<b$的 a、$b\in I$ ，

$$\frac{1}{4}f(a)+\frac{3}{4}f\left(\frac{a+2b}{3}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x;$$

（iii）对于所有满足 $a<b$的 a、$b\in I$ ，

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \frac{3}{4}f\left(\frac{2a+b}{3}\right)+\frac{1}{4}f(b).$$

下文中，我们将极值概率测度 $\frac{1}{4}\delta_a+\frac{3}{4}\delta_{(a+3b)/3}$ 和 $\frac{3}{4}\delta_{(2a+b)/3}+\frac{1}{4}\delta_b$ 分别称为 $(1/(b-a))\mathrm{d}x$ 的 3-凝缩和 $(1/(b-a))\mathrm{d}x$. 的 3-离散。这些概率测度的非对称形式似乎是 Bullen 的定理 5 所导致的。

注意到,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{1}{4}f(a)+\frac{3}{4}f\left(\frac{a+2b}{3}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{3}{4}f\left(\frac{2a+b}{3}\right)+\frac{1}{4}f(b) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \end{aligned}$$

对于同时凸且 3-凸的函数 f 的情况。

定理 6 概述了连续 3-凸函数的以下刚性性质：

备注 8. 若 $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ 是一个连续 3-凸函数，满足 $f(a)\geq 0$且 $f\left(\frac{a+2b}{3}\right)\geq 0$, 那么它的积分平均值也大于或等于 0。这意味着，区间 $[(a+2b)/3,b]$ 内 f的取值不能“过于”负（尽管它可以为负，如定义在 $[0,3/2]$上的函数 $-x^2+\sqrt{x}$所示）。

类似地，若 $f\left(\frac{2a+b}{3}\right)\leq 0$且 $f(b)\leq 0$，那么 f的积分平均值也小于或等于 0（而且区间 $[a,(2a+b)/3]$ 内 f的取值不能“过于”正）。

有许多与定理 6 相关且似乎颇有意义的开放问题。

问题 4. $(1/(b-a))\mathrm{d}x$ 的 3-凝缩具有怎样的统计学意义？$(1/(b-a))\mathrm{d}x$. 的 3-离散也具有同样的统计学意义吗?

问题 5. 是否存在定理 6 的某种 Fej ´er 类比?

问题 6. 当 μ 和 ν 是离散概率测度时，关系 $\mu\prec_{3cvx}\nu$ 是否能像 Sherman 那样给出一个刻画 [35], ?

问题 7：定理 6 能否推广到符号测度的情形（正如凸函数的 Hermite-Hadamard 测度那样）？

6. 3-convexity and the Hornich-Hlawka functional inequality

定理2的一个直接推论是：每个非负且连续的3-凸函数都满足 Hornich-Hlawka 函数不等式：

命题1. 如果 $f\colon [0,A]\to\mathbb{R}$ 是一个连续的3-凸函数，则

(6.1) $f(x)+f(y)+f(z)+f(x+y+z)\geq f(x+y)+f(y+z)+f(z+x)+f(0)$，对所有满足 $x+y+z\leq A$ 的点 x、y、$z\in[0,A]$ 均成立；若进一步有 $f(0)\geq 0$, 则 (6.2) $f(x)+f(y)+f(z)+f(x+y+z)\geq f(x+y)+f(y+z)+f(z+x)$。

Hornich-Hlawka 函数不等式并非3-凸函数所特有。事实上，正如 Sendov 和 Zitikis 所指出的，[36], 定理4.2（另见[24], 定理 7），Hornich-Hlawka 函数不等式（HH2）同样适用于完全单调函数的框架。回顾一下，如果一个函数 $f\colon [0,\infty)\to\mathbb{R}_+$ 在 $[0,\infty)$ 上连续，在 $(0,\infty)$ 上无限次可微，并且

$$(-1)^n f^{(n)}(x)\geq 0\quad \text{for all } x>0 \text{ and } n\geq 0.$$

一些简单的例子有 e^{-x}, $1/(1+x)$，以及 $(1/x)\log(1+x)$。注意，每个完全单调函数都是非递增、凸且3-凹的。

通过增加附加假设，可以显著改进命题1的结果。

定理 7. 假设 $f\colon [0,A]\to\mathbb{R}$ 是一个连续的3-凸函数，同时也是非递减且凹的。那么

$f(|x|)+f(|y|)+f(|z|)+f(|x+y+z|)\geq f(|x+y|)+f(|y+z|)+f(|z+x|)+f(0)$, 对所有满足 $|x|+|y|+|z|\leq A.$ 的 x、y、$z\in[-A,A]$

定理 7 隐含在 Ressel 的一篇论文中；他用高阶差分表述了自己的结果。参见 [32],定理 1 和公式 (5)。为方便读者，我们将在此给出完整的论证。

首先注意到，定理 7 中陈述的不等式在元素 x、y、z 的置换下保持不变，也在对称变换 $(x,y,z) \to (-x,-y,-z)$ 下保持不变。因此，定理 7 的证明可归结为以下两种情况：

情况 1：元素 x、y 和 z 具有相同的符号，在这种情况下，我们可以将问题归结为如下情形：

$$x \geq y \geq z \geq 0;$$

情形 2：元素 x、y、z 中有两个是非负的，而第三个是非正的，在这种情况下，证明归结为以下情形，其中

$$x \geq y \geq 0 \geq z.$$

情形1由定理2的断言（iii）涵盖。情形2可以分为四个子情形：

情形 2a：$x \geq y \geq 0 \geq z$ 和 $|z| \geq x+y$；情形 2b：
$x \geq y \geq 0 \geq z$ 和 $x+y \geq |z| \geq x$、y；情形 2c：
$x \geq y \geq 0 \geq z$ 和 $x \geq |z| \geq y$；情形 2d：
$z \leq 0 \leq y \leq x$ 和 $x \geq y \geq |z|$.

定理 7 在情形 $2a$ 下的论断构成了引理 4 的目标，而其他情形（情形 $2b$、情形 $2c$ 和情形 $2d$）则由引理 5 解决。

引理 4. 假设 $f\colon [0,A] \to \mathbb{R}$ 是一个连续函数，使得

$$f(x)+f(y)+f(z)+f(x+y+z) \geq f(x+y)+f(y+z)+f(z+x)+f(0)$$

对所有满足 $x+y+z \leq A$ 的 x、y、$z \geq 0$。那么 f 也满足函数不等式 $f(|x|)+f(|y|)+f(|z|)+f(|x+y+z|) \geq f(|x+y|)+f(|y+z|)+f(|z+x|)+f(0)$，对于所有由 x、y、$z \in [-A,A]$ 组成的三元组，其中两个元素为非负，且它们的和不超过第三个元素的绝对值。

证明。只需考虑 x、$y \geq 0 \geq z$ 和 $x+y \leq |z|$ 的情形。此时，$|z|-x=|x+z|$、$|z|-y=|y+z|$ 和 $|z|-x-y=|x+y+z|$。根据我们的假设，将其应用于 x、y 和 $|z|-x-y$，可得

$$f(x)+f(y)+f(|z|-x-y)+f(|z|) \geq f(x+y)+f(|z|-y)+f(|z|-x)+f(0),$$

等价地，

$$f(|x|)+f(|y|)+f(|z|)+f(|x+y+z|) \geq f(|y+z|)+f(|x+z|)+f(|x+y|)+f(0).$$

□

引理 5. 如果 $f\colon [0,A] \to \mathbb{R}$ 是非递减且凹的函数，那么 $f(|x|)+f(|y|)+f(|z|)+f(|x+y+z|) \geq f(|x+y|)+f(|y+z|)+f(|z+x|)+f(0)$，对所有满足 $z \leq 0 \leq y \leq x.$ 的 $x,y,z \in [-A,A]$ 而言。

当 f 的定义域为 $\mathbb{R}_+$ 且 f 为非负时，凹性意味着非递减性。参见 [23], 练习 4, 第 31 页。

证明。值域 $z \le 0 \le y \le x$ 可分为以下几种情况:

情形 $2b$: $z \le 0 \le y \le x$和 x, $y \le |z| \le x+y$. 于是 $0 \le x+y+z \le |z| \le x+y$, 因此由引理 3 可得

$$f(x+y)+f(0) \le f(|z|)+f(x+y+z).$$

另一方面, $|x+z| = |z|-x$、 $|y+z| = |z|-y$和 $|x+y+z| = x+y+z$。由于 f 非递减, 我们有 $f(|z|-x) \le f(y)$, 以及 $f(|z|-y) \le f(|x|)$。因此

$$\begin{aligned} &f(|x+y|)+f(|y+z|)+f(|z+x|)+f(0) \\ &\quad = f(x+y)+f(0)+f(|z|-y)+f(|z|-x) \\ &\quad \le f(x+y+z)+f(|z|)+f(x)+f(y) \\ &\quad = f(|z|)+f(|x+y+z|)+f(|x|)+f(|y|) \end{aligned}$$

情形 $2c$: $z \le 0 \le y \le x$ 和 $y \le |z| \le x.$。对 $0 \le y \le x \le x+y$ 应用引理 3, 并注意到 f 非递减, 我们得到

$$\begin{aligned} &f(|x+y|)+f(|y+z|)+f(|z+x|)+f(0) \\ &\quad = f(x+y)+f(0)+f(|z|-y)+f(x-|z|) \\ &\quad \le f(x)+f(y)+f(|z|)+f(x+y+z) \\ &\quad = f(|x|)+f(|y|)+f(|z|)+f(|x+y+z|). \end{aligned}$$

情形 $2d$: $z \le 0 \le y \le x$ 和 $|z| \le y \le x.$。类似于情形 $2c$。对 $0 \le |z| \le x+y-|z| \le x+y$ 应用引理 3, 并利用 f 非递减这一事实, 我们得到

$$\begin{aligned} &f(|x+y|)+f(|y+z|)+f(|z+x|)+f(0) \\ &\quad = f(x+y)+f(0)+f(y-|z|)+f(x-|z|) \\ &\quad \le f(x+y-|z|)+f(|z|)+f(y-|z|)+f(x-|z|) \\ &\quad \le f(x+y+z)+f(|z|)+f(y)+f(x) \\ &\quad = f(|x|)+f(|y|)+f(|z|)+f(|x+y+z|). \end{aligned}$$

引理 5 的证明至此完成。 □

引理 5 对于非递减且非凹的 3-凸函数并不成立。为验证这一点, 考虑三次函数 x^3 to $[0,\infty)$ 的限制, 以及三元组 $x = y = 1$ and $z = -1$.

下面给出一些例子, 以说明定理 7 和推论 1 在伯恩斯坦函数 $x/(1+x)$、对数$(1+x)$ 以及 $[0,\infty)$ 的恒等函数这一情形下的应用:

(RHH) Hornich-Hlawka 不等式的有理形式,

$$\begin{aligned} &\frac{|x|^\alpha}{1+|x|^\alpha}+\frac{|y|^\alpha}{1+|y|^\alpha}+\frac{|z|^\alpha}{1+|z|^\alpha}+\frac{|x+y+z|^\alpha}{1+|x+y+z|^a} \\ &\qquad \ge \frac{|x+y|^a}{1+|x+y|^a}+\frac{|y+z|^a}{1+|y+z|^a}+\frac{|z+x|^a}{1+|z+x|^a}; \end{aligned}$$

(MHH) Hornich-Hlawka 不等式的乘法形式,

$$(1+|x|)(1+|y|)(1+|z|)(1+|x+y+z|) \geq (1+|x+y|)(1+|y+z|)(1+|z+x|);$$

(HH^{α}) Hornich-Hlawka 不等式的分数幂形式:

$$|x|^{\alpha}+|y|^{\alpha}+|z|^{\alpha}+|x+y+z|^{\alpha} \geq |x+y|^{\alpha}+|y+z|^{\alpha}+|z+x|^{\alpha}.$$

这里 $\alpha \in (0,1]$ 是一个参数。

对于多于 3 个数的情形，定理 7 的自然类似形式并不成立。事实上，根据 Freudenthal 在讨论 Hornich-Hlawka 不等式时所作的评论，函数

$$\sum_{i=1}^{4}|x_i|-\sum_{1\leq i<j\leq 4}|x_i+x_j|+\sum_{1\leq i<j<k\leq 4}|x_i+x_j+x_k|-|x_1+x_2+x_3+x_4|$$

当变量 x_1、...、x_4 遍历 $\mathbb{R}.$ 时，既取正值也取负值

然而，借助 Vasi´c 和 Adamovi´c [39] 提出的归纳方案，仍有可能将定理 7 推广到 $n>3$ 变量的情形。这里我们给出其结果的一个略作修改的版本，该版本见于 [19], 定理2，第528页:

定理 8. 设 φ 是定义在交换加法半群 $\mathcal{S}$ 上的实值函数，使得

$$\sum_{k=1}^{3}\varphi(x_k)+\varphi\left(\sum_{k=1}^{3}x_k\right)\geqslant\sum_{1\leq i<j\leq 3}\varphi(x_i+x_j)$$

对于所有 $x_1,x_2,x_3\in\mathcal{S}.$，那么对于满足 $2\leq k<n$ 的每一对整数 $\{k,n\}$，我们也有

$$\binom{n-2}{k-1}\sum_{k=1}^{n}\varphi(x_k)+\binom{n-2}{k-2}\varphi\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)\geqslant\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n}\varphi\left(\sum_{j=1}^{k}x_{i_j}\right),$$

只要 $x_1,...,x_n\in\mathcal{S}.$

该结果得出定理 7 的以下推广:

定理 9. 如果 $f:\mathbb{R}_+\to E$ 是一个连续的 3-凸函数，同时也是非递减且凹的，那么

$$\binom{n-2}{k-1}\sum_{k=1}^{n}f(|x_k|)+\binom{n-2}{k-2}f\left(\left|\sum_{k=1}^{n}x_k\right|\right)\geq\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n}f\left(\left|\sum_{j=1}^{k}x_{i_j}\right|\right)+\binom{n-1}{k}f(0),$$

对于所有满足 $2\leq k<n$ 的整数对 $\{k,n\}$，以及所有实数序列 $x_1,...,x_n$。

证明。将定理 8 应用于 $f(|\cdot|)-f(0)$，并考虑 7 的最后一个断言以及公式

$$\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-2}{k-2}=\binom{n-1}{k-1}.$$

□

7. The case of vector-valued functions

通过采用基于差商的相同定义，可以直接将 n-凸性这一概念推广到取值于有序巴拿赫空间的函数情形。

回顾一下，有序巴拿赫空间是指任意一个巴拿赫空间 E，其上赋予由闭凸锥 E_+ 通过公式 $\leq$ 所定义的序

$$x \leq y \text{ if and only if } y - x \in E_+,$$

使得

$$E = E_+ - E_+, \quad (-E_+) \cap E_+ = \{0\},$$

and

$$0 \leq x \leq y \text{ in } E \text{ implies } \|x\| \leq \|y\|.$$

关于有序巴拿赫空间理论的基本知识，可参阅 Schaefer 和 Wolff 的著作 [33]。另见 [21]，其中简要介绍了两个重要的特殊情形： $\mathbb{R}^n$，赋有按坐标排序的 n 维欧几里得空间；以及 $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$，由所有 $n \times n$ 维实系数对称矩阵构成、并赋予算子范数的有序巴拿赫空间

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle Ax, x\rangle|$$

以及 Löwner 序，

$$A \leq B \text{ if and only if } \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle \leq \langle B\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle \text{ for all } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

此处的算子范数可以替换为任意 Schatten 范数，尤其是 Frobenius 范数，

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{1/2},$$

前提是 $A = (a_{ij})_{i,\,j=1}^{n}$。Frobenius 范数与迹内积相对应

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{trace}(AB).$$

$\mathbb{R}^n$ 的正锥是第一象限 $\mathbb{R}^n_+$，而 $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ 的正锥是集合 $\mathrm{Sym}^+(n,\mathbb{R})$，由所有半正定矩阵组成。

注 9。向量值函数的研究可以归结为实值函数的研究。事实上，在任意有序巴拿赫空间 E 中，任何形如 $u \leq v$ 的不等式都等价于：对所有 $x^* \in E_+^*$， $x^*(u) \leq x^*(v)$。参见 [21]。

因此，函数 $f\colon I \to E$ 是非递减、凸或 n-凸的，当且仅当 $x^* \in E^*$ 是正泛函时， $x^* \circ f$ 具有相应性质。对于 $E = \mathbb{R}^n$，此注涉及 f 的各个分量。

注9很容易得出，前面各节的大多数结果都可以原样推广到向量值框架。特别是，定理2、命题1、定理 7、定理 4和定理 9也同样成立。

结合注释9与引理1，可以得到以下针对向量值可微函数的3-凸性实用判别方法：

定理10. 假设 f 是定义在区间 I 上且取值于有序巴拿赫空间 E 中的连续函数。如果 f 在 I 的内部三次可微，那么 f 是 3-凸函数，当且仅当 $f''' \geq 0$.

定理10的一个示例如下：函数

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R}), \quad f(t) = -e^{-tA},$$

与半正定矩阵 $A \in \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ 相关联。该函数属于 C^∞ 类，其前三阶导数的公式为

$$f'(t) = Ae^{-tA}, \quad f''(t) = -A^2 e^{-tA}, \quad f'''(t) = A^3 e^{-tA}.$$

这表明 f 是非递减、凹且 3-凸的（按照 $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ 的序）。 $A^3 e^{-tA}$ 是半正定的这一事实，源于彼此可交换的半正定矩阵之积仍是同类矩阵。

根据定理 7,

$$e^{-|r|A} + e^{-|s|A} + e^{-|t|A} + e^{-|r+s+t|A} \leq I + e^{-|r+s|A} + e^{-|s+t|A} + e^{-|t+r|A}$$

对所有 r、 s、 $t \in \mathbb{R}$. 均成立。这里 I 是恒等矩阵。在一维情形下，这可化为不等式

$$e^{-\alpha|x|} + e^{-\alpha|y|} + e^{-\alpha|z|} + e^{-\alpha|x+y+z|} \leq 1 + e^{-\alpha|x+y|} + e^{-\alpha|y+z|} + e^{-\alpha|x+z|},$$

它对所有 x、 y、 $z \in \mathbb{R}$ 和 $\alpha > 0$均成立。这个不等式还可以推广到实对称矩阵的框架中:

定理11. 假设 $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ 是一个连续的 3-凸函数，同时也是非递减且凹的。那么

$$\begin{aligned} f(|A|) + f(|B|) + f(|C|) + f(|A + B + C|) \\ \geq f(|A + B|) + f(|B + C|) + f(|C + A|) + f(0) I_n, \end{aligned}$$

只要 A、 B、 C 是三个阶数为 n 且彼此可交换的实对称矩阵，上述结论就成立。

这里 $|A| = \left(A^2\right)^{1/2}$ 表示 A 的模， I_n 是阶数为 n的单位矩阵。

证明。首先注意，任意有限个彼此可交换的自伴矩阵，都存在一组正交归一基，其向量是这些矩阵的共同特征向量。参见 Mirsky [18], 定理 10.6.8，第 322 页。这就将定理的证明化归为所有矩阵 A、 B 和 C 均为对角矩阵的情形。或者，如果

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1(A) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n(A) \end{pmatrix},$$

then

$$f(A) = \begin{pmatrix} f(\lambda_1(A)) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(\lambda_n(A)) \end{pmatrix},$$

因此，该定理的结论可由定理 7 得出。 □

注 10. 定理11 同样适用于定义在无限维希尔伯特空间上的可交换自伴紧算子，只要f: $[0,\infty) \to \mathbb{R}$是连续、非递减、凹、3-凸的，且 $f(0) = 0$.。我们不知道可交换性条件是否必要。

References

[1] G. Bennett, *Some forms of majorization*, 《休斯敦数学杂志》36（2010）, 1037-1066。[2] M. Bessenyei, Zs. P´ales, 《哈达玛不等式》的高阶推广, 《Publ. Math. Debrecen》61（2002）, 623–643。[3] M. Bessenyei 和 Zs. P ´ *Characterization of higher order monotonicity via integral in-* ales, , 《P. *equalities* **140** 2010 723 736 Roy. Soc. Edinb. A》, （）, -。[4] R.P. Boas, Jr., D.V. Widder, *Functions with positive differences*, 《Duke Math. J.》7（1940）, 496–503。[5] R. Bojani ´ *Approximation of convex functions by convex splines and convexity* c, J. Roulier, , 《 *preserving continuous linear operators* ´ ´ **3** 1975 143 Rev. Anal. Numer. Theor. Approx.》, （）, – 150。[6] Z. Brady, *Inequalities and higher order convexity*, arXiv预印本 arXiv:1108.5249, 2011。[7] P.S. Bullen, *A criterion for n–convexity*, 《Pacific J. Math.》36（1971）, 81–98。[8] P.S. Bullen, *An inequality of N. Levinson*, 《Publikacije Elektrotehni˘ckog fakulteta. Serija Matematika i fizika》412/460（1973）, 109-112。[9] M. Denuit, C. Lefevre, M. Shaked, *The s convex orders among real random variables with* -, , 《Math. *applications* **1** 1998 585 613 Inequal. Appl.》, （）, -。[10] L. Fej´er, *Über die Fourierreihen*, II, 《Math. Naturwiss. Anz Ungar. Akad. Wiss.》24（1906）, 369-390。[11] A. Florea, C. P. Niculescu, *A Hermite-Hadamard inequality for convex-concave symmetric functions* **50** 98 2007 2, 149 156 , 《Bull. Soc. Sci. Math. Roum.》, （）（）, 第 - 期。[12] S.G. Gal, *Shape Preserving Approximation by Real and Complex Polynomials*, Birkh¨auser, 波士顿, 2008。[13] E. Hopf, *Über die Zusammenhänge zwischen gewissen höheren Differenzenquotienten reeller Funktionen einer reellen Variablen und deren Differenzierbarkeitseigenschaften*, 博士论文, 柏林大学, 1926。[14] S. Khalid, –D. Pe˘cari´c, J. Pe˘cari´c, *On Zipf-Mandelbrot entropy and 3-convex functions*, 《Adv. Oper. Theory》4（2019）, 724 - 737。[15] S. Khalid, J. Pe˘cari ´ *3 convex functions and generalizations of an inequality of* c, M. Praljak, -, *Hardy-Littlewood-Pólya* **48** 2013 2, 335 356 《Glasnik matemati˘cki》（）第 - 期。[16] M. Kuczma, *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities: Cauchy's Equation and Jensen's Inequality* 2009 , Springer Science & Business Media, 。[17] D.-S ¸ *Some inequalities for convex and 3-convex functions with appli-* . Marinescu, M. *cations* **39** 2015 83 Monea, , 《Kragujevac Journal of Math.》, （）, – 91 [18] *Introduction to Linear Algebra* L. Mirsky, , 牛津大学出版社, 1955。[19] D.S. Mitrinovi´c, J.E. Pe˘cari´c, A.M. Fink, *Classical and new inequalities in analysis*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993。[20] C. P. Niculescu, *The Hermite-Hadamard inequality for convex functions of a vector variable*, 《Math. Inequal. Appl.》5（2002）, 619-623。[21] C.P. Niculescu, O. Olteanu, *From the Hahn-Banach extension theorem to the isotonicity of convex functions and the majorization theory*, 《西班牙皇家精确科学、物理与自然科学院杂志》（RACSAM）, A辑：数学, 114（2020）, 第4期, 1-19。[22] C. P. Niculescu 和 L.-E. Persson, 关于Hermite-Hadamard不等式的旧论与新说, 《Real Analysis Exchange》29（2003/2004）, 第2期, 663-685。[23] C.P. Niculescu, L.-E. Persson, *Convex Functions and their Applications A Contemporary* 。, 第版, CMS数学丛书第卷。Springer-Verlag, 纽约, *Approach* 2 **23**, 2018 [24] C.P. Niculescu, S. Sra, *The Hornich-Hlawka functional inequality for functions with positive differences* 2301 08342 , 预印本, arXiv:。v 1 [25] ´ J.E. Pe˘caric, F. Proschan, Y.L Tong, *Convex Functions Partial Orderings and Statistical* , , , 《科学与工程数学》第卷, Academic Press, Inc., 波士顿, 1992。 *Applications* 187,

[26] T. Popoviciu, *Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles*, 《Mathematica》（克卢日）8（1934），1-85。[27] T. Popoviciu, *Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur*, 《Mathematica》（克卢日）10（1935），49-54。[28] T. Popoviciu, *Les Fonctions Convexes*, Hermann Cie. Editeurs, 巴黎，1944。[29] T. Popoviciu, *On some inequalities*, 《Gaz. Mat. Bucure.sti》51（1946），81–85。（罗马尼亚语）[30] T. Popoviciu, *Sur une inegalité de N. Levinson*, 《Mathematica》（克卢日）6（1969），301–306。[31] T. Rajba, *On a generalization of a theorem of Levin and Steckin and inequalities of the Hermite-Hadamard type* **20** 2017 363 375 , 《Math. Inequal. Appl.》， （），-。[32] P. Ressel, *The Hornich–Hlawka inequality and Bernstein functions*, 《J. Math. Inequal.》9（2015），883-888。[33] H.H. Schaefer, M.P. Wolff, *Topological Vector Spaces*, 《Graduate Texts in Mathematics》第3卷，Springer Verlag，1966。[34] R.L. Schilling, R. Song, Z. Vondra˘cek, *Bernstein Functions。 Theory and Applications*, De Gruyter，柏林，2010。[35] S. Sherman, *On a theorem of Hardy, Littlewood, Pólya, and Blackwell*, 《美国国家科学院院刊》37（1951），826–831；勘误，见同刊38（1952），382。[36] H.S. Sendov, R. Zitikis, *The shape of the Borwein–Affleck–Girgensohn function generated by completely monotone and Bernstein functions* **160** 2014 67 89 , 《J. Optim. Theory Appl.》， （），-。[37] T. Szostok, *Inequalities of Hermite-Hadamard type for higher order convex functions revisited* **20** 2021 912 , , 《纯粹与应用分析通讯》（），第2期，903-。[38] Gh. Toader, Jessen不等式的一些推广, 《Anal. Numer. Theor. Approx.》16（1987），191–194。[39] P.M. Vasi´c, D.D. Adamovi´c, *Sur un système infini d'inégalités fonctionnelles*, 《Publ. Inst. Math. Nouv. S´er.》9（1969）（23），107–114。[40] Sz. Wasowicz, *Support type properties of convex functions of higher order and Hadamard type inequalities* **332** 2007 1229 1241 , 《J. Math. Anal. Appl.》， （），–。

National College "Iancu de Hunedoara", Hunedoara, Romania
Email address: marinescuds@gmail.com

Department of Mathematics, University of Craiova, Craiova 200585, Romania
Email address: constantin.p.niculescu@gmail.com