在 α-混合条件下，截断-删失数据回归函数 M 估计量的渐近正态性

Hassiba BENSERADJ [1]布迈尔代斯大学科学学院
（UMBB），阿尔及利亚布迈尔代斯独立大道，
h.benseradj@univ-boumerdes.dz

Zohra GUESSOUM 数学与统计实验室（
MSTD），USTHB 数学学院，BP 32，
El-Alia 16111，阿尔及利亚，
zguessoum@usthb.dz

arXiv:2305.04383v1 [math.ST] 7 May 2023

摘要
本文针对左截断、右删失（LTRC）模型，研究回归函数 M 估计量的弱相合性与渐近正态性，并假设观测值构成平稳的 α-混合序列。该结果在目标函数无界时仍然成立，并应用于推导核经典回归曲线估计量的弱相合性与渐近正态性。我们还在存在依赖性的情况下，获得了寿命和删失分布的乘积极限估计量的一致弱收敛速率；这些结果对本研究以及其他 LTRC 强混合框架均有用。我们通过一些模拟来说明有限样本下的结果。

关键词
α 混合；渐近正态性；M 估计量；稳健回归；截断删失数据。

数学学科分类62G05; 62G20

1 引言

设 $(X_i, Y_i)_{i=1:N}$ 是一个 N 平稳随机变量序列，其分布与 (X, Y) 相同，取值于空间 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$。我们的目的是研究 X 与 Y 之间的关系，可表述为

$$Y = m(X) + \epsilon,$$

1. 通讯作者

其中 m(.) 是未知函数， ϵ 是与 X. 独立的随机误差变量。对于给定的 $x \in \mathbb{R}^d$，估计 m (x) 的传统方法是采用 L_2 损失函数 , viz

$$m(x) = \arg\min_{\theta} \mathbb{E}\left[(Y-\theta)^2 | X = x\right].$$

众所周知，当残差分布服从高斯分布时，最小二乘法能够获得最优结果。然而，如果噪声的均值不为零，和/或数据中存在异常值，该方法就会变得不稳定。为了解决这一问题，可以用另一种函数替代上述平方函数，该函数对 Y_i 的较大取值赋予较小的权重。这类方法称为稳健回归，它可以 .....

$$m(x) = \arg\min_{\theta} \mathbb{E}\left[\rho(Y-\theta) | X = x\right].$$

其中 ρ(.) 是一个给定的实值连续可微损失函数，例如 $\frac{d\rho}{d\theta}$(.) =: ψ_x(.) 是严格单调函数。因此， m (x) 存在，且可视为关于 θ 的唯一解。

$$\mathbb{E}\left[\psi_x(Y-\theta) | X = x\right] = 0, \tag{1}$$

以及相应的基于样本量 N 的非参数核 M估计量 $\widehat{m}$(.)，其关于 θ 的零点为

$$\sum_{i=1}^{N} K\left(\frac{X_i - x}{h_N}\right) \psi_x(Y_i - \theta), \tag{2}$$

其中， K(.) 是核函数， h_N 是平滑参数，随着 N 趋于零。(2) 的特殊情形包括通常的 Nadaraya-Watson估计量。将稳健性思想与平滑思想相结合的动机可追溯至 Tsybakov（1983）和 Hardle（1984）。Robinson（1984）在时间序列背景下研究了这一 M 估计量，Collomb和 Hardle（1986）则证明了它具有一致一致性及相应的收敛速率。关于这类 M 估计量，已有许多其他研究；例如，关于早期结果，可参见 Bohente和Fraiman（1990）及其中的参考文献；关于近期进展和相关参考文献，可参见 Laib和Ould Said（2000）以及 Attaoui等（2015）。

然而，所有这些研究都考虑了数据完整的情况，而在大多数以生存时间 Y（此处称为寿命）为研究变量的研究中，会出现两个不同的问题：第一个问题是，如果寿命的起始时间早于研究开始时间，则只会对研究开始后才发生事件的受试者进行跟踪；否则，他们就属于左截断。 Wang 和 Liang（2012）基于 Ould Said和Lemdani（2006）提出的经典回归函数估计量，针对这类数据定义了一种新的稳健估计量，并证明了其弱相合性和强相合性（无收敛速率），以及其对 α-混合过程的渐近正态性。生存数据中可能出现的第二个问题是右删失，即受试者在事件发生前退出研究，或研究在事件发生前结束。针对这类数据，Lemdani 和 Ould Said（2017）构造了一种基于所谓合成数据的新估计量，并在独立性假设下，利用 Vapnik-Chervonenkis类（VC类）证明了该估计量的一致强相合性（具有收敛速率）和渐近正态性。

需要注意的是，在一项研究中，这两种不完整数据可能同时出现，此时该模型被称为左截断右删失模型（LTRC）。近年来，针对这类数据已经取得了许多研究成果。例如，Iglessias-Pérez 和 Gonzalez-Manteiga (1999)、Liang 等人 (2012) 以及 Liang 和 Liu (2013) 分别研究了条件分布和条件概率密度估计。Liang 等人 (2015) 以及 Guessoum 和 Tatachak (2020) 分别研究了条件分位数和风险函数估计。在非参数回归领域，Benseradj 和 Guessoum (2020) 构造了一种核 M 估计量，并在强混合条件下建立了其具有收敛速率的一致强相合性。

本文旨在通过采用比建立强一致性时所需条件更弱的条件，在 α-混合假设下，证明基于截断和删失数据的 M-估计量具有弱一致性和渐近正态性。因此，我们完成了关于强一致性的首项工作，并通过放宽对混合系数的条件，将 Wang 和 Liang（2012）关于截断数据的结果扩展至删失和截断数据；同时也将 Lemdani 和 Ould Said（2017）关于删失独立数据的结果扩展至删失相关数据（作为特例）。

我们的结果适用于目标函数 ψ_x 无界的情形，并用于推导核函数经典回归曲线估计量的渐近正态性。我们将结果与 Liang (2011) 在无删失情况下以及 Guessoum 和 Ould Said（2012）在无截断情况下得到的结果进行比较。请注意，在删失情况下，我们得到的回归曲线估计量（$\psi_x(u) = u$）与 Carbonez 等人（1995）提出的估计量略有不同（见 Benseradj 和 Guessoum（2020）中的注释 4.3）。我们证明，与后者相比，我们的估计量具有最小的渐近方差。

本文其余部分安排如下：第 2 节介绍与模型相关的一些定义和记号。第 3 节给出陈述主要结果所需的假设。第 4 节通过模拟研究展示理论结果。证明和辅助结果列于第 5 节。附录给出一项新的补充结果，讨论在 α-混合条件下寿命分布和删失时间分布的乘积极限估计量的渐近行为。

2 模型与估计量

设 $\{(Y_k, T_k, W_k) \quad 1 \leq k \leq N\}$ 为来自 (Y, T, W) 的随机向量序列，其中 Y表示所研究的寿命，其连续分布函数（d.f）为 $F.\,T$； W 分别表示左截断变量和右删失时间，其连续分布函数（d.f's）分别为 L 和 G。令

$$Z = (Y \wedge W) \quad \text{and} \quad \delta = \mathbb{I}_{\{Y \leq W\}},$$

其中 $(t \wedge u) := \min(t, u)$，且 δ 是删失状态的指示变量。在随机 LTRC 模型中，只有当 $Z \geq T$时，才能观测到 (Z, T, δ)。令 $\mu = \mathbb{P}(T \leq Z)$，则我们需要假设 $\mu > 0$，否则无法观测到任何数据。考虑协变量 X的存在，并假设 X 具有密度 $v_\cdot$。于是，记 $(X_i, Z_i, T_i, \delta_i) \quad i = 1, 2, ..., n$; $(n \leq N)$ 为来自 (X, Z, T, δ) 的平稳随机样本

也就是实际观测到的对象（即 $T_i \leq Z_i$）。在本文其余部分，我们假设 T、W 和Y 相互独立，因此 Z 具有（分布函数）

$$H = 1 - (1 - F)(1 - G).$$

注意到，由于随机变量Z 满足随机左截断（RLT）模型，因此可以用众所周知的Lynden-Bell估计量 H_n来估计 H

$$H_n(y) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{\mathbb{I}_{\{Z_i \leq y\}}}{nC_n(Z_i)}\right),$$

$_n$其中，$C_n(y) = \frac{1}{n}\sum \mathbb{I}_{\{T_j \leq y \leq Z_j\}}$是 $C(y)$的经验估计量：$= \mathbb{P}(T \leq y \leq Z | T \leq Z)$。将$_{j=1}$记为 $\mathbb{P}$，将P记为分别与 N 样本和实际观测到的 n 样本相关的概率测度。此外，将 $\mathbb{E}$ 和E分别记为与 $\mathbb{P}$ 和P相关的期望算子。下文中，对于任意分布函数 Q，我们分别将其左右支撑端点记为 $a_Q := \inf\{x : Q(x) > 0\}$ 和 $b_Q := \sup\{x : Q(x) < 1\}$。显然，$a_H = a_F \wedge a_G$，Tsai 等人（1987）针对左截断右删失数据定义了分布函数 F 的乘积极限（PL）估计量 F_n，其形式为

$$1 - F_n(y) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{\mathbb{I}_{\{Z_i \leq y\}}\delta_i}{nC_n(Z_i)}\right),$$

（称为 TJW 乘积极限估计量）。注意，对于强混合数据，F_n 的一致强相合性分别在无截断情形（$T = 0$）下由 Cai（1998）建立，在无删失情形（$W = \infty$）下由 Sun和Zhou（2001）建立。Chen 和 Day (2003) 表明，Sun和Zhou（2001）的结果可以扩展到同时存在截断和删失的数据。F_n 的一致弱相合性分别针对删失数据由 Liang和Alvarez（2011）建立，针对截断数据由 Liang (2011) 建立。我们在附录中的引理 1 中将他们的结果扩展到同时存在截断和删失的数据，从而推导出 G_n的一致弱相合性及其收敛速率；G_n是删失分布 G 的伴随TJW估计量，定义见下面的（4）式。这些对于我们的研究以及其他强混合框架而言，都是有意义的结果。

在给定 n 的值的条件下，我们将 Z 和 T 的联合分布函数定义为

$$\mathbf{M}(z,t) := \mathbf{P}(Z \leq z, T \leq t) = \mu^{-1} \int_{-\infty}^{z} L(t \wedge u)\, dH(u),$$

这意味着，Z 和 T 的条件分布函数分别定义为

$$\mathbf{H}(z) := \mathbf{M}(z,\infty) = \mu^{-1} \int_{-\infty}^{z} L(u)\, dH(u), \text{ and } \mathbf{L}(t) := \mathbf{M}(\infty,t) = \mu^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} L(t \wedge u)\, dH(u).$$

当然，H (z) 和 L (t) 可以通过经验方法估计得出。

$$\mathbf{H}_n(z) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{\{Z_i \leq z\}}, \text{ and } \mathbf{L}_n(t) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{\{T_i \leq t\}}.$$

请注意,

$$C(y)=\mathbb{P}(T\leq y\leq Z|T\leq Z)=\mu^{-1}L(y)(1-H(y))$$

因为 H 是连续的。因此

$$\mu=\frac{L(y)(1-F(y))(1-G(y))}{C(y)},\ \text{for } a_H\leq y<b_H,$$

并遵循 按照 He 和 Yang（1998）的思路， μ 的一个相合估计由下式给出 y

$$\mu_n=\frac{L_n(y)(1-F_n(y))(1-G_n(y))}{C_n(y)},\ \text{for all } y \text{ such that } C_n(y)\neq 0, \tag{3}$$

其中， G_n是分布函数 G的伴随TJW估计量，定义如下

$$1-G_n(y)=:\overline{G}_n(y)=\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{\mathbb{I}_{\{Z_i\leq y\}}(1-\delta_i)}{nC_n(Z_i)}\right), \tag{4}$$

且 L_n 是分布函数 L 的Lynden-Bell估计量，定义如下

$$L_n(y)=\prod_{i:T_i>y}\left(1-\frac{1}{nC_n(T_i)}\right). \tag{5}$$

对于 RLT 数据，He 和 Yang（1998）证明， μ_n 不依赖于 y ，且对于满足 $C_n(y)\neq 0$的任意 y ，均可求得其值。

注 2.1 注意到 μ_n 可以表示为 $\mu_n=\frac{L_n(y)(1-H_n(y))}{C_n(y)}$ ，（因为我们有 $1-H_n(y)=(1-F_n(y))(1-G_n(y))$），这与 *He* 和 *Yang*（*1998*）针对变量 Z给出的定义相同。因此，对于 *RLT* 数据给出的关于 μ_n 的任何渐近结果，在左截断右删失数据下仍然成立。

在当前模型下，对于左截断右删失数据，Gijbels和Wang（1993）指出，只有在 $a_L\leq a_H$、 $b_L\leq b_H$ 时，才能估计 F 。遵循Ould Said和Lemdani（2006）的观点，这些是必要但不充分的可识别性条件。本文始终假设 $a_L<a_H$、 $b_L\leq b_H$，并且

$$(T,W)\ \text{are independent of}\ (X,Y). \tag{6}$$

另定义（Z， $\delta=1$， X）的次条件分布函数为

$$\begin{aligned}\mathbf{H_1}(x,y) &:= \mathbf{P}(Z\leq y,\delta=1,X\leq x)\\ &= \mathbb{P}(Z\leq y,\delta=1,X\leq x|T\leq Z)\\ &= \mu^{-1}\int_{s\leq x}\int_{a_H}^{y}L(t)(1-G(t))f_{X,Y}(s,t)\,dtds,\end{aligned}$$

其中，$f_{X,Y}$(., .) 是 (X,Y) 的联合密度函数。我们推导得出,

$$d\mathbf{H}_1(x,y)=\mu^{-1}L(y)(1-G(y))f_{X,Y}(x,y)\,dxdy. \tag{7}$$

在回归分析中，人们期望通过稳健回归识别 X 与 Y 之间的关系。稳健回归函数记为 $m(x)$，它被隐式定义为方程（1）的一个解。（1）的左边可以写成

$$\mathbb{E}\left[\psi_x\left(Y-\theta\right)|X=x\right]=\frac{\int\psi_x\left(y-\theta\right)f_{X,Y}\left(x,y\right)dy}{v\left(x\right)},$$

其中 $v(x)>0$. 集

$$\Psi_x\left(x,\theta\right):=\mathbb{E}\left[\psi_x\left(Y-\theta\right)|X=x\right]v\left(x\right),$$

那么， $m(x)$ 可视为关于 θ 的 $\Psi_x(x,\theta)$ 的一个解。 $=0$. 因此， $m(x)$ 的一个自然估计量，记为 $\widehat{m}(x)$，定义为关于 θ 的下式的零点

$$\widehat{\Psi}_x\left(x,\theta\right)=0, \tag{8}$$

其中

$$\widehat{\Psi}_x\left(x,\theta\right):=\frac{\mu_n}{nh_n^d}\sum_{i=1}^{n}K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right)\frac{\delta_i\psi_x\left(Z_i-\theta\right)}{L_n\left(Z_i\right)\overline{G}_n\left(Z_i\right)}, \tag{9}$$

对所有满足 $L_n(Z_i)\overline{G}_n(Z_i)\neq 0$ 的 Z_i 均成立。在强混合条件下，式（9）中所定义估计量的构造及其强一致性详见 Benseradj 和 Guessoum（2020）。另一个有趣的 Ψ_x 中间（伪）估计量，是建立本文结果的有用工具，其定义如下

$$\widetilde{\Psi}_x\left(x,\theta\right):=\frac{\mu}{nh_n^d}\sum_{i=1}^{n}K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right)\frac{\delta_i\psi_x\left(Z_i-\theta\right)}{L\left(Z_i\right)\overline{G}\left(Z_i\right)}. \tag{10}$$

对所有满足 $a_H\leq Z_i<b_H$ 的 Z_i 均成立。在本文其余部分，假设 $\{(X_i,Z_i,T_i,\delta_i)\quad 1\leq i\leq n\}$ 是由随机向量构成的平稳 α-混合序列。回顾一下，若序列 $\{\zeta_k,k\geq 1\}$ 满足以下条件，则称其为 α-混合（强混合）：其混合系数

$$\alpha\left(n\right)\overset{def}{:=}\sup_{k\geq 1}\sup\left\{\left|\mathbf{P}\left(AB\right)-\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\right|;A\in F_{n+k}^{\infty},B\in F_1^k\right\},$$

当 $n\longrightarrow\infty$ 时收敛于零，其中 $F_l^m=\sigma\left\{\zeta_l,\zeta_{l+1},...,\zeta_m\right\}$ 表示由 ζ_l、ζ_{l+1}、...、ζ_m 生成的 $\sigma-$ 代数，且满足 $l\leq m$。

α-$mixing$ 条件是文献中最常见的依赖性条件，因为已知许多过程都满足该条件。Rosemblatt（1971）证明，纯非确定性马尔可夫链是 α-混合的。Gorodestkii（1977）和Withers（1981）推导出了线性过程为 α-混合过程的条件。对于有兴趣了解混合数据的读者，我们推荐阅读 Zhengyan和Chuanrong（2010）的著作，或Bradley（2007）的专著，其中针对不同类型的混合数据给出了许多深入的结果。

3 假设与主要结果

全文中，我们用 C 和 c 表示任意正的通用常数。对于某个 $\tau > 0$，定义 $m(x)$的集合邻域 $\Xi := [m(x) - \tau, m(x) + \tau]$，并假设对于任意 $x \in supp(v)$，$m(x) \in \Xi \cap [a_H, b]$，其中 $supp(v)$是密度 $v(.)$的支撑集，且 $b < b_H$.

3.1 假设

我们将定位胆 利盛 我们将使用以下假设来陈述主要结果。

等。**假设** (K)

K1. 核函数 $K(.)$ 是一个有界密度函数。K2. $\int w_i K(w)\, dw = 0, \forall i = 1, ..., d$和 $\int |w_i|\,|w_j|\, K(w)\, dw < \infty\ \forall i, j = 1, ..., d_{\mathbb{R}^d}$ $_{\mathbb{R}^d}$

假设 (R)

R1. 函数 $\Psi_x(u, \theta)$ 和 $\Gamma_x(u, \theta) := \mathbb{E}\left[\frac{\psi_x^2}{L}(Y_1 - \theta)\,(Y_1)\,\overline{G}(Y_1)\,|X_1 = u\right] v(u)$ 存在，且分别关于 u 和 θ 在 $\mathcal{U}(x)$（x 的一个邻域）和 Ξ 上连续，对所有 $x \in supp(v)$ 均成立。

R2. 对于某个 $s > 2$，函数 $\mathbb{E}\left[|\psi_x(Y_1 - \theta)|^s\,|X_1 = u\right] v(u)$ 以及 v(.)（即 X 关于 P 的条件密度）存在，且对于 u 属于 $\mathcal{U}(x)$ 和 $\theta \in \Xi$，以及 $x \in supp(v)$，它们均一致有界。

R3. 对于所有 u_1、$u_2 \in \mathcal{U}(x)$ 和 $\theta \in \Xi$，且对于 $x \in supp(v)$，E $[|\psi_x(Y_1 - \theta)\ \psi_x(Y_{j+1} - \theta)\,||X_1 = u_1,\ X_{j+1} = u_2]v_j(u_1, u_2)$ 均存在且一致有界，其中 v$_j$(., .) 是关于 P 的 X_1 和 $X_{j+1}, j \geq 1$ 的联合条件密度。

假设 (R′)

(R′) 包含假设 R′1、R′2 和 R′3，将 $\psi_x(.)$ 替换为其导函数 $\psi_x'(.)$ 后，这些假设分别类似于 R1、R2 和 R3。

假设 (E)

E1. 函数 $\Psi_x(., \theta)$ 关于第一个分量二次连续可微，并且对所有 $x \in supp(v)$ 和 $\theta \in \Xi$ 都满足

$$\sup_{u \in \mathcal{U}(x)} \sup_{\theta \in \Xi} \left| \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial x_i \partial x_j}(u, \theta) \right| < \infty.$$

E2. 函数 ψ_x 连续可微，且其导函数满足 $|\psi_x'(t)| \geq C > 0$、$\forall t \in \mathbb{R}$。

假设 M

混合系数满足 $\alpha(k) = O\left(k^{-\lambda}\right)$，其中存在某个正数 λ，且 $\lambda > \max\left(3,\ \frac{2(s-1)}{s-2}\right)$ 对于 $s > 2$,

假设 （B）

带宽 h_n 满足

B1. $nh_n^{d+4} = o(1)$.
B2. 存在一个趋于无穷大的正整数序列 $q_n = o\left(\sqrt{nh_n^d}\right)$，以及 n，使得 $\lim_{n\to\infty}\left(n/h_n^d\right)^{1/2}\alpha(q_n) = 0$。

关于假设的评论

1. 假设 K1 在核估计中是相当常见的，而假设 K2 则用于获得偏差项的收敛速率。

2. 假设 (R) 涉及函数 $\Psi_x(.,.)$ 的某些正则性，这些假设与 M 一起用于推导 $\Psi_x(x,\theta)$ 的方差表达式。请注意，条件 R1 与 Lemdani 和 Ould Said（2017）中给出的条件 M9 相似，而条件 R2 和 R3 用于 Wang 和 Liang（2012）中。

3. 假设 (E) 常用于稳健回归文献中。E1 用于推导偏差的表达式，而条件 E2 则允许使用泰勒展开。

4. 假设 B1 是使偏差项可以忽略所必需的。B2 是运用 Doob 技巧获得渐近正态性所必需的，并且也用于 Masry（2005）、Wang 和 Liang（2012）等人的研究。注意，若混合系数满足 $\lambda > 1 + (2ad/(1-ad))$，则对于某个 $0 < a < 1/d$，选择 $q_n = \left[\sqrt{\frac{nh_n^d}{logn}}\right]$ 和 $h_n = O(n^{-a})$ 即可满足条件 B2。

~5. 假设 (R′) 是获得 $(\partial/\partial\theta)\Psi_x(x,\theta)$ 弱收敛所必需的，这由引理 5.5 给出。

3.2 主要结果

^根据 E2，将 $\Psi_x(x,.)$ 在 $m(x)$ 处作泰勒展开，并利用性质

$$\widehat{\Psi}_x\left(x,\widehat{m}\left(x\right)\right) = \Psi_x\left(x,m\left(x\right)\right) = 0,$$

我们得到

$$\Psi_x\left(x,m\left(x\right)\right) - \widehat{\Psi}_x\left(x,m\left(x\right)\right) = \left(\widehat{m}\left(x\right) - m\left(x\right)\right)\frac{\partial\widehat{\Psi}}{\partial\theta}\left(x,\widehat{m}^*\left(x\right)\right), \tag{11}$$

其中 $\widehat{m}^*(x)$ 介于 $\widehat{m}(x)$ 和 $m(x)$ 之间。方程 (11) 表明，根据 $\left(\Psi_x - \widehat{\Psi}_x\right)$ 在 n 趋于无穷时的行为，很容易得到序列 $\widehat{m}(.)$ 的渐近结果（收敛、渐近分布等）。

3.2.1 弱一致性

命题 3.1 *Su* 假设条件 *K1*、*(R)* 和 *M* 成立，则对于所有实数 $\theta \in$，我们有 Ξ

$$\widehat{\Psi}_x\left(x,\theta\right) \xrightarrow{p} \Psi_x\left(x,\theta\right) \quad as\ n \to \infty.$$

其中 $_p \to$ 表示关于 P 的依概率收敛。

定理 3.1 在上述命题的条件下，我们有

$$i)\ \widehat{m}(x) \xrightarrow{\boldsymbol{p}} m(x) \quad as\ n \to \infty.$$

此外，若 *\(K_2\)* 和条件 *(E)* 成立，则可得

$$ii)\ \ |\widehat{m}(x) - m(x)| = O\left(h_n^2\right) + O_{\mathbf{p}}\left(\frac{1}{\sqrt{nh_n^d}}\right) \quad as\ n \to \infty.$$

3.2.2 渐近正态性

命题 3.2 假设条件 *(K)*、*(R)*、*E1*、*M* 和 *(B)* 成立，则我们有

$$\sqrt{nh_n^d}(\widehat{\Psi}_x(x,\theta) - \Psi_x(x,\theta)) \xrightarrow{D} \mathcal{N}\left(0, \sigma_0^2(x,\theta)\right) \quad as\ n \to \infty,$$

其中

$$\sigma_0^2(x,\theta) := \mu\Gamma_x(x,\theta)\kappa, \tag{12}$$

$\Gamma_x(.,\theta)$ 在条件 *R1* 中定义，$\kappa := \int K^2(w)\,dw$，且 $\xrightarrow{D}$ 表示依分布收敛。$\mathbb{R}^d$

定理 3.2 在条件 *(K)*、*(R)*、*(E)*、*(R′)*、*M* 和 *(B)* 下，我们有

$$\sqrt{nh_n^d}\left(\widehat{m}(x) - m(x)\right) \xrightarrow{D} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2(x)\right) \quad as\ n \to \infty,$$

其中

$$\sigma^2(x) := \frac{\sigma_0^2(x, m(x))}{\left(\dfrac{\partial\Psi_x(x, m(x))}{\partial\theta}\right)^2},$$

且 $\sigma_0^2(x,.)$ 在（*12*）中定义。

注释 3.1 特殊情形：

1. **删失数据：**在没有截断的情况下$(T = 0)$，我们的结果扩展了 *Lemdani* 和 *Ould Said*（*2017*）在独立数据情形下给出的结果，渐近方差变为

$$\sigma^2(x) := \frac{\mathbb{E}\left[\psi_x^2(Y - m(x))\,\overline{G}^{-1}(Y)\,|X = x\right] v(x)\kappa}{\left(\dfrac{\partial\Psi_x(x, m(x))}{\partial\theta}\right)^2},$$

这与他们的定理 *3.2* 中得到的结果相同。

2. **截断数据：**在没有删失的情况下 $(W=\infty)$，渐近方差变为

$$\sigma^2(x) := \frac{\mu\mathbb{E}\left[\psi_x^2(Y-m(x))L^{-1}(Y)|X=x\right]v(x)\kappa}{\left(\frac{\partial\Psi_x(x,m(x))}{\partial\theta}\right)^2},$$

这与 *Wang and Liang*（*2012*）给出的结果进行了比较，其中 $\mathbb{E}\left[\frac{d\psi_x}{d\theta}(Y-m(x))|X=x\right]$ 表示他们在定理 *2.3* 中定义的 $\lambda_1(x)$。请注意，我们的定理在对混合系数的条件有所放宽的情况下仍然成立。（*Wang and Liang*（*2012*）的定理 *2.3* 要求 $\lambda > \frac{s}{(s+2)}$ 2（$s-2$）随 s 增大，而我们的定理则表明，对于 $s>2$，条件为 $\lambda > \max\left(3, \frac{2(s-1)}{s-2}\right)$，；对于 $s>4$，该条件可简化为 $\lambda>3$。其中，$s=\infty$ 对应于目标函数有界的情形 $\psi(\circ))$。

3.2.3 置信区间的应用

定理 3.2 可直接用于求得 $m(x)$ 真值的置信区间，给定 $X=x$。请注意，由于方差中的许多量未知，定理 3.2 在实践中无法直接应用。因此，将函数 $\partial\Psi_x(x,m(x))\,\partial\theta$ 和 $\Gamma_x(x,m(x))$ 分别替换为其无偏估计，定义如下：

$$\frac{\partial\widetilde{\Psi}_x(x,m(x))}{\partial\theta} := \frac{\mu}{nh_n^d}\sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right)\frac{\delta_i\frac{\partial\psi_x(Z_i-m(x))}{\partial\theta}}{L(Z_i)\overline{G}(Z_i)}, \tag{13}$$

$$\widetilde{\Gamma}_x(x,m(x)) := \frac{\mu}{nh_n^d}\sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right)\frac{\delta_i\psi_x^2(Z_i-m(x))}{L^2(Z_i)\overline{G}^2(Z_i)}, \tag{14}$$

采用代入法，我们得到一个收敛估计量 $\widehat{\Gamma}_x(x,\widehat{m}(x))$ 和 $\partial\Psi_x(x,\widehat{m}(x))\,\partial\theta$：将式 (13) 和 (14) 中的 μ、$\overline{G}$、L 和 $m(x)$ 分别替换为其估计量 μ_n、$\overline{G}_n$、L_n 和 $\widehat{m}(x)$；这些估计量分别由式 (3)、(4)、(5) 以及式 (8) 的解给出，从而可以得到 σ 的一个收敛估计量 $\widehat{\sigma}$，其定义如下

$$\widehat{\sigma}^2(x) := \frac{\mu_n\widehat{\Gamma}_x(x,\widehat{m}(x))\kappa}{\left(\frac{\partial\widehat{\Psi}_x(x,\widehat{m}(x))}{\partial\theta}\right)^2}, \tag{15}$$

若分母不为零，则由定理 3.2 可得以下结果

推论 3.1 在定理 *3.2* 的假设下，对于 $n\to\infty$，我们有

$$\frac{\sqrt{nh_n^d}}{\widehat{\sigma}(x)}(\widehat{m}(x)-m(x)) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0,1).$$

由此推论，对于每个固定的 $\eta \in (0,1)$，我们得到以下（$1-\eta$）渐近水平置信区间

$$\left[\widehat{m}(x) - t_{1-\eta/2} \times \frac{\widehat{\sigma}(x)}{\sqrt{nh_n^d}},\ \widehat{m}(x) + t_{1-\eta/2} \times \frac{\widehat{\sigma}(x)}{\sqrt{nh_n^d}}\right],$$

其中 $t_{1-\eta/2}$ 表示标准正态分布的（$1-\eta/2$）分位数。

3.2.4 回归到经典回归

作为定理 3.1 和定理 3.2 的直接推论，我们得到回归曲线 $\mathbb{E}[Y|X = .]$ 估计的弱一致性和渐近正态性；该估计由方程 (8) 的解给出，其恒等目标函数 $\psi_x(u) = u$ 定义如下：

$$\widehat{m}_n(x) := \frac{\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right) \delta_i Z_i L_n^{-1}(Z_i)\, \overline{G}_n^{-1}(Z_i)}{\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right) \delta_i L_n^{-1}(Z_i)\, \overline{G}_n^{-1}(Z_i)}, \tag{16}$$

由此得到以下结果

推论 3.2 在定理 *3.1* 的假设下，我们有

$$\widehat{m}_n(x) \xrightarrow{p} m(x) \quad as\ n \to \infty.$$

推论 3.3 在定理 *3.2* 的假设下，我们有

$$\frac{\sqrt{nh_n^d}}{\sigma_{class}(x)} \left(\widehat{m}_n(x) - m(x)\right) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0,1) \quad as\ n \to \infty,$$

其中

$$\sigma^2_{class}(x) := \mu \mathbb{E}\left[\frac{(Y - m(x))^2}{L(Y)\,\overline{G}(Y)} | X = x\right] v^{-1}(x)\,\kappa. \tag{17}$$

注 3.2 请注意，在以下情形下，式 *(17)* 中给出的方差 $\sigma^2_{class}(x)$ 可化为下列定义：

1. **截断数据：** 在没有删失的情况下 $\left(\overline{G}(.) = 1\right)$, 我们得到

$$\sigma^2_{class,trun}(x) := \frac{\mu \mathbb{E}\left[(Y - m(x))^2 L^{-1}(Y) | X = x\right] \kappa}{v(x)}.$$

这是 *Liang (2011)* 得出的结果。

2. **删失数据：** 在没有截断的情况下 $(L(.) = 1)$，我们得到

$$\sigma^2_{class,cens}(x) := \frac{\mathbb{E}\left[(Y - m(x))^2 \overline{G}^{-1}(Y) | X = x\right] \kappa}{v(x)}.$$

这与 *Guessoum* 和 *Ould-Said*（*2012*）针对 $a_F < a_G$ 所得到的结果不同，该结果为

$$\sigma^2_1(x) = \frac{\left(\mathbb{E}\left[Y^2 \overline{G}^{-1}(Y) | X = x\right] - m^2(x)\right) \kappa}{v(x)}.$$

注意，对于每个 $x \in supp(v)$，我们都有 $\sigma^2_{class,cens}(x) \leq \sigma^2_1(x)$，如下述命题所示。

命题 3.3 对于所有满足 $x \in supp(v)$ 且 $m(x)$ 存在的 $a_F < a_G$，我们有

$$\sigma^2_1(x) = \sigma^2_{class,cens}(x) + \frac{A(x)}{v(x)}\kappa,$$

其中

$$A(x) := \mathbb{E}\left[(2Y - m(x))m(x)\overline{G}^{-1}(Y)\,|X = x\right] - m^2(x) \geq 0.$$

等式 $\sigma^2_{class,\ cens}(x) = \sigma^2_1(x)$ 成立当且仅当 $m(x) = 0$。

证明： 只需注意到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[Y^2\overline{G}^{-1}(Y)\,|X = x\right] - m^2(x) &= \mathbb{E}\left[(Y - m(x))^2\,\overline{G}^{-1}(Y)\,|X = x\right] + \mathbb{E}\left[2Ym(x)\overline{G}^{-1}(Y)\,|X = x\right] \\ &\quad -\mathbb{E}\left[m^2(x)\overline{G}^{-1}(Y)\,|X = x\right] - m^2(x) \\ &=: \mathbb{E}\left[(Y - m(x))^2\,\overline{G}^{-1}(Y)\,|X = x\right] + A(x),\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}A(x) &\geq \overline{G}^{-1}(a_F)\left[m(x)\mathbb{E}\left[2Y|X = x\right] - m^2(x)\right] - m^2(x) \\ &\geq m^2(x)\left(\overline{G}^{-1}(a_F) - 1\right) \geq 0.\end{aligned}$$

□

Then，即在不存在截断的情况下由（16）得到的估计量，其表达式为

$$m_{adjNW}(x) := \frac{\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right)\delta_i Z_i \overline{G}_n^{-1}(Z_i)}{\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right)\delta_i \overline{G}_n^{-1}(Z_i)},$$

其渐近方差小于 Carbonez 估计量的渐近方差，后者由下式给出

$$m_n(x) := \frac{\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right)\delta_i Z_i \overline{G}_n^{-1}(Z_i)}{\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right)}.$$

注释 3.3 命题 *3.3* 给出的结果在删失数据背景下非常重要，因为它使我们能够推导出其他条件函数估计量（例如条件分位数、条件密度、条件众数等），这些估计量比文献中已有的估计量更具一致性。

4 模拟研究

本节中，我们针对不同的截断和删失比例，考虑实践中常见的固定样本量，考察第 3 节关于 M 估计量 $\widehat{m}(x)$ 的理论结果所预期的正态分布拟合优度，以及 $m(x)$ 的 95% 置信区间曲线。为此，我们考虑由以下过程生成的强混合二维过程（X_t, Y_t）

$$\begin{cases} X_1 = 0.5e_1 \\ X_{t+1} = \rho X_t + 0.5e_{t+1} \\ Y_t = m(X_t) + \epsilon_t \qquad t \geq 1, \end{cases}$$

其中，$e_t, t \geq 1$独立服从标准正态随机变量，且对于每个t，e_t 独立于 X_t；ϵ_t 是一列服从高斯分布 $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$的白噪声序列。我们取 $\sigma = 0.1$，而 $0 < \rho < 1$ 是一个用于控制观测值依赖性的常数，我们取 $\rho = 0.9$ （此时依赖性较强）。

删失分布和截断分布分别由指数分布 $\mathcal{E}(a_0)$和正态分布 $\mathcal{N}(u_0, 2)$模拟生成，其中参数 a_0 和 u_0 的取值用于获得不同的删失率和截断率。不断抽取四元组(X, Y, T, W)，直至其中 n 个满足条件 $T \leq Z = min(Y, W)$。由此得到删失和截断样本$(X_i, Z_i, T_i, \delta_i)$ $i = 1, ..., n$。我们使用标准高斯核，以及由$\psi(u)$定义的目标函数 $\psi(.) = \dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}$.

我们首先考察 $\widehat{m}(x)$的估计密度和QQ图（带有标准化偏差），并将其与 $x = 0$处的理论正态分布进行比较。我们抽取 B 个相互独立的 n样本，并计算 $B = 200$ 个估计值，即 $\widehat{m}_i(0)$、{v8} 的 $m(0)$，取线性模型 $m(x) = 2x$. 我们按照公式（15）中的定义推导出 $\widehat{\sigma}(0)$的估计量，并得到该估计值与理论回归函数之间的标准化偏差，具体如推论 3.1所述，即，

$$m_n := \frac{\sqrt{nh_n}}{\widehat{\sigma}(0)} \left(\widehat{m}(0) - m(0)\right) = \frac{\sqrt{nh_n}}{\widehat{\sigma}(0)} \widehat{m}(0).$$

带宽 h_n 选择为最小二乘交叉验证（LSCV）准则的最小值点，其取值约为 1.13。我们使用该方案抽取 B 个相互独立的 n-样本。为了通过核方法估计 m_n 的密度函数，我们采用经典的带宽选择方法（参见 Silverman（1986），第 40 页） $h_B \approx 1.6n^{-1/5}$。

我们绘制了若干图，展示不同 n、删失率 CR 和截断率 TR 下 m_n 的密度与标准正态分布的对比，以及相应的 QQ图。

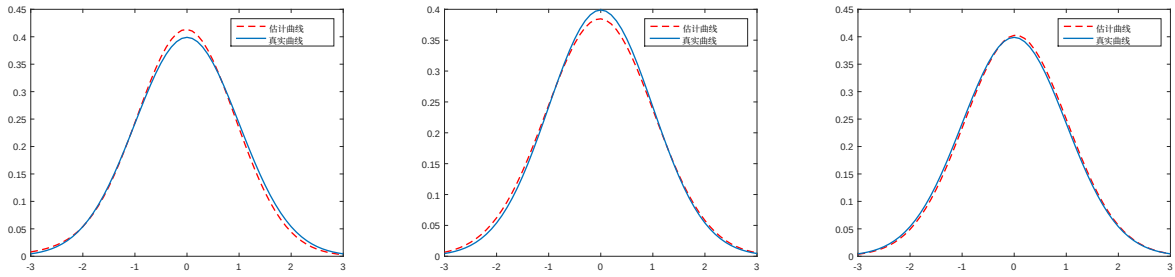


图 1 – $\rho = 0.9, TR \approx 20\%, \quad CR \approx 20\%$ $B = 200$ 分别对应 $n = 50$ 为 100 和 300 的情况。

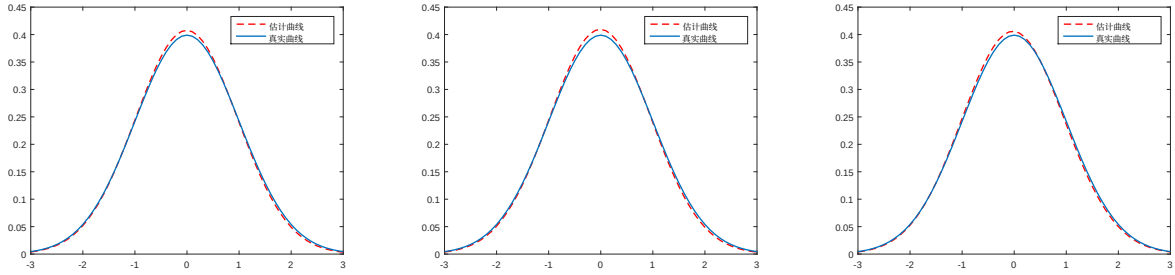


图 2 – $\rho = 0.9, TR \approx 20\%, \quad n = 300, B = 200$ 分别对应 $CR \approx 0\%$、10% 和 40%。

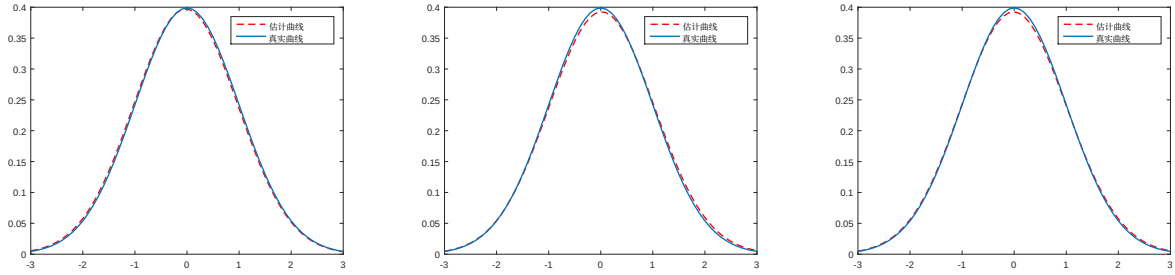


图 3 – $\rho = 0.9, CR \approx 20\%, \quad n = 300, B = 200$ 分别对应 $TR \approx 0\%$、10% 和 40%。

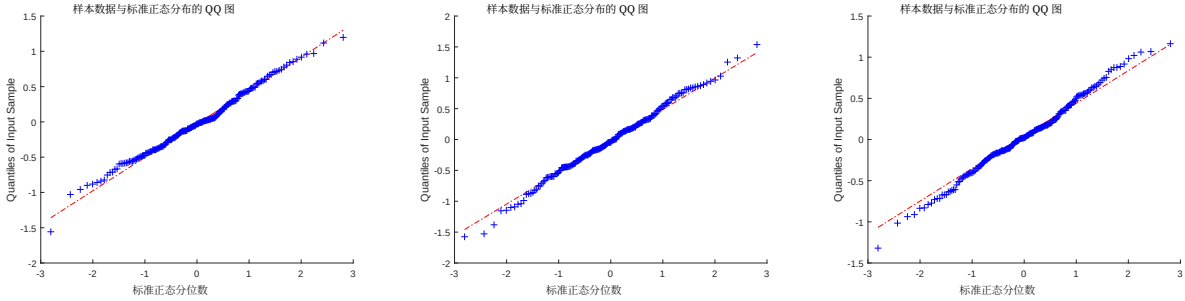


图4 – $\rho = 0.9, TR \approx 20\%, \quad CR \approx 20\%$ $B = 200$ $n = 50$ 分别为 100 和 300。

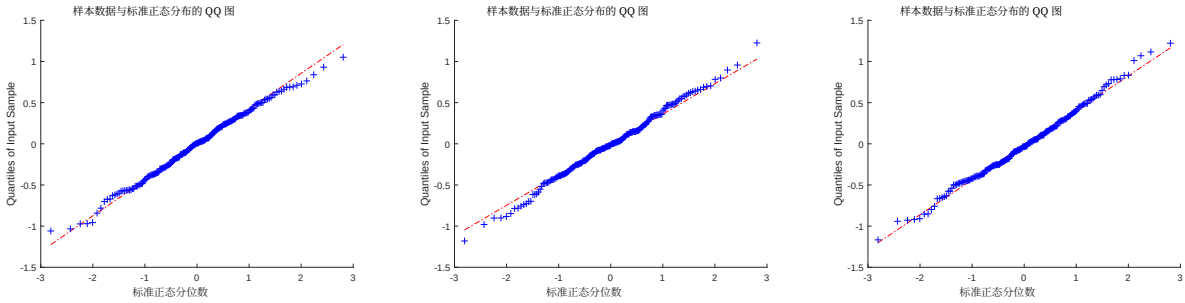


图5 – $\rho = 0.9$, $TR \approx 20\%$, $n = 300$, $B = 200$ 分别对应 $CR \approx 0\%$、10%和40%。

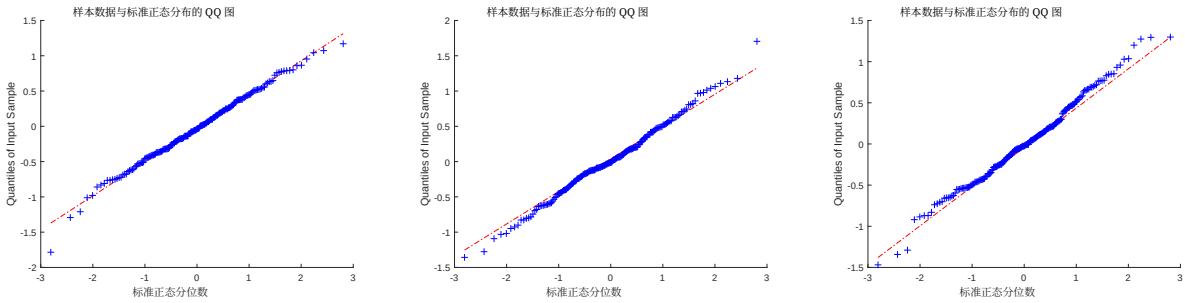


图6 – $\rho = 0.9$, $CR \approx 20\%$, $n = 300$, $B = 200$ 分别对应 $TR \approx 0\%$、10% 和 40%。

从图1-3中可以清楚地看出，对于较大的样本量，估计量分布的正态性表现得更好，并且似乎不受较高截断或删失值的影响，这一点从相应的QQ图（图4-6）中也可以清楚看出。请注意，这些比较针对点 $x = 0$ 给出。对于 $x \neq 0$ 我们也得到了良好的表现（这里取 $x \in [-1.5, 1.5]$），如图7所示。

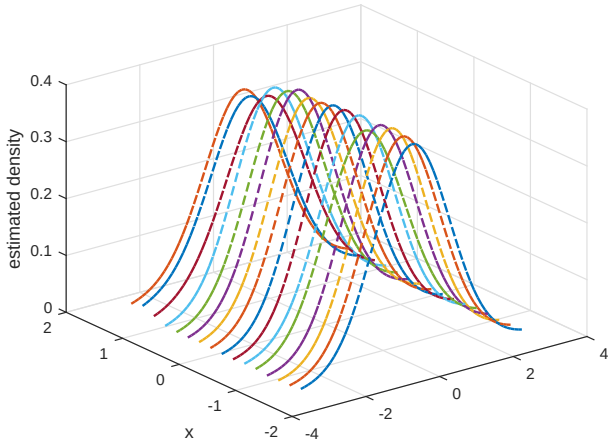


图7 – $\rho = 0.9$, $CR \approx 20\%$, $TR \approx 20\%$, $n = 100$, $B = 200$.

接下来，我们模拟 $m(x)$ 的 95% 置信区间。我们根据 200 次重复实验，绘制了 $x \in [-2, 2]$ 的中位数图，并选取了不同的样本量，分别对应 $\rho = 0.9$、$CR \approx 20\%$ 和 $TR \approx 20\%$（图 8）。

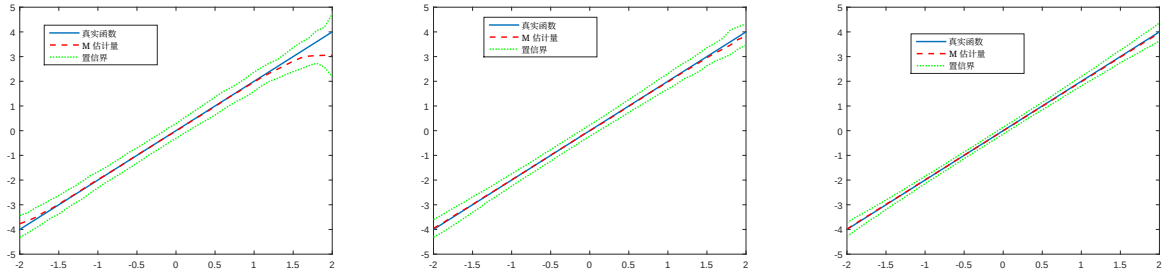


图 8 – $n = 50$ 的 M估计在 $\rho = 0.9$、$TR \approx 20\%$ 和 $CR \approx 20\%$ 下的置信区间，分别对应 100 和 300。

在这里，我们再次清楚地看到，样本量较大时区间宽度有所改善。表 1 也证实了这一点，其中我们报告了基于 200 次重复实验得到的 95% 置信区间的平均宽度和覆盖概率。我们取 $x \in [-1, 1]$，步长为 0.1，并采用 n、CR 和 TR 的不同组合。正如我们已经指出的，样本量增加、删失率降低时，估计量的质量会更好，而截断比例似乎不会对其产生影响。

		$n =$ 50		$n =$ 100		$n =$ 300	
$TR\%$	$CR\%$	覆盖概率	A.宽度	协方差概率	A.width	协方差概率	A.width
20	10	0.7250	0.7370	0.8900	0.5122	0.9620	0.2877
	40	0.5450	0.9227	0.7000	0.6630	0.9250	0.3751
60	10	0.7642	0.7267	0.8845	0.5008	0.9515	0.2880
	40	0.5213	0.9744	0.7251	0.6560	0.9213	0.3657

表 1 – 置信区间的平均宽度和覆盖概率

5 辅助结果和证明。

5.1 弱一致性

命题 3.1 的证明主要基于以下分解

$$\begin{aligned} \widehat{\Psi}_x(x,\theta) - \Psi_x(x,\theta) &= \left\{\widehat{\Psi}_x(x,\theta) - \widetilde{\Psi}_x(x,\theta)\right\} + \left\{\widetilde{\Psi}_x(x,\theta) - \mathbf{E}\left(\widetilde{\Psi}_x(x,\theta)\right)\right\} \\ &\quad + \left\{\mathbf{E}\left(\widetilde{\Psi}_x(x,\theta)\right) - \Psi_x(x,\theta)\right\}. \end{aligned} \tag{18}$$

~我们首先给出 $\Psi_x(x,\theta)$ 的偏差（引理 5.1）和方差（引理 5.2）的显式表达式，接着证明 $\left\{\widehat{\Psi}_x(x,\theta) - \widetilde{\Psi}_x(x,\theta)\right\}$ 可以忽略（引理 5.3）。

引理 5.1 在假设 *(K)* 和 *E1* 下，我们有

$$\mathbf{E}\left(\widetilde{\Psi}(x,\theta)\right) - \Psi(x,\theta) = \frac{h_n^2}{2}\frac{\partial^2\Psi_x(x',\theta)}{\partial x_i \partial x_j}\sum_{1\le i,j\le d}\int_{\mathbb{R}^d} w_i w_j K(w)\,dw + o\left(h_n^2\right) \quad as\ n\to\infty,$$

其中 $x' \in \mathcal{U}(x)$。

证明 该结论可直接由 Benseradj 和 Guessoum (2020) 中引理 6.1 的证明得出。

□

注记 5.1 请注意，要得到偏差的表达式，需要条件 *K2* 和 *E1*；而条件 *R1* 的第一部分和条件 *K1* 足以保证相合性。

引理 5.2 在假设 *K1*、*(R)* 和 *M* 下，我们有

$$Var\left(\widetilde{\Psi}_x(x,\theta)\right) = \frac{\mu}{nh_n^d}\Gamma_x(x,\theta)\int_{\mathbb{R}^d} K^2(w)\,dw + o(\frac{1}{nh_n^d}) \quad as\ n\to\infty.$$

证明 对于 $x \in supp(v)$ 和 $1\le i\le n$，令

$$Q_i(x,\theta) := \frac{1}{\sqrt{h_n^d}}K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right)\psi_x^*(Z_i,\theta) - \mathbf{E}\left[\frac{1}{\sqrt{h_n^d}}K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right)\psi_x^*(Z_i,\theta)\right],$$

其中 $\psi_x^*(Z_i,\theta) := \frac{\mu\delta_i\psi_x}{(Z_i-\theta)\,L(Z_i)\overline{G}(Z_i)}$。显然，由（10）可得

$$\sqrt{nh_n^d}\left(\widetilde{\Psi}_x(x,\theta) - \mathbf{E}\left(\widetilde{\Psi}_x(x,\theta)\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} Q_i(x,\theta),\ n\ge 1. \tag{19}$$

为简化记号，令 $Q_i(x,\theta) =: Q_i$，并定义协方差项 $\gamma_j := Cov(Q_1, Q_{j+1}), j\ge 0$. 鉴于平稳性，我们有

$$\begin{aligned} Var\left(\sqrt{nh_n^d}\widetilde{\Psi}_x(x,\theta)\right) &= Var(Q_1) + \frac{2}{n}\sum_{1\le i<j\le n} Cov(Q_i,Q_j) \\ &=: \gamma_0 + 2\sum_{j=1}^{n-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)\gamma_j. \end{aligned} \tag{20}$$

由（7）、假设 K1、R1 以及控制收敛定理，对于 j=0，我们有

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= \mathbf{E}\left(Q_1\right)^2 = \frac{\mu}{h_n^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} K^2\left(\frac{x-s}{h_n}\right)\mathbb{E}\left[\frac{\psi_x^2\left(Y-\theta\right)}{L\left(Y\right)\overline{G}\left(Y\right)}|X=s\right]v\left(s\right)ds \\
&\quad -\frac{1}{h_n^d}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} K\left(\frac{x-s}{h_n}\right)\mathbb{E}\left[\psi_x\left(Y-\theta\right)|X=s\right]v\left(s\right)ds\right)^2 \\
&= \mu\int\limits_{\mathbb{R}^d} K^2\left(w\right)\mathbb{E}\left[\frac{\psi_x^2\left(Y-\theta\right)}{L\left(Y\right)\overline{G}\left(Y\right)}|X=x-h_nw\right]v\left(x-h_nw\right)dw+O\left(h_n^d\right) \\
&\to \mu\mathbb{E}\left[\frac{\psi_x^2\left(Y-\theta\right)}{L\left(Y\right)\overline{G}\left(Y\right)}|X=x\right]v\left(x\right)\int\limits_{\mathbb{R}^d} K^2\left(w\right)dw \\
&=: \mu\Gamma_x\left(x,\theta\right)\kappa. \qquad (21)
\end{aligned}$$

对于 $j\geq 1$，一方面，利用条件期望的性质和变量替换，可得

$$\begin{aligned}
|\gamma_j| &\leq \frac{1}{h_n^d}\mathbf{E}\left[K\left(\frac{x-X_1}{h_n}\right)K\left(\frac{x-X_{j+1}}{h_n}\right)|\psi_x^*\left(Z_1,\theta\right)\psi_x^*\left(Z_{j+1},\theta\right)|\right] \\
&\quad +\frac{1}{h_n^d}\mathbf{E}^2\left[K\left(\frac{x-X_1}{h_n}\right)|\psi_x^*\left(Z_1,\theta\right)|\right] \\
&\leq \frac{\mu^2}{h_n^dL^2\left(a_H\right)\overline{G}^2\left(b\right)}\mathbf{E}\left[K\left(\frac{x-X_1}{h_n}\right)K\left(\frac{x-X_{j+1}}{h_n}\right)|\psi_x\left(Y_1-\theta\right)\psi_x\left(Y_{j+1}-\theta\right)|\right] \\
&\quad +\frac{\mu^2}{h_n^d}\mathbf{E}^2\left[K\left(\frac{x-X_1}{h_n}\right)\frac{\delta_1|\psi_x\left(Y_1-\theta\right)|}{L\left(Y_1\right)\overline{G}\left(Y_1\right)}\right] \\
&\leq \frac{C^2}{h_n^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} K\left(\frac{x-w}{h_n}\right)K\left(\frac{x-t}{h_n}\right)\mathbf{E}\left[|\psi_x\left(Y_1-\theta\right)\psi_x\left(Y_{j+1}-\theta\right)||X_1=w,X_{j+1}=t\right] \\
&\quad \times\mathbf{v}_j\left(w,t\right)dwdt+\frac{1}{h_n^d}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} K\left(\frac{x-w}{h_n}\right)\mathbb{E}\left[|\psi_x\left(Y-\theta\right)||X=w\right]v\left(w\right)dw\right)^2 \\
&= O\left(h_n^d\right), \qquad (22)
\end{aligned}$$

由假设 K1、R2 和 R3 可得。另一方面，根据 Davydov 引理（参见 Ferraty 和 Vieu, 2006），对于 $s>2$，有

$$|\gamma_j|\leq C\alpha\left(j\right)^{1-2/s}\left(\mathbf{E}\left|Q_j\right|^s\right)^{2/s},$$

w这里，根据闵可夫斯基不等式以及假设 K1 和 R2，可以写成

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left|Q_j\right|^s &\leq \frac{2^s\mu^{s-1}}{h_n^{d(s/2-1)}L^{s-1}\left(a_H\right)\overline{G}^{s-1}\left(b\right)}\int\limits_{\mathbb{R}^d} K^s\left(w\right)\mathbb{E}\left[|\psi_x\left(Y-\theta\right)|^s|X=x-h_nw\right]v\left(x-h_nw\right)dw \\
&= O\left(\frac{1}{h_n^{d(s/2-1)}}\right),
\end{aligned}$$

由此可得

$$|\gamma_j| \leq c\left(h_n^d\right)^{2/s-1}\alpha\left(j\right)^{1-2/s}. \tag{23}$$

To e由引理 5.2 的证明以及（20）和（21），只需证明 t

$$\sum_{j=1}^{n-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)\gamma_j = o\left(1\right), \tag{24}$$

为此，令 $\{\zeta_n\}$ 为一个正整数序列（如下指定），使得 $\zeta_n < n$、 $\zeta_n \to \infty$ 和 $\zeta_n h_n^d \to 0$，并将和式 $\sum\limits_{j=1}^{n-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)\gamma_j$ 分解为以下两项

$$\sum_{j=1}^{n-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)\gamma_j \;=\; \sum_{j=1}^{\zeta_n}\left(1-\frac{j}{n}\right)\gamma_j + \sum_{j=\zeta_n+1}^{n-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)\gamma_j. \tag{25}$$

显然，利用（22）可得

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\zeta_n}\left(1-\frac{j}{n}\right)|\gamma_j| &\leq \zeta_n \max_{1\leq j\leq\zeta_n}\{|\gamma_j|\}\\ &= O\left(h_n^d\zeta_n\right)\\ &= o(1).\end{aligned} \tag{26}$$

No对于（25）右端的第二个和式，由（23）可得

$$\begin{aligned}\sum_{j=\zeta_n+1}^{n-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)|\gamma_j| &\leq c\left(h_n^d\right)^{2/s-1}\sum_{j=\zeta_n}^{\infty}\alpha\left(j\right)^{1-2/s}\\ &\leq c\left(h_n^d\right)^{2/s-1}\zeta_n^{-\varrho}\sum_{j=\zeta_n}^{\infty}j^{\varrho}\alpha\left(j\right)^{1-2/s}\\ &\leq c\left(h_n^d\right)^{2/s-1}\zeta_n^{-\varrho}\sum_{j=\zeta_n}^{\infty}j^{-\lambda(1-2/s)+\varrho},\end{aligned}$$

其中 ϱ 满足 $\left(1-2/s\right) < \varrho < \lambda\left(1-2/s\right) - 1$。通过选取 $\zeta_n = \left(h_n^d\right)^{(2/s-1)/\varrho}$，可得

$$\sum_{j=\zeta_n+1}^{n-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)|\gamma_j| = o(1). \tag{27}$$

注意到 ϱ 根据假设 M 存在。因此，由（25）—（27）可得（24）成立，从而完成引理 5.2 的证明。□

引理 5.3 在假设 *K1*、*R2* 和 *M* 下，我们有

$$\left|\widehat{\Psi}\left(x,\theta\right) - \widetilde{\Psi}\left(x,\theta\right)\right| = O_{\mathbf{P}}\left(n^{-1/2}\right) \quad as\ n\to\infty.$$

证明我们有如下分解

$$\begin{aligned}\left|\widetilde{\Psi}(x,\theta)-\widehat{\Psi}(x,\theta)\right| &\leq \left[\frac{\sup_{t\in[a_H,b]}|F_n(t)-F(t)|}{\inf_{t\in[a_H,b]}|C(t)|-\sup_{t\in[a_H,b]}|(C_n(t)-C(t))|}\right.\\ &\quad\left.+\frac{\sup_{t\in[a_H,b]}|(C_n(t)-C(t))|}{\inf_{t\in[a_H,b]}|C(t)|\left(\inf_{t\in[a_H,b]}|C(t)|-\sup_{t\in[a_H,b]}|(C_n(t)-C(t))|\right)}\right]\\ &\quad\times\left[\frac{1}{nh_n^d}\sum_{i=1}^{n}K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right)\delta_i\left|\psi_x(Z_i-\theta)\right|\right]\\ &=: I_{1n}\times I_{2n}(x,\theta).\end{aligned}$$

一方面，由附录中的引理 1 可得 $\sup|F_n(t)-F(t)|=O_{\mathbf{P}}(n^{-1/2})$ 且 $\sup_{t\in[a_H,b]}|C_n(t)-C(t)|=O_{\mathbf{P}}(n^{-1/2})$。此外，根据 $C(t)$ 的定义，对于所有 $t\in[a_H,b]$，有 $C(t)\geq\frac{1}{\mu}L(a_H)\,\overline{H}(b)>0$，这意味着 $I_{1n}=O_{\mathbf{P}}(n^{-1/2})$，因为 $n\to\infty$. 另一方面，根据 $\epsilon>0$ 的马尔可夫不等式，在假设 K1 和 R2 下，并由 (7)，可得

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(I_{2n}(x,\theta)>\epsilon\right) &\leq \frac{\mathbf{E}\left(I_{2n}(x,\theta)\right)}{\epsilon}\\ &\leq \frac{1}{\mu\epsilon}\int_{\mathbb{R}^d}K(w)\,\mathbb{E}\left[\left|\psi_x(Y-\theta)\right|X_1=x-wh_n\right]v(x-wh_n)dw,\\ &\to \frac{1}{\mu\epsilon}\mathbb{E}\left[\left|\psi_x(Y-\theta)\right|X_1=x\right]v(x)\end{aligned}$$

这意味着 $I_{2n}(x,\theta)=O_{\mathbf{P}}(1)$，由此完成引理 5.3 的证明。 □

命题 3.1 的证明 </style}该结果可由分解 (18)、切比雪夫不等式以及引理 5.1、5.2 和 5.3 立即得出。□

定理 3.1 的证明 定理 3.1 的证明与 Benseradj 和 Guessoum（2020）中定理 4.1 的证明类似，因此略去。□

5.2 渐近正态性

命题 3.2 的证明 由假设 B1 下的引理 5.1 和引理 5.3 可得

$$\sqrt{nh_n^d}\left(\left\{\widehat{\Psi}_x(x,\theta)-\widetilde{\Psi}_x(x,\theta)\right\}+\left\{\mathbf{E}\left(\widetilde{\Psi}_x(x,\theta)\right)-\Psi_x(x,\theta)\right\}\right)=o_{\mathbf{P}}(1),$$

因此，为证明命题 3.2，根据 (18)，足以证明 $\sqrt{nh_n^d}\left[\widetilde{\Psi}(x,\theta)-\mathrm{E}\left(\widetilde{\Psi}(x,\theta)\right)\right]$ 渐近服从正态分布，如下述引理所示。

□

引理 5.4 在假设 *K1*、*(R)*、*M* 和 *B2* 下，我们有

$$\frac{\sqrt{nh_n^d}\left[\widetilde{\Psi}(x,\theta)-\mathbf{E}\left(\widetilde{\Psi}(x,\theta)\right)\right]}{\sigma_0(x,\theta)}\xrightarrow{D}\mathcal{N}(0,1)\quad as\ n\to\infty.$$

证明 我们采用 Doob 小块与大块技巧（参见 Doob 1953）。具体而言，将集合 $\{1,2,...,n\}$ 划分为 $2w_n+1$ 个子集，大块大小为 $p:=p_n$，小块大小为 $q:=q_n$，其中 p_n, q_n 是随 $n.$ 一同趋于无穷的整数。令

$$w:=w_n=\left[\frac{n}{p+q}\right],$$

其中 $[x]$ 表示 x的整数部分。注意，条件 B2 蕴含存在正整数序列 $\{\xi_n\}, \xi_n\to\infty$ 以及 n，使得

$$\xi_n q_n=o\left(\sqrt{nh_n^d}\right)\text{ and }\ \xi_n\left(n/h_n^d\right)^{1/2}\alpha(q_n)=o(1)\ \ as\ \ n\to\infty. \tag{28}$$

现在将小块大小定义为 $q_n=\left[\frac{\sqrt{nh_n^d}}{\xi_n logn}\right]$，大块大小定义为 $p_n=\left[\frac{\sqrt{nh_n^d}}{\xi_n\sqrt{logn}}\right].$。于是，由 (28) 和简单的代数运算可得

$$q/p\longrightarrow 0,\ \ w\alpha(q)\longrightarrow 0,\ \ wq/n\longrightarrow 0,\ \ p/n\longrightarrow 0,\ \ pw/n\longrightarrow 1,\ \ \text{as}\ \ n\to\infty. \tag{29}$$

对于 $1\le z\le w$，定义随机变量

$$\chi_{zn}(x)=\sum_{i=k_z}^{k_z+p}Q_i(x,\theta),\ \ \chi'_{zn}(x)=\sum_{i=l_z}^{l_z+q-1}Q_i(x,\theta),\ \ \chi''_{wn}(x)=\sum_{i=w(p+q)+1}^{n}Q_i(x,\theta), \tag{30}$$

其中 $k_z=(z-1)(p+q)+1$; $l_z=(z-1)(p+q)+p+1$; 于是由 (19) 可得

$$\begin{aligned}\sqrt{nh_n^d}\left[\widetilde{\Psi}(x,\theta)-\mathbf{E}\left(\widetilde{\Psi}(x,\theta)\right)\right] &= n^{-1/2}\left\{\sum_{z=1}^{w}\sum_{i=k_z}^{k_z+p}Q_i(x,\theta)+\sum_{z=1}^{w}\sum_{i=l_z}^{l_z+q-1}Q_i(x,\theta)+\sum_{i=w(p+q)+1}^{n}Q_i(x,\theta)\right\}\\ &= n^{-1/2}\left\{\sum_{z=1}^{w}\chi_{zn}(x)+\sum_{z=1}^{w}\chi'_{zn}(x)+\chi''_{wn}(x)\right\}\\ &=: n^{-1/2}\left\{s'_n(x)+s''_n(x)+s'''_n(x)\right\}.\end{aligned}$$

因此，我们需要证明当 $n\to\infty$ 时，

$$n^{-1}\mathbf{E}\left(s''^2_n(x)\right)\longrightarrow 0\ ;\quad n^{-1}\mathbf{E}\left(s'''^2_n(x)\right)\longrightarrow 0, \tag{31}$$

$$n^{-1}\sum_{z=1}^{w}\mathbf{E}\left(\chi^2_{zn}(x)\right)\longrightarrow\sigma_0^2(x,\theta), \tag{32}$$

$$\left|\mathbf{E}\left(\exp\left(itn^{-1/2}s'_n(x)\right)\right)-\prod_{z=1}^{w}\mathbf{E}\left(\exp\left(itn^{-1/2}\chi_{zn}(x)\right)\right)\right|\longrightarrow 0, \tag{33}$$

$$A_n(\varepsilon)=\frac{1}{n}\sum_{z=1}^{w}\mathbf{E}\left[\chi_{zn}^2(x)\,\mathbb{I}_{\left\{|\chi_{zn}(x)|>\varepsilon\sigma_0(x,\theta)\sqrt{n}\right\}}\right]\longrightarrow 0\qquad\forall\varepsilon>0. \tag{34}$$

事实上，结果（31）表明 $s_n''(x)$ 和 $s_n'''(x)$ 依概率渐近可忽略；结果（33）表明 $s_n'(x)$ 中的被加项 $\chi_{zn}(x)$ 渐近独立；而结果（32）和（34）则是独立情形下 $s_n'(x)$ 渐近正态性的标准林德伯格-费勒条件。

1) 我们先来证明（31）。注意到

$$\begin{aligned}
n^{-1}\mathbf{E}\left(s_n''^2(x)\right) &= n^{-1}Var\left(s_n''(x)\right)\\
&= \frac{1}{n}Var\left(\sum_{z=1}^{w}\chi_{zn}'(x)\right)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{z=1}^{w}Var\left(\chi_{zn}'(x)\right)+\frac{2}{n}\sum_{1\le z_1<z_2\le w}Cov\left(\chi_{z_1n}'(x),\chi_{z_2n}'(x)\right)\\
&=: J_{1n}(x)+J_{2n}(x).
\end{aligned} \tag{35}$$

由平稳性和引理 5.2 可得

$$\begin{aligned}
J_{1n}(x) &= \frac{w}{n}Var\left(\chi_{1n}'(x)\right)\\
&= \frac{w}{n}Var\left(\sum_{i=1}^{q}Q_i(x,\theta)\right)\\
&= \frac{wq}{n}Var\left(\frac{1}{\sqrt{q}}\sum_{i=1}^{q}Q_i(x,\theta)\right).
\end{aligned}$$

注意，将 n 替换为 q_n 后，引理 5.2 仍然成立，因此由条件（29）可得

$$\begin{aligned}
J_{1n}(x) &= \frac{wq}{n}\sigma_0^2(x,\theta)\left(1+o(1)\right)\\
&= o(1).
\end{aligned} \tag{36}$$

对于 $J_{2n}(x)$，我们有

$$\begin{aligned}
|J_{2n}(x)| &\le 2n^{-1}\sum_{1\le i<j\le n}\left|Cov\left(Q_i(x,\theta),Q_j(x,\theta)\right)\right|\\
&= o(1),
\end{aligned} \tag{37}$$

由（24）可知。因此，由（35）—（37）可得

$$n^{-1}\mathbf{E}\left(s_n''^2(x)\right)=o(1). \tag{38}$$

类似地，由平稳性、（21）、（37）和条件（29）可知

$$\begin{aligned} n^{-1}\mathbf{E}\left(s_n'''^2(x)\right) &= \frac{1}{n}Var\left(\chi_{wn}''(x)\right) \\ &= \frac{1}{n}Var\left(\sum_{i=w(p+q)+1}^{n} Q_i(x,\theta)\right) \\ &= \frac{n-w(p+q)}{n}Var\left(Q_1(x,\theta)\right)+\frac{2}{n}\sum_{w(p+q)+1\le i<j\le n} Cov(Q_i,Q_j) \\ &\le \frac{n-w(p+q)}{n}Var\left(Q_1(x,\theta)\right)+\frac{2}{n}\sum_{1\le i<j\le n}\left|Cov\left(Q_i,Q_j\right)\right| \\ &= o(1)\left(\sigma_0^2(x,\theta)+o(1)\right)+o(1)\to 0, \quad as \quad n\to\infty, \end{aligned} \tag{39}$$

因此，由（38）和（39），（31）得证。

2) 至于（31），根据平稳性、条件（29）和引理 5.2，很容易看出

$$\begin{aligned} n^{-1}\sum_{z=1}^{w}\mathbf{E}\left(\chi_{zn}^2(x)\right) &= \frac{w}{n}\mathbf{E}\left(\chi_{1n}^2(x)\right) \\ &= \frac{w}{n}Var\left(\sum_{i=1}^{p}Q_i(x,\theta)\right) \\ &= \frac{wp}{n}Var\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\sum_{i=1}^{p}Q_i(x,\theta)\right) \\ &= \frac{pw}{n}\sigma_0^2(x,\theta)\left(1+o(1)\right)\to\sigma_0^2(x,\theta), \end{aligned}$$

（32）得证。

3) 为证明（33），我们利用 Volkonskii 和 Rozanov（1959）中的引理 1.1，并将其应用于 $V_z =: \exp\left(itn^{-1/2}\chi_{zn}(x)\right)$，得到

$$\left|\mathbf{E}\left(\exp\left(itn^{-1/2}s_n'(x)\right)\right)-\prod_{z=1}^{w}\mathbf{E}\left(\exp\left(itn^{-1/2}\chi_{zn}(x)\right)\right)\right|\le 16(w-1)\alpha(q+1)\le 16w\alpha(q),$$

由于条件（29），当 n 趋于无穷大时，它趋于零。

4) 最后，我们证明（34）。为此，我们需要采用截断方法，因为 ψ_x 不一定有界。令

$$\psi_{\xi_n}^*(Z_i,\theta):=\psi_x^*(Z_i,\theta)\,\mathbb{I}_{\{|\psi_x(Z_i-\theta)|\le\xi_n\}},$$

并定义

$$\begin{aligned} Q_{\xi_n,i}(x,\theta) &:= \frac{1}{\sqrt{h_n^d}}K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right)\psi_{\xi_n}^*(Z_i,\theta)-\mathbf{E}\left[\frac{1}{\sqrt{h_n^d}}K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right)\psi_{\xi_n}^*(Z_i,\theta)\right], \\ \widetilde{\Psi}_{x,\xi_n}(x,\theta) &:= \frac{1}{nh_n^d}\sum_{i=1}^{n}K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right)\psi_{\xi_n}^*(Z_i,\theta). \end{aligned} \tag{40}$$

显然我们有

$$\sqrt{nh_n^d}\left[\widetilde{\Psi}_{x,\xi_n}(x,\theta)-\mathbf{E}\left(\widetilde{\Psi}_{x,\xi_n}(x,\theta)\right)\right]=n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}Q_{\xi_n,i}(x,\theta).$$

令 χ_{z,ξ_n} 由（30）给出，其中以 $Q_{\xi_n,i}\cdot$ 替换 Q_i。由（40）和条件 K1 可清楚看出，$Q_{\xi_n,i}$ 有界，因为 $|Q_{\xi_n,i}|\leq c\frac{\xi_n}{\sqrt{h_n^d}}\cdot$ 因此，由（30）可得

$$\max_{1\leq z\leq w}|\chi_{z,\xi_n}|/\sqrt{n}\leq c\frac{p_n\xi_n}{\sqrt{nh_n^d}}\to 0,$$

根据 p_n 的定义可知。因此，当 n 足够大时，集合 $\{|\chi_{z,\xi_n}|>\varepsilon\sigma_{0,\xi_n}(x,\theta)\sqrt{n}\}$ 为空集，其中与引理 5.2 中一样，我们有

$$Var\left(\sqrt{nh_n^d}\widetilde{\Psi}_{x,\xi_n}(x,\theta)\right)\to\mu\Gamma_{x,\xi_n}(x,\theta)\int_{\mathbb{R}^d}K^2(w)\,dw=:\sigma_{0,\xi_n}^2(x,\theta),$$

$$\Gamma_{x,\xi_n}(x,\theta):=\mathbb{E}\left[\frac{\psi_x^2(Y_1-\theta)\,\mathbb{I}_{\{|\psi(Y_1-\theta)|\leq\xi_n\}}}{L(Y_1)\,\overline{G}(Y_1)}|X_1=x\right]v(x),\tag{41}$$

（与条件 R1 中定义的 $\Gamma_x(x,\theta)$ 比较），于是（34）对 $\chi_{z,\xi_n}\cdot$ 成立。因此可得

$$n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}Q_{\xi_n,i}(x)\xrightarrow{D}\mathcal{N}\left(0,\sigma_{0,\xi_n}^2(x,\theta)\right).$$

$_n$为了将证明推广到 $n^{-1/2}\sum Q_i$，按照 Masry（2005）中（5.35d）的证明，只需证明

$$\frac{1}{n}Var\sum_{i=1}^{n}\overline{Q}_{\xi_n,i}(x)\to 0\text{ as }n\to\infty\text{ and then }\xi_n\to\infty,\tag{42}$$

其中 $\overline{Q}_{\xi_n,i}:=Q_i-Q_{\xi_n,i}$.
注意，$\overline{Q}_{\xi_n,\ i}$与 Q_i 具有相同的结构，只需用 $\psi_x\ (Z_i-\theta)\ \mathbb{I}_{\{|\psi_x\ (Z_i-\theta)\ |>\xi_n\}}$ 替代 $\psi_x\ (Z_i-\theta)$。因此，根据引理 5.2 的论证，我们有

$$\frac{1}{n}Var\sum_{i=1}^{n}\overline{Q}_{\xi_n,i}(x)\to\mu\overline{\Gamma}_{x,\xi_n}(x,\theta)\int_{\mathbb{R}^d}K^2(w)\,dw,$$

其中

$$\overline{\Gamma}_{x,\xi_n}(x,\theta):=\mathbb{E}\left[\frac{\psi_x^2(Y_1-\theta)\,\mathbb{I}_{\{|\psi(Z_i,\theta)|>\xi_n\}}}{L(Y_1)\,\overline{G}(Y_1)}|X_1=x\right]v(x).$$

由控制收敛定理 $\overline{\Gamma}_{x,\ \xi_n}(x,\theta)\ \to\ 0$ 当 $\xi_n\ \to\ \infty$. 这就证明了（42），并完成了引理 5.4 和命题 3.2 的证明。□

定理 3.2 的证明 利用公式 (11) 可得

$$\sqrt{nh_n^d}\left(\widehat{m}(x)-m(x)\right)=-\frac{\sqrt{nh_n^d}\widehat{\Psi}_x(x,m(x))}{\frac{\partial\widehat{\Psi}}{\partial\theta}(x,\widehat{m}^*(x))},\tag{43}$$

若分母不为零。根据 Slutsky 定理和命题 3.2 以及 $\theta = m(x)$，只需证明 (43) 中的分母依概率收敛到 $\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}(x, m(x))$，这由下面的引理给出。□

引理 5.5 在命题 *3.1* 的假设和条件 *(R′)* 下，我们有

$$\frac{\partial \widehat{\Psi}_x}{\partial \theta}\left(x, \widehat{m}^*(x)\right) \xrightarrow{\mathbf{P}} \frac{\partial \Psi_x}{\partial \theta}\left(x, m(x)\right) \quad as\ n \to \infty.$$

证明我们写作

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial \widehat{\Psi}_x}{\partial \theta}\left(x, \widehat{m}^*(x)\right) - \frac{\partial \Psi_x}{\partial \theta}\left(x, m(x)\right)\right| &\leq \left|\frac{\partial \widehat{\Psi}_x}{\partial \theta}\left(x, \widehat{m}^*(x)\right) - \frac{\partial \widehat{\Psi}_x}{\partial \theta}\left(x, m(x)\right)\right| \\
&\quad + \left|\frac{\partial \widehat{\Psi}_x}{\partial \theta}\left(x, m(x)\right) - \frac{\partial \Psi_x}{\partial \theta}\left(x, m(x)\right)\right| \\
&\leq J_1(x) + J_2(x).
\end{aligned}$$

对于 $J_1(x)$，我们记作

$$\begin{aligned}
J_1(x) &\leq \frac{\mu_n}{n h_n^d} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right) \frac{\delta_i}{L_n(Z_i)\left(1 - G_n(Z_i)\right)} \left|\frac{\partial \psi_x\left(Z_i - \widehat{m}^*(x)\right)}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi_x\left(Z_i - m(x)\right)}{\partial \theta}\right| \\
&\leq \mu_n \left(L(a_H) - \sup_{t \in [a_H, b]} |(L_n(t) - L(t))|\right)^{-1} \left(\overline{G}(b) - \sup_{t \in [a_H, b]} |(G_n(t) - G(t))|\right)^{-1} \\
&\quad \times \sup_{t \in [a_H, b]} \left|\frac{\partial \psi_x\left(t - \widehat{m}^*(x)\right)}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi_x\left(t - m(x)\right)}{\partial \theta}\right| \frac{1}{n h_n^d} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right),
\end{aligned}$$

由马尔可夫不等式以及假设 K1 和 R2，我们可以轻易证明

$$\frac{1}{n h_n^d} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right) = O_{\mathbf{P}}(1).$$

此外，根据 $\partial / \partial \theta\left(\psi_x(t - \theta)\right)$ 在 $m(x)$ 处的连续一致性，利用定理 3.1 可知，上确界 $\sup_{t \in [a_H, b]} \left|\frac{\partial \psi_x}{\partial \theta}\left(t - \widehat{m}^*(x) - \overline{\partial \psi_x}\right)(t - m(x) - \overline{x})\right|$ 依概率可忽略。因此，Liang (2011) 的引理 5.5 和附录中的引理 1 可推出 $J_1(x) = o_{\mathbf{P}}(1)$。最后，通过采用与命题 3.1 证明中类似的论证，在假设 R′1、R′2 和 R′3 取代 R1、R2 和 R3 的情况下，我们可以证明 $J_2(x)$ 依概率收敛于零。由此完成引理 5.5 和定理 3.2 的证明。□

附录

本节将给出一些帮助我们获得研究结果的补充性新结果。我们将推导依赖情形下寿命分布和删失分布的 TJW 乘积极限估计量的一致弱收敛速率，这些结果对于我们的研究以及其他 LTRC 强混合框架都是有用的工具。

引理 1 假设 $\alpha(k) = O\left(k^{-\lambda}\right)$,对于某个 $\lambda > 3.$，则对任意 $b \in [a_H, b_H)$，我们有

i. 上确界 $\sup_{y\in[a_H,b]} |C_n(y) - C(y)| = O_{\mathbf{P}}\left(n^{-1/2}\right)$; **ii.** 上确界 $\sup_{y\in[a_H,b]} |F_n(y) - F(y)| = O_{\mathbf{P}}\left(n^{-1/2}\right)$; **iii.** 上确界 $\sup_{y\in[a_H,b]} |G_n(y) - G(y)| = O_{\mathbf{P}}\left(n^{-1/2}\right)$;
iv. $|\mu_n - \mu| = O_{\mathbf{P}}\left(n^{-1/2}\right)$.

引理 1 的证明 为证明 (i)，注意到

$$C_n(y) - C(y) = (\mathbf{L}_n(y) - \mathbf{L}(y)) - (\mathbf{H}_n(y) - \mathbf{H}(y)). \tag{44}$$

由 Liang (2011) 中的 (6.5) 可知

$$\sup_{y\in[a_H,b]} |\mathbf{L}_n(y) - \mathbf{L}(y)| = O_{\mathbf{P}}\left(n^{-1/2}\right) \tag{45}$$

通过采用与（45）中类似的论证，我们可以证明

$$\sup_{y\in[a_H,b]} |\mathbf{H}_n(y) - \mathbf{H}(y)| = O_{\mathbf{P}}\left(n^{-1/2}\right) \tag{46}$$

于是，结合式（44）、（45）和（46）即可证明（i）。
(ii) 众所周知（参见例如 Guessoum 和 Tatachak (2020)），累积风险函数 Λ 定义为

$$\Lambda(y) = \int_{a_H}^{y} \frac{d\mathbf{H}_1(t)}{C(t)},$$

其中，$\mathrm{H}_1(y) := \mathrm{H}_1(\infty, y)$ $\Lambda(y)$ 可估计为

$$\Lambda_n(y) = \int_{a_H}^{y} \frac{d\mathbf{H}_{1,n}(t)}{C_n(t)},$$

其中 $\mathrm{H}_{1,n}(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{\{Z_i\le t,\ \delta_i=1\}}$. 显然

$$\Lambda_n(y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{I}_{\{Z_i\le y,\ \delta_i=1\}}}{C_n(Z_i)}.$$

根据 Chen 和 Day (2003) 的引理 2.1，对于 $y \in [a_H, b]$，我们有

$$F_n(y) - F(y) = (1 - F(y))(\Lambda_n(y) - \Lambda(y)) + O\left(\frac{\log\log n}{n}\right) \text{ a.s,} \tag{47}$$

并通过分部积分可得

$$\begin{aligned}\Lambda_n(y)-\Lambda(y) &= \left\{\frac{\mathbf{H}_{1,n}(y)-\mathbf{H}_1(y)}{C(y)}-\frac{\mathbf{H}_{1,n}(a_H)-\mathbf{H}_1(a_H)}{C(a_H)}\right\}\\ &\quad+\int_{a_H}^{y}\frac{C(t)-C_n(t)}{C_n(t)C(t)}d\mathbf{H}_{1,n}(t)+\int_{a_H}^{y}\frac{\mathbf{H}_{1,n}(t)-\mathbf{H}_1(t)}{C^2(t)}dC(t)\\ &=: I_1(y)+I_2(y)+I_3(y).\end{aligned}$$

由 Liang和Alvarez（2011）中的式（35），我们有

$$\sup_{y\in[a_H,b]}|\mathbf{H}_{1,n}(y)-\mathbf{H}_1(y)|=O_{\mathbf{P}}\left(n^{-1/2}\right),$$

由此可得 $\sup_{y\in[a_H,b]}|I_1(y)+I_3(y)|=O_{\mathbf{P}}\left(n^{-1/2}\right)$。此外，根据（i）以及 $\int_{a_H}^{y}\frac{d\mathbf{H}_{1,n}(t)}{C_n(t)C(t)}\xrightarrow{}\int_{a_H}^{y}\frac{d\mathbf{H}_1(t)}{C^2(t)}<\infty$这一事实，可得 $\sup_{y\in[a_H,b]}|I_2(y)|=O_{\mathbf{P}}\left(n^{-1/2}\right)$.然后

$$\sup_{y\in[a_H,b]}|\Lambda_n(y)-\Lambda(y)|=O_{\mathbf{P}}\left(n^{-1/2}\right),$$

这与（47）结合起来，便得到结果（ii）。

（iii）我们很容易验证

$$\overline{H}_n(t)=\overline{F}_n(t)\overline{G}_n(t).$$

因此注意到

$$H_n(t)-H(t)=\overline{G}(t)(F_n(t)-F(t))+\overline{F}(t)(G_n(t)-G(t))-(G_n(t)-G(t))(F_n(t)-F(t)) \quad (48)$$

因此，由 Liang (2011) 的引理 5.5 和 (ii)，结合 (48)，可得 (iii) 的结论。接下来证明 (iv)。注意到

$$\begin{aligned}\mu_n-\mu &= \frac{1}{C_n(y)C(y)}\left\{C(y)\overline{H}_n(y)(L_n(y)-L(y))-L(y)\overline{H}(y)(C_n(y)-C(y))\right.\\ &\quad\left.-L(y)C(y)(H_n(y)-H(y))\right\}. \quad (49)\end{aligned}$$

因此，由 (i) 和 Liang (2011) 的引理 5.5，结合 (49)，可得 (iv) 的结论，从而引理 1 的证明完成。□

参考文献

Attaoui, S., Laksaci, A. 和 Ould Saïd, E. (2015). 拟相依过程的回归函数 M 估计量的渐近结果，函数统计学及其应用，MICPS-2013 论文选集，3-28.Springer。

Benseradj, H. 和 Guessoum, Z. (2020). α-混合条件下不完整数据的回归函数 M 估计量的强一致收敛速率。统计学通讯——理论与方法，DOI：10.1080/03610926.2020.1764037. Boente, G. 和 Fraiman, R. (1990). 混合过程非参数模型稳健估计量的渐近分布。统计年刊。 18 : 891-906. Bradley, R.C. (2007). 强混合条件导论，第 1、2 和 3 卷。$Kendrick\ Press$，Heber City（犹他州）。Cai, Z. (1998). 删失相关数据的 Kaplan-Meier 估计量的渐近性质。统计与概率通讯，37 : 381-389. Carbonez, A., Györfi, L., 和 van der Meulen, E.C. (1995). 随机删失下回归函数的分割估计。统计与决策，13 : 21-37. Chen, Q. 和 Dai, Y. (2003). 截断和删失相关数据的密度高阶导数及风险率函数的核估计。数学科学学报，23B, 477-486. Collomb, G. 和 Härdle, W. (1986). 稳健非参数时间序列分析与预测中的强一致收敛速率：基于相关观测的核回归估计。随机过程及其应用。 23 : 77-89. Doob, J.L. (1953). 随机过程，纽约：John Wiley & Sons。Ferraty, F. 和 Vieu, P. (2006). 非参数函数型数据分析：理论与实践。施普林格出版社，纽约。Gijbels, I. 和 Wang, J.L. (1993). 截断和删失数据生存函数的强表示及其应用，多元分析杂志，47 : 210-229. Gorodetskii, V. V. (1977). 关于线性序列的强混合性质。概率论及其应用，22 : 411-413. Guessoum, Z. 和 Ould Saïd, E. (2012). 删失时间序列回归函数核估计量的中心极限定理，非参数统计杂志，24 : 379-397. Guessoum, Z. 和 Tatachak, A. (2020) 截断-删失相关数据的渐近结果 $Sankhya\ B$ 82 : 142-164 Härdle, W. (1984). 回归函数的稳健估计。多元分析杂志。 14 : 169-180. He, S., 和 Yang, G. (1998). 随机截断模型中截断概率的估计，统计年刊，26 : 1011-1027. Iglesias-Pérez, C. 和 González-Manteiga, W. (1999). 截断和删失数据广义乘积极限估计量的强表示及其若干应用，非参数统计杂志。10 : 213-244.

Laïb，N. 和 Ould Saïd，E.（2000）。遍历假设下自回归函数的稳健非参数估计。加拿大统计学杂志 28：817-828。Lemdani，M. 和 Ould said，E.（2017）。删失数据的非参数稳健回归估计，统计学论文，58：505-525。Liang，H.Y. 和 De Uña-Álvarez，J.（2011）。删失相关观测的条件分位数估计量的渐近性质，统计数学研究所年刊，63：267-289。Liang，H.Y.（2011）。截断和α-混合条件下回归函数估计的渐近正态性，统计理论与方法通讯，40：1999-2021。Liang，H.Y.、De Uña-Álvarez，J.、Iglesias-Pérez，W.（2012）。截断、删失和相关数据下条件分布估计量的渐近性质，*Test* 21：790-810。Liang，H.Y. 和 Liu，A. A.（2013）。截断、删失和相关数据下条件密度的核估计。多元分析杂志，120：40-58。Liang，H.Y.、LI，D. 和 MIAO，T.（2015）。截断、删失和相关数据下的条件分位数估计 中国数学年刊36B：969-990。Masry，E.（2005）相关函数型数据的非参数回归估计：渐近正态性，*Stochastic Process. Appl*。115：155-177。Ould Saïd，E. 和 Lemdani，M.（2006）。随机截断数据下非参数回归函数估计量的渐近性质。统计数学研究所年刊58：357-378。Robinson，P. M.（1984）。稳健非参数自回归。统计学讲义26：247-255。Rosenblatt，M.（1971）。马尔可夫过程。结构与渐近行为。柏林，Springer-Verlag，。Silverman，B.W.（1986）。统计与数据分析中的密度估计。查普曼与霍尔出版社，伦敦。Sun，L.Q 和 Zhou，X.（2001）。截断相关数据的生存函数和密度估计。统计与概率通讯，52：47-57。Tsai，W. Y、Jewell，N. P. 和 Wang，M. C.（1987）。关于右删失和左截断下乘积极限估计量的注记。生物统计学，74：883-886。Tsybakov，A.（1983）。函数的稳健估计。控制与信息理论问题 18：39-52。Volkonskii.VA 和 Rozanov.YA（1959）。随机函数的若干极限定理。概率论及其应用 4：178-197。Wang，J.F. 和 Liang，H.Y.（2012）。截断和相关数据下回归函数 M 估计量的渐近性质。*J. Korean Stat. Soc*。41：351-367。

Withers，C. S.（1981）。线性过程成为强混合过程的条件。概率论及相关领域.57：477-480。

Zhengyan, L. 和 Chuanrong, L.（2010）。混合相依随机变量的极限理论，数学及其应用，第378卷，中国。