arXiv:2305.04354v1 [math-ph] 7 May 2023

通过量子化方法研究多解析 Ginibre 过程中粒子数的均值与方差

Zouha¨ır Mouayn[*]、Mohamed Mahboubi[♭] 和 Othmane El Moize[♭]

2023年5月9日

[*] *Department of Mathematics, Faculty of Sciences and Technics (M'Ghila), Sultan Moulay Slimane University, P.O. Box. 523, Béni Mellal, Morocco*

[♭] *Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Ibn Tofail University, P.O. Box. 133, Kénitra, Morocco*

摘要

我们讨论 Ginibre 型（多解析）指数为 $m \in \mathbb{Z}_+$ 的点过程下，复平面中以原点 $\mathbb{C}$ 为中心、半径为 $R > 0$ 的圆盘 D_R 内"点粒子" $\sharp_{D_R}$ 的数量的期望值和方差。我们通过一组广义谐振子相干态 $|z, m\rangle$，对 L^2 上的相空间 $\mathbb{C}$ 进行量子化（$\mathbb{R}$）。通过这一过程，表示集合 D_R（视为经典可观测量）示性函数 χ_{D_R} 的量子可观测量的谱，可用于计算 $\sharp_{D_R}$ 的期望值。 $\sharp_{D_R}$ 的方差则可由一个涉及 χ_{D_R}. 自卷积的量子可观测量的一个特殊特征值求得。采用相干态量子化方法，我们旨在识别 $\mathbb{C}$ 上的经典可观测量，其量子对应物可能通过谱性质编码 $\sharp_{D_R}$ 的前几个累积量。

1 引言

随机点过程可定义为点配置上的分布，它们已出现在许多不同领域（也可能继续在意想不到的地方涌现），例如统计力学、组合学、表示论和概率论。它们曾被用于对量子力学中的费米子、高斯解析函数的零点，以及随机矩阵理论中的经典 Ginibre 系综和圆酉系综进行建模；关于非相交随机游走和随机生成树中的相关例子，参见 [1,2]。它们还被用于机器学习 [3]，（此处状态空间是有限的），以及无线通信中对网络节点的位置进行建模 [4,5]。

刻画这些过程可以看作研究相互作用的"点粒子"系统。在这方面，Macchi [6] 引入了一种与时间无关的模型（称为费米子点过程），用于描述处于热平衡状态的费米子系统的统计分布。该模型具有这样的性质： $k-$点相关函数可表示为由相关核构成的行列式，这意味着粒子遵循泡利不相容原理。具有编码排斥性的核函数的这类点过程表现出超均匀性或刚性性质 [7]，，也就是说，给定区域内点的数量涨落小于具有相同强度的泊松点过程。预测大球内点数的大偏差渐近行为已成为一个备受关注的研究课题（例如参见 [8] ）；同时还需牢记一个基本的静电学事实：盒子内点数的方差应按表面积而非体积增长。

Ginibre 点过程尤其是首次在 [9] 中引入的，具体而言，它由一个元素服从标准复高斯分布的厄米矩阵的特征值构成（也称为高斯

酉系综 GUE）。它描述了温度为 $\beta = 2$ 时，谐势中的二维库仑气体所带电荷的位置。在这些特征值的极限下，会出现定义在 $\mathbb{C}$ 上的无限解析 Ginibre 过程，记作 $\mu_{\exp}$，它与 Fock-Bargmann 空间 $e^{z\overline{w}}$ 的再生核 $\mathcal{A}_0(\mathbb{C})$ 相关联；该空间由整复值函数构成，这些函数在 $e^{-|z|^2}d\nu-$上平方可积，$\mathbb{C}$，$d\nu$ 为 $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ 上的勒贝格测度。$\mu_{\exp}$ 源自二维单组分等离子体或均匀背景等离子体模型，在某个特殊温度下，该过程众所周知是精确可解的 [10]。

根据 [11], ，结果表明，空间 $\mathcal{A}_0(\mathbb{C})$ 与磁拉普拉斯算子 $\Delta_1 = -\partial\overline{\partial} + \overline{z}\overline{\partial}$ 对应于最低朗道能级 $m = 0$ 的特征空间重合。对应于高朗道能级 $m \in \mathbb{Z}_+$ 的特征空间 $\mathcal{A}_m(\mathbb{C}) := \{\varphi \in L^2(\mathbb{C}, e^{-|z|^2}d\nu);$ $\tilde{\Delta}_1\varphi = m\varphi\}$ 也具有显式的再生核。对于每个固定的 $m \in \mathbb{Z}_+$，Shirai [12] 研究了相关的行列式点过程（Ginibre 型），其关注的是随机变量 $\sharp_{D_R}$，该变量用于统计以 $\mathbb{C}$ 的原点为中心、半径为 $R > 0$ 的圆盘 D_R 内的点数。他证明了方差 $\mathbb{V}ar(\sharp_{D_R})$ 可以表示为一个涉及拉盖尔多项式的积分（见下文公式（3.8））， 并研究了其在 $R \to \infty.$ 时的渐近行为。Abreu 等人 [13] 也在所谓的无限 Weyl-Heisenberg 系综框架下讨论了这些 Ginibre 型过程的超均匀性。

在本文中，我们的目的是从相干态量子化的角度恢复 $\sharp_{D_R}$ 的期望值和方差。我们通过对量子化后的 χ_{D_R} 圆盘 D_R示性函数的量子对应算子形式的特征值求和，精确推导出 $\sharp_{D_R}$ 的期望值。为获得方差，我们实质上通过对 $\chi_{D_R}.$ 进行量子化/去量子化来处理其自卷积。关于这些相干态所进行的量子化属于 $L^2(\mathbb{R})$, 它们通过 Weyl-Heisenberg 群的薛定谔表示，将谐振子的一个由厄米函数给出的特征函数进行“ 按照佩雷洛莫夫方式”的位移而得到。通过从相干态的角度考察这一行列式点过程，我们旨在识别相空间 $\mathbb{C}$上与圆盘 D_R的几何结构相关联的经典可观测量，而其量子对应算子或许能够通过谱性质编码随机变量 $\sharp_{D_R}$的前几个累积量。

本文的组织结构如下。第 2 节简要回顾行列式点过程的形式体系。第 3 节介绍广义 Bargmann-Fock空间及其再生核，并概述 $\mathbb{C}$ 中的多解析 Ginibre 过程及其一些性质。第 4 节简要回顾标准相干态。第 5 节专门讨论通过附属于广义Bargmann-Fock空间的相干态对复平面进行显式量子化。第 6 节计算随机变量 $\sharp_{D_R}$的期望值和方差。

2 行列式点过程

我们简要回顾行列式点过程的一些基本概念；更多细节请参阅 [2]及其中的参考文献。

设 $\mathcal{E}$ 为单粒子空间，通常是可分豪斯多夫空间，$\mathcal{B}(\mathcal{E})$为拓扑博雷尔σ-域。我们在 $(\mathcal{E}, \mathcal{B}(\mathcal{E}))$ 上固定一个 Radon 测度 $\lambda(dx)$。设 X 为 $\mathcal{E}$中粒子可数构型组成的空间，通常将 X 称为构型空间。我们假设每个构型 $\xi :=(x_i),x_i \in \mathcal{E}, i \in \mathbb{Z}$ 或 $i \in \mathbb{Z}_+$ （若 $d > 1$）均局部有限，即对每个紧集 $K \subset \mathcal{E}$，K 中的粒子数有限。设 $B \subset \mathcal{E}$ 为博雷尔集，并定义 $\mathcal{B}$ 为由所有柱集 $C_\ell^B = \{\xi \in X$ 生成的 σ-代数：$\sharp_B(\xi) = \ell\}, \ell \in \mathbb{Z}_+$。我们称三元组 $(X, \mathcal{B}, P_r)$ 为随机点过程（RPP），其中 P_r 是定义在 $(X, \mathcal{B})$ 上的概率测度；该过程可由其相关函数描述。

记 $\mathcal{E}^k = \mathcal{E} \times \mathcal{E} \times ... \times \mathcal{E}$，若局部可积函数 $\rho_k : \mathcal{E}^k \to \mathbb{R}_+$ 满足以下条件，则称其为该 RPP 的 $k-$点相关函数：对于任意有界的两两不相交 Borel 子集 $A_1, ..., A_n$，它们属于 $\mathcal{E}$，且对于

对于每个多重指标 $(k_1, ..., k_n) \in (\mathbb{Z}_+)^n$， $k_1 + ... + k_n = k$ 以下公式成立。

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{(\sharp A_i)!}{(\sharp A_i - k_i)!}\right) = \int_{A_1^{k_1} \times ... \times A_n^{kn}} \rho_k(x_1, ..., x_k)\lambda^{\otimes}(dx_1...dx_k) \tag{2.1}$$

其中 $\mathbb{E}$ 是关于 P_r的数学期望。由相关函数定义的 RPP 的存在性和唯一性问题在[14, 15]中进行了研究。当随机变量 $\sharp_A$ 表示有界博雷尔集 A 内粒子数时，其分布由其矩唯一确定。

具有核 $K(x, y)$ 的行列式点过程（或费米子点过程）（DPP）是满足以下条件的 RPP：其 $\mathcal{E}$ 第k阶点相关函数为

$$\rho_k(x_1, ..., x_k)dx_1...dx_k = \det(K(x_i, x_j))_{1\le i,j\le k}\lambda^{\otimes}(dx_1...dx_k). \tag{2.2}$$

现在令 $\mathfrak{K}$为作用在 $L^2(\mathcal{E}, \lambda(dx))$ 上、核为 $K(x, y)$ 的自伴积分算子，并假设$Spec(\mathfrak{K}) \subset [0, 1]$ 且 $\mathfrak{K}$ 是局部迹类，则存在唯一一个与核 K和 $\lambda(dx)$ 相关联的行列式点过程，使其 k点相关函数由 (2.2) 给出。对于 $D \subset \mathcal{E}$ 相对紧的情形，该行列式点过程中的随机变量 $\sharp_D$与相互独立的伯努利随机变量 $(\lambda_i^D)_i$之和具有相同的分布，其中 λ_i^D是算子 $\mathfrak{K}$在 D 上的限制的特征值。$\sharp_D$ 的期望值为

$$\mathbb{E}(\sharp_D) = \int_{\mathcal{D}} K(x, x)\lambda(dx) \tag{2.3}$$

及其方差

$$\mathbb{V}ar(\sharp_D) = \int_{\mathcal{D}} \lambda(dx) \int_{\mathcal{E}\setminus\mathcal{D}} \lambda(dy) |K(x, y)|^2 . \tag{2.4}$$

3 Ginibre型过程

3.1 广义Bargmann-Fock空间 $\mathcal{A}_m(\mathbb{C})$

在 $\mathbb{R}^2$ 中运动的带电粒子处于强度与 $B > 0$成正比的恒定均匀磁场中，其运动可由薛定谔算子（在适当单位制下）描述:

$$H_B := -\frac{1}{4}\left((\partial_x + iBy)^2 + (\partial_y - iBx)^2\right) - \frac{1}{2} \tag{3.1}$$

定义在 $L^2(\mathbb{R}^2, d\nu)$上。按通常方式将 $\mathbb{R}^2$ 与 $\mathbb{C}$ 对应，并令 $d\lambda(z) = e^{-|z|^2}d\nu(z)$，则借助酉映射 Q： $L^2(\mathbb{C}, d\nu) \longrightarrow L^2(\mathbb{C}, d\lambda)$，其定义为 $Q[\phi](z) := e^{\frac{1}{2}B|z|^2}\phi(z)$，可以将算子(3.1)交织为 $e^{\frac{1}{2}B|z|^2}H_B e^{-\frac{1}{2}B|z|^2} = \tilde{\Delta}_B$。取 $B = 1$，并考虑称为磁拉普拉斯算子的算子

$$\tilde{\Delta}_1 := -\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}} + \bar{z}\frac{\partial}{\partial\bar{z}} \tag{3.2}$$

在 $L^2(\mathbb{C}, d\lambda)$ 上。谱 $\tilde{\Delta}_1$ 由具有无限重数的特征值（欧几里得朗道能级）组成，形式为 $m \in \mathbb{Z}_+$. 在 [11] 广义Bargmann-Fock空间已作为.....的特征空间引入Δ_1 作为

$$\mathcal{A}_m(\mathbb{C}) := \{\varphi \in L^2(\mathbb{C}, d\lambda);\ \tilde{\Delta}_1\varphi = m\varphi\}. \tag{3.3}$$

˜实际上，对于 $m = 0$， $\mathcal{A}_0(\mathbb{C})$ 最终被证明是相对于 Δ_1 由调和函数实现的 Bargmann-Fock空间，其元素是在 $L^2(\mathbb{C}, d\lambda)$ 中的整函数。对于 $m \ge 0$， $\mathcal{A}_m(\mathbb{C})$ 则

最终被证明是由两个相邻的 m-多解析函数空间 $\mathfrak{F}_m(\mathbb{C}) \ominus \mathfrak{F}_{m-1}(\mathbb{C})$ 之间的正交差构成的真-m-多解析函数空间

$$\mathfrak{F}_m(\mathbb{C}) := \left\{ g \in L^2(\mathbb{C}, d\lambda), \ \ \overline{\partial}^m g = 0 \right\}. \tag{3.4}$$

特征空间（3.3）在 L^2（$\mathbb{C}$, $d\lambda$）中两两正交，该空间分解为 $\bigoplus_{m=0}^{+\infty} \mathcal{A}_m$（$\mathbb{C}$）。此外，特征空间（3.3）的再生核为

$$\widetilde{K}_m(z,w) = \pi^{-1} e^{z\overline{w}} L_m^{(0)}(|z-w|^2) \tag{3.5}$$

它可以被传回希尔伯特空间 L^2（$\mathbb{C}$, $d\nu$）中，此时核（3.5）变为

$$K_m(z,w) = \pi^{-1} e^{-\frac{1}{2}z\overline{z}} \widetilde{K}_m(z,w) e^{-\frac{1}{2}w\overline{w}} = \left(e^{z\bar{w} - \frac{1}{2}z\overline{z} - \frac{1}{2}w\overline{w}} \right) L_m^{(0)}(|z-w|^2), \ z,w \in \mathbb{C} \tag{3.6}$$

其中 $L_m^{(\alpha)}(\cdot)$ 是拉盖尔多项式（[16], 第239页）。

3.2 行列式点过程 $\mu_{K_m,\ d\nu}$

根据[12],，我们回顾以下事实。设 $m \in \mathbb{Z}_+$ 和 $\mathfrak{K}_m$ 是定义在$L^2(\mathbb{C}, d\nu)$上的投影算子，其积分核见（3.6）。与（$\mathfrak{K}_m, d\nu$）相关联的行列式点过程是定义在 $\mathbb{C}$ 上的、指标为 m的 Ginibre 型点过程，记为 $\mu_{K_m,d\nu}$，也称为多解析 Ginibre 点过程。注意，$\mu_{K_m,d\nu}$ 与 $\mu_{\widetilde{K}_m,d\lambda}$ 相同，并且具有平移不变性和旋转不变性。根据（2.3），一阶强度函数 $\rho_1(z) = K_m(z,z) = \pi^{-1}$ 给出了圆盘 $D_R = \{\xi \in \mathbb{C}, |\xi| < R\}$ 内的粒子期望数

$$\mathbb{E}_{\mu_{K_m,d\nu}}(\sharp_{D_R}) = \int_{D_R} \pi^{-1} d\nu(z) = R^2. \tag{3.7}$$

然而，根据（2.4），方差为

$$\mathbb{V}ar_{\mu_{K_m,d\nu}}(\sharp_{D_R}) = \frac{R}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-t} \left(L_m^{(0)}(t) \right)^2 \left(\int_0^{t\wedge 4R^2} \left(1 - \frac{x}{4R^2} \right)^{1/2} x^{-1/2} dx \right) dt \tag{3.8}$$

其表现为 $C_m R$，其形式为 $R \to +\infty$。该常数

$$C_m = \frac{2}{\pi m!} \Gamma\left(m + \frac{3}{2} \right) {}_3F_2\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, m; 1, -\frac{1}{2} - m; 1 \right) \sim \frac{8}{\pi^2} \sqrt{m} \tag{3.9}$$

在 $m \to +\infty$（处于极高朗道能级时）。

在 [17], Demni 和 Lazag 通过将其重写为以下形式，为（4.2）引入了一个几何视角。

$$Var_{\mu_{K_m,d\nu}}(\xi(D_R)) = \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{C}} e^{-|z|^2} \left(L_m^{(0)}(|z|^2) \right)^2 \left[Area\left(D_R^c \cap D_R(z) \right) \right] d\nu(z) \tag{3.10}$$

其中，$D_R(z)$ 是以 z 为中心、半径为 R 的圆盘，而 D_R^c 表示 $\mathbb{C}$ 中 D_R. 的补集。如果$|z| \geq 2R$，则 $Area(D_R^c \cap D_R(z)) = \pi R^2$，因为 $D_R(z) \subset D_R^c$.。否则，如果 $|z| < 2R$，则 $D_R^c \cap D_R(z)$ 是 $D_R(z)$ 中圆盘 D_R 与 $D_R(z)$ 的重叠区域的补集。

注 3.1. 对于 $|z| \leq 2R$，我们也可以写作 $[Area(D_R^c \cap D_R(z))] / \pi R^2 = 1 - \alpha_R(|z|)$，其中

$$\alpha_R(r) := \frac{4}{\pi} \int_0^{\arccos\left(\frac{1}{2R}r\right)} \sin^2\theta d\theta, \quad r = |z|, \tag{3.10}$$

是众所周知的 缩放交叠面积，对应直径为 $2R$. 它是两个圆盘的交集面积，每个圆盘的半径为 R，且两圆盘中心之间的距离为 $|z|$。已知当$R=2\sqrt{\pi}$时，径向函数 $\widehat{\alpha}_{2\sqrt{\pi}}$ 的傅里叶变换 $\alpha_{2\sqrt{\pi}}$ 生成一个平移不变行列式点过程，其核以贝塞尔函数 J_1表示，称为 费米圆 点过程，定义于 $\mathbb{R}^2$.更多详情请参阅 [7]，作者在此从解析角度给出了 $\mathbb{R}^n$ 上唯一点过程的推广 $\mathbb{R}$，通过该点过程可以映射随机矩阵、费米气体以及黎曼ζ函数零点的某些性质。

4 相干态

相干态（CS）最初由 E. Schr¨odinger [18] 引入，旨在获得L^2(ℝ)中的量子态，使其遵循与谐振子哈密顿量相关的经典流

$$\hat{H}=-\frac{\hbar}{2}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}. \tag{4.1}$$

也就是说，它们是状态 $|z\rangle\in L^2$(ℝ)，由 ℝ上运动粒子的相空间 $z\in\mathbb{C}\simeq T^*\mathbb{R}$ 中的元素标记，其定义如下：

$$\langle x\,|z\rangle=\left(e^{z\overline{z}}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{(\pi\hbar)^4}\left(-\frac{1}{2\hbar}(\overline{z}^2+x^2-2\sqrt{2}\overline{z}x)\right),\quad x\in\mathbb{R}, \tag{4.2}$$

$\hbar$ 是普朗克参数（取 $\hbar=1$）。它们最重要的性质是恒等算子分解

$$\mathbf{1}_{L^2(\mathbb{R})}=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}d\nu(z)\,|z\rangle\,\langle z|\,. \tag{4.3}$$

性质（4.3）在经典力学与量子力学之间架起了桥梁：作用于 L^2(ℝ) 的每个算子，或其中的任意向量，都可以在相空间 ℂ上展开。复平面上的 Klauder-Berezin-Toeplitz（或“反 Wick”）量子化，在此称为相干态量子化，其做法是将函数 $z\mapsto F(z,\overline{z})$（具有特定性质）与算子 P_F 对应，该算子属于 L^2(ℝ)，定义如下：

$$F\mapsto P_F:=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}d\nu(z)F(z,\overline{z})\,|z\rangle\,\langle z|\,. \tag{4.4}$$

算子值积分（4.4）是指半双线性型

$$\mathcal{S}_F(\phi_1,\phi_2)=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}d\nu(z)F(z,\overline{z})\,\langle\phi_1\,|z\rangle\,\langle z|\,\phi_2\rangle \tag{4.5}$$

型 $\mathcal{S}_F$ 假定定义在 L^2(ℝ) 的一个稠密子空间上。若 F 取实值且至少是半有界的，则弗里德里希扩张（ [19], 第 II 卷，定理 X.23） $\mathcal{S}_F$ 允许将 P_F 定义为一个自伴算子。该函数是 P_F的上（或逆变）符号，而后者在态 $|z\rangle$中的期望值，

$$z\mapsto\langle z\,|P_F|\,z\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}d\nu(w)F(w,\overline{w})\,|\langle z\,|w\rangle|^2=\mathcal{B}[F](z) \tag{4.6}$$

是算子 P_F.的下（或协变）符号。映射 $F\mapsto\mathcal{B}[F]$ 推广了 Berezin变换。根据 [20],，函数 $D\ni z\mapsto F(z,\overline{z})$ 定义在某个区域上$D\subseteq\mathbb{C}$，可通过映射（4.6）被视为“可量子化经典可观测量”的一种可能判据是 $z\mapsto\mathcal{B}[F](z)$ 关于（ C^∞ 在 D上）是光滑的（即 $q,\ p)\ \equiv\frac{1}{2}(q+ip)=z$. 关于相干态量子化的更多细节，请参阅 [21–24]。

5 通过相干态进行量子化 $|z,m\rangle$

海森堡群 $\mathbb{H}_1$（1 阶）是一个李群，其底层流形为 $\mathbb{C}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^3$，坐标为（$x$，$y$，$t$），群运算为（$x$，$y$，$t$）。（$x'$，$y'$，$s$）$=$（$x+x'$，$y+y'$，$t+s+\frac{1}{2}$（$xy^{'}-x'y$））。$\mathbb{H}_1$ 的连续酉不可约表示（UIR）已广为人知（[25], , 第 37 页）。

这里，我们关注由移位算子和乘法算子（[26], §1.1）定义的 $\mathbb{H}_1$ 在希尔伯特空间 $L^2(\mathbb{R})$ 上的 UIR，其形式如下：

$$T_\tau(x,y,t)\left[\psi\right](\xi):=\exp i\left(\tau t-\sqrt{\tau}y\xi+\frac{\tau}{2}xy\right)\psi\left(\xi-\sqrt{\tau}x\right),\xi\in\mathbb{R} \tag{5.1}$$

对于 $(x,y,t)\in\mathbb{H}_1$, $\tau>0$ 和 $\psi\in L^2(\mathbb{R})$，称为薛定谔表示。该表示模去 $\mathbb{H}_1$ 的中心 $\mathbb{R}$ 后平方可积，而 $\mathbb{H}_1$ 在 $\mathbb{R}\equiv\mathbb{H}_1/\mathbb{R}$ 上的博雷尔截面 σ_0 定义为 $\sigma_0(x,y)=(x,y,0)$。此外，根据 [27]，存在一个定义在 $L^2(\mathbb{R})$ 中的自伴正半不变算子 δ，使得

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2}\langle\psi_1,T_\tau(\sigma_0(x,y))\left[\phi_1\right]\rangle\langle T_\tau(\sigma_0(x,y))\left[\phi_2\right],\psi_2\rangle\,d\mu(x,y)=\langle\psi_1,\psi_2\rangle\left\langle\delta^{\frac{1}{2}}\phi_1,\delta^{\frac{1}{2}}\phi_2\right\rangle \tag{5.2}$$

对所有 $\psi_1,\psi_2\in L^2(\mathbb{R},d\xi)$ 和 $\phi_1,\phi_2\in Dom\left(\delta^{\frac{1}{2}}\right).$，这里的群 $\mathbb{H}_1$ 是幺模的，因此 δ 必须是恒等算子 [28]。薛定谔表示 T_τ 与自旋 1 2 表示及磁场之间的联系可见 [29]。

现在，根据[30], , 相干态以“佩雷洛莫夫方式” [31] 作为酉算子 T_τ作用于谐振子特征函数 $\phi_m\in L^2(\mathbb{R})$ 上的轨道得到，其对应于式（H 4.1）中的特征值$m\in\mathbb{Z}_+$，具体形式为

$$\phi_m(\xi):=\left(\sqrt{\pi}2^m m!\right)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}\xi^2}H_m(\xi),\qquad\xi\in\mathbb{R}, \tag{5.3}$$

其中，H_m 是厄米多项式（[16], 第249页），并且

$$|(x,y),\tau,m\rangle:=T_\tau(\sigma_0(x,y))[\phi_m]. \tag{5.4}$$

令 $z\equiv x+iy$ 且 $\tau=2$，态（5.4）的波函数为

$$\langle\xi\,|z,m\rangle=(-1)^m\left(\sqrt{\pi}2^m m!\right)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}\overline{z}^2+\sqrt{2}\xi\overline{z}-\frac{1}{2}|z|^2-\frac{1}{2}\xi^2}H_m\left(\xi-\frac{z+\overline{z}}{\sqrt{2}}\right). \tag{5.5}$$

这些相干态的合理性完全基于5.2）的平方可积性 T_τ 模去子群 $\mathbb{R}$ 以及截面 σ_0，由此得到恒等算子分解

$$\mathbf{1}_{L^2(\mathbb{R})}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{C}}d\nu(z)\,|z,m\rangle\langle z,m|\,. \tag{5.6}$$

对于正则相干态 $|z\rangle\equiv|z,\ 0\rangle$，式（5.6）可用于对参数集合 $z\in\mathbb{C}$ 进行相干态量子化：将函数 $\mathbb{C}\ni z\mapsto F(z,\overline{z})\in\mathbb{R}$ 关联到 $L^2(\mathbb{R})$ 上的算子：

$$F\longmapsto P_F:=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{C}}d\nu(z)\,|z,m\rangle\langle z,m|\,F(z,\overline{z})\,. \tag{5.7}$$

我们可以证明（附录A）：P_F 相对于由 $|j\rangle\equiv\phi_j$ 给出的正交归一基（5.3），具有如下离散分解：

$$P_F=\sum_{j,k=0}^{+\infty}\mathfrak{a}^F_{j,k}\,|j\rangle\langle k| \tag{5.8}$$

借助矩阵元

$$\mathfrak{a}_{j,k}^{F}=c_{j,k}^{(m)}\int_{\mathbb{C}}e^{-|z|^{2}}|z|^{|k-m|+|j-m|}e^{i(j-k)\arg z}L_{m\wedge j}^{(|j-m|)}(|z|^{2})L_{m\wedge k}^{(|k-m|)}(|z|^{2})F(z)d\nu(z),\tag{5.9}$$

其中

$$c_{j,k}^{(m)}:=\frac{1}{\pi m!\sqrt{j!k!}}(-1)^{m\wedge j+m\wedge k}(m\wedge k)!(m\wedge j)!.\tag{5.10}$$

特别地，当 F 是一个径向函数，即 $F(z)=\phi(r)\ \ r=|z|$时，我们可以使用极坐标将（5.9）改写为

$$\mathfrak{a}_{j,k}^{F}=c_{j,k}^{(m)}\int_{0}^{\infty}e^{-r^{2}}r^{|k-m|+|j-m|}L_{m\wedge j}^{(|j-m|)}(r^{2})L_{m\wedge k}^{(|k-m|)}(r^{2})\phi\left(r\right)rdr\int_{0}^{2\pi}e^{i(j-k)\theta}d\theta.\tag{5.11}$$

由（5.11）可知，只有对应于 $j=k$ 的系数非零，这就意味着 P_F 的特征值具有如下形式

$$\lambda_{k}^{F}:=\mathfrak{a}_{k,k}^{F}=\frac{(m\wedge k)!}{(m\vee k)!}\int_{0}^{\infty}e^{-\rho}\rho^{|k-m|}\left(L_{m\wedge k}^{(|k-m|)}(\rho)\right)^{2}\phi(\sqrt{\rho})d\rho\tag{5.12}$$

由此得到（5.8）的如下简化形式:

$$P_{F}=\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda_{k}^{F}\left|k\right\rangle\left\langle k\right|.\tag{5.13}$$

此外，不难看出 $P_F\left|k\right\rangle=\lambda_{k}^{F}\left|k\right\rangle$，这意味着厄米函数（5.3）是 P_F的特征函数。后者还可以通过相干态变换 $\mathcal{W}_m$： $L^2(\mathbb{R})\longrightarrow\mathcal{A}_m(\mathbb{C})$ 进行酉交织，其中该变换定义为 [30]：

$$\mathcal{W}_{m}[\phi](z)=(-1)^{m}(2^{m}m!\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}\overline{z}^{2}}\int_{\mathbb{R}}\phi(\xi)e^{\sqrt{2}\xi\overline{z}-\frac{1}{2}\xi^{2}}H_{m}\left(\xi-\frac{z+\overline{z}}{\sqrt{2}}\right)d\xi,\tag{5.14}$$

在 m-真多重解析空间 $\mathcal{A}_m(\mathbb{C})$ 上充当 $\widetilde{P}_F=\mathcal{W}_m\circ P_F\circ\mathcal{W}_m^{-1}$。若 $F\equiv\chi_{D_R}$ 圆盘 D_R的~示性函数 P_F，则该算子就是浓缩算子。也就是说，将 $L^2(\mathbb{C},d\lambda)$ 上、核为 (3.5) 中的 $\widetilde{K}_m(z,w)$ 的积分算子 $\tilde{\mathfrak{K}}_m$限制在圆盘 D_R 上；该核是 $\mathcal{A}_m(\mathbb{C})$ 的再生核。

6 $\sharp_{D_R}$ 的期望值和方差

这里我们将讨论两个函数：(i) 圆盘 D_R 的示性函数 $F_R\equiv\chi_{D_R}$，以及 (ii) 函数

$$G_{R}\left(z,\overline{z}\right)\equiv Area\left(D_{R}^{c}\cap D_{R}\left(z\right)\right)=\begin{cases}\pi R^{2} & ,|z|>2R\\ \pi R^{2}-2R^{2}\arccos(\frac{1}{2R}\left|z\right|)+\frac{1}{2}\left|z\right|\sqrt{4R^{2}-\left|z\right|^{2}} & ,|z|\leq2R\end{cases}\tag{6.1}$$

这些函数都将被视为相空间上的可量子化经典可观测量 $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$，以推导其量子对应可观测量的一些谱性质；这些可观测量是作用于 L^2（$\mathbb{R}$）上的（本质）自伴算子，通过应用相干态量子化映射（5.7）得到。

6.1 $\sharp_{D_R}$ 的期望值

对于 $F_R \equiv \chi_{D_R}$，特征值（5.12）具有以下形式（见附录 B）：

$$\beta_k^{(m,R)} = \sum_{j=0}^{2(m\wedge k)} \mathfrak{a}_j^{(m,k)} \gamma\left(|k-m|+j+1, R^2\right) \tag{6.2}$$

其中

$$\mathfrak{a}_j^{(m,k)} = m!k!\,(-1)^j \sum_{\ell=0}^{j} \frac{1}{\ell!\,(j-\ell)!\,(m\wedge k-j+\ell)!\,(m\wedge k-\ell)!\,(|k-m|+j-\ell)!\,(|k-m|+\ell)!} \tag{6.3}$$

and

$$\gamma(\alpha,\tau) = \int_0^{\tau} t^{\alpha-1}e^{-t}dt, \quad \operatorname{Re}\alpha > 0 \tag{6.4}$$

表示不完全伽马函数（ [16], 第 337 页）。

对于行列式点过程 $\mu_{K_m,\,d\nu}$ 落在圆盘 D_R 内的点数 $\sharp_{D_R}$，其分布与独立伯努利随机变量之和（ $\beta_k^{(m,R)}$ ）$_{k\geq 0}$相同。通过直接计算（见附录 C）可得期望值

$$\mathbb{E}\left(\sharp_{D_R}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k^{(m,R)} = R^2 \tag{6.5}$$

正如预期的那样。

注 6.1。 注意，当 $m=0$ 时，特征值（6.2）化简为

$$\beta_k^{(0,R)} = \frac{1}{k!}\gamma\left(k+1, R^2\right) \tag{6.6}$$

由此，我们可以在相差一个缩放因子的意义下，重新得到 $R \to \frac{1}{\sqrt{2}}R$，Daubechies 的结果（ [32], 第 610 页）。

6.2 $\sharp_{D_R}$的方差

一方面，我们可以通过 CS $|z,m\rangle$，将上述量子化方案应用于函数 G_R （将其视为径向权函数），从而构造离散谱分解

$$P_G = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k^{(m,R)} |k\rangle\langle k| \tag{6.7}$$

对于相应的算子 P_G。事实上，直接计算（见附录 D）可得特征值

$$\lambda_k^{(m,R)} = (\pi R)^2 - \frac{m!\pi^{3/2}(2R)^{2(k-m)+4}\Gamma((k-m)+\frac{3}{2})}{4\Gamma(2(k-m)+1)\Gamma((k-m)+2)k!(k-m+2)(k-m+1)}$$
$$\times \sum_{s=0}^{2m} A_s^{(m,k)}\ {}_3F_3\left(\begin{matrix}2(k-m)+s+1, (k-m)+\frac{3}{2}, (k-m)+1 \\ 2(k-m)+1, (k-m)+2, (k-m)+3\end{matrix}; -4R^2\right) \tag{6.8}$$

with

$$A_s^{(m,k)} := \frac{(-1)^s(2(k-m)+s)!}{s!} \sum_{r=0}^{s} \binom{s}{r}\binom{k}{m-s+r}\binom{k}{m-r}, \qquad k \geq m.$$

接下来， $\sharp_{D_R}$ 统计圆盘 D_R 内点的数量所得的方差，可以表示为相对于 CS 集合 $|w、\ m\rangle$ 对 P_R 的“去量子化”，即

$$\mathbb{V}ar(\sharp_{D_R}) = \langle w, m \left| P_R \right| w, m\rangle \ \ |_{w=0} \tag{6.9}$$

即贝雷津（Berezin） 的变换 G_R 在点 $w=0$处的取值。因此，将（6.7）代入（6.9），我们

$$\mathbb{V}ar(\sharp_{D_R}) = \langle 0, m \left| \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k^{(m,R)} \left| k \right\rangle \left\langle k \right| \right| 0, m\rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k^{(m,R)} \left(R \right) \langle m \left| k \right\rangle \left\langle k \right| m\rangle = \lambda_m^{(m,R)} \tag{6.10}$$

因此，将 $k=m$ 代入（6.8），我们得到

$$\mathbb{V}ar(\sharp_{D_R}) = R^2 \left[1 - R^2 \sum_{s=0}^{m} (-1)^s \begin{pmatrix} m \\ s \end{pmatrix} {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -m, -s, -s \\ 1, m-s+1 \end{matrix}; -1 \right) \ {}_2F_2 \left(\begin{matrix} s+1, \frac{3}{2} \\ 3, 2 \end{matrix}; -4R^2 \right) \right]. \tag{6.11}$$

对于第一个朗道能级 $m=0$，式（6.11）化简为

$$\mathbb{V}ar(\sharp_{D_R}) = R^2 \left[1 - R^2 \ {}_2F_2 \left(\begin{matrix} 1, \frac{3}{2} \\ 3, 2 \end{matrix}; -4R^2 \right) \right]. \tag{6.12}$$

通过应用恒等式（ [33], 第589页）：

$${}_2F_2 \left(\begin{matrix} 1, \frac{3}{2} \\ 3, 2 \end{matrix}; -4R^2 \right) = R^{-2} \left[1 - e^{-2R^2} \left(I_0(-2R^2) - I_1(-2R^2) \right) \right] \tag{6.13}$$

用修正贝塞尔函数表示 I_0 和 I_1，式（6.12）也可写为

$$\mathbb{V}ar(\sharp_{D_R}) = R^2 e^{-2R^2} \left(I_0(2R^2) + I_1(2R^2) \right) \tag{6.14}$$

这与 Osada 和 Shirai 的结果一致，对应于（无限）Ginibre 过程（ [34],第 2 页）。

附录A

为了　　证明（5.8），我们需要证明由（ P_F 5.7）定义的算子满足

$$\langle P_F[\phi_j], \phi_k \rangle = \mathfrak{a}_{j,k}^F \tag{A1}$$

其中 $\mathfrak{a}_j^F$, k 是由（5.9）给出的系数。这里 $\{\phi_j\}$ 是（5.3）中定义的厄米特函数基向量。为此，我们可以使用 CS $|z,\ m\rangle$ （ [30], 第 4 页）：

$$|z, m\rangle = \left(e^{|z|^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{j \geq 0} \frac{(-1)^m}{\sqrt{\pi m! j!}} m! |z|^{(j-m)} e^{i(m-j)\arg z} L_m^{j-m} \left(|z|^2 \right) \phi_j \tag{A2}$$

将上述系数写为

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_{j,k}^F &= \left\langle \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} |z, m\rangle\langle z, m| F(z, \bar{z}) d\nu(z) [\phi_j], \phi_k \right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \left\langle \phi_j | z, m \right\rangle \left\langle z, m | \phi_k \right\rangle F(z, \bar{z}) d\nu(z) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \frac{m!}{\sqrt{j!k!}} \int_{\mathbb{C}} |z|^{(j+k-2m)} e^{-|z|^2} e^{i(j-k)\arg z} L_m^{(j-m)} \left(|z|^2 \right) L_m^{(k-m)} \left(|z|^2 \right) F(z, \bar{z}) d\nu(z) \tag{A3}$$

从而完成了附录A的证明。 □

附录 B

对于 $F=\chi_{D_R}$ 圆盘的示性函数 D_R，特征值（5.12）的形式为

$$\beta_k^{(m,R)}=\frac{(m\wedge k)!}{(m\vee k)!}\int_0^{R^2}e^{-\rho}\rho^{|k-m|}\left(L_{m\wedge k}^{(|k-m|)}(\rho)\right)^2d\rho. \tag{B1}$$

利用 Feldheim 公式（ [35], 式 1.13）：

$$L_q^{(\alpha)}(x)\,L_p^{(\alpha)}(x)=\sum_{j=0}^{q+p}(-1)^j\,A_j^{(q,p,\alpha)}\frac{x^j}{j!} \tag{B2}$$

其中

$$A_j^{(q,p,\alpha)}=\sum_{\ell=0}^{j}\left(\begin{array}{c}j\\ \ell\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}q+\alpha\\ q-j+\ell\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}p+\alpha\\ p-\ell\end{array}\right) \tag{B3}$$

对于参数 $p=q=m\wedge k$、 $\alpha=|k-m|$ 和 $x=\rho$，于是可以写成

$$\frac{(m\wedge k)!}{(m\vee k)!}\left(L_{m\wedge k}^{(|k-m|)}(\rho)\right)^2=\sum_{j=0}^{2(m\wedge k)}\mathfrak{a}_j^{(m,k)}\rho^j. \tag{B4}$$

将（B4）代入（B1），得到

$$\beta_k^{(m,R)}=\sum_{j=0}^{2(m\wedge k)}\mathfrak{a}_j^{(m,k)}\int_0^{R^2}e^{-\rho}\rho^{|k-m|+j}d\rho=\sum_{j=0}^{2(m\wedge k)}\mathfrak{a}_j^{(m,k)}\gamma\left(|k-m|+j-1,R^2\right) \tag{B5}$$

正如（6.2）中所述。 □

附录 C

随机变量 $\sharp_{D_R}$ 的分布与参数为 $0<\beta_k^{(m,R)}<1$、 $k\geq 0$的相互独立的伯努利随机变量之和具有相同的分布。因此， $\sharp_{D_R}$ 的期望由下列求和给出

$$\mathbb{E}\left(\sharp_{D_R}\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\beta_k^{(m,R)}=\sum_{k\geqslant 0}\frac{(m\wedge k)!}{(m\vee k)!}\int_0^{R^2}e^{-\rho}\rho^{|k-m|}\left(L_{m\wedge k}^{|k-m|}(\rho)\right)^2d\rho. \tag{C1}$$

固定整数 m 后，我们可以将级数写为

$$\mathfrak{S}_m(\rho)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(m\wedge k)!}{(m\vee k)!}\rho^{|k-m|}\left(L_{m\wedge k}^{|k-m|}(\rho)\right)^2 \tag{C2}$$

如 $S_{<\infty}(m,\rho)+S_{\infty}(m,\rho)$，其中

$$S_{<\infty}(m,\rho)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{k!}{m!}\rho^{m-k}\left(L_k^{m-k}(\rho)\right)^2-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{m!}{k!}\rho^{k-m}\left(L_m^{k-m}(\rho)\right)^2 \tag{C3}$$

and

$$S_{\infty}(m,\rho)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{m!}{k!}\rho^{k-m}\left(L_m^{k-m}(\rho)\right)^2. \tag{C4}$$

利用恒等式（ [36], 第 98 页）：

$$L_m^{(k-m)}(\rho) = (-\rho)^{m-k}\frac{k!}{m!}L_k^{(m-k)}(\rho), \tag{C5}$$

可以验证， $S_{<\infty}(m,\ \rho) = 0$。对于式（C4）中的无穷级数，我们可以应用 Bateman 的以下公式（[37], 第 457页）：

$$\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{n!}{l!}\left(\sqrt{xy}e^{i\varphi}\right)^{l-n}L_n^{(l-n)}(x)\,L_n^{(l-n)}(y) = \exp\left(\sqrt{xy}e^{i\varphi}\right)L_n^{(0)}\left(x+y-2\sqrt{xy}\cos\varphi\right) \tag{C6}$$

对于 $n=m,\ \ x=y=\rho$ 以及 $\varphi=0$。由此得到 $S_\infty(m,\ p) = e^\rho$。总结以上计算，公式（C1）可写为

$$\mathbb{E}\left(\sharp_{D_R}\right) = \int_0^{R^2} e^{-\rho}\mathfrak{S}_m(\rho)d\rho = \int_0^{R^2} d\rho = R^2. \tag{C7}$$

附录 C 的证明至此完成。

附录 D

通过选择径向权函数（6.1），式（5.12）中的特征值可分解为三个积分，如下所示

$$\lambda_k^{(m,R)} = \sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_3 \tag{D1}$$

其中

$$\sigma_1 := \pi R^2\frac{m!}{k!}\int_0^\infty e^{-\rho}\rho^{k-m}\left(L_m^{(k-m)}(\rho)\right)^2 d\rho, \tag{D2}$$

$$\sigma_2 := 2R^2\int_0^{2R}\rho^{2(k-m)+1}\arccos\left(\frac{\rho}{2R}\right)e^{-\rho^2}\left(L_{m\wedge k}^{(k-m)}\left(\rho^2\right)\right)^2 d\rho, \tag{D3}$$

and

$$\sigma_3 := \frac{1}{2}\int_0^{2R}\sqrt{4R^2-\rho^2}e^{-\rho^2}\rho^{2(k-m)+2}\left(L_m^{(k-m)}\left(\rho^2\right)\right)^2 d\rho. \tag{D4}$$

为了计算 σ_1，我们利用拉盖尔多项式的正交关系（[38], 第 809 页），积分（D2）可化简为 $\sigma_1 = \pi R^2$.

对于 σ_2，我们令 $a=2R$ 和 $\alpha = k-m$，然后

$$\sigma_2 = \frac{a^2}{2}\int_0^a \rho^{2\alpha+1}\arccos\left(\frac{\rho}{a}\right)e^{-\rho^2}\left(L_m^{(\alpha)}\left(\rho^2\right)\right)^2 d\rho. \tag{D5}$$

接下来，我们应用 Feldheim 公式（[35], 公式 1.14）：

$$L_m^{(\alpha)}(x)L_m^{(\alpha)}(x) = \sum_{s=0}^{2m}C_s(m,\alpha)L_s^{(2\alpha)}(x) \tag{D6}$$

with

$$C_s(m,\alpha) = (-1)^s\sum_{r=0}^{s}\binom{s}{r}\binom{m+\alpha}{m-s+r}\binom{m}{m-r}. \tag{D7}$$

由此得到

$$\sigma_2 = \frac{a^2}{2}\sum_{s=0}^{2m}C_s(m,\alpha)\int_0^a\rho^{2\alpha+1}\arccos\left(\frac{\rho}{a}\right)e^{-\rho^2}L_s^{(2\alpha)}\left(\rho^2\right)d\rho. \tag{D8}$$

利用拉盖尔多项式的表达式 $L_s^{(2\alpha)}\left(u^2\right)=\sum_{l=0}^{s}\frac{(-1)^l}{l!}\binom{s+2\alpha}{s-l}u^{2l}$ 并令$\rho=ta$，式（D8）变为

$$\sigma_2=\frac{a^{2(\alpha+2)}}{2}\sum_{s=0}^{2m}C_s(m,\alpha)\sum_{l=0}^{s}\frac{(-1)^l a^{2l}}{l!}\binom{s+2\alpha}{s-l}\sigma_2' \tag{D9}$$

其中

$$\sigma_2':=\int_0^1 t^{2(\alpha+l)+1}\arccos(t)\,e^{-a^2t^2}dt. \tag{D10}$$

为了计算 σ_2'，我们设 $u=\arccos(t)$，$dv=t^{2(\alpha+l)+1}e^{-a^2t^2}$，并且可以很容易地验证这一点。

$$v=\frac{a^{-2(\alpha+l)-2}}{2}\gamma\left(\alpha+l+1,a^2t^2\right) \tag{D11}$$

其中 γ 是不完全伽马函数。接下来，我们应用分部积分，得到

$$\sigma_2'=\frac{a^{-2(\alpha+l)-2}}{2}\int_0^1\frac{\gamma\left(\alpha+l+1,a^2t^2\right)}{\sqrt{1-t^2}}dt. \tag{D12}$$

再次进行变量变换 $t^2=x$，我们可将（D12）改写为

$$\sigma_2'=\frac{a^{-2(\alpha+l)-2}}{8}\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\gamma\left(\alpha+l+1,a^2x\right)dx \tag{D13}$$

通过应用以下公式（ [33], 第143页）：

$$\int_0^\zeta x^{n-1}\left(\zeta^r-x^r\right)^{\beta-1}\gamma(\nu,cx)dx=\frac{\zeta^{n-r\beta-r+\nu}c^\nu}{r}\Gamma(\beta)\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-\zeta c)^s}{s!(\nu+s)}\frac{\Gamma((n+\nu+s)/r)}{\Gamma((n+\nu+s)/r+\beta)} \tag{D14}$$

对于参数 $n=1/2,\zeta=1,\beta=1/2,\nu=\alpha+l+1,r=1,c=a^2$，得到的是

$$\sigma_2'=\frac{\Gamma(1/2)}{8}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\left(-a^2\right)^s}{s!(\alpha+l+1+s)}\frac{\Gamma(s+\alpha+l+3/2)}{\Gamma(s+\alpha+l+2)} \tag{D15}$$

可表示为

$$\sigma_2'=\frac{\sqrt{\pi}}{8}\frac{\Gamma(\alpha+l+3/2)}{(\alpha+l+1)^2\Gamma(\alpha+l+1)}{}_2F_2\left(\begin{matrix}\alpha+l+1,\alpha+l+3/2\\ \alpha+l+2,\alpha+l+2;-a^2\end{matrix}\right). \tag{D16}$$

将（D16）代入（D9），可得

$$\sigma_2=\frac{a^2\sqrt{\pi}}{2}\sum_{s=0}^{2m}C_s(m,\alpha)K_{l,s}(\alpha) \tag{D17}$$

其中

$$K_{l,s}(\alpha)=a^{2\alpha+2}\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\alpha+2)}\frac{(s+2\alpha)!}{s!\Gamma(2\alpha+1)}$$
$$\times\sum_{l=0}^{s}\binom{s}{l}\frac{\left(-a^2\right)^l}{(2\alpha+1)_l}\frac{(\alpha+1)_l\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)_l}{(\alpha+2)_l(\alpha+2)_l}{}_2F_2\left(\begin{matrix}\alpha+l+1,\alpha+l+3/2\\ \alpha+l+2,\alpha+l+2;-a^2\end{matrix}\right). \tag{D18}$$

利用恒等式（ [33], 第391页）：

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)\frac{x^k}{(\beta)_k}\frac{\prod(a_p)_k}{\prod(b_q)_k}{}_pF_q\left(\begin{array}{c} (a_p)+k;x \\ (b_q)+k \end{array}\right)={}_{p+1}F_{q+1}\left(\begin{array}{c} (a_p),\beta+n;x \\ (b_q),\beta \end{array}\right), \tag{D19}$$

（D18）中的和式具有以下形式

$${}_3F_3\left(\begin{array}{c} \alpha+1,\alpha+\frac{3}{2},2\alpha+1+s;-a^2 \\ \alpha+2,\alpha+2,2\alpha+1 \end{array}\right). \tag{D20}$$

因此,

$$K_{l,s}(\alpha)=a^{2\alpha+2}\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\alpha+2)}\frac{(s+2\alpha)!}{s!\Gamma(2\alpha+1)}{}_3F_3\left(\begin{array}{c} \alpha+1,\alpha+\frac{3}{2},2\alpha+1+s;-a^2 \\ \alpha+2,\alpha+2,2\alpha+1 \end{array}\right), \tag{D21}$$

且我们的积分 σ_2 可以表示为

$$\sigma_2=\frac{(2R)^2\sqrt{\pi}}{8}\frac{(2R)^{2(k-m)+2}\Gamma(k-m+1)\Gamma\left(k-m+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(2(k-m)+1)\Gamma(k-m+2)\Gamma(k-m+2)}$$

$$\times\sum_{s=0}^{2m}C_s(m,k-m)\frac{(s+2(k-m))!}{s!}{}_3F_3\left(\begin{array}{c} k-m+1,k-m+\frac{3}{2},2(k-m)+1+s;-(2R)^2 \\ k-m+2,k-m+2,2(k-m)+1 \end{array}\right). \tag{D22}$$

对于最后一个积分，我们再次使用 Feldheim 公式（D6），则公式（D4）变为

$$\sigma_3=\frac{1}{2}\sum_{s=0}^{2m}C_s(m,k-m)\int_0^{2R}\sqrt{4R^2-\rho^2}e^{-\rho^2}\rho^{2(k-m)+2}L_s^{(2(k-m))}\left(\rho^2\right)d\rho \tag{D23}$$

其中 $C_s(m,k-m)$ 由式（D7）给出。令 $\alpha=k-m$， $\rho^2=(2R)^2t$，则可将式（D23）改写为

$$\sigma_3=\frac{(2R)^{2\alpha+4}}{4}\sum_{s=0}^{2m}C_s(m,\alpha)\int_0^1 t^{\alpha+\frac{1}{2}}e^{-(2R)^2t}(1-t)^{\frac{1}{2}}L_s^{(2\alpha)}\left((2R)^2t\right)dt. \tag{D24}$$

现在，我们使用公式（[38], 第810页）：

$$\int_0^1(1-x)^{\mu-1}x^{\lambda-1}e^{-\beta x}L_s^{(\gamma)}(\beta x)dx=\frac{\Gamma(\gamma+s+1)}{s!\Gamma(\gamma+1)}\frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)}{}_2F_2\left(\begin{array}{c} \gamma+s+1,\lambda \\ \gamma+1,\lambda+\mu;-\beta \end{array}\right) \tag{D25}$$

对于参数 $\mu=\frac{3}{2}$、 $\lambda=\alpha+\frac{3}{2}$、 $\beta=$（2R）^{2}、 $\gamma=2\alpha$，得到 that

$$\sigma_3=\frac{(2R)^{2\alpha+4}\Gamma(\alpha+\frac{3}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{4\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(\alpha+3)}\sum_{s=0}^{2m}C_s(m,\alpha)\frac{\Gamma(2\alpha+s+1)}{s!}{}_2F_2\left(\begin{array}{c} 2\alpha+s+1,\alpha+\frac{3}{2} \\ 2\alpha+1,\alpha+3;-(2R)^2 \end{array}\right). \tag{D26}$$

接下来，为了计算差值 $\sigma_3-\sigma_2$，我们可以应用以下恒等式。

$$\frac{1}{(d+2)}{}_pF_q\left(\begin{array}{c} a_1,a_2,\ldots,a_{p-1},a_p \\ b_1,b_2,\ldots,b_{q-1},d+3 \end{array};z\right)-\frac{1}{(d+1)}{}_{p+1}F_{q+1}\left(\begin{array}{c} a_1,a_2,\ldots,a_{p-1},a_p,d+1 \\ b_1,b_2,\ldots,b_{q-1},d+2,d+2 \end{array};z\right)$$

$$=-\frac{1}{(d+2)(d+1)}{}_{p+1}F_{q+1}\left(\begin{array}{c} a_1,a_2,\ldots,a_{p-1},a_p,d+1 \\ b_1,b_2,\ldots,b_{q-1},d+2,d+3 \end{array};z\right),\qquad p,q\in\mathbb{N},\ z\in\mathbb{C}. \tag{D27}$$

这很容易从超几何级数的定义得到验证 ${}_pF_q$。最后，在汇总（D1）中的所有计算后，我们得到由（6.8）给出的特征值表达式。□

参考文献

[1] J. B. Hough、M. Krishnapur、Y. Peres、B. Vir´ag，《高斯解析函数的零点与行列式点过程》，University Lecture Series，第 51 卷，美国数学学会，普罗维登斯（2009）。[2] A. Soshnikov，《行列式随机点场》，Russian Math. Surveys，55（2000），923–975。[3] A. Kulesza 和 B. Taskar，《用于机器学习的行列式点过程》，Foundations and Trends in Machine Learning，5（2012），123–286。[4] G. L. Torrisi 和 E. Leonardi，《Ginibre 网络模型中的干扰大偏差》，Stochastic Systems，4（2014），1–33。[5] N. Miyoshi 和 T. Shirai，《具有 Ginibre 配置基站的蜂窝网络模型》，Advances in Applied Probability，46（2014），832–845。[6] O. Macchi，《随机点过程的重合方法》，Adv. Appl. Prob. 7（1975），83–122。[7]S. Torquato、A. Scardicchio 和 C. E. Zachary，《由费米子气体、随机矩阵理论和数论产生的任意维点过程》，J. Stat. Mech.（2008），P11019。[8] T. Shirai，《与指数核相关的费米子点过程的大偏差》，J. Stat. Phys. 123（2006），615–629。[9] J. Ginibre，《复矩阵、四元数矩阵和实矩阵的统计系综》，J. Math. Phys. 6（1965），440–449。[10] B. Jancovici、J. L. Lebowitz、G. Manificat，《经典库仑系统中的大电荷涨落》，J. Statist. Phys. 72（1993），773–787。[11] N. Askour、A. Intissar、Z. Mouayn，《广义 Bargmann 空间及其再生核的显式公式》，C. R. Acad. Sci. Paris S´érieI. Math. 325（1997），707–712。[12] T. Shirai，《Ginibre 型点过程及其渐近行为》，J. Math. Soc. Japan. 67（2015），763–787。[13] L. D. Abreu、J. Pereira、J. L. Romero 和 S. Torquato，《Weyl-Heisenberg 系综：超均匀性与高朗道能级》，J. Stat. Mech. Theor. Exp. 4（2017）。[14] A. Lenard，《经典力学中的相关函数与状态的唯一性》，Commun. Math. Phys. 30（1973），35–44。[15] A. Lenard，《含有无限多个粒子的经典统计力学系统的状态 I》，Arch. Rationnal. Mech. Anal. 59（1975），219–239。[16] W. Magnus、F. Oberhettinger、R. P. Soni，《数学物理特殊函数的公式与定理》，第 3 版，Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften，第 52 卷，Springer，纽约（1966）。[17] N. Demni 和 P. Lazag，《双曲型点过程》，J. Math. Soc. Japan. 71（2019），1137–1152。[18] E. Schrodinger，《从微观力学到宏观力学的连续过渡》，Naturwissenschaften. 14（1926），664–666。

[19] M. Reed 和 B. Simon，《现代数理物理方法》，第 I–IV 卷，˜Academic，纽约，1978 年。[20] J. P. Gazeau，M. A. del Olmo，《谐振子的 Pisot q-相干态量子化》，《物理学年鉴》，330（2013），220–245。[21] J. P. Gazeau，《量子物理中的相干态》，WILEY-VCH Verlag GMBH & Co. KGaA，Weinheim，2009。[22] J. R. Klauder，《无量子化的量子化》，《物理学年鉴》，237（1995），147–160。[23] J. R. Klauder，《超越传统量子化》，剑桥大学出版社，剑桥，2000。[24] F. A. Berezin，《量子化的一般概念》，《数学物理通讯》，40（1975），153–174。[25] G. B. Folland，《相空间上的调和分析》，载于《数学研究年刊》第122号，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿（1989）。[26] M. E. Taylor，《非交换调和分析》，第22卷，《数学调查与专著》，美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯（1986）。[27] C. Benson、J. Jenkins 和 G. Ratclif，《海森堡群上的有界 K–球函数》，《泛函分析杂志》，105（1992），405–443。[28] M. Duflo 和 C. C. Moore，《关于非幺模局部紧群的正则表示》，《泛函分析杂志》，21（1976），209–243。[29] E. Binz、S. Pods 和 W. Schemp，《海森堡群——描述信息、信息传输及其量子化的基本要素》，《物理学杂志 A：数学与一般物理》，36（2003），6401–6421。[30] Z. Mouayn，《复平面上与广义 Bargmann 空间相关的相干态变换》，《数学札记》，284（2011），1948–1954。[31] A. Perelomov，《任意李群的相干态》，《数学物理通讯》，26（1972），222–236。[32] I. Daubechies，《时频局域化算子：一种几何相空间方法》，《IEEE 信息论汇刊》，34（1998）。[33] A. P. Prudnikov、Yu. A. Brychkov 和 O. I. Marichev，《积分与级数——更多特殊函数》，第3卷，1986。[34] H. Osada 和 T. Shirai，《Ginibre 随机点场线性统计量的方差》，《RIMS 讲究录别册》，B6（2008），193–200。[35] E. Feldheim，《Laguerre 多项式与厄米多项式乘积的展开式与积分变换》，《牛津数学季刊》，11（1940），18–29。[36] G. Szego，《正交多项式》（美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，1975）。[37] H. Bateman，《数理物理偏微分方程》，剑桥，1932。[38] I. Gradshteyn 和 I. Ryzhik，《积分、级数与乘积表》，Academic Press，阿姆斯特丹，第七版（2007）。