arXiv:2305.04389v1 [math.DG] 7 May 2023

芬斯勒时空上的最优传输与类时下界里奇曲率界

Mathias Braun*、Shin-ichi Ohta†

2023年5月

摘要 我们证明，赋备光滑参考测度的芬斯勒时空，如果其诱导的加权里奇曲率 Ric_N 在每个类时方向上都由实数 K 从下方有界，则对所有 $q \in (0, 1)$均满足类时曲率-维数条件 $\mathrm{TCD}_q(K, N)$。我们还证明了这一结果的非正维版本（$N \leq 0$）。我们的讨论建立在关于 q-Lorentz–Wasserstein 距离的蒙日问题的可解性，以及对概率测度的q-测地线的刻画之上。我们工作的一个推论是 Lorentz–Finsler 情形下尖锐的类时 Brunn–Minkowski 不等式。

1 引言

近年来，关于洛伦兹流形推广空间的里奇曲率下界研究取得了令人瞩目的进展。尤为重要的是，McCann [45] 开创性地证明了加权类时 Ricci 曲率下界与熵泛函的凸性之间的等价关系，并以最优传输理论为表述工具（另见 [52] ）；随后，[21] Cavalletti–Mondino 在 Kunzinger–S¨amann 引入的洛伦兹长度空间框架基础上，发展了类时里奇曲率有下界的非光滑测度洛伦兹空间的合成理论（另见 [13, 51] ，其中介绍了这两种方法的近期替代方案）。

这一发展让人联想到（并且也正是受到其启发的）由 Lott、Sturm、Villani 以及许多其他学者发展起来的、极为成功的度量测度空间 曲率-维数条件 $\mathrm{CD}(K, N)$ 理论（有关这一理论的良好概述，请参见 [65] ）。该条件由概率测度的瓦瑟斯坦空间中沿测地线的某个熵泛函的凸性性质来定义（换言之，即相对于特定代价函数的最优传输）。对于加权黎曼流形（M， g，$\mathrm{e}^{-\psi}\mathrm{vol}_g$），其中 ψ是权函数，

*数学科学研究所，222 College Street，多伦多，安大略省 M5T 3J1，加拿大。braun@math.toronto.edu

†大阪大学数学系，日本大阪 560-0043。s.ohta@math.sci.osaka-u.ac.jp

CD(K，N) 等价于加权 Bakry–Émery Ricci 张量 Ric_N [7]具有下界 $\mathrm{Ric}_N \geq K$。因此，满足 CD(K，N) 的度量测度空间可以被视为具有 $\mathrm{Ric}_N \geq K$的非光滑空间。

在洛伦兹时空框架下，这些刻画 [45, 52] 尤其给出了霍金–彭罗斯强能量条件 [32, 34]的一个非光滑类比。这一性质被视为引力具有吸引性而非排斥性 [19]的原因。另一个具有物理意义的后果是：在存在例如俘获面的情况下，理论会预言奇点。事实上，Cavalletti–Mondino 通过其方法获得了一个合成霍金奇点定理，该定理推广了适用于高正则性和低正则性时空的经典 [32, 33] 及近期 [20, 27, 30, 38] 结果，参见 [15]。这显示了这些工具的强大之处，也使它们在光滑和非光滑框架下都颇具吸引力。

在洛伦兹框架下的加权芬斯勒时空中，[40, 41, 42]已经建立了一些奇点定理、比较定理和一个类时分裂定理。如前所述，这些结果都由类时曲率界所蕴含。因此，自然可以预期：通过类时曲率-维数条件 TCD(K, N)对加权类时 Ricci 曲率下界 $\mathrm{Ric}_N \geq K$ 的已知刻画（为简便起见，这里省略其对参数 $q \in (0,1)$ 的依赖）能够推广到加权芬斯勒时空（配备适当的参考测度）。

本文旨在确立这一等价关系（定理 5.9、6.1），并将类时 Brunn–Minkowski 不等式作为几何应用加以推导（定理 5.11）。我们的刻画不仅涵盖 $N \in [n, +\infty]$，也涵盖“维数”非正的情形 $N \in (-\infty, 0]$（这一情形可追溯至 [56, 57] 在黎曼或芬斯勒框架中的研究），即使在洛伦兹情形下，这也是新的。关于这一 N 范围内的一些研究，可参见 [23, 66, 67] 。

我们通过 TCD(K，N) 对 $\mathrm{Ric}_N \geq K$ 的刻画有两项主要贡献。一方面，它将 TCD(K，N) 的适用范围扩展到 Lorentz–Finsler 流形；与其熵型或约化型对应条件不同，定义 5.7 中的“尖锐”TCD 条件即使在真正的洛伦兹时空框架中也是新颖的。Lorentz–Finsler 流形构成的类别远比洛伦兹流形广泛，也为物理解释提供了更大空间。事实上，它们在多种引力研究路径中发挥着关键作用，例如介质中的场，以及暗物质或暗能量模型，并已解决一些重要难题；参见 [10, 35, 43, 47, 64] 及其中的参考文献。因此，TCD(K，N) 成立显然是一项有意义的进展。另一方面，这一成立性强烈促使我们在 TCD(K，N) 之外，研究某种恰当的“洛伦兹型”条件，以便讨论真正的洛伦兹性质，也就是度量测度空间在洛伦兹背景下的黎曼曲率-维数条件 RCD(K，N) 的类似物。引入 RCD(K，N) 的一个动机是，芬斯勒流形可能满足 CD(K，N)。具体而言，CD(K，N) 与 $\mathrm{Ric}_N \geq K$ 等价，这在芬斯勒背景下同样成立 [55, 58]。为了讨论真正的黎曼性质（例如文献 [28], 中得到的等距分裂定理），人们在 CD(K，N) 中加入了热流线性这一额外假设 [4, 5, 25, 29]。在芬斯勒流形上，这种线性等价于流形为黎曼流形。

除了上述对 TCD(K, N) 的刻画之外，我们还证明，以三角形比较 [2, 31, 37, 51] 为依据的合成类时截面曲率下界或上界会排除非洛伦兹型的 Lorentz–Finsler 流形（命题 2.8）。此外，遵循 Figalli–Juillet [26] 的思路，我们给出了一个更简洁的证明，说明沿最优传输的中间测度绝对连续；该思路基于测度收缩性质。

本文组织如下。第 2 节回顾 Lorentz–Finsler 几何的基础知识（包括弧长的变分公式以及三角形比较的无效性）。第 3 节讨论 Lorentz–Finsler 距离函数；我们尤其证明了类时割迹上的半凸性以及半凹性的失效。第 4 节为 $q \in (0,1]$ 引入 q-Lorentz–Wasserstein 距离，并研究相关的最优传输（q-测地线）。随后，我们按照[45]介绍 q-分离这一有用概念。第 5 节致力于主要结果的前半部分，即我们证明 $\mathrm{Ric}_N \geq K$ 在类时方向上蕴含 TCD(K, N)。我们还将类时 Brunn–Minkowski 不等式作为一个应用加以证明。最后，在第 6 节中，我们证明从 TCD(K, N) 到 $\mathrm{Ric}_N \geq K$ 的逆向蕴含。

致谢 MB 得到了数学科学研究所的支持。他感谢大阪大学在“几何与概率 2022”研讨会期间给予的热情接待。SO 部分得到了 JSPS 科学研究补助金（KAKENHI）19H01786、22H04942 的资助。他感谢数学科学研究所在“里奇曲率界的若干方面”研讨会期间给予的热情接待。作者衷心感谢 Robert McCann 和 Ettore Minguzzi 就本项目所进行的多次有益讨论，并感谢埃尔温·薛定谔国际数学物理研究所，在“非正则时空几何”研讨会期间给予的热情接待。

2 芬斯勒时空

我们回顾开展本研究计划所需的芬斯勒时空理论。关于洛伦兹几何的基础知识，请读者参阅 [11, 33, 59]；关于包括 Lorentz–Finsler流形在内的一些推广，请参阅[46, 48, 49, 50] 。

本文始终设 M 为一个维数为 $\dim M = n \geq 2$、无边界的连通 C^∞-流形。给定开集 $U \subset M$ 上的局部坐标系 $(x^\alpha)_{\alpha=1}^n$，我们将用 $x \in U$ 表示切向量 $v \in T_xM$，记作 $v = \sum_{\alpha=1}^n v^\alpha \, (\partial/\partial x^\alpha)|_x$。

2.1 Lorentz–Finsler流形的预备知识

以下记号沿用 [40, 41, 42] 中的约定，但其中 $\dim M$ 已设为 $n+1$。

定义 2.1（Lorentz–Finsler 结构）。 M上的一种洛伦兹–芬斯勒结构 是一个函数 $L\colon TM \longrightarrow \mathbb{R}$，满足以下条件。

(1) $L \in C^\infty(TM \setminus 0)$，其中 0 表示零截面。

(2) 对所有 $v \in TM$ 和所有 $c > 0$，$L(cv) = c^2 L(v)$。

(3) 对任意 $v \in TM \setminus 0$，对称矩阵

$$\big(g_{\alpha\beta}(v)\big)_{\alpha,\beta=1}^{n} := \left(\frac{\partial^2 L}{\partial v^\alpha \partial v^\beta}(v)\right)_{\alpha,\beta=1}^{n} \tag{2.1}$$

非退化，且其符号为 $(-, +, \ldots\ldots, +)$。

那么我们称 (M, L) 为 *Lorentz–Finsler*流形。

若对所有 $v \in TM$，$L(-v) = L(v)$，则称 (M, L) 可逆。给定任意 $v \in T_xM \setminus \{0\}$，利用 (2.1) 定义 T_xM 上的洛伦兹度量 g_v，如下：

$$g_v\left(\sum_{\alpha=1}^{n} a^\alpha \left.\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right|_x, \sum_{\beta=1}^{n} b^\beta \left.\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right|_x\right) := \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} g_{\alpha\beta}(v)\, a^\alpha\, b^\beta. \tag{2.2}$$

由欧拉齐次函数定理可得 $g_v(v, v) = 2L(v)$。

切向量 $v \in TM$ 被称为类时（或分别称为零），如果$L(v) < 0$（或 $L(v) = 0$，分别成立）。如果 v 是零向量且非零，我们称其为类光；如果它是类时或类光（即 $L(v) \le 0$且 $v \neq 0$），则称其为因果（或非类空）。满足 $L(v) > 0$ 或 $v = 0$ 的向量称为类空向量。我们用 $\Omega'_x \subset T_xM$ 表示类时向量的集合，并令 $\Omega' := \bigcup_{x\in M} \Omega'_x$。为了后续使用，对于因果向量 v，我们定义：

$$F(v) := \sqrt{-2L(v)} = \sqrt{-g_v(v, v)}. \tag{2.3}$$

接下来我们引入协变导数和里奇曲率。给定任意 $v \in TM \setminus 0$ 和任意 $\alpha, \beta, \delta = 1, 2, \ldots, n$, 定义

$$\overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\delta}(v) := \frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{n} g^{\alpha\lambda}(v)\left(\frac{\partial g_{\lambda\delta}}{\partial x^\beta}(v) + \frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^\delta}(v) - \frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial x^\lambda}(v)\right),$$

其中（$g^{\alpha\beta}$（v））$_{\alpha,\ \beta=1}^{n}$ 是（$g_{\alpha\beta}$（v））$_{\alpha,\ \beta=1}^{n}$的逆矩阵，

$$G^\alpha(v) := \frac{1}{2}\sum_{\beta,\delta=1}^{n} \overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\delta}(v)\, v^\beta\, v^\delta, \qquad N^\alpha_\beta(v) := \frac{\partial G^\alpha}{\partial v^\beta}(v)$$

采用约定 $G^\alpha(0) := N^\alpha_\beta(0) := 0$，并且

$$\begin{aligned}\Gamma^\alpha_{\beta\delta}(v) := \overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\delta}(v) - \frac{1}{2}\sum_{\lambda,\mu=1}^{n} g^{\alpha\lambda}(v)\Bigg(&\frac{\partial g_{\lambda\delta}}{\partial v^\mu}(v)\, N^\mu_\beta(v) \\ &+ \frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial v^\mu}(v)\, N^\mu_\delta(v) - \frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial v^\mu}(v)\, N^\mu_\lambda(v)\Bigg).\end{aligned} \tag{2.4}$$

那么，以参考向量 $w \in T_xM \setminus \{0\}$ 为参照，沿方向 $v \in T_xM$ 对向量场 $X = \sum_{\alpha=1}^{n} X^\alpha(\partial/\partial x^\alpha)$ 的协变导数 定义为

$$D_v^w X := \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \left(v^\beta \, \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\beta}(x) + \sum_{\delta=1}^{n} \Gamma^\alpha_{\beta\delta}(w)\, v^\beta \, X^\delta(x) \right) \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\bigg|_x .$$

我们指出，(2.4) 中的函数 $\Gamma^\alpha_{\beta\delta}$ 是*Chern*联络 （或*Chern–Rund*联络）的系数。在洛伦兹情形下， $g_{\alpha\beta}$ 在每个切空间中都是常数（因此 $\Gamma^\alpha_{\beta\delta} = \overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\delta}$），且协变导数不依赖于参考向量的选取。

L 的测地线方程 写作 $D^{\dot\gamma}_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$。沿测地线 γ 的 C^∞-向量场 J 若满足 $D^{\dot\gamma}_{\dot\gamma} D^{\dot\gamma}_{\dot\gamma} J + R_{\dot\gamma}(J) = 0$，则称为雅可比场 。这里，曲率张量 定义如下：对 $v, w \in T_xM$，

$$R_v(w) := \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} R^\alpha_\beta(v)\, w^\beta \, \frac{\partial}{\partial x^\alpha},$$

其中

$$R^\alpha_\beta(v) := 2\,\frac{\partial G^\alpha}{\partial x^\beta}(v) - \sum_{\delta=1}^{n} \left(\frac{\partial N^\alpha_\beta}{\partial x^\delta}(v)\, v^\delta - 2\,\frac{\partial N^\alpha_\beta}{\partial v^\delta}(v)\, G^\delta(v) \right) - \sum_{\delta=1}^{n} N^\alpha_\delta(v)\, N^\delta_\beta(v).$$

雅可比场也可以刻画为测地线变分的变分向量场。注意， $R_v(w)$ 关于 w 是线性的，因此 R_v：对每个 $v \in T_xM$， $T_xM \longrightarrow T_xM$ 都是一个自同态。

定义 2.2 （里奇曲率）。 对于 $v \in T_xM$，我们将 v 的里奇曲率（或*Ricci*标量）定义为 R_v 的迹，即 $\mathrm{Ric}(v) := \mathrm{trace}(R_v)$。

我们注意到，对于任意 $c > 0$， $\mathrm{Ric}(c\,v) = c^2\,\mathrm{Ric}(v)$。为后文使用，我们还回顾

$$R_v(v) = 0, \qquad g_v\big(w_1, R_v(w_2)\big) = g_v\big(R_v(w_1), w_2\big) \tag{2.5}$$

对于任意 $v \in \Omega'_x$ 和 w_1， $w_2 \in T_xM$ （见 [48, 命题 2.4], [40, 命题 3.4]）。

2.2 芬斯勒时空的预备知识

定义2.3 （芬斯勒时空）。 如果 Lorentz–Finsler流形（M， L）存在一个光滑类时向量场 X，则称（M， L）是时间定向的（由 X 给出）。时间定向的 Lorentz–Finsler 流形称为芬斯勒时空。

在这样的芬斯勒时空中，如果因果向量 $v \in T_xM$ 位于 $\Omega'_x \setminus \{0\}$ 中与 $X(x)$ 相同的连通分支内，则称其为 未来指向 。我们将 $\Omega_x \subset \Omega'_x$ 记为未来指向类时向量的集合，并定义

$$\Omega := \bigcup_{x\in M} \Omega_x, \qquad \overline{\Omega} := \bigcup_{x\in M} \overline{\Omega}_x, \qquad \overline{\Omega} \setminus 0 := \bigcup_{x\in M} (\overline{\Omega}_x \setminus \{0\}).$$

若其切向量始终为类时（或因果），则称 (M, L) 中的 C^1-曲线为类时（或因果）曲线。除非另有说明，所有因果曲线均为未来指向。

我们回顾因果理论中的一些基本概念。给定 $x,\ y \in M$，若存在一条从 x 到 y的未来指向类时曲线（或因果曲线），则记作 $x \ll y$（或 $x < y$）；而 $x \le y$ 表示 $x = y$ 或 $x < y$。于是，x 的年代过去和年代未来定义为

$$I^-(x) := \{y \in M \mid y \ll x\}, \qquad I^+(x) := \{y \in M \mid x \ll y\},$$

其因果过去和因果未来定义为

$$J^-(x) := \{y \in M \mid y \le x\}, \qquad J^+(x) := \{y \in M \mid x \le y\}.$$

对于一般集合 $S \subset M$，我们类似地定义 $I^-(S)$、$I^+(S)$、$J^-(S)$ 和 $J^+(S)$。对于定义在 M 上的博雷尔概率测度 μ，根据其支集 spt $\mu \subset M$，我们将 $I^-(\mu)$ 简记为：$= I^-$(spt μ)；对于 $I^+(\mu)$、$J^-(\mu)$ 和 $J^+(\mu)$，也类似地简记。

定义 2.4（因果性条件）。设 $(M,\ L)$ 是一个芬斯勒时空。

(1) $(M,\ L)$ 称为年代性的，当且仅当对所有 $x \in M,\ x \notin I^+(x)$。

(2) 若不存在闭因果曲线，则称 $(M,\ L)$ 是因果的。

(3) 若对所有 $x \in M,\ x$ 的每个邻域U 都包含另一个邻域 V，使得没有因果曲线与 V 相交超过一次，则称 $(M,\ L)$ 是强因果的。

(4) 若 $(M,\ L)$ 是强因果的，且对任意 $x,\ y \in M$, $J^+(x) \cap J^-(y)$ 是紧的，则称其为整体双曲的。

我们还定义 $x, y \in M$ 的洛伦兹–芬斯勒距离 $l(x, y)$（也称为时间分离函数）为

$$l(x, y) := \sup_{\gamma} \mathfrak{L}(\gamma), \qquad \mathfrak{L}(\gamma) := \int_0^1 F\big(\dot\gamma(t)\big)\,\mathrm{d}t,$$

其中 $\gamma\colon [0, 1] \longrightarrow M$遍历所有从 x 到 y 的因果曲线（回顾 (2.3) 中 F 的定义）。达到上述上确界的因果曲线称为极大化的。类似于 [45], ，我们设 $l(x,\ y)$: $= -\infty$ ，若不存在从 x 到 y 的因果曲线（即 $x \not< y$）。（注意，对于 $x \not< y$ $\in [40, 41, 42]$，我们设 $l(x,\ y) = 0$ 。）一般而言，距离函数 l 在 $\{l \ge 0\}$ 上仅下半连续（命题 6.7] ），且可能取无穷值。在全局双曲芬斯勒时空中，l 是有限的，在 $\{l \ge 0\}$ 上连续，并在 $M \times M$ [48, 上上半连续（命题 6.8], ）；任意一对满足 $x < y$ 的点 $x,\ y \in M$ 都存在一条从 x 到 y [48, 的极大测地线（命题 6.9]）。关于整体双曲性下 l 的正则性的更多细节将在第 3 节讨论。

为考虑 L 的对偶结构及勒让德变换（更多讨论请参见 [47],[49, §3.1], 或 [41, §4.4] ），定义 Ω_x 的极锥为

$$\Omega_x^* := \big\{\zeta \in T_x^*M \mid \zeta(v) < 0 \text{ for all } v \in \overline{\Omega}_x \setminus \{0\}\big\}.$$

这是 T_x^*M中的一个开凸锥。对于 $\zeta \in \Omega_x^*$，我们定义

$$L^*(\zeta) := -\frac{1}{2}\left(\sup \zeta(v)\right)^2 = -\frac{1}{2}\,\inf\left(\zeta(v)\right)^2,$$

其中，上确界和下确界分别取遍 $v \in F^{-1}(1) \cap \Omega_x$。于是我们得到反向柯西–施瓦茨不等式

$$4\,L^*(\zeta)\,L(v) \le \left(\zeta(v)\right)^2 \tag{2.6}$$

对于每个 $v \in \Omega_x$ 和每个 $\zeta \in \Omega_x^*$，以及勒让德变换的以下变分定义。

定义 2.5（勒让德变换）。勒让德变换 $\mathscr{L}^*\colon \Omega_x^* \longrightarrow \Omega_x$定义为将 $\zeta \in \Omega_x^*$ 映射到满足$L(v) = L^*(\zeta) = \zeta(v)/2$的唯一元素 $v \in \Omega_x$ 的映射。我们还定义 $\mathscr{L}^*(0) := 0$。

勒让德变换的坐标表达式为

$$\mathscr{L}^*(\zeta) = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial L^*}{\partial \zeta_\alpha}(\zeta)\,\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \qquad \text{where } \zeta = \sum_{\alpha=1}^{n} \zeta_\alpha\,\mathrm{d}x^\alpha.$$

逆映射 $\mathscr{L} := (\mathscr{L}^*)^{-1}$ 的写法与……相同。

$$\mathscr{L}(v) = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial v^\alpha}(v)\,\mathrm{d}x^\alpha.$$

关于勒让德变换的一些基本性质，请参见 [41, 47, 49] 。

2.3 弧长的变分

这里我们给出 Lorentz–Finsler 框架下弧长的变分公式。尽管这些公式可以通过标准论证得到，为了完整起见，我们仍概述其推导过程。关于半黎曼情形（包括洛伦兹流形），参见 [59]；关于芬斯勒情形，参见 [9, 第 5] 章或 [58, 第 7] 章。

设 $\sigma\colon [a,b] \times (-\varepsilon,\varepsilon) \longrightarrow M$ 是一个 C^∞-变分，使得对于每个 $s \in (-\varepsilon,\varepsilon)$，$\sigma_s(t) := \sigma(t,s)$ 都是一条类时曲线。我们设定

$$\mathfrak{L}(s) := \mathfrak{L}(\sigma_s) = \int_a^b F(\dot\sigma_s)\,\mathrm{d}t.$$

为简洁起见，我们将 σ 的切向量场和变分向量场分别定义为 $T := \partial_t\sigma$ 和 $V := \partial_s\sigma$。我们假设 T 处处不为零。

引理 2.6（第一变分）。对于上述的 σ 和 $\mathfrak{L}$，我们有

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}'(s) &= -\left[g_T\left(V, \frac{T}{F(T)}\right)(\cdot,s)\right]_a^b + \int_a^b g_T\left(V, D_T^T\left[\frac{T}{F(T)}\right]\right)(t,s)\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_a^b g_T\left(D_T^T V, \frac{T}{F(T)}\right)(t,s)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

特别地，若 σ_s 是一条测地线，则

$$\mathfrak{L}'(s) = -\frac{1}{F(\dot{\sigma}_s)}\left[g_T(V,T)(\cdot,s)\right]_a^b.$$

证明。这与芬斯勒情形的证明方式相同，参见例如 [58, 命题 7.1],，回忆 $F^2(v) = -g_v(v,v)$ 对于 (2.3) 中的每个 $v \in \Omega$ 均成立。 □

为写出二次变分，我们将沿类时测地线 $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow M$ 的 C^1-向量场 V, W 的指标型 定义如下:

$$I(V,W) := -\frac{1}{F(\dot{\gamma})}\int_a^b \Big(g_{\dot{\gamma}}(D_{\dot{\gamma}}^{\dot{\gamma}}V, D_{\dot{\gamma}}^{\dot{\gamma}}W) - g_{\dot{\gamma}}\big(R_{\dot{\gamma}}(V),W\big)\Big)\,\mathrm{d}t,$$

洛伦兹情形请参见 [11, 第 10] 章。注意， $I(V,W) = I(W,V)$，并且若 V 是雅可比场，则有

$$I(V,W) = -\frac{1}{F(\dot{\gamma})}\left[g_{\dot{\gamma}}(D_{\dot{\gamma}}^{\dot{\gamma}}V, W)\right]_a^b. \tag{2.7}$$

命题 2.7 (二次变分**)**。对于上述的 σ 和 $\mathfrak{L}$，设 $\gamma := \sigma_0$ 是一条测地线。则有

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}''(0) &= I(V_0,V_0) - \left[g_{\dot{\gamma}}\left(D_V^T V(\cdot,0), \frac{\dot{\gamma}}{F(\dot{\gamma})}\right)\right]_a^b - \int_a^b \frac{(\partial_s[F(T)](t,0))^2}{F(\dot{\gamma}(t))}\,\mathrm{d}t\\ &= I(V_0^{\perp},V_0^{\perp}) - \left[g_{\dot{\gamma}}\left(D_V^T V(\cdot,0), \frac{\dot{\gamma}}{F(\dot{\gamma})}\right)\right]_a^b,\end{aligned}$$

其中令 $V_0 := V(\cdot,0)$，并且

$$V_0^{\perp} := V_0 + g_{\dot{\gamma}}\left(V_0, \frac{\dot{\gamma}}{F(\dot{\gamma})}\right)\frac{\dot{\gamma}}{F(\dot{\gamma})}$$

是 V_0 在 $\dot{\gamma}$ 的 $g_{\dot{\gamma}}$-正交子空间上的投影。

证明。我们可以再次采用与芬斯勒情形类似的论证，但需注意符号。下面参照 [58, 定理 7.6] 和 [9, §5.2]的思路进行说明。通过对引理 2.6 中的 $\mathfrak{L}'(s)$ 求导，并利用 $F^2(T) = -g_T(T,T)$，我们得到

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}''(0) = -\frac{1}{F(\dot{\gamma})}\int_a^b &\Big(g_{\dot{\gamma}}\big(D_V^T[D_T^T V],\dot{\gamma}\big) + g_{\dot{\gamma}}\big(D_{\dot{\gamma}}^{\dot{\gamma}}V_0, D_{\dot{\gamma}}^{\dot{\gamma}}V_0\big)\Big)\,\mathrm{d}t\\ &- \int_a^b \frac{(\partial_s[F(T)](t,0))^2}{F(\dot{\gamma}(t))}\,\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{2.8}$$

然后，选取局部坐标 $(x^\alpha)_{\alpha=1}^n$ 使得 $\dot{\gamma} = \partial/\partial x^1$, $g_{11}(\dot{\gamma}) = -1$,$g_{ii}(\dot{\gamma}) = 1$ 对 $i = 2, \ldots, n$成立，并且 $g_{\alpha\beta}(\dot{\gamma}) = 0$ 对互不相同的 $\alpha, \beta = 1, \ldots, n$成立，我们得到

$$g_{\dot{\gamma}}\big(D_V^T[D_T^T V] - D_T^T[D_V^T V],\dot{\gamma}\big) = -\sum_{\alpha,\beta=1}^n R^1_{\alpha\beta 1}(\dot{\gamma})\,V_0^\alpha\,V_0^\beta.$$

现在应用反对称性 [58, (5.11)] 可得

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} R^1_{\alpha\beta 1}(\dot\gamma)\, V_0^\alpha\, V_0^\beta = \sum_{\alpha,\beta,\delta=1}^{n} g_{\alpha\delta}(\dot\gamma)\, R^\delta_\beta(\dot\gamma)\, V_0^\alpha\, V_0^\beta = g_{\dot\gamma}\big(R_{\dot\gamma}(V_0), V_0\big)$$

（因此， [58, (7.2)] 依然成立）。将这些代入 (2.8)，即可得到第一个等式。

第二个等式可仿照 [9, 练习 5.2。6]推导。具体而言，我们有

$$g_{\dot\gamma}(D^{\dot\gamma}_{\dot\gamma} V_0^\perp, D^{\dot\gamma}_{\dot\gamma} V_0^\perp) = g_{\dot\gamma}(D^{\dot\gamma}_{\dot\gamma} V_0, D^{\dot\gamma}_{\dot\gamma} V_0) + \big(\partial_s [F(T)](\cdot,0)\big)^2$$

经计算可得，且

$$g_{\dot\gamma}\big(R_{\dot\gamma}(V_0^\perp), V_0^\perp\big) = g_{\dot\gamma}\big(R_{\dot\gamma}(V_0), V_0\big)$$

由 [40, 命题 3。4]可得。证明至此完成。 □

2.4 三角形比较的无效性

除了里奇曲率界之外，还可以用三角形比较来表述综合下、上截面曲率界，这类似于黎曼几何中由亚历山德罗夫–托波诺戈夫三角形比较定理发展而来的亚历山德罗夫空间和 CAT(k)-空间的著名理论，参见例如 [18]。然而，与亚历山德罗夫空间和 CAT(k)-空间类似，基于三角形比较的这些曲率界排除了真正非洛伦兹的洛伦兹–芬斯勒结构。这意味着，尤其是，[12] 中的分裂定理不适用于这一框架。

三角形比较性质的洛伦兹类比可沿着 [37, 定义 4.7]给出。记 $\mathbb{M}^2_k$ 为具有常截面曲率 $k \in \mathbb{R}$的二维模型¯空间，记 l 为其上的距离函数。那么，对于任意 a, b, $c > 0$，当 $a + b \le c$和 $c < \pi/\sqrt{k}$（或分别为 $c < \pi/\sqrt{-k}$）时（若 $a+b=c$和 $k>0$（或分别为 $a+b<c$和 $k<0$），则存在 $\bar x$, $\bar y$, $\bar z \in \mathbb{M}^2_k$，使得 $\bar x \ll \bar y \ll \bar z$并且

$$\bar l(\bar x, \bar y) = a, \qquad \bar l(\bar y, \bar z) = b, \qquad \bar l(\bar x, \bar z) = c.$$

（参见 [2, 引理 2.1]和 [37, 引理 4.6]中的可实现性引理）。这样的三角形$\triangle(\bar x, \bar y, \bar z)$在等距变换意义下唯一，并称为$\triangle(x, y, z)$在$(M, L)$中的比较三角形，其中 $l(x, y) = a$、 $l(y, z) = b$，且 $l(x, z) = c$。

我们称 (M, L) 在三角形比较意义下具有不低于 $k \in \mathbb{R}$ 的类时曲率界，如果 M 中的每个点都有一个满足以下条件的邻域 U：对于任意 $x, y, z \in U$，若 $x \ll y \ll z$，则存在一个比较三角形 $\triangle(\bar x, \bar y, \bar z) \subset \mathbb{M}^2_k$；并且对于 $\triangle(x, y, z)$（各边）上的任意 p, q，以及 $\triangle(\bar x, \bar y, \bar z)$（各边）上与之对应的点 $\bar p, \bar q$，都有 $l(p, q) \le l(\bar p, \bar q)$。将后一个不等式反向，我们便定义 (M, L) 在三角形比较意义下具有不高于 k 的类时曲率界。

洛伦兹时空框架下对三角形比较定理的研究可追溯至 [31]。关于三角形比较

性质与一般半黎曼流形相应截面曲率界之间的等价性，请参阅 [37, 例 4.9]。

命题 2.8 （三角形比较蕴含洛伦兹性）。 设（M, L）为整体双曲的。若（M, L）具有某个 $k \in \mathbb{R}$ 意义下由下方或上方有界的类时曲率（按照三角形比较的意义），则对每个 $v \in \Omega_x$ 和每个 $x \in M$， $g_v = 2L$ 均在Ω_x 上成立。特别地，对于每个 $x \in M$， L 在Ω_x上必然是二次型的。

证明。 我们首先考虑下曲率界。固定任意的 $x \in M$ 和v， $w \in \Omega_x$。通过对 M 上的三角形比较不等式取缩放极限，我们发现曲率界对于切空间T_xM 中满足 $k = 0$ 的三角形同样成立（即 $(T_xM,\ L)$ 是非负曲率的）。现在，取闵可夫斯基空间 $(\mathbb{M}^2_0,\ \mathsf{h}\cdot,\ \cdot\mathsf{i})$ 中的 $\triangle(0,\ \bar{v},\ \bar{v}+\bar{w})$ 作为 $\triangle(0,\ v,\ v+w)$ 的比较三角形。那么，对于每个 $t \in (0,\ 1)$，我们得到

$$\langle \bar{v} + t\,\bar{w}, \bar{v} + t\,\bar{w}\rangle = (1-t)\,\langle \bar{v}, \bar{v}\rangle + t\,\langle \bar{v}+\bar{w}, \bar{v}+\bar{w}\rangle - (1-t)\,t\,\langle \bar{w}, \bar{w}\rangle.$$

因此，由假设可得

$$\begin{aligned} 2\,L(v + t\,w) &\geq (1-t)\,\langle \bar{v}, \bar{v}\rangle + t\,\langle \bar{v}+\bar{w}, \bar{v}+\bar{w}\rangle - (1-t)\,t\,\langle \bar{w}, \bar{w}\rangle \\ &= 2\,(1-t)\,L(v) + 2\,t\,L(v+w) - 2\,(1-t)\,t\,L(w). \end{aligned}$$

另一方面，考虑三角形 $\triangle(0,\ t\,w,\ v + t\,w)$，并注意到

$$t\,w + t\,\big((v + t\,w) - t\,w\big) = t\,(v+w),$$

我们观察到

$$L\big(t\,(v+w)\big) \geq (1-t)\,L(t\,w) + t\,L(v + t\,w) - (1-t)\,t\,L(v),$$

可改写为

$$L(v + t\,w) \leq (1-t)\,L(v) + t\,L(v+w) - (1-t)\,t\,L(w).$$

由此得到

$$L(v + t\,w) = (1-t)\,L(v) + t\,L(v+w) - (1-t)\,t\,L(w),$$

因此我们有

$$g_v(w,w) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\bigg|_0 L(v + t\,w) = 2L(w).$$

下曲率界的证明至此完成。

曲率上界的情形可通过反转不等式以同样的方式建立。

□

3 Lorentz–Finsler距离函数的性质

从现在起，我们假设 (M, L) 是一个整体双曲芬斯勒时空。在这一基本假设下，本节研究 Lorentz–Finsler距离函数 l 的性质，并引入由 $F = \sqrt{-2\,L}$ 的 q 次幂诱导的拉格朗日量和哈密顿量，其中 $q \in (0, 1]$。我们遵循 [45, 第 2, 3] 节的论述。

3.1 拉格朗日量与哈密顿量

我们首先引入依赖于 q的拉格朗日量 L_q，如 [45] 中所示（对于 $q = 1$ 的情形，也可参见 [63] ）。令 $q \in (0, 1],$，并定义 $\mathrm{L}_q\colon TM \longrightarrow (-\infty,\ 0] \cup \{+\infty\}$，使得

$$\mathcal{L}_q(v) := \begin{cases} -q^{-1}\left(-2\,L(v)\right)^{q/2} & \text{if } v \in \overline{\Omega}, \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

注意，对于 $v \in \Omega$，有 $\mathrm{L}_q(v) = -q^{-1}\,F(v)^{\overline{q}}$。其凸对偶是 q依赖于 - 的哈密顿量 $\mathrm{H}_q\colon\ T^*M \longrightarrow [0, +\infty]$ 定义为

$$\mathcal{H}_q(\zeta) := \sup_{v \in TM} \big(\zeta(v) - \mathcal{L}_q(v)\big), \tag{3.1}$$

其中 $\zeta(v)$ 是通常的对偶配对。当 $q \in (0,1)$，且 $p < 0$ 表示其对偶指数，即 $q^{-1} + p^{-1} = 1$，我们有

$$\mathcal{H}_q(\zeta) = \begin{cases} -p^{-1}\left(-2\,L^*(\zeta)\right)^{p/2} & \text{if } \zeta \in \Omega^*, \\ +\infty & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{3.2}$$

而对于 $q = 1$，它是一个以 $\{0, +\infty\}$ 为值的实心双曲面 $\{L^* \le -1/2\} \subset \Omega^*$ 的示性函数；参见推论 3.2。

鉴于 (3.1)，我们可以证明 $\mathscr{L} = (\mathscr{L}^*)^{-1}$ 的一个类似结果。此外，取 $q \in (0,1)$ 可使拉格朗日量 L_q 在 Ω_x 上严格凸。具体而言，我们有以下结果。

引理 3.1（L_q 的对偶性与凸性）。 固定 $q \in (0, 1)$ 且 $x \in M$。

（i）映射

$$v \longmapsto \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{L}_q}{\partial v^\alpha}(v)\,\mathrm{d}x^\alpha, \qquad \zeta \longmapsto \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{H}_q}{\partial \zeta_\alpha}(\zeta)\,\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

在Ω_x 与 Ω_x^*之间互为逆映射。

（ii）拉格朗日量$\mathcal{L}_q$ 在 T_xM 上是凸的，并且在Ω_x上是严格凸的。

证明。（i）注意到

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{L}_q}{\partial v^\alpha}(v)\,\mathrm{d}x^\alpha = F(v)^{q-2} \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial v^\alpha}(v)\,\mathrm{d}x^\alpha = F(v)^{q-2}\,\mathscr{L}(v),$$

类似地

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{H}_q}{\partial \zeta_\alpha}(\zeta)\,\frac{\partial}{\partial x^\alpha} = F^*(\zeta)^{p-2}\,\mathscr{L}^*(\zeta)$$

对于 $v \in \Omega_x$ 和 $\zeta \in \Omega_x^*$，其中 $F^*(\zeta) := \sqrt{-2\,L^*(\zeta)}$。由于 $\mathscr{L}^* = \mathscr{L}^{-1}$，且所涉及的两个映射都是正1次齐次的，注意到

$$\big(F(v)^{q-1}\big)^{p-2}\,F(v)^{q-2} = 1.$$

(ii) 令 $v \in \Omega_x$。回顾 (2.1) 中 $g_{\alpha\beta}(v)$ 的定义，我们观察到

$$\frac{\partial \mathcal{L}_q}{\partial v^\alpha\,\partial v^\beta}(v) = F(v)^{q-4}\left((2-q)\,\frac{\partial L}{\partial v^\alpha}(v)\,\frac{\partial L}{\partial v^\beta}(v) + F(v)^2\,g_{\alpha\beta}(v)\right).$$

现在注意到，将 $w \in T_xM$ 写成 $w = \sum_{\alpha=1}^n w^\alpha (\partial/\partial x^\alpha)|_x$，

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial v^\alpha}(v)\,w^\alpha = g_v(v,w), \qquad \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} g_{\alpha\beta}(v)\,w^\alpha\,w^\beta = g_v(w,w).$$

因此，若 $g_v(w,w) \geq 0$，我们立即得到

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{L}_q}{\partial v^\alpha \partial v^\beta}(v)\,w^\alpha\,w^\beta \geq 0.$$

若 $g_v(w,w) < 0$，即 w 是 g_v-类时的，则 g_v 的反向柯西–施瓦茨不等式给出

$$\big(g_v(v,w)\big)^2 \geq g_v(v,v)\,g_v(w,w) = -F(v)^2\,g_v(w,w).$$

由于恒等式 $g_v(v,w) = 0$ 仅在 $w = 0$ 或 $g_v(w,w) > 0$时成立，因此我们得到正定性。于是，L_q 在 Ω_x 上严格凸，并在 T_xM上凸（这是因为集合 Ω_x是凸的）。□

对于 $q = 1$的情形，注意到 $\mathrm{L}_1 = -F$ 是正1次齐次的，并且在径向方向上并非严格凸。为了表述相应的下一个结果，回顾一下，若函数 $u\colon T_xM \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ 满足 $u(v) \in \mathbb{R}$，则称其在 $v \in T_xM$ 处是次可微 的，且具有次梯度 $\zeta \in T_x^*M$，并且

$$u(v+w) \geq u(v) + \zeta(w) + o(|w|_h)$$

当 $w \in T_xM$ 接近 0 时成立，其中 h 是辅助黎曼度量。我们用 $\partial_\bullet u(v)$ 表示所有次梯度的集合。（关于定义在 M 上的函数及上可微性的概念，请参见下文的 (3.7)。）

推论 3.2 ($q = 1$的情形)。固定 $x \in M$。

(i) 拉格朗日量$\mathcal{L}_1$ 在 T_xM上是凸的。

(ii) 我们有

$$\mathcal{H}_1(\zeta) = \begin{cases} 0 & \text{if } \zeta \in \Omega_x^* \text{ and } L^*(\zeta) \le -1/2, \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(iii) $\mathcal{L}_1|_{T_xM}$在$(\mathcal{L}_1|_{T_xM})^{-1}(0) \setminus \{0\}$上不是次可微的。在 $0 \in T_xM$处，$\mathcal{L}_1|_{T_xM}$ 是次可微的，其次可微导数为

$$\partial_\bullet(\mathcal{L}_1|_{T_xM})(0) = \mathcal{H}_1^{-1}(0) \cap T_x^*M.$$

证明。 (i) 由L_q 的凸性可知，只需令 $q \to 1$。

(ii) 这是一个标准事实，可由(3.1)结合反向柯西–施瓦茨不等式得到，也可由(3.2)令 $p \to -\infty$得到。

(iii) L_1 在$(\mathrm{L}_1|_{T_xM})^{-1}(0) \setminus \{0\}$上不具次可微性（或 F不具上可微性），这是因为对于 $s > 0$,

$$\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{t^2 - s^2} = \frac{t}{\sqrt{t^2 - s^2}} \to +\infty \qquad \text{as } t \downarrow s.$$

在 $0 \in T_xM$ 处，一方面， $\zeta \in \Omega_x^*$ with $L^*(\zeta) \le -1/2$ 根据反向柯西–施瓦茨不等式 (2.6) 满足

$$\zeta(v) \le -\sqrt{4\,L(v)\,L^*(\zeta)} = \mathcal{L}_1(v)\,\sqrt{-2\,L^*(\zeta)} \le \mathcal{L}_1(v)$$

对任意 $v \in T_xM$ 都成立，这意味着 $\zeta \in \partial_\bullet(\mathrm{L}_1|_{T_xM})(0)$。另一方面，若$\zeta \in \partial_\bullet(\mathrm{L}_1|_{T_xM})(0)$，则

$$\zeta(v) = \frac{\zeta(c\,v)}{c} \le \frac{\mathcal{L}_1(c\,v) + o(c\,|v|_h)}{c} \to -1 \qquad \text{as } c \downarrow 0$$

对于任意 $v \in F^{-1}(1) \cap \Omega_x$ 都成立。因此，根据 $L^*(\zeta)$ 的定义， $L^*(\zeta) \le -1/2$。 □

3.2 q-洛伦兹–芬斯勒距离函数

对于 $q \in (0, 1]$, 由洛伦兹–芬斯勒作用量*of a* 利普希茨曲线 $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow M$ 通过 L^q 诱导的函数为

$$\mathcal{A}_q(\gamma) := \int_0^1 \mathcal{L}_q(\dot\gamma)\,\mathrm{d}t,$$

并定义 $l_q\colon M \times M \longrightarrow [0, +\infty] \cup \{-\infty\}$ 如下

$$l_q(x, y) := -\inf_\gamma \mathcal{A}_q(\gamma), \tag{3.3}$$

其中， $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow M$遍历所有满足 $\gamma(0) = x$ 且 $\gamma(1) = y$的利普希茨曲线。我们称 l_q 为 *q-Lorentz–Finsler*距离函数；对于 $q = 1$， l_1 与第2.2小节中引入的Lorentz–Finsler距离函数 l 一致。

为简化记号，我们采用以下约定：

$$(-\infty)+\infty := -\infty, \qquad (-\infty)^q = (-\infty)^{1/q} := -\infty. \tag{3.4}$$

那么 l 满足 反三角不等式

$$l(x,y) \geq l(x,z) + l(z,y), \tag{3.5}$$

并且，对于每个 x， $y \in M$满足 $l(x,\ y) > -\infty$ 以及每个 $q \in (0,\ 1]$，我们有

$$l(x,y) = \big(q\, l_q(x,y)\big)^{1/q} \tag{3.6}$$

（通过重新参数化一条适当的曲线 γ，使得 $L_1(\gamma)$ 几乎处处为常数）。特别地，集合 $\{l_q > 0\}$ 和 $\{l_q \geq 0\}$ 不依赖于指数 $q \in (0,1]$。

假设的 $(M,\ L)$ 的整体双曲性蕴含了 Lorentz–Finsler距离函数 l 的更精细性质。首先，由关系式 (3.6)，我们立即得到如下结论。

引理 3.3 (l_q的连续性)。对于每个 $q \in (0,\ 1]$， l_q 在 $\{l_q \geq 0\}$ 上有限且连续，并在 $M \times M$ 上上半连续。

为了分析 l的行为，我们引入奇异集。

定义 3.4 （ l 的奇异集）。我们将 sing(l) 定义为所有满足以下条件的点对 $(x,y) \in M \times M$的集合： $l(x,y) \leq 0$，或者不存在一条极大测地线使 x 和 y 均位于其相对内部。

那么，借助引理 3.3，不难证明 sing(l) 是闭集；例如参见 [45, 定理 3.6] 。

以下两个引理的证明与 [45, 引理 2.4、2.5] 完全相同。我们指出， [11] 中的极限曲线定理可推广至我们的 Lorentz–Finsler 框架 [48, 命题 6.1]。

引理 3.5 （中间点的连续性）。对于每个 $t \in [0,1]$ 以及每个$(x,y) \in (M \times M) \setminus \mathrm{sing}(l)$，存在唯一的点 $z \in M$，以下记作 $z_t(x,y)$，使得

$$l(x,z) = t\, l(x,y), \qquad l(z,y) = (1-t)\, l(x,y).$$

此外， $z_t(x,y)$ 关于$(t,x,y) \in [0,1] \times ((M \times M) \setminus \mathrm{sing}(l))$光滑依赖。

引理 3.6 （中间点集的紧致性）。对于 x， $y \in M$， $t \in [0,1]$，以及 $E \subset M \times M$，定义

$$Z_t(x,y) := \big\{ z \in M \mid l(x,z) = t\, l(x,y),\, l(z,y) = (1-t)\, l(x,y) \big\}$$

若 $l(x,y) \geq 0$ 且 $Z_t(x,y) := \emptyset$ 否则，以及

$$Z_t(E) := \bigcup_{(x,y)\in E} Z_t(x,y), \qquad Z(E) := \bigcup_{t\in[0,1]} Z_t(E).$$

那么，如果 E 是相对紧的， $Z(E)$ 也是相对紧的。如果 E 是紧的，那么 $Z(E)$ 和 $Z_t(E)$ 也是紧的。

注 3.7。取 x，$y \in M$，其中 $l(x,\ y) > 0$。对于 $t \in (0,\ 1)$，通过连接类时测地线，注意到 $z \in Z_t(x,\ y)$ 当且仅当 z 是从 x 到 y的一条类时极大测地线上的 t-中间点。类似地，我们有$Z_0(x,\ y) = \{x\}$，以及 $Z_1(x,\ y) = \{y\}$，因为极大曲线不会改变因果类型。

3.3 凸性、凹性与光滑性

定义 3.8（半凸性与半凹性）。设 $U \subset M$ 为开集。若对于某个定义在 M 上的光滑黎曼度量 h，存在 $c \in \mathbb{R}$ 使得，则称函数 $u\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ 是半凸 的。

$$\liminf_{w \to 0} \frac{u(\exp_x^h(w)) + u(\exp_x^h(-w)) - 2\,u(x)}{2\,|w|_h^2} \geq c$$

对每个 $x \in U$均成立，其中 $w \in T_xM$。满足条件的最大常数 c称为 u 在 U 上的半凸常数 。最后，若 $-u$ 是半凸的，则称 u 半凹 。

我们指出，如果 U 是相对紧的，则半凸性与 h的选择无关，而半凸常数取决于 h。

命题 3.9（的半凸性 l）。设 h 是定义在 M上的光滑黎曼度量，并令 （x、 y）$\in \{l > 0\}$。则

$$c(x,y) := \liminf_{w \to 0} \frac{l(\exp_x^h(w), y) + l(\exp_x^h(-w), y) - 2\,l(x,y)}{2\,|w|_h^2}$$

是实值的，其中 $w \in T_xM$。此外，量 $c(x, y)$ 关于$(x, y) \in \{l > 0\}$连续变化。

证明。设 $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow M$是从 x到 y的一条极大测地线。取 $w \in T_xM$，满足 $|w|_h = 1$，并将其延拓为沿 γ的向量场 P，使其关于 $g_{\dot\gamma}$平行，即 $D^{\dot\gamma}_{\dot\gamma} P = 0$且 $P(0) = w$。考虑向量场

$$W(t) := (1-t)P(t)$$

沿着 γ并定义一个光滑变分 $\sigma\colon\ [0,1] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$的 γ，其中 $\varepsilon > 0$是一个固定的小参数，通过

$$\sigma_s(t) = \sigma(t,s) := \exp^h_{\gamma(t)}\big(sW(t)\big).$$

注意，$\sigma_0 = \gamma$和 $\sigma_s(1) = \gamma(1) = y$对所有 $s \in (-\varepsilon,\ \varepsilon)$都成立。设

$$\mathfrak{L}(s) := \int_0^1 F(\dot\sigma_s)\,\mathrm{d}t = -\mathcal{A}_1(\sigma_s).$$

于是由 (3.3) 可得

$$\frac{l(\sigma_s(0), y) + l(\sigma_{-s}(0), y) - 2\,l(x,y)}{2\,s^2} \geq \frac{\mathfrak{L}(s) + \mathfrak{L}(-s) - 2\,\mathfrak{L}(0)}{2\,s^2},$$

且右端光滑地依赖于 x、 y、 $\dot\gamma(0)$ 和 w。具体而言，根据命题 2.7 中的二次变分公式，它可写为

$$I(W^\perp, W^\perp) - \left[g_{\dot\gamma}\left(D_V^T V(\cdot,0), \frac{\dot\gamma}{l(x,y)} \right) \right]_0^1,$$

其中 $T := \partial_t \sigma$, $V := \partial_s \sigma$，并且

$$W^\perp := W + g_{\dot\gamma}\left(W, \frac{\dot\gamma}{l(x,y)} \right) \frac{\dot\gamma}{l(x,y)}.$$

注意到

$$c(x,y) = \inf_{w,\gamma} \left(I(W^\perp, W^\perp) - \left[g_{\dot\gamma}\left(D_V^T V(\cdot,0), \frac{\dot\gamma}{l(x,y)} \right) \right]_0^1 \right)$$

即可证明该结论，其中下确界遍历所有满足 $w \in T_x M$ 且满足 $|w|_h = 1$ 的对象，以及所有从 x 到 y的极大测地线 $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow M$。 □

下面对类时割迹的刻画在后续内容中起着重要作用。洛伦兹情形参见 [45, 定理 3.5] ，芬斯勒情形参见 [55,引理 3.1]。

定理 3.10 （类时割迹上半凹性失效）。 若 $(x,y) \in \{l > 0\} \cap \mathrm{sing}(l)$，则有

$$\limsup_{w \to 0 \in T_x M} \frac{l(\exp_x^h(w), y) + l(\exp_x^h(-w), y) - 2\, l(x,y)}{2\, |w|_h^2} = +\infty.$$

证明。 注意，要么存在两条不同的从 x 到y的极大测地线，要么 y 是沿唯一一条连接 x 与 y的极大测地线的 x 的第一个共轭点。

在前一种情形中，设 $\gamma, \eta\colon [0, l(x,y)] \longrightarrow M$是从 x到 y的单位速率且彼此不同的极大测地线（即 $F(\dot\gamma) = 1$）。设 $v := \dot\gamma(0)$， $w := \dot\eta(0)$，并且$y_\varepsilon := \gamma(l(x,y) - \varepsilon)$，其中 $\varepsilon > 0$ 足够小。那么，一方面，由反三角不等式以及引理 2.6 中的一阶变分公式可得，

$$\begin{aligned} l\big(\eta(-t), y\big) - l(x,y) &\geq l\big(\eta(-t), y_\varepsilon\big) + \varepsilon - (l(x, y_\varepsilon) + \varepsilon) \\ &= g_v(v, -t\, w) + O(t^2). \end{aligned}$$

另一方面，

$$l\big(\eta(t), y\big) - l(x,y) = -t.$$

因此，我们有

$$\begin{aligned} &\frac{l(\eta(t), y) + l(\eta(-t), y) - 2\, l(x,y)}{t^2} \\ &\qquad \geq -\frac{g_v(v,w) + 1}{t} + \frac{1}{t^2} O(t^2) \to +\infty \qquad \text{as } t \to 0 \end{aligned}$$

因为根据反向柯西–施瓦茨不等式 (2.6),

$$g_v(v,w) = \mathscr{L}(v)(w) < -\sqrt{4\,L(v)\,L(w)} = -1.$$

在后一种情况下，首先注意到，沿着定理 [45,3.5], 证明中的论证，只需证明

$$\limsup_{w\to 0\in T_xM} \frac{l(\xi_w(1),y) + l(\xi_w(-1),y) - 2\,l(x,y)}{2\,|w|_h^2} = +\infty,$$

其中 $\xi_w\colon\ [-1,1] \longrightarrow M$ 表示满足 $\xi_w(0) = w$ 且相对于 L 的测地线（当 $|w|_h$ 足够小时，取值 $\xi_w(\pm 1)$ 存在）。设 J 是从 x 到 y 的唯一极大测地线 $\gamma\colon\ [0,1] \longrightarrow M$ 上的雅可比场，且仅在 0 和 1 处为零。那么 $w := D^{\dot\gamma}_{\dot\gamma} J(0) \in T_xM\setminus\{0\}$，并且仿照命题 3.9 的证明，我们考虑沿着 γ 的向量场 P，满足 $D^{\dot\gamma}_{\dot\gamma} P = 0$ 且 $P(0) = w$，并令

$$W(t) := (1-t)P(t).$$

我们还定义 $J_\varepsilon := J + \varepsilon W$，其中 $\varepsilon > 0$ 取充分小值。注意，$J_\varepsilon(0) = \varepsilon w$ 且 $J_\varepsilon(1) = 0$。我们指出，由于 J 是一个在 $t=0$ 和 $t=1$ 处为零的雅可比场，因此它与 $\dot\gamma$ $g_{\dot\gamma}$-正交，并且

$$g_{\dot\gamma}\big(P(t),\dot\gamma(t)\big) = g_{\dot\gamma}\big(w,\dot\gamma(0)\big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_0 g_{\dot\gamma}(J,\dot\gamma) = 0$$

对所有 $t\in[0,1]$均成立。因此，J_ε 与 $\dot\gamma$是 $g_{\dot\gamma}$-正交的。现在，取一个较小的参数 $\varepsilon > 0$，考虑变分 $\sigma\colon\ [0,1]\times(-\varepsilon,\ \varepsilon) \longrightarrow M$，定义如下

$$\sigma_s(t) = \sigma(t,s) := \xi_{J_\varepsilon(t)}(s).$$

注意，$\sigma_s(0) = \xi_w(\varepsilon\, s)$。再次令

$$\mathfrak{L}(s) := \int_0^1 F(\dot\sigma_s)\,\mathrm{d}t,$$

由命题 2.7 的二次变分公式可知

$$\begin{aligned}&\frac{l(\xi_w(\varepsilon\, s),y) + l(\xi_w(-\varepsilon\, s),y) - 2\,l(x,y)}{2\,(\varepsilon\, s)^2}\\ &\qquad \geq \frac{\mathfrak{L}''(0)}{\varepsilon^2} + \frac{o(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2} = \frac{I(J_\varepsilon,J_\varepsilon)}{\varepsilon^2} + \frac{g_{\dot\gamma}(D_V^T V(0,0),\dot\gamma(0))}{\varepsilon^2\,F(\dot\gamma)} + \frac{o(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2},\end{aligned}$$

其中 $T = \partial_t\sigma$ 和 $V := \partial_s\sigma$。由于 J 是雅可比场，后一项的第一项利用 (2.7) 可改写为

$$\frac{I(J,J)}{\varepsilon^2} + 2\,\frac{I(J,W)}{\varepsilon} + I(W,W) = \frac{2\,g_{\dot\gamma}(w,w)}{\varepsilon\,l(x,y)} + I(W,W).$$

还需注意，由于 $w \neq 0$和 $g_{\dot\gamma}\big(w,\dot\gamma(0)\big)=0$，我们有 $g_{\dot\gamma}(w,w)>0$。对于上面的第二个加项，根据 σ 的定义，我们可直接推出$D_V^V V=0$。于是我们有

$$g_{\dot\gamma}\big(D_V^T V(0,0),\dot\gamma(0)\big)=g_{\dot\gamma}\big(D_V^T V(0,0)-D_V^V V(0,0),\dot\gamma(0)\big)=-\varepsilon^2\,\mathcal{T}_{\dot\gamma(0)}(w),$$

其中

$$\mathcal{T}_v(w):=\sum_{\alpha,\beta,\delta,\lambda=1}^{n} g_{\alpha\lambda}(v)\left(\Gamma^\alpha_{\beta\delta}(w)-\Gamma^\alpha_{\beta\delta}(v)\right)w^\beta\,w^\delta\,v^\lambda$$

称为**T-曲率**（或切向曲率），用于度量切空间的变化；参见 [58, §6.3.2、§8.3.3]。因此，我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{l(\xi_w(\varepsilon\,s),y)+l(\xi_w(-\varepsilon\,s),y)-2\,l(x,y)}{2\,(\varepsilon\,s)^2}\\&\qquad\geq\frac{2\,g_{\dot\gamma}(w,w)}{\varepsilon\,l(x,y)}+I(W,W)-\frac{\mathcal{T}_{\dot\gamma(0)}(w)}{F(\dot\gamma)}+\frac{o(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2}\to+\infty\end{aligned}$$

如 $\varepsilon\to 0$。证明完毕。 □

最后，我们讨论 l_q 的光滑性。我们首先处理 Theorem 3.11 中 $q=1$ 的通常情形，并据此在 Corollary 3.12 中建立 $q\in(0,1)$ 的情形。由 Lemma 3.3 可知，l_q 在 $M\times M$ 上半连续，并在 $\{l\geq 0\}$ 上连续。此外，回顾第 3.2 小节，根据定义 3.4，奇异集 $\mathrm{sing}(l)$ 是闭集。

对于函数 $u\colon M\longrightarrow[-\infty,+\infty]$，如果 u 在 $x\in M$ 处具有次可微性，且具有次梯度 $\zeta\in T_x^*M$，则称其在 $x\in M$ 处次可微，如果 $u(x)\in\mathbb{R}$ 并且

$$u\big(\exp_x(v)\big)\geq u(x)+\zeta(v)+o(|v|_h)\tag{3.7}$$

当 $v\in T_xM$ 接近 0 时，其中 h 是辅助黎曼度量。u 在 x 处的次梯度集合记为 $\partial_\bullet u(x)$。$\partial^\bullet u(x)$ 的上可微性和上梯度以相同方式定义，只是将不等号反向。

定理 3.11（l的光滑性）。洛伦兹–芬斯勒距离函数 l满足以下性质。

(i) 当且仅当在$\mathrm{sing}(l)$的补集上光滑。

(ii) 它在 $M\times M$ 的开上水平集$\{l>0\}$上局部*Lipschitz*且局部半凸。此外，对于 $(x,y)\in\{l>0\}$ 以及从 x 到 y 的任意单位速率极大测地线 $\gamma\colon[0,l(x,y)]\longrightarrow M$，我们有

$$\mathscr{L}\big(\dot\gamma(0)\big)\in\partial_\bullet\big(l(\cdot,y)\big)(x),\qquad -\mathscr{L}\big(\dot\gamma\big(l(x,y)\big)\big)\in\partial_\bullet\big(l(x,\cdot)\big)(y).$$

(iii) 对于$(x,y)\in\{l=0\}$，$l(\cdot\ y)$ 在 x 处不可超微分，除非 $x=y$；并且 $\partial^\bullet\big(l(\cdot\ x)\big)(x)=\mathcal{H}_1^{-1}(0)\cap T_x^*M$。

证明。 (i) 和 (ii) 可借助命题 3.9 和定理 3.10，以与 [45, 定理 3.6] 相同的方式得到。（我们指出，对于勒让德变换 $\overline{\mathscr{L}}$，相对于反向洛伦兹-芬斯勒结构 $\overline{L}(v) := L(-v)$，$-\mathscr{L}(\dot\gamma(l(x,y)))$ 可视为$\overline{\mathscr{L}}(\dot{\overline\gamma}(0))$；而反向曲线 $\overline\gamma(t) := \gamma(l(x,y)-t)$ 是相对于 $\overline{L}$的极大测地线。）(iii) 也可根据推论 3.2(iii)，通过与 [45, 定理 3.6] 类似的论证得到。 □

我们从 (3.6) 回忆，$l_q(x,y) = l(x,y)^q/q$ 在 $l(x,y) > -\infty$成立时。

推论 3.12 (l_q的性质)。 对于 $q \in (0,1)$，l_q 满足以下性质。

(i) l_q 恰好在 $(M\times M)\setminus \operatorname{sing}(l)$ 上光滑，并且在$\{l>0\}$上局部*Lipschitz*且局部半凸。

(ii) 给定 $y \in M$，若 $l_q(\cdot\ y)$ 有一个超梯度 $\zeta \in T_x^*M$，则必然有 $l(x,y) > 0$，并且我们有

$$y = \exp_x\left(\sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \mathcal{H}_q}{\partial \zeta_\alpha}(\zeta)\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right).$$

(iii) 对于 $(x,y) \in (M\times M)\setminus \operatorname{sing}(l)$，下列矩阵是非退化的：

$$\left(\frac{\partial^2 l_q}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}(x,y)\right)_{\alpha,\beta=1}^n.$$

(iv) 对于每个 $(x,y) \in \{l>0\}\cap \operatorname{sing}(l)$ 以及每个定义在 M 上的光滑黎曼度量h，我们有

$$\sup_{0<|w|_h<1} \frac{l_q(\exp_x^h(w),y) + l_q(\exp_x^h(-w),y) - 2\,l_q(x,y)}{2\,|w|_h^2} = +\infty.$$

证明。 (i) 这可依照与 [45, 推论 3.7] 相同的思路证明，依据是定理 3.11(i)、(ii)。

(ii) 由定理 3.11(iii) 可得 $l(x,\ y) > 0$。然后，结合定理 3.11(ii) 所述的次可微性，$l(\cdot\ y)$ 在 x 处可微；注意到下式即可得到所需结论：

$$\zeta = \mathrm{d}\big(l_q(\cdot,y)\big)_x = l(x,y)^{q-1}\cdot \mathrm{d}\big(l(\cdot,y)\big)_x$$

并回顾引理 3.1，

$$\sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \mathcal{H}_q}{\partial \zeta_\alpha}(\zeta)\,\frac{\partial}{\partial x^\alpha} = F^*(\zeta)^{p-2}\,\mathscr{L}^*(\zeta) = l(x,y)\,\frac{\mathscr{L}^*(\zeta)}{F^*(\zeta)} = l(x,y)\ \dot\gamma(0).$$

(iii) 首先注意到，$(x^\alpha)_{\alpha=1}^n$ 和 $(y^\beta)_{\beta=1}^n$ 分别是x 和 y附近的局部坐标系。如果所讨论的矩阵是退化的，那么存在$v \in T_xM\setminus\{0\}$，使得

$$\sum_{\alpha=1}^n v^\alpha\,\frac{\partial^2 l_q}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}(x,y) = 0$$

对所有 β 均成立。根据引理 2.6 中的一阶变分公式，这意味着函数 $f(z) := g_{w_z}(v, w_z) = \mathscr{L}(w_z)(v)$（其中 $w_z := \exp_x^{-1}(z)$）满足 $\mathrm{d}f_y = 0$，这是不可能发生的。

(iv) 这是定理 3.10 的直接推论。 □

(iii) 中的非退化性对应于 l^q 的**扭曲条件**，参见 [65]。

4 概率测度的测地线

现在我们研究 M 上博雷尔概率测度空间 $\mathrm{P}(M)$ 的时空几何。这种几何由取自 [45, 定义 1.1]，（参见定义 4.2）的 q-测地线这一概念来描述。我们继续假设 (M, L) 具有整体双曲性。

在第 4.1 节中，我们回顾洛伦兹几何中最优传输的基础知识（例如，参见 [21, 24, 45]），这些内容无需任何修改即可推广至 Lorentz–Finsler 框架。随后，我们在第 4.2 节中证明，在相当一般的条件下，q-测地线的存在性。最后，基于第 4.3 节中概述的对偶理论，我们在第 4.4 节中讨论 q-测地线的唯一性（以及同时达到 (4.1) 式中上确界的耦合的唯一性）。这里我们沿用 [45, Sections 2, 4, 5]。

4.1 q-洛伦兹–瓦瑟斯坦距离与 q-测地线

令 $\mathrm{proj}_i\colon M \times M \longrightarrow M$ 表示由 $\mathrm{proj}_i(x) := x_i$ 定义的投影映射，其中 $i = 1, 2$；类似地，对于 $i, j = 1, 2, 3$ 且满足 $i \neq j$ 的情形，我们将定义 $\mathrm{proj}_{ij}\colon M \times M \times M \longrightarrow M \times M$，其定义为 $\mathrm{proj}_{ij}(x) := (x_i, x_j)$。如前所述，$\mathrm{P}(M)$ 是 M 上博雷尔概率测度的空间。令 $\mathrm{P_c}(M)$ 表示所有具有紧支撑 $\operatorname{spt}\mu \subset M$ 的 $\mu \in \mathrm{P}(M)$ 的集合。给定 M 上的任意博雷尔测度 $\mathfrak{m}$，令 $\mathrm{P}^{\mathrm{ac}}(M, \mathfrak{m})$ 表示 $\mathrm{P}(M)$ 中所有 $\mathfrak{m}$-绝对连续元素构成的空间，并定义 $\mathrm{P}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{ac}}(M, \mathfrak{m}) := \mathrm{P}^{\mathrm{ac}}(M, \mathfrak{m}) \cap \mathrm{P_c}(M)$。

给定 $\mu, \nu \in \mathrm{P}(M)$，令 $\Pi(\mu, \nu)$ 为 μ 和 ν 的所有耦合 π 的集合。若 $\pi[\{l \geq 0\}] = 1$，则称这种耦合为 **因果** 耦合；若 $\pi[\{l > 0\}] = 1$，则称其为 **年代性** 耦合。根据引理 3.3，π 是因果的，当且仅当 支撑 $\pi \subset \{l \geq 0\}$。

在全文中，我们固定 $q \in (0, 1]$，，并在额外假设 $q < 1$ 时明确说明。回顾 (3.6) 和 (3.4)，令 $\ell_q\colon \mathrm{P}(M) \times \mathrm{P}(M) \longrightarrow [0, +\infty] \cup \{-\infty\}$ 表示 q-洛伦兹–*Wasserstein* 距离

$$\ell_q(\mu, \nu) := \sup_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \left(\int_{M \times M} l(x, y)^q \, \mathrm{d}\pi(x, y) \right)^{1/q}. \tag{4.1}$$

我们选择的代价函数 l^q 可以降至 $-\infty$，这确保了 $\ell_q(\mu, \nu) \geq 0$ 当且仅当 μ 和 ν 存在因果耦合。

若 $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ ℓ_q-**最优**，则称其为 ℓ_q-**最优**，如果它是因果的，且在 (4.1) 中取得上确界。我们有时会用到下面这个标准结果，它可由引理 3.3 和 [65, 定理 4.1] 推得。

引理 4.1（存在 ℓ_q-最优耦合）。假设 $\mu, \nu \in \mathcal{P}_{\mathrm{c}}(M)$ 满足 $\ell_q(\mu, \nu) \geq 0$。则存在 ℓ_q-最优耦合，将 μ 和 ν 耦合起来。

定义 4.2（概率测度的测地线）。给定任意 $q \in (0,1]$，一族 $(\mu_t)_{t\in[0,1]}$ 属于 $\mathrm{P}(M)$，称为 q-测地线，如果

(1) $\ell_q(\mu_0,\mu_1)$ 为正且有限，并且

(2) 对于每个 $s,t\in[0,1]$ 满足 $s<t$，

$$\ell_q(\mu_s,\mu_t)=(t-s)\,\ell_q(\mu_0,\mu_1).$$

与 Wasserstein 距离的相应性质类似，ℓ_q 满足反三角不等式。这可由一个标准的粘合论证得到，参见例如 [24, 定理 13]。为了分析 q-测地线，我们还需要研究等号成立的情形。命题 4.3 汇总了这些结果，该命题取自 [45, 命题 2.9]。由此立即可得的一个推论是：端点具有紧支撑这一性质会沿着 q-测地线传播至其内部，参见推论 4.4。为方便起见，我们给出其证明。

回顾引理 3.6 中 $Z_s(E)$ 和 $Z(E)$ 的定义。

命题 4.3（反三角不等式及等号成立的情形）对于每个μ_1，μ_2，$\mu_3\in\mathrm{P}(M)$，有

$$\ell_q(\mu_1,\mu_3)\geq\ell_q(\mu_1,\mu_2)+\ell_q(\mu_2,\mu_3). \tag{4.2}$$

此外，若按照我们的约定 (3.4) $\ell_q(\mu_1,\mu_2)+\ell_q(\mu_2,\mu_3)\neq\pm\infty$，且存在 *Borel* 集 $X_1,X_3\subset M$，满足 $\mu_1[X_1]=\mu_3[X_3]=1$，但 $\mu_2[Z(X_1\times X_3)]<1$，则 (4.2) 中的不等式是严格的。

反过来，假设

(1) $q<1$,

(2) $\ell_q(\mu_1,\mu_3)$ 为正且有限，

(3) (4.2)中等号成立，并且

(4) μ_1 和 μ_2 以及 μ_2 和 μ_3 都存在 ℓ_q-最优耦合(例如，当 μ_1、μ_2和 μ_3 均为紧支撑时，参见引理 4.1)。

于是存在一个测度 $\omega\in\mathcal{P}(M\times M\times M)$，使得 $\pi_{ij}:=(\mathrm{proj}^{ij})_\sharp\pi$ 是其边缘分布 μ_i 和 μ_j 的一个 ℓ_q-最优耦合，对每个 $i,j\in\{1,2,3\}$ 且$i<j$均成立，并且每个 $(x,z,y)\in$支撑ω 都满足

$$l(x,z)=t\,l(x,y),\qquad l(z,y)=(1-t)\,l(x,y),$$

其中 $t:=\ell_q(\mu_1,\mu_2)/\ell_q(\mu_1,\mu_3)$。此外，若 π_{13} 集中于某个 *Borel* 集 $E\subset M\times M$，则 μ_2 集中于 $Z_t(E)$。特别地，若对 π_{13}-几乎处处的 $(x,y)\in M\times M$，$Z_t(x,y)$ 是单点集 $\{z_t(x,y)\}$，则

$$\omega=(z_0,z_t,z_1)_\sharp\pi_{13},\qquad \mu_2=(z_t)_\sharp\pi_{13}.$$

推论 4.4 (插值点继承紧支撑)。 设 $(\mu_t)^{t\in[0,1]}$ 是在某个 $q\in(0,1)$ 上的 q-测地线，且属于 $\mathcal{P}(M)$。若端点 μ_0 和 μ_1 都有紧支撑，则每个 $t\in(0,1)$ 对应的中间点 μ_t 也有紧支撑；更准确地说，支撑 $\mu_t\subset Z_t$(支撑 $\mu_0\times$ 支撑 μ_1)。

证明。 引理 3.6 给出了 $Z(E)$ 和 $Z_t(E)$ 的紧致性，其中我们设 $E:=\operatorname{spt}\mu_0\times\operatorname{spt}\mu_1$。由于 $\ell_q(\mu_0,\mu_1)\in(0,+\infty)$，应用命题 4.3 的第一部分可得 $\mu_t[Z(E)]=1$。特别地，μ_t 具有紧支撑。此外，由引理 4.1 可知，μ_0 和 μ_t 以及 μ_t 和 μ_1 都存在 ℓ_q-最优耦合。因此，根据命题 4.3 的后半部分，我们实际上得到 $\mu_t[Z_t(E)]=1$。 □

4.2 q-测地线的存在性

运用标准的可测选择论证 [3, 65], ，我们现在通过在所考虑的适当端点 μ_0 和 μ_1 之间取一个年代性 ℓ_q-最优耦合 π，并用一条极大类时测地线连接 π-几乎处处的 $(x,\ y)\in M\times M$，再结合一个提升过程，来构造 q-测地线。

我们需要接下来的技术性引理 4.5；其证明使用引理 3.3 和注 3.7，并类似于其洛伦兹版本 [45, 引理 2.8]。回忆一下，在拓扑空间 X 上定义的实值映射 μ 若对于每个 X上的博雷尔概率测度 σ，都关于相对于 μ的博雷尔 X 代数的完备化可测，则称为普遍可测的 。

引理 4.5 （在类时割迹上选取中间点）。 对于每个 $t\in[0,1]$，映射 $z_t\colon\ (M\times M)\setminus\operatorname{sing}(l)\longrightarrow M$由引理3.5 给出，并具有一个未重新标记的普遍可测扩展 $z_t\colon\ \{l>0\}\longrightarrow M$，使得对于每个$(x,\ y)\in\{l>0\},\ t\longmapsto z_t(x,\ y)$是从 x到 y的一条极大测地线。

推论 4.6 （存在 q-测地线）。 设 $\mu_0,\mu_1\in\mathcal{P}(M)$，并设 $\pi\in\Pi(\mu_0,\mu_1)$ 是一个具有有限总 ℓ_q-成本的年代性 ℓ_q-最优耦合。那么以下结论成立。

（i）赋值 $\mu_t:=(z_t)_\sharp\pi$，其中 z_t 是引理 4.5给出的映射，定义了一条连接 μ_0 和 μ_1的 q-测地线 $(\mu_t)^{t\in[0,1]}$。（ii）对于每个满足 $s<t$的 $s,t\in[0,1]$，$(z_s,z_t)_\sharp\pi$ 都是该 q-测地线上成员 μ_s 和 μ_t 之间的年代性 ℓ_q-最优耦合。

证明。 根据引理 4.5， μ_s 与 μ_t 的耦合 $(z_s,z_t)_\sharp\pi$ 是良定义且具有年代性的。此外，

$$\begin{aligned}\ell_q(\mu_s,\mu_t)^q&\geq\int_{M\times M}l\big(z_s(x,y),z_t(x,y)\big)^q\,\mathrm{d}\pi(x,y)\\&=(t-s)^q\int_{M\times M}l(x,y)^q\,\mathrm{d}\pi(x,y)\\&=(t-s)^q\,\ell_q(\mu_0,\mu_1)^q.\end{aligned}$$

由于 s 和 t 是任意的，这个估计结合命题 4.3 中的反三角不等式，迫使上述计算中出现的不等式变为等号。因此，$(\mu_t)_{t\in[0,1]}$ 是一条 q-测地线，而$(z_s, z_t)_\sharp \pi$是 μ_s 与 μ_t的一个 ℓ_q-最优耦合。 □

4.3 康托罗维奇对偶

现在我们回顾在洛伦兹时空框架下于 [45, 第 4] 节中建立的对偶理论（另见 [21, §2.4]）。其中，额外的困难在于，l 在不具有因果关系的点处会降为$-\infty$，因此下文（4.3）中的下确界一般可能无法取到（例见 [36] ）。为确保后者存在（参见定理 4.9），我们在下文定义 4.8 中引入了 q-分离性质。引理 4.10 将表明，这一概念并非空洞：对于每一对测度，只要每一条 传输都以一致的方式远离光锥，就满足 q-分离性质。实际上，这一性质比 q-分离更容易验证，但仅考虑这类测度还不够。事实上，当 $s,\ t \in [0,1]$ 彼此接近时，q-测地线（μ_t）的中间点 μ_s 和 μ_t 的支集通常会相互重叠，因此一般不满足这一条件。另一方面，沿着 q-测地线，q-分离性质表现良好，参见命题 4.14。

由于 l在 $M\times M$的紧子集上有上界，标准的康托罗维奇对偶性 [65, 定理 5.10] 给出如下结果。

命题 4.7 (基本对偶)。对于任意 $\mu,\ \nu\in\mathcal{P}_c(M)$ 我们有

$$q^{-1}\,\ell_q(\mu_0,\mu_1)^q = \inf_{(u,v)} \left(\int_M u\,\mathrm{d}\mu + \int_M v\,\mathrm{d}\nu \right), \tag{4.3}$$

其中 (u, v)：$M \longrightarrow \mathbb{R}^2$ 遍历 $L^1(M,\mu)\times L^1(M,\nu)$中的所有函数对，且满足 $l^q/q \le u\oplus v$ 在 $M\times M$上，其中

$$(u\oplus v)(x,y) := u(x)+v(y).$$

此外，给定任意 $X\supset$ 支撑μ 和 $Y\supset$ 支撑ν，若将下确界限制在满足以下条件的下半连续函数对 $u\in L^1(M,\mu)$和 $v\in L^1(M,\nu)$上，则 (4.3) 中的下确界不变：$u=(l^q)v$ 在 X上，且 $v=u^{(l^q)}$在 Y上，其中

$$\begin{aligned} {}^{(l^q)}v(x) &:= \sup_{y\in Y}\big(q^{-1}\,l(x,y)^q - v(y)\big),\\ u^{(l^q)}(y) &:= \sup_{x\in X}\big(q^{-1}\,l(x,y)^q - u(x)\big). \end{aligned} \tag{4.4}$$

注意，(4.4) 中的变换分别依赖于 X 和 Y。

定义 4.8 (q-分离)。若存在 $\pi\in\Pi(\mu,\nu)$，以及下半连续函数u: spt $\mu\longrightarrow\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ 和 v: spt $\nu\longrightarrow\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$，满足以下性质，则称 $(\mu,\nu)\in \mathrm{P_c}(M)\times \mathrm{P_c}(M)$ q-分离(由 (π,u,v))。

（1）我们有 $l^q/q \le u \oplus v$ 在支撑 $\mu \times$ 支撑 ν 上。

(2) 等号集

$$E := \{(x,y) \in \operatorname{spt}\mu \times \operatorname{spt}\nu \mid u(x) + v(y) = q^{-1}\, l(x,y)^q\} \tag{4.5}$$

满足支撑 $\pi \subset E \subset \{l > 0\}$。

注意到 u 和 v 的下半连续性，加上 l 的上半连续性，蕴含了 E的紧致性，参见下文的定理 4.9。

我们省略以下定理 4.9 的技术性证明，该证明可见于 [45, 定理 4.3]。借助定理 3.11、推论 3.12，以及 M上的一个辅助光滑黎曼度量，该结论可原封不动地推广到 Lorentz–Finsler 情形。

为表述该结论，我们回顾一下：集合 $E \subset M \times M$ 是 l^q-循环单调的（例如参见 [21, 定义 2.6] 和 [65, 定义 5.1]），如果对于任意 $k \in \mathbb{N}$、任意（x_1, y_1）$\ldots$,（x_k, y_k）$\in E$以及任意排列 $\sigma \in \mathfrak{S}_k$，我们都有

$$\sum_{i=1}^{k} l(x_i, y_i)^q \ge \sum_{i=1}^{k} l(x_i, y_{\sigma(i)})^q.$$

每个 ℓ_q-最优耦合都集中于一个 l^q-循环单调集上；但与实值代价函数的情形不同 [65, 定理 5.10], ，其逆命题还需要对该耦合附加一个假设，参见 [21, 命题 2.8]。

定理 4.9 (通过 q-分离得到的对偶性)。 假设$(\mu, \nu) \in \mathcal{P}_c(M) \times \mathcal{P}_c(M)$ 由(π, u, v) q-分离。则以下结论成立。

(i) 根据(4.4)，我们在支撑 μ 上有 $u = {}^{(l^q)}v$，并且在支撑 ν 上有 $v = u^{(l^q)}$。(ii) (4.5) 中的等号集 E 是紧的且 l^q-循环单调。(iii) 耦合 π 是 ℓ_q-最优的，而 (u, v) 使(4.3)右端取最小值。(iv) 函数 u 和 v 可分别延拓为支撑 μ 和支撑 ν的开邻域上的半凸利普希茨函数，其利普希茨常数和半凸性常数可由 $l^q|_E$的相应常数估计。

引理 4.10 （存在 q-分离）。 设 μ, $\nu \in \mathrm{P_c}(M)$ 满足 支撑 $\mu \times$支撑 $\nu \subset \{l > 0\}$。则 $(\mu$, $\nu)$ 是 q-分离的。

证明。 根据引理 3.3，函数 l 在 $\operatorname{spt}\mu \times \operatorname{spt}\ \nu$ 上连续、有界且有正下界。因此，(4.1) 中的上确界以及根据 [65, 定理 5.10], ，(4.3) 中的下确界分别由某些 $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ 以及形式为 (4.4) 的一致连续函数 u: $\operatorname{spt}\ \mu \longrightarrow \mathbb{R}$和 v: $\operatorname{spt}\ \nu \longrightarrow \mathbb{R}$ 取到。这种对偶性还意味着 π 集中于 (4.5) 中的等号集E上，并且 $E \subset \operatorname{spt}\mu \times \operatorname{spt}\ \nu \subset \{l > 0\}$。 □

4.4 q-测地线的刻画

现在我们转而描述端点之间的 ℓ_q-测地线，其中端点满足 q-分离；这一描述最终表述为推论 4.18。为此，核心在于定理 4.17 所证明的 ℓ_q-蒙日问题的可解性。这是 Lorentz–Finsler 情形下对应于黎曼几何中的 Brenier–McCann 定理 [16, 44] 以及 Lorentz结果 [45] 的类似结果。在目标测度的支集满足某些几何条件时， [63] 中也得到了类似结果。

由于本小节是我们工作的核心部分，为了强调 Lorentz–Finsler 与真正的洛伦兹情形之间的差异，即使证明与 [45, 第 5] 节中的证明基本完全相同，我们仍给出完整证明。

我们先汇集与 M 和 P(M) 中测地线的中间点相关的若干性质。命题 4.11 和引理 4.13 基于 (3.5) 的以下显然推论：对于任意三元组 (x， z， y) $\in M \times M \times M$以及任意 $t \in$ (0，1),

$$l(x,y) \geq t\,\frac{l(x,z)}{t} + (1-t)\,\frac{l(z,y)}{1-t}. \tag{4.6}$$

命题 4.11 （拉格朗日轨迹不会相交）。 设 $q \in$ (0，1)， $t \in$(0，1)，且 x， x'， y， $y' \in M$满足 l(x， y) > 0且 l(x'， y') > 0。若集合 Z_t(x， y)与 Z_t(x'， y') 相交，但

$$l(x,y')^q + l(x',y)^q \leq l(x,y)^q + l(x',y')^q, \tag{4.7}$$

于是我们有 $x = x'$ 和 $y = y'$。

证明。 给定任意 $z \in Z_t$(x， y) $\cap$ Z_t(x'， y')，对三元组 (x， z， y') 应用不等式 (4.6)、我们的约定 (3.4) 以及 $r \longmapsto r^q$ 在 $[0,+\infty)$ 上的凹性，可得

$$\begin{aligned} l(x,y')^q &\geq \big(l(x,z) + l(z,y')\big)^q \\ &= \big(t\,l(x,y) + (1-t)\,l(x',y')\big)^q \\ &\geq t\,l(x,y)^q + (1-t)\,l(x',y')^q, \end{aligned} \tag{4.8}$$

类似地

$$l(x',y)^q \geq t\,l(x',y')^q + (1-t)\,l(x,y)^q. \tag{4.9}$$

这给出 l(x,y') > 0和 l(x',y) > 0。此外，根据（4.7），将前面的不等式相加会迫使（4.6）中的所有不等式处处取等号——即对于三元组（x,z,y'）和（x',z,y）——以及（4.8）和（4.9）中的不等式也都取等号。由注 3.7 可知，（4.6）中的等号意味着 z 位于从 x 到 y' 的极大测地线以及从 x' 到 y的极大测地线的内部。因此，所考虑的五个点都位于同一条极大测地线 $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow M$。最后，（4.8）中的第二个不等式取等号，再结合 $r \longmapsto r^q$在 $[0,+\infty)$上的严格凹性，可推出 l(x,y) $= l$(x',y')。由于 z将 γ 从x 到 y 以及从 x' 到 y' 的线段按相同比例分割，我们得到 $x = x'$ 和 $y = y'$。

□

定理 *4.12*（连续逆映射）。设 $q \in (0, 1)$ 和 $t \in (0, 1)$。假设（μ_0, μ_1）$\in P_c(M) \times P_c(M)$ 是 q-分离的。那么存在一个连续映射 $W\colon Z_t(E) \longrightarrow E$，使得 $z_t \circ W$ 是 $z_t(E)$ 上的恒等映射，并且每当 $\mu_t \in P(M)$ 是从 μ_0 到 μ_1的一条 q-测地线的 t-中间点时，$W_\sharp \mu_t$属于 $\Pi(\mu_0, \mu_1)$，并使 $\ell_q(\mu_0, \mu_1)$ 达到极大值。这里，$E \subset spt\ \mu_0 \times spt\ \mu_1$ 表示（*4.5*）中的等号集，而 z_t 是由引理 *4.5* 给出的映射。

证明。回顾一下，根据定理 4.9，E 是紧的且 l^q循环单调。此外，根据定义 4.8，$E \subset \{l > 0\}$。给定任意 $z \in Z_t(E)$，我们定义$W(z) := (x, y)$，其中$(x, y) \in E$的选取满足引理 3.6 中 $Z_t(E)$的定义，即 $z \in Z_t(x, y)$。

我们声称 W良定义且连续。若对于 (x, y)、$(x', y') \in E$，有 $z \in Z_t(x, y) \cap Z_t(x', y')$，则由 E 的 l^q-循环单调性可得 (4.7)，进而由命题 4.11 得到 $x = x'$ 和 $y = y'$。关于连续性，设 $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是 $Z_t(E)$ 中收敛到 $z \in Z_t(E)$ 的一个序列，并考虑 $(W(z_k))_{k\in\mathbb{N}}$ 的一个固定的、未重新编号的子序列。由 E 的紧致性，后者的一个进一步的、未重新编号的子序列存在极限 $(x', y') \in E$。根据上述良定义性证明，(x', y') 必然与满足 $z \in Z_t(x, y)$ 的唯一一对 $(x, y) \in E$ 相同，也就是说，与 $W(z)$ 相同。由于初始子序列是任意的，故 W 的连续性得证。此构造还保证 W 是 $z_t(E)$ 上 z_t 的右逆。

最后，设 μ_t 满足假设。由于数对 (μ_0, μ_1) 是 q-分离的，且根据引理 3.3，l 在紧集 $\operatorname{spt}\mu_0 \times \operatorname{spt}\ \mu_1$ 上有上界，因此 $\ell_q(\mu_0, \mu_1) \in (0, +\infty)$；特别地，$\ell_q(\mu_0, \mu_t) > 0$ 且 $\ell_q(\mu_t, \mu_1) > 0$。于是，应用推论 4.4、引理 3.6 和引理 4.1 可知，μ_0 和 μ_t，以及 μ_t 和 μ_1 都存在 ℓ_q-最优耦合。因此，由命题 4.3 可得 $\omega \in P(M \times M \times M)$，其边缘分布为 μ_0、μ_t和 μ_1，且 $\pi_{ij} := (\mathrm{proj}_{ij})_\sharp \omega$ 对 μ_i 是 ℓ_q-最优的，并且对每个满足 $i < j$的 i、$j = 0$、t，μ_j 都成立。由对偶性（参见定理 4.9 和命题 4.7），π_{01} 集中于 E。根据命题 4.3，$\mu_t = (\mathrm{proj}_t)_\sharp \omega$ 集中于 $Z_t(E)$，而根据引理 3.6，该集合是紧的。令 $W_i := \mathrm{proj}_i \circ W$，其中 $i = 0, 1$，则上述论证表明 ω 集中于 $W_0(Z_t(E)) \times Z_t(E) \times W_1(Z_t(E))$。这意味着 $\omega = (W_0, \mathrm{Id}\ W_1)_\sharp \mu_t$，由[1, 引理 3.1]，可知，进而得到 $\pi_{01} = W_\sharp \mu_t$。 □

引理 4.13 (测地线端点的变分刻画)。设 $q \in (0, 1)$ 以及 $\gamma\colon [0, 1] \longrightarrow M$ 为一条极大类时测地线。那么对于任意 $t \in (0, 1)$ 和 $x \in M$，有

$$l\big(x, \gamma(1)\big)^q \geq t^{1-q}\, l\big(x, \gamma(t)\big)^q + (1-t)^{1-q}\, l\big(\gamma(t), \gamma(1)\big)^q. \tag{4.10}$$

其中等号成立当且仅当 $x = \gamma(0)$。

证明。所声称的界（4.10）由（4.6）对 $(x, \gamma(t)\ \gamma(1))$ 以及函数 $r \longmapsto r^q$ 的凹性得到。此外，显然 $x = \gamma(0)$ 在其中取得等号。现在，假设对于某个 $x \in M$，（4.10）中的等号成立。那么（4.6）对于 $(x, \gamma(t)\ \gamma(1))$ 也成立，这意味着某条以 $\gamma(1)$ 为终点的类时极大测地线经过 x 和 $\gamma(t)$。由于 $\gamma(t)$ 位于 the

γ 的内部，这条测地线必然与 γ 重合，而 (4.10) 中的等号以及 $r \longmapsto r^q$ 在 $[0,+\infty$ 上的严格凹性，迫使 $x=\gamma(0)$。 □

命题 4.14 (q-分离的星形性)。 设 $q \in (0,1)$， $\mu_0, \mu_1 \in \mathcal{P}_c(M)$ 且 $(\mu_t)_{t\in[0,1]}$ 是一条从 μ_0 到 μ_1 的 q-测地线。若 (μ_0, μ_1) 是 q-分离的，则对于任意满足 $s<t$ 的 $s, t \in [0,1]$，(μ_s, μ_t) 也具有相同性质。

证明。 显然，只需证明对于每个 $t \in (0,1)$，(μ_0, μ_t) 与 (μ_t, μ_1) 是 q-分离的。我们重点考虑 (μ_0, μ_t)；考虑到注 4.15（或将其归约为反向洛伦兹–芬斯勒结构），(μ_t, μ_1) 的情形可类似处理。

假设这对 (μ_0, μ_1) 被 (π, u, v) q-分离。定理 4.9 表明， u 和 v 分别在支撑 μ_0 和支撑 μ_1 上连续。记 E 为关于 (μ_0, μ_1) 的 (4.5) 中的等号集，令 $W\colon Z_t(E) \longrightarrow E$ 为定理 4.12 给出的连续映射，并对 $i=1,2$ 定义 $W_i := \mathrm{proj}_i \circ W$。我们断言 (μ_0, μ_t) 被 (π_t, u_t, v_t) q-分离，其中

$$\begin{aligned} \pi_t &:= (W_1, \mathrm{Id})_\sharp \mu_t, \\ u_t &:= t^{q-1}\, u, \\ v_t &:= t^{q-1}\, v \circ W_2 - t^{q-1}\,(1-t)^{1-q}\, q^{-1}\, l^q \circ (\mathrm{Id}, W_2). \end{aligned} \tag{4.11}$$

由定理 4.12 可得 $\pi_t \in \Pi(\mu_0, \mu_t)$。由命题 4.3 以及引理 3.6 中 $Z_t(E)$ 的紧致性，我们得到 $\operatorname{spt}\mu_t \subset Z_t(E)$。由于 $(\mathrm{Id}\ W_2)\big(Z_t(E)\big) \subset \{l>0\}$，定理 4.12 和引理 3.3 随即推出 u_t 和 v_t 分别在 $\operatorname{spt}\mu_0$ 和 $\operatorname{spt}\mu_t$ 上连续。现在，任取 $x \in \operatorname{spt}\mu_0$、$z \in \operatorname{spt}\mu_t$，以及 $y := W_2(z)$，假设的 (μ_0, μ_1) 的 q-分离性意味着

$$u(x) + v(y) \geq q^{-1}\, l(x,y)^q.$$

由注 3.7 和引理 4.13，得到

$$\begin{aligned} t^{q-1}\, u(x) + t^{q-1}\, v(y) &\geq q^{-1}\, t^{q-1}\, l(x,y)^q \\ &\geq q^{-1}\, l(x,z)^q + q^{-1}\, t^{q-1}\,(1-t)^{1-q}\, l(z,y)^q. \end{aligned}$$

因此，我们有

$$u_t(x) + v_t(z) \geq q^{-1}\, l(x,z)^q. \tag{4.12}$$

此外，由引理 4.13 和 $W(z) \in E$，我们推得，当且仅当 $x = W_1(z)$ 时，等号在 (4.12) 中成立。这证明 π_t 集中于

$$E_t := \big\{(x,z) \in \operatorname{spt}\mu_0 \times \operatorname{spt}\mu_t \mid u_t(x) + v_t(z) = q^{-1}\, l(x,z)^q\big\},$$

由支撑 $\mu_0 \times \operatorname{spt}\mu_t$ 的紧致性（参见推论 4.4）以及引理 3.3 可知其为紧集。因此，我们有 $\operatorname{spt}\pi_t \subset E_t$。剩下需要证明 $E_t \subset \{l>0\}$。对于任意 $(x,\ z) \in E_t$，回想一下，必然有 $x = W_1(z)$，且 $W(Z_t(E)) \subset E \subset \{l>0\}$ 推出 $l(W_1(z)\ W_2(z)) > 0$。由于 $z \in Z_t(E)$，这意味着 $l(x,\ z) = t\, l(W_1(z)\ W_2(z)) > 0$。 □

注 4.15。为证明 $(\mu_t,\ \mu_1)$ 的 q-分离性，对 (4.11) 中各量作相应替换，得到

$$\begin{aligned}\pi'_t &:= (\mathrm{Id}, W_2)_\sharp \mu_t,\\ u'_t &:= (1-t)^{q-1}\, u\circ W_1 - (1-t)^{q-1}\, t^{1-q}\, q^{-1}\, l^q \circ (W_1, \mathrm{Id}),\\ v'_t &:= (1-t)^{q-1}\, v.\end{aligned}$$

现在回顾定理 3.11 之前函数u的下可微性和上可微性的定义：对于 $x\in M$，若$u(x)\in\mathbb{R}$ 且 u 在 x 可微，我们记作 $x\in \mathrm{D}(\mathrm{d}u)$。后者等价于 u 在 x既下可微又上可微，此时 $\partial_\bullet u(x) = \partial^\bullet u(x) = \{\mathrm{d}u(x)\}$。最后，$\mathrm{D}(\mathrm{d}^2u)$ 是所有 $x\in \mathrm{D}(\mathrm{d}u)$ 的集合，其中 u 二阶可微。

在本节余下部分，令 $\mathfrak{m}$ 为 M 上的任意测度，该测度在每个局部坐标系中都与勒贝格测度相比较。它仅用于根据可微性性质区分 $\mathfrak{m}$-可忽略集：例如，根据亚历山德罗夫定理，半凸或半凹函数在 $\mathfrak{m}$-几乎处处二阶可微（有关黎曼和芬斯勒情形，参见 [8, 54]，更多细节见 [65, 第 14] 章）。

在下文中，我们在此不再另行说明地采用以下约定。对于任意 $X\subset M$，每个半凸利普希茨函数 $u\colon X\longrightarrow\mathbb{R}$(可以且)均视为定义在 X 的某个邻域上的适当半凸利普希茨函数的限制，参见定理 4.9。此外，定义在 $\mathrm{D}(\mathrm{d}u)$ 上的任意映射都将通过任意选取的一个常数延拓至 M。我们的结果不依赖于相应延拓方式的选择。

我们还使用反向 Lorentz–Finsler 结构 $\overline{L}(v) := L(-v)$（在定理 3.11 的证明中曾简要提及），其时间定向规定：对于 $\overline{L}$，$v\in TM$ 是未来指向类时的，当且仅当对于 L，$-v$ 是未来指向类时的。注意，给定 L 上的一条类时测地线 γ：$[0,1]\longrightarrow M$，其反向曲线定义为 $\overline{\gamma}(t) := \gamma(-t)$，它是 L 上的一条类时测地线。

引理 4.16（传输映射与雅可比场）。设 $q\in(0,\ 1)$，X，$Y\subset M$ 为紧集，$U\subset M$ 是 X 的一个给定相对紧邻域，且 $u\colon\ U\longrightarrow\mathbb{R}$ 是半凸且 *Lipschitz* 连续的，满足

$$u(x)\geq {}^{(l^q)}\big(u^{(l^q)}\big)(x) \tag{4.13}$$

对每个 $x\in U$，根据由 X 和 Y 定义的（4.4）。对于 $t\in[0,1]$，定义 $\mathcal{F}_t$：$M\longrightarrow M$ 和 $\mathcal{G}_t\colon\ M\longrightarrow M$ 为

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_t(x) &:= \exp_x\big(t\, F^*(\mathrm{d}u)^{p-2}\, \mathscr{L}^*(\mathrm{d}u)\big),\\ \mathcal{G}_t(y) &:= \overline{\exp}_y\big(-t\, F^*(-\mathrm{d}u^{(l^q)})^{p-2}\, \mathscr{L}^*(-\mathrm{d}u^{(l^q)})\big),\end{aligned} \tag{4.14}$$

分别假设 $x\in\mathcal{D}$（$\mathrm{d}u$）和 $y\in\mathcal{D}$（$\mathrm{d}u^{(l^q)}$），其中$\exp^y$ 表示反向结构 $\overline{L}$的指数映射。

(i) 对于每个（x, y）$\in U\times Y$，我们有

$$u(x)+u^{(l^q)}(y)\geq q^{-1}\, l(x,y)^q. \tag{4.15}$$

此外，假设在 $(x,y) \in (X \times Y) \cap \{l > 0\}$ 处等号成立，则若 $x \in D(\mathrm{d}u)$，有 $y = F_1(x)$；若 $x \in D(\mathrm{d}^2 u)$，则 $(x,y) \notin \mathrm{sing}(l)$。类似地，$y \in D(\mathrm{d}u^{(l^q)})$ 蕴含 $x = G_1(y)$，而 $y \in D(\mathrm{d}^2 u^{(l^q)})$ 则给出 $(x,y) \notin \mathrm{sing}(l)$】【。

(ii) 对于几乎处处的 $\mathfrak{m}$ $x \in X \cap \{\mathrm{d}u \neq 0\}$，导数 $\mathrm{d}\mathcal{F}_t(x)\colon T_x M \longrightarrow T_{\mathcal{F}_t(x)} M$ 存在，且关于 $t \in [0,1]$ 光滑，并且 $t \longmapsto \mathrm{d}\mathcal{F}_t(x)(w)$ 是沿测地线 $\gamma_x(t) := \mathcal{F}_t(x)$ 的雅可比场，对每个 $w \in T_x M$ 均成立。

(iii) 对于 $\mathfrak{m}$-几乎处处的 $x \in X \cap \{\mathrm{d}u \neq 0\}$ 以及每个 $w \in T_x M$，我们有

$$D^{\dot\gamma_x}_{\gamma_x}\big[\mathrm{d}\mathcal{F}_t(x)(w)\big]_0 = F^*\big(\mathrm{d}u(x)\big)^{p-2}\,\nabla^2 u(w) + \mathrm{d}[F^*(\mathrm{d}u)^{p-2}](w)\,\nabla u(x),$$

其中，$\nabla u := \mathscr{L}^*(\mathrm{d}u)$ 为梯度向量，而 $\nabla^2 u\colon T_x M \longrightarrow T_x M$ 为赫塞矩阵，其定义为

$$\nabla^2 u(w) := D^{\nabla u}_w(\nabla u). \tag{4.16}$$

证明。(i) 第一个断言 (4.15) 是定义 (4.4) 和 (4.13) 的结果。下面讨论等号成立的情形。当 $x \in \mathrm{D}(\mathrm{d}u)$ 时，第一个断言以及我们关于 x 和 y 的假设意味着，对于每个充分小的 $w \in T_x M$，

$$\begin{aligned} q^{-1}\,l\big(\exp^h_x(w), y\big)^q &\le u\big(\exp^h_x(w)\big) + u^{(l^q)}(y) \\ &= u(x) + \mathrm{d}u(w) + u^{(l^q)}(y) + o(|w|_h) \\ &= q^{-1}\,l(x,y)^q + \mathrm{d}u(w) + o(|w|_h). \end{aligned}$$

换言之，$q^{-1}\,l(\cdot\ y)^q$ 在 x 处是超可微的，其超梯度为 $\mathrm{d}u \in T^*_x M$。因此，推论 3.12(ii) 蕴含 $y = \mathrm{F}_1(x)$，正如所声称的。

接下来，令 $x \in \mathrm{D}(\mathrm{d}^2 u)$。采用与上一步类似的论证，并在 x 处应用泰勒定理，我们得到

$$\begin{aligned} q^{-1}\,l\big(\exp^h_x(w), y\big)^q &\le u\big(\exp^h_x(w)\big) + u^{(l^q)}(y) \\ &= u(x) + \mathrm{d}u(w) + \mathrm{d}^2 u(w\otimes w) + u^{(l^q)}(y) + o(|w|^2_h) \\ &= q^{-1}\,l(x,y)^q + \mathrm{d}u(w) + \mathrm{d}^2 u(w\otimes w) + o(|w|^2_h) \end{aligned}$$

对每个充分小的 $w \in T_x M$ 均成立。将 w 替换为 $-w$ 并将所得不等式相加后，含有 $\mathrm{d}u$ 的项相互抵消。因此，我们得到推论 3.12(iv) 中分子的一个上界，并且有 $(x,y) \notin \mathrm{sing}(l)$。

通过对 $\overline{L}$ 采用相同的论证，可以得到互换 x 和 y 所对应的类似结论（注意，对于 $-\zeta \in \Omega^*_y$，有 $\overline{F}^*(\zeta) = F^*(-\zeta)$ 且 $\overline{\mathscr{L}}^*(\zeta) = -\mathscr{L}^*(-\zeta)$，其中 $\overline{F}^*$ 和 $\overline{\mathscr{L}}^*$ 与 $\overline{L}$ 相关联）。

(ii) 一方面，由于 u 是半凸的，因此它在 $\mathfrak{m}$-几乎处处二阶可微。特别地，对于 $\mathfrak{m}$-几乎所有的 $x \in X$，$\mathrm{d}u(x)$ 存在；并且当 $\mathrm{d}u(x) \neq 0$ 时，(4.16) 中的赫塞矩阵 $\nabla^2 u$ 是良定义的。另一方面，根据定义，对于每个 $z \in \mathrm{D}(\mathrm{d}u)$，$\gamma_z(t) = \mathrm{F}_t(z)$ 都是一条测地线。因此，$\mathrm{dF}_t(x)$ 存在，并且 $t \longmapsto \mathrm{dF}_t(x)(w)$ 是一个雅可比场（因而光滑）。

(iii) 注意到

$$\dot\gamma_x(0) = F^*(\mathrm{d}u)^{p-2}\,\mathscr{L}^*(\mathrm{d}u) = F^*(\mathrm{d}u)^{p-2}\,\nabla u(x).$$

这意味着，对每个 $w \in T_xM$，

$$\begin{aligned} D^{\dot\gamma_x}_{\gamma_x}\big[\mathrm{d}\mathcal{F}_t(x)(w)\big]_0 &= D^{\dot\gamma_x}_{w}\big[F^*(\mathrm{d}u)^{p-2}\,\nabla u\big] \\ &= F^*(\mathrm{d}u)^{p-2}\,\nabla^2 u(w) + \mathrm{d}[F^*(\mathrm{d}u)^{p-2}](w)\,\nabla u(x). \end{aligned}$$

证明至此结束。 □

我们指出，当如 (i) 中那样，等号在 (4.15) 中成立时，则 $\mathrm{d}u(x) \in \Omega^*_x$。因此，$F^*(\mathrm{d}u(x))$ 是良定义的，且 $\nabla u(x) = \mathscr{L}^*(\mathrm{d}u(x)) \in \Omega_x$。类似地，我们得到 $-\mathrm{d}u^{(l^q)}(y) \in \Omega^*_y$，以及 $\mathscr{L}^*(-\mathrm{d}u^{(l^q)}(y)) \in \Omega_y$。因此，向量 $-\mathscr{L}^*(-\mathrm{d}u^{(l^q)}(y))$ 相对于反向结构 $\overline{L}$ 是未来指向的，而映射 $t \longmapsto \mathsf{G}_t(y)$ 构成一条关于 $\overline{L}$ 的未来指向类时测地线。

定理 4.17 (最优映射的刻画)。设 $q \in (0,1)$，并假设 $(\mu,\nu) \in \mathcal{P}_{\mathrm{c}}(M) \times \mathcal{P}_{\mathrm{c}}(M)$ 关于 q 由 (π,u,v) 分离。则以下结论成立。

(i) 设 $\mu \in \mathcal{P}^{\mathrm{ac}}(M,\mathfrak{m})$，并按式(1)定义 $M \longrightarrow M$（见(4.14)）。那么，$\pi = (\mathrm{Id},\mathcal{F}_1)_\sharp\mu$ 是 $\ell_q(\mu,\nu)$ 的唯一最大化者，并且 $(x,\mathcal{F}_1(x)) \notin$ 属于 $\mathsf{sing}(l)$ 对 μ-几乎处处的 $x \in M$ 成立。

(ii) $\mathcal{F}_1$ 在(i) 中的映射在以下意义下是唯一的。假设 $\tilde u\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ 是定义在支撑 μ 的某个邻域 U 上的利普希茨函数，且

$$\tilde u(x) = \sup_{y\in \mathrm{spt}\,\nu} \big(q^{-1}\,l(x,y)^q - \tilde u^{(l^q)}(y)\big), \tag{4.17}$$

~并假设映射 $\tilde{\mathcal{F}}_1\colon M \longrightarrow M$ 由下式给出：

$$\tilde{\mathcal{F}}_1(x) = \exp_x\big(F^*(\mathrm{d}\tilde u)^{p-2}\,\mathscr{L}^*(\mathrm{d}\tilde u)\big)$$

~若满足 $x \in \mathcal{D}(\mathrm{d}\tilde u)$，则 $(\mathcal{F}_1)_\sharp\mu$ 成立。于是，$\mathrm{d}\tilde u = \mathrm{d}u$ μ-几乎处处成立。

(iii) 除(i)中的假设外，再假设 $\nu \in \mathcal{P}^{\mathrm{ac}}(M,\mathfrak{m})$，并按 $\mathcal{G}_1$ 定义 $M \longrightarrow M$（见(4.14)）。那么，对 ν-几乎处处的 $y \in M$，$\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{G}_1(y) = y$ 成立；此外，对 μ-几乎处处的 $x \in M$，$\mathcal{G}_1 \circ \mathcal{F}_1(x) = x$ 也成立。

证明。(i) 定理 4.9 推出，$u = (l^q)v$ 在 $\mathrm{spt}\,\mu$，$v = u^{(l^q)}$ 在 $\mathrm{spt}\ \nu$ 上，并且 u 和 v 分别延拓为定义在 $\mathrm{spt}\,\mu$ 和 $\mathrm{spt}\,\nu$ 的邻域上的半凸利普希茨函数。拉德马赫定理保证 u 几乎处处可微（相对于 $\mathfrak{m}$），因而也几乎处处可微（相对于 μ）。特别地，测度 $(\mathrm{Id},\mathsf{F}_1)_\sharp\mu$ 是有意义的。

再次根据定理 4.9，π 以及 (u,v) 分别在（4.3）中达到上确界和下确界。令 E 为（4.5）中的等号集。根据引理 4.16(i)，对于 π-几乎处处的 (x,y)，若 $\in E$ 满足 $x \in \mathsf{D}(\mathrm{d}^2u)$，则有 $y = \mathsf{F}_1(x)$，且 $(x,\mathsf{F}_1(x)) \notin$ 奇异 (l)。由于根据亚历山德罗夫定理，$M\backslash\mathsf{D}(\mathrm{d}^2u)$ 是 $\mathfrak{m}$-可忽略集，因此也是 μ-可忽略集，我们得到 $\pi = (\mathrm{Id},\mathsf{F}_1)_\sharp\mu$，因此，$(\mathrm{Id},\mathsf{F}_1)_\sharp\mu$ 是 $\ell_q(\mu,\nu)$ 的最大化者。给定

任意这样的最大化者 π'，由命题 4.7 可得 $\pi'[E]=1$，按照上述论证可得 $\pi'=\pi$，从而得到 π 的唯一性。

(ii) 首先，我们断言 $\tilde{\pi}:=(\mathrm{Id},\mathsf{F}_1)_\sharp\mu$ 使 ℓ_q 达到极大值。由引理 4.16(i)，对每个 $x\in \mathrm{D}(\mathrm{d}\tilde{u})$，(4.17) 的上确界必定在 $y=\mathsf{F}_1(x)$ 处取得。与 (i) 中一样，我们看到 $M\setminus \mathrm{D}(\mathrm{d}\tilde{u})$ 是 μ-零测的。因此，

$$q^{-1}\,l\big(x,\tilde{\mathcal{F}}_1(x)\big)=\tilde{u}(x)+\tilde{u}^{(l^q)}\big(\tilde{\mathcal{F}}_1(x)\big)$$

对 μ-几乎处处的 $x\in M$ 成立。将此不等式对 μ 积分，并利用 $\nu=(\mathsf{F}_1)_\sharp\mu$ 以及命题 4.7，即可得出所述结论。

因此，(i) 的唯一性部分给出 $(\mathrm{Id},\mathsf{F}_1)_\sharp\mu=(\mathrm{Id},\tilde{\mathsf{F}}_1)_\sharp\mu$，由此得出 $\mathsf{F}=\tilde{\mathsf{F}}_1$ μ-几乎处处。我们断言，事实上在 $\mathrm{D}(\mathrm{d}u)\cap\mathrm{D}(\mathrm{d}\tilde{u})$ 上有 $\mathrm{d}u=\mathrm{d}\tilde{u}$（如上所见，该集合具有 μ-满测度）。若在集合 $\mathrm{D}(\mathrm{d}u)\cap\mathrm{D}(\mathrm{d}\tilde{u})$ 中某个正 μ-测度的点集上，该结论均不成立，且满足 $\tilde{\mathsf{F}}_1(x)=\mathsf{F}_1(x)$，则存在两条不同的极大测地线连接 x 和 $\mathsf{F}_1(x)$。因此 $(x,\mathsf{F}_1(x))\in\mathrm{sing}(l)$，这与 (i) 矛盾。

(iii) 与 (i) 中类似的论证，考虑到 $v=u^{(l^q)}$ 在 $\mathrm{spt}\,\nu$ 上，得到 $\pi=(\mathsf{G}_1,\mathrm{Id})_\sharp\nu$。因此，$\pi$ 集中于 $\mathrm{D}(\mathrm{d}u)\times\mathrm{D}(\mathrm{d}v)$。于是，根据引理 4.16(i)，对 π-几乎处处的 (x,y)，有 $y=\mathsf{F}_1(x)$ 且 $x=\mathsf{G}_1(y)$，这就是所要证明的结论。 □

推论 *4.18*（q-测地线的拉格朗日量刻画）。给定任意 $q\in(0,1)$，假设 $(\mu_0,\mu_1)\in P_c^{\mathrm{ac}}(M,\mathfrak{m})\times P_c(M)$ 被 (π,u,v) q-分离。定义 $F_t\colon M\longrightarrow M$ 如 (4.14) 所示，其中 $t\in[0,1]$。那么 $((F_t)_\sharp\mu_0)_{t\in[0,1]}$ 是从 μ_0 到 μ_1 的唯一 q-测地线。

证明。根据定理 4.17，π 是 ℓ_q-最优耦合的唯一者，且具有 $\pi=(\mathrm{Id},\mathsf{F}_1)_\sharp\mu_0$ 的形式。特别地，由于

$$l\big(\mathcal{F}_s(x),\mathcal{F}_t(x)\big)^q=(t-s)^q\,l\big(x,\mathcal{F}_1(x)\big)^q$$

对于 μ_0-几乎处处的 $x\in M$ 以及每个 $s,\ t\in[0,1]$（其中 $s<t$），$((\mathsf{F}_t)_\sharp\mu_0)_{t\in[0,1]}$ 是从 μ_0 到 μ_1 的一条 q-测地线；因此，推论 4.4 蕴含了 $\mathrm{spt}[(\mathsf{F}_t)_\sharp\mu_0]$ 的紧致性。

为证明唯一性，设 $(\mu_t)_{t\in[0,1]}$ 是从 μ_0 到 μ_1 的一条 q-测地线，并固定 $t\in(0,1)$。同样，根据推论 4.4，μ_t 具有紧支撑。特别地，由引理 4.1 μ_0 以及 μ_t 和 μ_t 以及 μ_1 都存在 ℓ_q-最优耦合。于是，我们取命题 4.3 所给出的 $\omega\in\mathsf{P}(M\times M\times M)$。其边缘分布的 ℓ_q-最优性以及 π 的唯一性保证了 $\pi_{13}=\pi$，其中 $\pi_{13}:=(\mathrm{proj}_{13})_\sharp\omega$。因此，根据定理 4.17(i)，$\pi_{13}[\mathrm{sing}(l)]=0$。结合引理 3.5、命题 4.3 的最后一部分以及对于每个 $x\in\mathrm{D}(\mathrm{d}u)$ 都有 $z_t(x,\mathsf{F}_1(x))=\mathsf{F}_t(x)$（参见注 3.7），最终得到

$$\mu_t=(z_t)_\sharp\pi_{13}=(z_t)_\sharp\big((\mathrm{Id},\mathcal{F}_1)_\sharp\mu_0\big)=(\mathcal{F}_t)_\sharp\mu_0$$

从而得到所需结论。 □

事实上，在推论 4.18 的假设下，若满足 $t<1$，则插值曲线 $(\mathsf{F}_t)_\sharp\mu_0$ 关于 $\mathfrak{m}$ 绝对连续。以下相应命题的证明将推迟到下一节，因为我们需要引理 5.4 中陈述的测度收缩性质。

命题 4.19 (插值曲线的绝对连续性)。 给定任意 $q \in (0,1)$，令 $(\mu_t)_{t\in[0,1]}$ 表示连接一对 q-分离端点的唯一 q-测地线$(\mu_0, \mu_1) \in \mathcal{P}_c^{\mathrm{ac}}(M, \mathfrak{m}) \times \mathcal{P}_c(M)$。那么，对于所有 $t \in (0,\ 1)$，$\mu_t \in \mathcal{P}_c^{\mathrm{ac}}(M, \mathfrak{m})$。

直接推论如下蒙日–安培 `型方程（也称为雅可比方程；参见 [65, 定理 11.1]）。其证明方式与 [45, 推论 5.11] 完全相同（其主要依据 [45, 定理 5.10] 是一个局部结论，在我们的设定下可逐图册建立），因此省略证明。

推论 4.20 (Monge–Amp`ere 型方程)。 保留命题 4.19 中的假设和记号，并令 $\mu_t := (\mathcal{F}_t)_\sharp \mu_0 = \rho_t\, \mathfrak{m}$ 对于 $t \in [0,1)$。那么，对于每个 $t \in (0、1)$ 以及 μ_0-几乎处处的 $x \in M$，$\mathrm{d}\mathcal{F}_t(x)$ 存在，并且我们有

$$\rho_0(x) = \rho_t\big(\mathcal{F}_t(x)\big)\, \det{}_{\mathfrak{m}}[\mathrm{d}\mathcal{F}_t(x)].$$

该结论同样适用于 $t = 1$，前提是 $\mu_1 \in \mathcal{P}_c^{\mathrm{ac}}(M, \mathfrak{m})$。

这里，$\det_{\mathfrak{m}}[\mathrm{dF}_t(x)]$ 是相对于$\mathfrak{m}$的 $\mathrm{dF}_t(x)$ 的雅可比行列式，即

$$\det{}_{\mathfrak{m}}[\mathrm{d}\mathcal{F}_t(x)] := \frac{\mathfrak{m}_{\mathcal{F}_t(x)}[\mathrm{d}\mathcal{F}_t(x)(A)]}{\mathfrak{m}_x[A]},$$

其中，$\mathfrak{m}_x$ 是由坐标通过 $\mathfrak{m}$ 在 T_xM 上诱导的勒贝格测度，而 $A \subset T_xM$ 是任意非空有界开集。我们注意到，对于 μ_0-几乎处处的 $x \in M$，$\det_{\mathfrak{m}}[\mathrm{dF}_0(x)] = 1$ 和$\det_{\mathfrak{m}}[\mathrm{dF}_t(x)] > 0$。

最后，我们指出，定理 4.17、推论 4.18 和命题 4.19 中的结论可以推广到 q-分离测度之外的情形。请与下文的注 5.8 对照。

推论 4.21 （无对偶性的最优映射与 q-测地线）。 设 $q \in (0,1)$，并设 $\mu_0 \in \mathrm{P}_c^{\mathrm{ac}}(M, \mathfrak{m})$ 以及 $\mu_1 \in \mathrm{P}_c(M)$。

(i) 至多存在一个年代性 ℓ_q-最优耦合 $\pi \in \Pi(\mu_0, \mu_1)$。

此外，若 π 是这样的耦合，则有以下结论。

(ii) 它可以写成 $\pi = (Id, F_1)_\sharp \mu_0$，其中 $F_1\colon\ M \longrightarrow M$ 是某个博雷尔映射，并满足 $\pi[sing(l)] = 0$。*(iii)* 它分解为 $\pi = \sum_{i\in\mathbb{N}} \pi_i$，其中 $(\pi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是 $M \times M$ 上的一列彼此奇异的次概率测度，对每个 $i \in \mathbb{N}$均具有以下性质：集合 $spt\, \mu^i \times spt\, \nu^i$是紧的，并且与 $\{l \geq 0\}$不相交，其中 μ^i 和 ν^i 是 $\hat{}\pi_i$：$= \pi_i[M \times M]^{-1}\, \pi_i$的边缘分布。特别地，$(\mu^i, \nu^i)$ 是 q-分离的。F_1 与定理 *4.17* 中将 μ^i 传输到 ν^i 的传输映射 F_1^i 在 μ^i-几乎处处意义下相同。最后，上述和有限，当且仅当 $spt\, \pi$ 是紧的，并且与 $\{l \leq 0\}$不相交。

(iv) 赋值 $\mu_t := (z_t)_\sharp \pi$，其中 z_t 表示引理4.5中的映射，定义了一条从 μ_0 到 μ_1 的 q-测地线$(\mu_t)_{t\in[0,1]}$，使得在 $t < 1$成立时，$\mu_t \in \mathcal{P}_c^{\mathrm{ac}}(M, \mathfrak{m})$。若对 π 采用(ii)中的分解，则$((z_t)_\sharp \pi_i)_{i\in[0,1]}$是 $t < 1$的互相奇异的次概率测度。

证明。 证明方法与 [45, 定理 7.1]相同。将 $\{l > 0\} \cap$ 支撑 π 划分为可数个开且相对紧的矩形，使其闭包包含于开集 $\{l > 0\}$ 中，并将 π 限制在这些矩形上，即可得到 (ii) 中所述的 π 分解。细节从略。 □

鉴于 (iii) 的最后一项结论，我们强调，条件 $\pi[\{l > 0\}] = 1$ 并不意味着 $\operatorname{spt}\pi$ 与 $\{l \leq 0\}$ 不相交。因此，后者是一项严格更强的性质。

5 从里奇曲率界得到曲率-维数条件

在上一节中，我们看到最优传输是沿着测地线进行的，因此雅可比场在控制其行为方面发挥着关键作用。由此自然可以预期，里奇曲率也会发挥作用。本节将证明，加权里奇曲率的一个下界能够为某个称为曲率-维数条件的特定熵泛函提供凸性估计。关于黎曼情形，请参见 [22, 39, 60, 61, 62] ；关于芬斯勒情形，请参见 [55] 。

5.1 加权里奇曲率

在此及下文中，我们固定芬斯勒时空 (M, L) 上的一个光滑正测度 $\mathfrak{m}$。于是，相应的权函数 $\psi_{\mathfrak{m}}\colon \Omega \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ 定义为

$$\mathrm{d}\mathfrak{m} = \mathrm{e}^{-\psi_{\mathfrak{m}}(\dot\gamma(t))}\sqrt{-\det\big[g_{\alpha\beta}\big(\dot\gamma(t)\big)\big]}\,\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2\cdots\mathrm{d}x^n$$

沿类时测地线 γ。我们指出， $\psi_{\mathfrak{m}}$ 是正零次齐次的，即对于每个 $v \in \Omega \setminus \{0\}$ 和 $c > 0$，都有 $\psi_{\mathfrak{m}}(cv) = \psi_{\mathfrak{m}}(v)$。

注 5.1. 在 [40, 41, 42], 中，我们采用更一般的框架，直接考虑正零次齐次权函数 $\psi\colon \Omega \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$，它不一定与上述测度相关。然而，本文从测度 $\mathfrak{m}$ 出发，因为我们需要将其作为参考测度来定义熵泛函。此外，我们不会使用 [40]中引入的 ϵ-范围 （换言之，我们令 $\epsilon = 1$）。

为方便后续讨论，对于类时测地线 $\gamma\colon [0, l) \longrightarrow M$，记

$$\psi_\gamma(t) := \psi_{\mathfrak{m}}\big(\dot\gamma(t)\big). \tag{5.1}$$

定义 5.2 （加权里奇曲率）。 给定一个因果向量 $v \in \Omega \setminus \{0\}$，令 $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \overline{M}$ 为满足 $\dot\gamma(0) = v$ 的因果测地线。那么，对于 $N \in \mathbb{R}\backslash\{n\}$，我们将 v 处的加权里奇曲率 定义为

$$\mathrm{Ric}_N(v) := \mathrm{Ric}(v) + \psi_\gamma''(0) - \frac{\psi_\gamma'(0)^2}{N-n}, \tag{5.2}$$

其中 $\mathrm{Ric}(v)$ 是定义 2.2 中定义的通常里奇曲率。我们还定义

$$\mathrm{Ric}_\infty(v) := \mathrm{Ric}(v) + \psi_\gamma''(0), \qquad \mathrm{Ric}_n(v) := \lim_{N\downarrow n} \mathrm{Ric}_N(v),$$

以及 $\mathrm{Ric}_N(0) := 0$。

备注 5.3。 (a) 根据定义，量 $\mathrm{Ric}_N(v)$ 在范围 $[n, +\infty]$ 和 $(-\infty, n)$ 内关于 N 单调不减。此外，对于 $N \in (n, +\infty)$ 和 $N' \in (-\infty, 0)$，我们有

$$\mathrm{Ric}_n(v) \le \mathrm{Ric}_N(v) \le \mathrm{Ric}_\infty(v) \le \mathrm{Ric}_{N'}(v) \le \mathrm{Ric}_0(v).$$

(b) 在我们先前的论文 [40, 41, 42], 中，我们采用了记号 $\dim M = n+1$，但使用了相同的定义 (5.2)。因此，本文中的 Ric_{N+1} （以及 [45]）对应于 [40, 41, 42] 中的 Ric_N。

在曲率界 $\mathrm{Ric}_N \ge K$ 下，对于 $K \in \mathbb{R}$，可以得到若干奇点定理 [40] 和比较定理[41] ；这里的意思是，对于所有 $v \in \Omega$，都有 $\mathrm{Ric}_N(v) \ge KF^2(v) \underline{=} -2KL(v)$（因此，由连续性可知，对于所有 $v \in \Omega$ 也成立）。为了给命题 4.19 补上延后的证明，我们在此将类时测度收缩性质 解释为 [41, 定理 5.10] 中 Bishop–Gromov 体积比较定理的推论（参见 [53, 62] 中的黎曼测度收缩性质）。为此，我们定义

$$\mathfrak{s}_\kappa(r) := \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\kappa}} \sin(\sqrt{\kappa} r) & \kappa > 0, \\ r & \kappa = 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{-\kappa}} \sinh(\sqrt{-\kappa} r) & \kappa < 0 \end{cases}$$

当 $r \in \mathbb{R}$ 时适用于 $\kappa \le 0$，当 $r \in [0, \pi/\sqrt{\kappa}]$ 时适用于 $\kappa > 0$，以及

$$\tau_{K,N}^{(t)}(r) := t^{1/N} \left(\frac{\mathfrak{s}_{K/(N-1)}(tr)}{\mathfrak{s}_{K/(N-1)}(r)} \right)^{(N-1)/N} \tag{5.3}$$

对于 $K \in \mathbb{R}$， $N \in (-\infty, 0] \cup [n, +\infty)$，以及 $t \in (0, 1)$，其定义适用于 $r > 0$，当 $K/(N-1) \le 0$ 时；而对于 $r \in (0, \pi\sqrt{(N-1)/K})$，当 $K/(N-1) > 0$ 时。我们还定义了 $\tau_K^{(t),N}(0) := t$。

引理 5.4 (类时测度收缩性质). 设 $(M, L, \mathfrak{m})$ 满足 $\mathrm{Ric}_N \ge K$ 对某个 $K \in \mathbb{R}$ 且 $N \in [n, +\infty)$. 则有

$$\mathfrak{m}[Z_t(x, B)] \ge \inf_{y \in B} \tau_{K,N}^{(t)}\big(l(x,y)\big)^N \, \mathfrak{m}[B]$$

对于每个 $x \in M$、每个紧集 $B \subset I^+(x)$，以及每个 $t \in (0, 1)$。此外，

$$\mathfrak{m}[Z_t(A, y)] \ge \inf_{x \in A} \tau_{K,N}^{(1-t)}\big(l(x,y)\big)^N \, \mathfrak{m}[A]$$

对每个 $y \in M$、每个紧集 $A \subset I^-(y)$，以及每个 $t \in (0, 1)$。

证明。首先，若 $K>0$，则 Bonnet–Myers 定理的洛伦兹对应定理 [40, 定理 5.17] 推出 $l(x,y)\le\pi\sqrt{(N-1)/K}$，因此对于 $\mathfrak{m}$-几乎处处的 $y\in I^+(x)$，有 $l(x,y)<\pi\sqrt{(N-1)/K}$。

我们首先考虑集合 $Z_t(x,B)$。注意到，对于 x 且对 $\mathfrak{m}$ 几乎处处的 $y\in I^+(x)$，它们由唯一的极大类时测地线 $\gamma_y\colon[0,1]\longrightarrow M$ 相连，并且

$$\mathfrak{m}[Z_t(x,B)]=\int_B \det\nolimits_{\mathfrak{m}}[\mathrm{d}\Psi_t]\,\mathrm{d}\mathfrak{m},$$

其中 $\det_{\mathfrak{m}}[\mathrm{d}\Psi_t]$ 是映射 $\Psi_t(y):=\gamma_y(t)$ 关于测度 $\mathfrak{m}$ 的雅可比行列式。具体地，令 $w_y:=\dot\gamma_y(0)\in T_xM$，并使用 $(e_\alpha)_{\alpha=1}^n$ 这一 $(T_xM,\ g_v)$ 的标准正交基，其中 $e_1=w_y/l(x,y)$，以及沿 γ_y 的向量场 $J_i(t):=\mathrm{d}[\exp_{tw_y}](te_i)$，其中 $i=2,\ \ldots\ldots,\ n$，我们有

$$\det\nolimits_{\mathfrak{m}}[\mathrm{d}\Psi_t(y)]=\frac{t\,\phi_y(t)}{\phi_y(1)},\qquad \phi_y(t):=\mathrm{e}^{-\psi_{\gamma_y}(t)}\sqrt{\det\big[g_{\dot\gamma_y(t)}\big(J_i(t),J_j(t)\big)\big]}.$$

函数 $s\longmapsto\phi_y(s/l(x,y))^{1/(N-1)}$ 与定理 5.10] 的证明中在 $\epsilon=1$ 和 $c=1/(N-1)$ 条件下的 $h=h_1$ 相一致，并且由假设 $\mathrm{Ric}_N\ge K$ 可知，$h/\mathfrak{s}_{K/(N-1)}$ 是非递增的。因此，

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}[Z_t(x,B)]&=\int_B\frac{t\,\phi_y(t)}{\phi_y(1)}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y)\\&\ge\int_B t\,\frac{\mathfrak{s}_{K/(N-1)}(t\,l(x,y))^{N-1}}{\mathfrak{s}_{K/(N-1)}(l(x,y))^{N-1}}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y)\\&\ge\inf_{y\in B}\tau_{K,N}^{(t)}\big(l(x,y)\big)^N\,\mathfrak{m}[B].\end{aligned}$$

关于 $Z_t(A,\ y)$ 的断言可以归结为反向结构 $\overline{L}$，对于该结构，$\mathrm{Ric}_N\ge K$（相对于 $\mathfrak{m}$）也成立，因为

$$\mathrm{Ric}_N^{\overline{L}}(v)=\mathrm{Ric}_N^{L}(-v)\ge-2KL(-v)=-2K\overline{L}(v)$$

对于每个相对于 $\overline{L}$ 为因果的切向量 v，□

5.2 中间测度的绝对连续性

我们现在可以给出命题 4.19 的证明，为方便起见，下面重述该命题。通过建立一个修正的 Monge–Mather缩短估计，其洛伦兹版本已在 [45, 定理 A.1]中得到证明，另见 [17, 65]。我们提出一种基于 Figalli 和 Juillet 的思想的替代证明 [26]；该证明的一个副产品是一个定性的密度界，我们不明确陈述这一界，但应将其与 [14] 进行比较。

命题5.5. 给定任意 $q\in(0,1)$，令 $(\mu_t)^{t\in[0,1]}$ 表示一条连接一对 q-分离端点的唯一 q-测地线 $(\mu_0,\mu_1)\in\mathcal{P}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{ac}}(M,\mathfrak{m})\times\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(M)$，如推论4.18所述。那么，对每个 $t\in(0,1)$，都有 $\mu_t\in\mathcal{P}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{ac}}(M,\mathfrak{m})$。

证明。 我们先考察 $\operatorname{spt}\ \mu_0 \times \operatorname{spt}\mu_1\ \subset\{l\ >\ 0\}$ 的情形，即 $\ l\ $ 在乘积 $\operatorname{spt}\mu_0 \times \operatorname{spt}\ \mu_1$ 上有界且远离零。设 $\ K \in \mathbb{R}\ $ 和 $N \in (n, +\infty)$ 为固定数，使得在紧致因果菱形 $\ J^+(\mu_0) \cup J^-(\mu_1)$ 的所有类时方向上，$\mathrm{Ric}_N \geq K$ 。那么我们断言

$$\int_{\{\rho_0>0\}} f \circ \mathcal{F}_t \,\mathrm{d}\mathfrak{m} \leq \sup_{x\in\operatorname{spt}\mu_0, y\in\operatorname{spt}\mu_1} \tau_{K,N}^{(1-t)}\big(l(x,y)\big)^{-N} \int_M f \,\mathrm{d}\mathfrak{m} \tag{5.4}$$

对于每个在 $\ M\ $ 上具有紧支集的非负连续函数 $\ f$ 。

为此，我们固定一个形如 $\ \mu_1^k = \lambda_1^k\,\delta_{x_1^k} + \cdots + \lambda_k^k\,\delta_{x_k^k}$ 的紧支撑概率测度序列 $(\mu_1^k)_{k\in\mathbb{N}}$ ，它弱收敛于 $\ \mu_1$；这里，对于任意给定的 $\ k \in \mathbb{N},\ \ x_1^k, \ldots, x_k^k$ 都是 $\operatorname{spt}\ \mu_1$ 中的点，而 $\ \lambda_1^k, \ldots, \lambda_k^k$ 是和为 1 的非负实数。由于 $\operatorname{spt}\mu_0 \times \operatorname{spt}\ \mu_1^k\ \subset\{ l\ >\ 0\}$，根据引理 4.10，$(\mu_0, \mu_1^k)$ 是 $\ q$-分离的。定理 4.17 和推论 4.18 表明，存在适当的博雷尔映射 $\mathrm{F}_t^k\colon\ M \longrightarrow M$，其中 $\ t \in [0,1]$，并具有以下性质。

- F_1^k 诱导出 (μ_0, μ_1^k) 的唯一 $\ \ell_q$-最优耦合，并且
- $((\mathrm{F}_t^k)_\sharp\mu_0)_{t\in[0,1]}$ 构成了从 $\ \mu_0$ 到 $\ \mu_1^k$的唯一 $\ q$-测地线。

令 $\ A_i^k \subset\{\rho_0 > 0\}$ 为所有满足 $\mathrm{F}_1^k(x)\ = x_i^k$ 的点 $\ x\ \in\{\rho_0\ >\ 0\}$ 的集合，其中 $\ i = 1, \ldots, k$。那么 $\ A_1^k, \ldots, A_k^k$ 两两不相交，且它们的并集具有满 $\ \mu_0$- 测度。给定任意 $\ i = 1, \ldots, k$，定理 4.17 和注 3.7 表明，曲线 $(\mathrm{F}_t^k(x))_{t\in[0,1]}$ 构成了从 x 到 $\ x_i^k$ 的唯一极大类时测地线，对 $\ \mu_0$-几乎处处的 $\ x \in A_i^k$ 都成立。由于 $\ \mu_0$ 和 $\ \mathfrak{m}$ 在 $\{\rho_0\ >\ 0\}$ 上等价，同一结论对每个 $\ x \in B_i^k$ 都成立，其中 $\ B_i^k \subset A_i^k$ 是一个适当的 Borel 集，且满足 $\ \mathfrak{m}[A_i^k \setminus\ B_i^k] = 0$。特别地，对每个 Borel 集$E' \subset B_i^k,\ \ Z_t(E', x_i^k)\ = \mathrm{F}_t^k(E')$；引理 5.4（应用于由因果菱形 $\ J^+(\mu_0)\ \cup J^-(\mu_1)$ 构造的芬斯勒时空）蕴含

$$\mathfrak{m}\big[\mathcal{F}_t^k(E')\big] \geq \inf_{x\in\operatorname{spt}\mu_0, y\in\operatorname{spt}\mu_1} \tau_{K,N}^{(1-t)}\big(l(x,y)\big)^N\, \mathfrak{m}[E'].$$

特别地，通过适当地分解任意 Borel 集 $\ E \subset\{\rho_0 > 0\}$，我们得到

$$\mathfrak{m}\big[\mathcal{F}_t^k(E)\big] \geq \inf_{x\in\operatorname{spt}\mu_0, y\in\operatorname{spt}\mu_1} \tau_{K,N}^{(1-t)}\big(l(x,y)\big)^N\, \mathfrak{m}[E].$$

这个不等式可以改写为

$$\mathfrak{m}[F] \geq \inf_{x\in\operatorname{spt}\mu_0, y\in\operatorname{spt}\mu_1} \tau_{K,N}^{(1-t)}\big(l(x,y)\big)^N\, \mathfrak{m}\big[(\mathcal{F}_t^k)^{-1}(F) \cap \{\rho_0 > 0\}\big]$$

对于每个 Borel 集 $\ F \subset \mathrm{F}_t^k(\{\rho_0 > 0\})$，或者等价地

$$\int_{\{\rho_0>0\}} f \circ \mathcal{F}_t^k \,\mathrm{d}\mathfrak{m} \leq \sup_{x\in\operatorname{spt}\mu_0, y\in\operatorname{spt}\mu_1} \tau_{K,N}^{(1-t)}\big(l(x,y)\big)^{-N} \int_M f \,\mathrm{d}\mathfrak{m} \tag{5.5}$$

对于上述每个函数 $\ f$ 。现在，由于 $(\mu_0,\ \mu_1)$ 的 $\ q$-分离性以及最优映射的稳定性 [65, 推论 5.23], $(\mathrm{F}_t^k)_{k\in\mathbb{N}}$ 在 $\ \mu_0$-测度下收敛于 F_t ，因此当 $\ k \to +\infty$ 时，在 $\{\rho_0\ >\ 0\}$ 上 $\mathrm{F}_t^k\ \to \mathrm{F}_t$ $\mathfrak{m}$-几乎处处成立（取一个不再重新标记的子列）。随后在 (5.5) 中取极限，即可得 (5.4)。

现在，通过一个逼近论证，我们可以将 (5.4) 推广到定义在 M 上的非负 Borel 函数 f。对于 $f:= 1_{\mathcal{F}_t(\{\rho_0>0\})}\, h\,\rho_0 \circ \mathrm{F}_t^{-1}$，其中 h 是定义在 M 上的一个给定的非负有界 Borel 函数，这可以转化为

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{F}_t(\{\rho_0>0\})} h\,\mathrm{d}\mu_t &= \int_{\{\rho_0>0\}} h\circ\mathcal{F}_t\,\mathrm{d}\mu_0\\ &= \int_{\{\rho_0>0\}} (h\circ\mathcal{F}_t)\,\rho_0\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\\ &\le \sup_{x\in\operatorname{spt}\mu_0, y\in\operatorname{spt}\mu_1} \tau_{K,N}^{(1-t)}\big(l(x,y)\big)^{-N}\int_M h\,\rho_0\circ\mathcal{F}_t^{-1}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}.\end{aligned}$$

这在我们对 μ_0 和 μ_1 的初始假设下蕴含了所要证明的结论。

一般情形现在可通过如 [13, Proposition 3.38] 所示的细分得到。证明与推论 4.21 的证明类似。细节从略。 □

5.3 类时曲率-维数条件

为了引入我们马上要研究的类时曲率-维数条件，我们需要在 $\mathrm{P}(M)$ 上定义若干熵泛函。虽然我们给出了适用于一般概率测度的定义，但实际上我们只处理相对于 $\mathfrak{m}$ 绝对连续的测度。

定义 5.6（熵）。设 $\mu=\rho\,\mathfrak{m}+\mu_\perp$ 表示给定概率测度 $\mu\in\mathrm{P}(M)$ 关于 $\mathfrak{m}$ 的绝对连续部分与 $\mathfrak{m}$ 奇异部分的 Lebesgue 分解。

(1) μ 的玻尔兹曼–香农熵定义为

$$\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu):=\int_M \rho\log\rho\,\mathrm{d}\mathfrak{m}$$

若 $\mu\in\mathrm{P}^{\mathrm{ac}}(M,\mathfrak{m})$ 且 $\int_{\{\rho<1\}}\rho\log\rho\,\mathrm{d}\mathfrak{m}>-\infty$，否则 $\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu):=+\infty$。

（2）对于 $n\le N<+\infty$，我们将 μ 的 N-*Rényi* 熵 定义为

$$S_{\mathfrak{m}}^N(\mu):=-\int_M \rho^{(N-1)/N}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}.$$

(3) 对于 $N<0$，相应的 N-R 熵 为 μ。

$$S_{\mathfrak{m}}^N(\mu):=\int_M \rho^{(N-1)/N}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}$$

若 $\mu\in\mathrm{P}^{\mathrm{ac}}(M,\mathfrak{m})$，否则 $S_{\mathfrak{m}}^N(\mu):=+\infty$。

(4) μ 的 0-R *ényi* 熵 定义为

$$S_{\mathfrak{m}}^0(\mu):=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in M}\rho(x)=\|\rho\|_{L^\infty(M,\mathfrak{m})}$$

若 $\mu\in\mathrm{P}^{\mathrm{ac}}(M,\ \mathfrak{m})$，否则 $S_{\mathfrak{m}}^0(\mu):=+\infty$。

我们指出，生成函数 $r \longmapsto r\log r$、 $r \longmapsto -r^{(N-1)/N}$（对于 $n \le N < +\infty$）以及 $r \longmapsto r^{(N-1)/N}$（对于 $N < 0$）在 $[0,\infty$ 上均为凸函数。（这解释了从正 $S^N_{\mathfrak{m}}$ 过渡到负N时符号的变化。）此外，根据詹森不等式，对于 $\mu \in \mathrm{P_c}(M)$，我们有 $\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu) \ge -\log\ \mathfrak{m}[\mathrm{spt}\ \mu]$，类似地，对于 $N \in (-\infty, 0] \cup [n, +\infty)$，我们得到 $S^N_{\mathfrak{m}}(\mu)$ 的一个下界，参见定理 5.11 的证明。

现在我们部分利用公式 (5.3) 中的函数 $\tau^{(t)}_{K,\,N}$引入类时曲率-维数条件 $\mathrm{TCD}^q(K,\ N)$。

定义 5.7（类时曲率-维数条件）。设 $q \in (0, 1)$，$K \in \mathbb{R}$，且 $N \in (-\infty, 0] \cup [n, +\infty]$。我们称加权芬斯勒时空 $(M, L, \mathfrak{m})$ 满足 $\mathrm{TCD}^q(K, N)$，如果对于每一对 q-分离的 $(\mu_0, \mu_1) \in \mathrm{P}^{\mathrm{ac}}_{\mathrm{c}}(M, \mathfrak{m}) \times \mathrm{P}^{\mathrm{ac}}_{\mathrm{c}}(M, \mathfrak{m})$，都存在一条连接 μ_0 与 μ_1 的 q-测地线 $(\mu_t)_{t\in[0,1]}$，以及一个 ℓ_q-最优耦合 $\pi \in \Pi(\mu_0, \mu_1)$，使得以下条件成立。

(1) 当 $N = +\infty$ 时，对于每个 $t \in [0, 1]$，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_t) \le{}& (1-t)\,\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_0) + t\,\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_1)\\ &- \frac{K}{2}\,t\,(1-t)\int_{M\times M} l(x,y)^2\,\mathrm{d}\pi(x,y).\end{aligned} \tag{5.6}$$

（2）当 $n \le N < +\infty$ 时，对于每个 $N' \ge N$ 和每个 $t \in [0, 1]$，我们都有

$$\begin{aligned}S^{N'}_{\mathfrak{m}}(\mu_t) \le{}& -\int_{M\times M} \tau^{(1-t)}_{K,N'}\big(l(x,y)\big)\,\rho_0(x)^{-1/N'}\,\mathrm{d}\pi(x,y)\\ &- \int_{M\times M} \tau^{(t)}_{K,N'}\big(l(x,y)\big)\,\rho_1(y)^{-1/N'}\,\mathrm{d}\pi(x,y).\end{aligned} \tag{5.7}$$

（3）当 $N < 0$ 时，对于每个 $N' \in [N, 0$ 和每个 $t \in [0, 1]$，我们都有

$$\begin{aligned}S^{N'}_{\mathfrak{m}}(\mu_t) \le{}& \int_{M\times M} \tau^{(1-t)}_{K,N'}\big(l(x,y)\big)\,\rho_0(x)^{-1/N'}\,\mathrm{d}\pi(x,y)\\ &+ \int_{M\times M} \tau^{(t)}_{K,N'}\big(l(x,y)\big)\,\rho_1(y)^{-1/N'}\mathrm{d}\pi(x,y),\end{aligned} \tag{5.8}$$

其中我们设 $\tau_{(t),\,K,\,N'}(r)$：当且仅当 $K < 0$ 且 $r \ge \pi\sqrt{(N'-1)/K}$。

（4）当 $N = 0$ 时，对于每个 $t \in [0, 1]$，我们都有

$$\begin{aligned}S^0_{\mathfrak{m}}(\mu_t) \le \operatorname*{ess\,sup}_{(x,y)\in \mathrm{spt}\,\pi} \max\Bigg\{ &\frac{\mathfrak{s}_{-K}((1-t)\,l(x,y))}{(1-t)\,\mathfrak{s}_{-K}(l(x,y))}\,\rho_0(x),\\ &\frac{\mathfrak{s}_{-K}(t\,l(x,y))}{t\,\mathfrak{s}_{-K}(l(x,y))}\,\rho_1(y)\Bigg\},\end{aligned} \tag{5.9}$$

其中，我们令 $\mathfrak{s}_{-K}(tl(x,\ y))/(t\mathfrak{s}_{-K}(l(x,\ y)))：=1$ 若 $l(x,\ y)=0$。

对于带有 $N<0$ 和 $N=0$ 的黎曼流形或芬斯勒流形，其曲率-维数条件分别参见 [56] 和 [57]。请注意，在 $N<0$ 和 $K<0$ 的情形下，TCD$^q(K,N)$ 仅提供局部控制，因为定义不等式 (5.8) 在以下情况下是平凡的：

$$\pi\big[\{(x,y)\in M\times M\,\big|\,l(x,y)\geq\pi\sqrt{(N-1)/K}\}\big]>0.$$

我们还要指出，π 是 ℓ_q-最优耦合，将 μ_0 和 μ_1耦合起来，因此，(5.6) 中最后一项 $\int_{M\times M} l(x,y)^2\,\mathrm{d}\pi(x,y)$并未直接写成传输成本。事实上，根据引理 4.10 和定理 4.17，π 是将 μ_0 和 μ_1 耦合起来的唯一 ℓ_q-最优耦合；而根据推论 4.18，$(\mu_t)_{t\in[0,1]}$ 是连接其端点的唯一 q-测地线。这里我们隐含地用到了将 μ_0 和 μ_1 耦合起来的所有耦合都是年代性的，这引出了我们对定义 5.7 中 μ_0 和 μ_1 的时序假设的进一步说明。

注 5.8（类时 q-对偶可化性）。定义 5.7 中的 q-分离假设介于（μ_0，μ_1）[21, 定义 2.18、2.27] 的强类时 p-对偶可化性与类时 p-对偶可化性之间。这些性质正是定义强与弱类时曲率-维数条件时所依据的性质[13, 21]。在关于 TCD 空间的近期文献中，鉴于时序性并非闭条件，这一区分对于稳定性问题仍然不可或缺。

定理 5.9 和定理 6.1 中的结果仍然成立，即使定义 4.8 是针对类时 p-对偶可容许对或强类时 p-对偶可容许对（μ_0，μ_1）给出的。对于 $N\in[n,+\infty)$，这些不同 TCD 条件之间的等价性归功于 [13]。证明采用了与推论 4.21 类似的构造、凸性以及类时非分支性质（这一性质在我们的情形下显然成立）。经过一些推导，这可以扩展到范围 $N\in(-\infty,0]\cup\{+\infty\}$。甚至只需假设（$\mu_0$，$\mu_1$）满足 支撑$\mu_0\times$支撑 $\mu_1\subset\{l>0\}$，参见引理 4.10。实际上，这一性质应该更容易验证，但正如第 4.3 节中所观察到的，与其他条件不同（参见命题 4.14 和 [14, 引理 3.1]），它不会沿 q-测地线传播。

结合上一节中最优传输的性质以及加权里奇曲率对 $\mathfrak{m}$ 的控制，我们得到以下主要结果。

定理 5.9 ($\mathrm{Ric}_N\geq K$ 蕴含 TCD$^q(K,N)$)。设 $(M,L,\mathfrak{m})$ 是一个整体双曲加权芬斯勒时空，并且对某个 $K\in\mathbb{R}$ 和 $N\in(-\infty,0]\cup[n,+\infty]$，其在类时方向上满足 $\mathrm{Ric}_N\geq K$。那么，对任意 $q\in(0,1)$，它都满足 $\mathrm{TCD}^q(K,N)$。

证明。我们将证明分为五个步骤。

步骤 1. 我们先做一些准备。在整个证明过程中，固定一对 $(\mu_0,\mu_1)\in\mathrm{P}_c^{\mathrm{ac}}(M,\mathfrak{m})\times\mathrm{P}_c^{\mathrm{ac}}(M,\mathfrak{m})$，它是 q-分离的，具体来说是由 (π,u,v) 分离。令 $(\mu_t)_{t\in[0,1]}$ 为连接 μ_0 与 μ_1 的唯一 q- 测地线。回顾定理 4.17 和推论 4.18 可知，对每个 $t\in(0,1)$，都有 $\mu_t=(\mathrm{F}_t)_\sharp\mu_0$，其中

$$\mathcal{F}_t(x):=\exp_x\big(t\,F^*(\mathrm{d}u)^{p-2}\,\mathscr{L}^*(\mathrm{d}u)\big).$$

此外， $\mu_t = \rho_t\,\mathfrak{m}$ 是 $\mathfrak{m}$-绝对连续的，而推论 4.20 给出

$$\rho_0(x) = \rho_t\big(\mathcal{F}_t(x)\big)\,\det{}_{\mathfrak{m}}[\mathrm{d}\mathcal{F}_t(x)]$$

对 μ_0-几乎处处的 $x \in M$。更精确地说，若 $\mathrm{d}u(x) \neq 0$ （等价地， $x \neq \mathsf{F}_1(x)$），则可以写出

$$\det{}_{\mathfrak{m}}[\mathrm{d}\mathcal{F}_t(x)] = \mathrm{e}^{\psi_\gamma(0)-\psi_\gamma(t)}\,\det[\mathrm{d}\mathcal{F}_t(x)]$$

对于极大测地线 $\gamma\colon\ [0,1] \longrightarrow M$从 x到 $\mathsf{F}_1(x)$，以及由 (5.1) 给出的 ψ_γ，其中 det[$\mathrm{d}\mathsf{F}_t(x)$] 表示沿 γ、由洛伦兹度量 $g_{\dot\gamma}$ 诱导的测度 vol$_{g_\gamma}$所对应的雅可比行列式，如 (2.2) 所示。

步骤 2。现在，我们基本可以沿用洛伦兹情形在 [45], 中的相同思路；不过，为了将 TCD$^*(K,N)$ 改进为 TCD(K,N)，还需要更详细的计算。这里为完整起见给出详细证明。固定如上所述满足 $\mathrm{d}u(x) \neq 0$ 的 $x \in \mathrm{spt}\ \mu_0$，并取 T_xM的一个 $g_{\dot\gamma}$-标准正交基 $(e_\alpha)_{\alpha=1}^n$，使得 $e_1 = \dot\gamma(0)/F(\dot\gamma(0))$。也就是说，对于$i \geq 2$，有 $g_{\dot\gamma}(e_1, e_1) = -1$、 $g_{\dot\gamma}(e_i, e_i) = 1$；对于 $1 \leq \alpha < \beta \leq n$，有 $g_{\dot\gamma}(e_\alpha, e_\beta) = 0$。我们考虑沿 γ 的 $g_{\dot\gamma}$-平行向量场 E_α，满足 $E_\alpha(0) = e_\alpha$（即 $D^{\dot\gamma}_{\dot\gamma}E_\alpha = 0$），以及沿 γ的雅可比场 $J_\alpha(t) := \mathrm{d}\mathsf{F}_t(x)(e_\alpha)$。注意， $J_1(t)$不一定与 $\dot\gamma(t)$相切。为简便起见，我们用 $'$ 表示沿 γ的协变导数，即 $J'_\alpha := D^{\dot\gamma}_{\dot\gamma}J_\alpha$。接着定义 $n \times n$矩阵 $J(t) = (J_{\alpha\beta}(t))_{\alpha,\beta=1}^n$：

$$J_\alpha(t) := \sum_{\beta=1}^n J_{\alpha\beta}(t)\,E_\beta(t).$$

我们有 $J''_\alpha = \sum_{\beta=1}^n J''_{\alpha\beta}\,E_\beta$，并由雅可比方程可知

$$\begin{aligned} J''_\alpha &= -R_{\dot\gamma}(J_\alpha) = -\sum_{\delta=1}^n J_{\alpha\delta}\,R_{\dot\gamma}(E_\delta) \\ &= \sum_{\delta=1}^n J_{\alpha\delta}\,g_{\dot\gamma}\big(R_{\dot\gamma}(E_\delta), E_1\big)E_1 - \sum_{\delta=1}^n\sum_{j=2}^n J_{\alpha\delta}\,g_{\dot\gamma}\big(R_{\dot\gamma}(E_\delta), E_j\big)E_j \\ &= -\sum_{\beta,\delta=1}^n J_{\alpha\delta}\,g_{\dot\gamma}\big(R_{\dot\gamma}(E_\delta), E_\beta\big)E_\beta; \end{aligned}$$

在最后一行，我们使用了由 $E_1 = \dot\gamma/F(\dot\gamma)$ 和 (2.5) 给出的恒等式 $g_{\dot\gamma}(R_{\dot\gamma}(E_\delta)\ E_1) = g_{\dot\gamma}(R_{\dot\gamma}(E_1)\ E_\delta) = 0$。因此，令

$$B := J'\,J^{-1}, \qquad R(t) := \Big(g_{\dot\gamma}\big(R_{\dot\gamma}(E_\alpha), E_\beta\big)(t)\Big)_{\alpha,\beta=1}^n,$$

我们有黎卡提方程

$$B' = J''\,J^{-1} - (J'\,J^{-1})^2 = -J\,R\,J^{-1} - B^2. \tag{5.10}$$

这可以改写为

$$D' = -J^{-1}\,J'\,J^{-1}\,B\,J - R - J^{-1}\,B^2\,J + J^{-1}\,B\,J' = -R - D^2,$$

其中 $D := J^{-1}\,B\,J$。因此，取迹可得

$$\mathrm{trace}[B'] + \mathrm{trace}[B^2] = \mathrm{trace}[D'] + \mathrm{trace}[D^2] = -\mathrm{Ric}(\dot\gamma). \tag{5.11}$$

步骤 3。接下来，我们仔细考察 $[B^2]$ 在 $t = 0$ 处的迹。这一步需要更精细的分析，才能得到 $\mathsf{TCD}(K, N)$。首先，由于 $J_\alpha(0) = E_\alpha(0)$， $J(0)$ 是单位矩阵，因此有 $D(0) = B(0)$。根据 $(e_\alpha)_{\alpha=1}^n$ 的选取，

$$B_{\alpha 1}(0) = -g_{\dot\gamma}\big(J'_\alpha(0), e_1\big), \qquad B_{\alpha j}(0) = g_{\dot\gamma}\big(J'_\alpha(0), e_j\big)$$

对每个 $j \geq 2$ 均成立。我们回顾引理 4.16(iii)，可知

$$J'_\alpha(0) = F^*(\mathrm{d}u)^{p-2}\,\nabla^2 u(e_\alpha) + \mathrm{d}[F^*(\mathrm{d}u)^{p-2}](e_\alpha)\,\nabla u(x),$$

并注意到由恒等式 $F^*(\mathrm{d}u)^2 = -g_{\nabla u}(\nabla u, \nabla u)$，参见 $[40,(3.2)]$, ，以及 $e_1 = \nabla u(x)/F^*(\mathrm{d}u)$，可得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}[F^*(\mathrm{d}u)^{p-2}](e_\alpha)\,\nabla u(x) &= -(p-2)\,F^*(\mathrm{d}u)^{p-4}\,g_{\nabla u}\big(\nabla^2 u(e_\alpha), \nabla u\big)\,\nabla u(x)\\ &= -(p-2)\,F^*(\mathrm{d}u)^{p-2}\,g_{\nabla u}\big(\nabla^2 u(e_\alpha), e_1\big)\,e_1.\end{aligned}$$

因此，

$$B_{\alpha 1}(0) = (1-p)\,F^*(\mathrm{d}u)^{p-2}\,g_{\nabla u}\big(\nabla^2 u(e_\alpha), e_1\big),$$

而对于 $j \geq 2$ ，我们得到

$$B_{\alpha j}(0) = F^*(\mathrm{d}u)^{p-2}\,g_{\nabla u}\big(\nabla^2 u(e_\alpha), e_j\big).$$

因此，我们可以将 $B(0) = F^*(\mathrm{d}u)^{p-2}\,H^u\,Q^2$ 分解，其中

$$H^u := \Big(g_{\nabla u}\big(\nabla^2 u(e_\alpha), e_\beta\big)\Big)_{\alpha,\beta=1}^n, \qquad Q := \mathrm{diag}\big(\sqrt{1-p}, 1, \dots, 1\big).$$

注意， H^u 是对称的 $[41,$ 引理 4.13$]$。

由于 $D(0) = B(0)$，由（5.10）、（2.5）以及 H^u的对称性，我们可得

$$\begin{aligned}D'_{11}(0) &= -\sum_{\alpha=1}^n D_{1\alpha}(0)\,D_{\alpha 1}(0)\\ &= -F^*(\mathrm{d}u)^{2p-4}\,\big(H^u\,Q^2\,H^u\,Q^2\big)_{11}\\ &= -F^*(\mathrm{d}u)^{2p-4}\left((1-p)^2\,(H^u_{11})^2 + (1-p)\sum_{j=2}^n (H^u_{1j})^2\right)\\ &\leq -F^*(\mathrm{d}u)^{2p-4}\,(1-p)^2\,(H^u_{11})^2\\ &= -D_{11}(0)^2.\end{aligned} \tag{5.12}$$

我们令 $\phi(t) := \log\det[\mathrm{d}F_t(x)] = \log\det[J(t)]$，并将其分解为

$$\phi_1(t) := \int_0^t D_{11}(s)\,\mathrm{d}s, \qquad \phi_2(t) := \phi(t) - \phi_1(t).$$

注意，$\phi(0) = \phi_1(0) = \phi_2(0) = 0$ 以及

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= \operatorname{trace}\big[J'(t)\,J(t)^{-1}\big] = \operatorname{trace}[B(t)] = \operatorname{trace}[D(t)],\\ \phi_2'(0) &= \sum_{i=2}^n D_{ii}(0) = F^*(\mathrm{d}u)^{p-2}\sum_{i=2}^n H^u_{ii},\end{aligned}$$

且（5.12）得出

$$\big[\mathrm{e}^{\phi_1(t)}\big]_0'' = \big(D_{11}'(0) + D_{11}(0)^2\big)\,\mathrm{e}^{\phi_1(0)} \le 0. \tag{5.13}$$

此外，(5.11) 蕴含

$$\phi_2''(t) = \phi''(t) - \phi_1''(t) = -\mathrm{Ric}\big(\dot\gamma(t)\big) - \operatorname{trace}[D(t)^2] - D_{11}'(t).$$

由 H^u 的对称性和柯西–施瓦茨不等式可知

$$\begin{aligned}\operatorname{trace}[D(0)^2] + D_{11}'(0) &= \sum_{\alpha,\beta=1}^n D_{\alpha\beta}(0)\,D_{\beta\alpha}(0) - \sum_{\beta=1}^n D_{1\beta}(0)\,D_{\beta1}(0)\\ &= F^*(\mathrm{d}u)^{2p-4}\left((1-p)\sum_{j=2}^n (H^u_{1j})^2 + \sum_{i,j=2}^n (H^u_{ij})^2\right)\\ &\ge F^*(\mathrm{d}u)^{2p-4}\sum_{i=2}^n (H^u_{ii})^2\\ &\ge F^*(\mathrm{d}u)^{2p-4}\,\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=2}^n H^u_{ii}\right)^2\\ &= \frac{1}{n-1}\,\phi_2'(0)^2.\end{aligned}$$

结合这些结果，我们得到

$$\frac{\big[\mathrm{e}^{\phi_2(t)/(n-1)}\big]_0''}{\mathrm{e}^{\phi_2(0)/(n-1)}} = \frac{\phi_2''(0)}{n-1} + \frac{\phi_2'(0)^2}{(n-1)^2} \le -\frac{\mathrm{Ric}(\dot\gamma(0))}{n-1}. \tag{5.14}$$

我们进一步考虑这些函数

$$\begin{aligned}c(t) &:= \det\nolimits_{\mathfrak{m}}[\mathrm{d}\mathcal{F}_t(x)]^{1/N}, \qquad & c_1(t) &:= \exp\!\left(\frac{\psi_\gamma(0) - \psi_\gamma(t)}{N-n}\right),\\ c_2(t) &:= \mathrm{e}^{\phi(t)/n}, & c_3(t) &:= c_1(t)^{(N-n)/(N-1)}\,\mathrm{e}^{\phi_2(t)/(N-1)},\end{aligned}$$

其中我们假设 $N \neq 0$ 对于 $c(t)$ 和 $c_2(t)$，这将在定理 6.1 的证明中用到。注意，由于 $N \in (-\infty,\ 0] \cup (n,\ \infty)$，

$$\begin{aligned}(N-1)\,\frac{c_3''}{c_3} &= (N-n)\,\frac{c_1''}{c_1} + (n-1)\,\frac{[\mathrm{e}^{\phi_2/(n-1)}]''}{\mathrm{e}^{\phi_2/(n-1)}} \\ &\qquad - \frac{(n-1)(N-n)}{N-1}\left(\frac{c_1'}{c_1} - \frac{[\mathrm{e}^{\phi_2/(n-1)}]'}{\mathrm{e}^{\phi_2/(n-1)}}\right)^2 \\ &\leq -\psi_\gamma'' + \frac{(\psi_\gamma')^2}{N-n} + (n-1)\,\frac{[\mathrm{e}^{\phi_2/(n-1)}]''}{\mathrm{e}^{\phi_2/(n-1)}}.\end{aligned}$$

因此，在 $t = 0$ 处，我们由 (5.14) 和假设 $\mathrm{Ric}_N \geq K$ 得到的是

$$(N-1)\,\frac{c_3''(0)}{c_3(0)} \leq -\mathrm{Ric}_N\big(\dot\gamma(0)\big) \leq -K\,F^2\big(\dot\gamma(0)\big). \tag{5.15}$$

步骤 4。 我们将把（5.13）和（5.15）推广到 $t > 0$。当我们使用标准正交基 $(E_\alpha(t_0))_{\alpha=1}^{n}$ 在 $t_0 \in (0,1)$ 处进行相同的计算时，那么$J(t)$、 $B(t)$ 和 $D(t)$ 将分别替换为

$$J^{t_0}(t) = J(t_0)^{-1}\,J(t), \qquad B^{t_0}(t) = J(t_0)^{-1}\,B(t)\,J(t_0), \qquad D^{t_0}(t) = D(t)$$

对于 $t \geq t_0$。这立即推出了 (5.13) 以及在 t_0 处的 (5.14)，进而也可得到 (5.15)。

一方面，我们由凹性不等式 (5.13) 推导出

$$\mathrm{e}^{\phi_1(t)} \geq (1-t)\,\mathrm{e}^{\phi_1(0)} + t\,\mathrm{e}^{\phi_1(1)} = (1-t) + t\,\mathrm{e}^{\phi_1(1)}. \tag{5.16}$$

另一方面，(5.15) 意味着 $-(N-1)\log c_3$ 在 $N \in (n, +\infty)$ 的情形下，按照引理 2.2] 的意义是 $(KF^2(\dot\gamma)\ N-1)$-凸的；或者在 [56, 的情形下，按照引理 2.1] 的意义是 $(KF^2(\dot\gamma)\ N-1)$-凸的。因此，我们得到

$$c_3(t) \geq \frac{\mathfrak{s}_{K/(N-1)}((1-t)\,d(x))}{\mathfrak{s}_{K/(N-1)}(d(x))} + \frac{\mathfrak{s}_{K/(N-1)}(t\,d(x))}{\mathfrak{s}_{K/(N-1)}(d(x))}\,c_3(1) \tag{5.17}$$

对于 $N \in (n,\ +\infty)$，并且

$$c_3(t) \leq \frac{\mathfrak{s}_{K/(N-1)}((1-t)\,d(x))}{\mathfrak{s}_{K/(N-1)}(d(x))} + \frac{\mathfrak{s}_{K/(N-1)}(t\,d(x))}{\mathfrak{s}_{K/(N-1)}(d(x))}\,c_3(1) \tag{5.18}$$

对于 $N \leq 0$，为简便起见，我们令 $d(x) := l(x,\ \mathrm{F}_1(x)) = F(\dot\gamma)$。

步骤 5。 在最后这一步中，我们转而证明相应的熵位移半凸性。我们先考虑 $N \in (n,\ +\infty)$ 的情形。注意到，得益于备注 5.3 中所述的单调性，只需证明

对于 $N' = N$ 的 (5.7)。结合 (5.16)、(5.17) 以及 Hölder 不等式，可得

$$\begin{aligned}
c(t) &= c_3(t)^{(N-1)/N}\,\mathrm{e}^{\phi_1(t)/N} \\
&\geq \left(\frac{\mathfrak{s}_{K/(N-1)}\big((1-t)\,d(x)\big)}{\mathfrak{s}_{K/(N-1)}\big(d(x)\big)} + \frac{\mathfrak{s}_{K/(N-1)}\big(t\,d(x)\big)}{\mathfrak{s}_{K/(N-1)}\big(d(x)\big)}\,c_3(1)\right)^{(N-1)/N} \\
&\qquad \times \big((1-t) + t\,\mathrm{e}^{\phi_1(1)}\big)^{1/N} \\
&\geq \left(\frac{\mathfrak{s}_{K/(N-1)}\big((1-t)\,d(x)\big)}{\mathfrak{s}_{K/(N-1)}\big(d(x)\big)}\right)^{(N-1)/N} (1-t)^{1/N} \\
&\qquad + \left(\frac{\mathfrak{s}_{K/(N-1)}\big(t\,d(x)\big)}{\mathfrak{s}_{K/(N-1)}\big(d(x)\big)}\,c_3(1)\right)^{(N-1)/N} \big(t\,\mathrm{e}^{\phi_1(1)}\big)^{1/N} \\
&= \tau_{K,N}^{(1-t)}\big(d(x)\big) + \tau_{K,N}^{(t)}\big(d(x)\big)\,c(1).
\end{aligned}$$

我们注意到，对于 μ_0-几乎处处的 $x \in \{\mathrm{d}u = 0\}$，由于$d(x) = 0$，该不等式取等号。因此，借助推论 4.20，我们得到所需的 $S_{\mathfrak{m}}^N$ 凸性 (5.7)：

$$\begin{aligned}
S_{\mathfrak{m}}^N(\mu_t) &= -\int_M \rho_t\big(\mathcal{F}_t(x)\big)^{(N-1)/N}\,\mathrm{det}_{\mathfrak{m}}[\mathrm{d}\mathcal{F}_t(x)]\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) \\
&= -\int_M \rho_0(x)^{(N-1)/N}\,\mathrm{det}_{\mathfrak{m}}[\mathrm{d}\mathcal{F}_t(x)]^{1/N}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) \\
&\leq -\int_M \rho_0(x)^{(N-1)/N}\tau_{K,N}^{(1-t)}\big(d(x)\big)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) \\
&\qquad - \int_M \rho_0(x)^{(N-1)/N}\,\tau_{K,N}^{(t)}\big(d(x)\big)\,\mathrm{det}_{\mathfrak{m}}[\mathrm{d}\mathcal{F}_1(x)]^{1/N}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) \\
&= -\int_M \tau_{K,N}^{(1-t)}\big(d(x)\big)\,\rho_0(x)^{(N-1)/N}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) \\
&\qquad - \int_M \tau_{K,N}^{(t)}\big(d(x)\big)\,\rho_1\big(\mathcal{F}_1(x)\big)^{(N-1)/N}\,\mathrm{det}_{\mathfrak{m}}[\mathrm{d}\mathcal{F}_1(x)]\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) \\
&= -\int_{M\times M} \tau_{K,N}^{(1-t)}\big(l(x,y)\big)\,\rho_0(x)^{-1/N}\,\mathrm{d}\pi(x,y) \\
&\qquad - \int_{M\times M} \tau_{K,N}^{(t)}\big(l(x,y)\big)\,\rho_1(y)^{-1/N}\,\mathrm{d}\pi(x,y).
\end{aligned}$$

这就完成了 $N \in (n,\ +\infty)$ 情形下的证明。然后，通过极限论证可得 $N = n$ 的情形，因为 $\mathrm{Ric}_n \geq K$ 对 $N > n$ 蕴含 $\mathrm{Ric}_N \geq K$。

对于 $N<0$，我们使用 (5.18) 而非 (5.17)，得到

$$\begin{aligned}
c(t) &= c_3(t)^{(N-1)/N}\,\mathrm{e}^{\phi_1(t)/N} \\
&\le \left(\frac{\mathfrak{s}_{K/(N-1)}\big((1-t)\,d(x)\big)}{\mathfrak{s}_{K/(N-1)}\big(d(x)\big)} + \frac{\mathfrak{s}_{K/(N-1)}\big(t\,d(x)\big)}{\mathfrak{s}_{K/(N-1)}\big(d(x)\big)}\,c_3(1)\right)^{(N-1)/N} \\
&\qquad \times \big((1-t)+t\,\mathrm{e}^{\phi_1(1)}\big)^{1/N} \\
&\le \left(\frac{\mathfrak{s}_{K/(N-1)}\big((1-t)\,d(x)\big)}{\mathfrak{s}_{K/(N-1)}\big(d(x)\big)}\right)^{(N-1)/N} (1-t)^{1/N} \\
&\qquad + \left(\frac{\mathfrak{s}_{K/(N-1)}\big(t\,d(x)\big)}{\mathfrak{s}_{K/(N-1)}\big(d(x)\big)}\,c_3(1)\right)^{(N-1)/N} \big(t\,\mathrm{e}^{\phi_1(1)}\big)^{1/N} \\
&= \tau_{K,N}^{(1-t)}\big(d(x)\big) + \tau_{K,N}^{(t)}\big(d(x)\big)\,c(1),
\end{aligned}$$

其中，后一个不等式由以下形式的 H¨older 不等式得出

$$\begin{aligned}
(a_1+b_1)^{(N-1)/N} &= \left(\frac{a_1\cdot a_2^{1/(N-1)}}{a_2^{1/(N-1)}} + \frac{b_1\cdot b_2^{1/(N-1)}}{b_2^{1/(N-1)}}\right)^{(N-1)/N} \\
&\le \big(a_1^{(N-1)/N}a_2^{1/N} + b_1^{(N-1)/N}b_2^{1/N}\big)\,(a_2+b_2)^{-1/N}
\end{aligned}$$

对于 $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2>0$。然后，沿用上述相同的思路可推出 (5.8)。

接下来，在 $N=+\infty$ 的情形下，我们可以更直接地看到 $\log[\det_{\mathfrak{m}}[\mathrm{d}F_t(x)]] = \psi_\gamma(0) - \psi_\gamma(t) + \phi(t)$ 满足

$$\begin{aligned}
[\psi_\gamma(0)-\psi_\gamma(t)+\phi(t)]'' &= -\psi_\gamma''(t) - \mathrm{trace}[D(t)^2] - \mathrm{Ric}\big(\dot\gamma(t)\big) \\
&\le -\mathrm{Ric}_\infty\big(\dot\gamma(t)\big) \le -K\,d(x)^2.
\end{aligned}$$

这意味着

$$\log\det\nolimits_{\mathfrak{m}}[\mathrm{d}\mathcal{F}_t(x)] \ge t\log\det\nolimits_{\mathfrak{m}}[\mathrm{d}\mathcal{F}_1(x)] + \frac{K}{2}\,t\,(1-t)\,d(x)^2$$

（对于 μ_0-几乎处处的 $x\in\{\mathrm{d}u=0\}$，该结论同样成立，因为 $d(x)=0$），由此我们得到以下不等式

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_t) &= \int_M \rho_t\big(\mathcal{F}_t(x)\big)\log\rho_t\big(\mathcal{F}_t(x)\big)\,\det\nolimits_{\mathfrak{m}}[\mathrm{d}\mathcal{F}_t(x)]\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) \\
&= \int_M \rho_0(x)\log\frac{\rho_0(x)}{\det_{\mathfrak{m}}[\mathrm{d}\mathcal{F}_t(x)]}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) \\
&\le (1-t)\,\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_0) + t\int_M \rho_0(x)\log\frac{\rho_0(x)}{\det_{\mathfrak{m}}[\mathrm{d}\mathcal{F}_1(x)]}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) \\
&\qquad - \frac{K}{2}\,t\,(1-t)\int_M d(x)^2\,\mathrm{d}\mu_0(x) \\
&= (1-t)\,\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_0) + t\,\mathrm{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_1) - \frac{K}{2}\,t\,(1-t)\int_{M\times M} l(x,y)^2\,\mathrm{d}\pi(x,y).
\end{aligned}$$

最后，当 $N=0$ 时，（5.18）仍然成立，即

$$c_3(t) \le \frac{\mathfrak{s}_{-K}((1-t)\,d(x))}{\mathfrak{s}_{-K}(d(x))} + \frac{\mathfrak{s}_{-K}(t\,d(x))}{\mathfrak{s}_{-K}(d(x))}\,c_3(1).$$

在这种情形下，我们有

$$\begin{aligned} c_3(t) &= c_1(t)^n\,\mathrm{e}^{-\phi_2(t)} \\ &= \mathrm{e}^{\psi_\gamma(t)-\psi_\gamma(0)}\,\mathrm{e}^{\phi_1(t)}\,\det[\mathrm{d}\mathcal{F}_t(x)]^{-1} \\ &= \mathrm{e}^{\phi_1(t)}\,\det{}_{\mathfrak{m}}[\mathrm{d}\mathcal{F}_t(x)]^{-1}. \end{aligned}$$

将此与 (5.16) 结合，得到

$$\begin{aligned} \det{}_{\mathfrak{m}}[\mathrm{d}\mathcal{F}_t(x)] &= \mathrm{e}^{\phi_1(t)}\,c_3(t)^{-1} \\ &\ge \big((1-t)\,+t\,\mathrm{e}^{\phi_1(1)}\big)\left(\frac{\mathfrak{s}_{-K}((1-t)\,d(x))}{\mathfrak{s}_{-K}(d(x))} + \frac{\mathfrak{s}_{-K}(t\,d(x))}{\mathfrak{s}_{-K}(d(x))}\,c_3(1)\right)^{-1} \\ &\ge \min\left\{\frac{(1-t)\,\mathfrak{s}_{-K}(d(x))}{\mathfrak{s}_{-K}((1-t)\,d(x))}, \frac{t\,\mathfrak{s}_{-K}(d(x))}{\mathfrak{s}_{-K}(t\,d(x))}\,\det{}_{\mathfrak{m}}[\mathrm{d}\mathcal{F}_1(x)]\right\}, \end{aligned}$$

其中，后一个不等式由

$$\frac{a_1+a_2}{b_1+b_2} = \frac{b_1}{b_1+b_2}\frac{a_1}{b_1} + \frac{b_2}{b_1+b_2}\frac{a_2}{b_2} \ge \min\left\{\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}\right\}$$

对于 $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2>0$。这意味着

$$\begin{aligned} \rho_t\big(\mathcal{F}_t(x)\big) &= \frac{\rho_0(x)}{\det{}_{\mathfrak{m}}[\mathrm{d}\mathcal{F}_t(x)]} \\ &\le \max\left\{\frac{\mathfrak{s}_{-K}((1-t)\,d)}{(1-t)\,\mathfrak{s}_{-K}(d)}\,\rho_0(x), \frac{\mathfrak{s}_{-K}(t\,d)}{t\,\mathfrak{s}_{-K}(d)}\,\frac{\rho_0(x)}{\det{}_{\mathfrak{m}}[\mathrm{d}\mathcal{F}_1(x)]}\right\} \\ &= \max\left\{\frac{\mathfrak{s}_{-K}((1-t)\,d)}{(1-t)\,\mathfrak{s}_{-K}(d)}\,\rho_0(x), \frac{\mathfrak{s}_{-K}(t\,d)}{t\,\mathfrak{s}_{-K}(d)}\,\rho_1\big(\mathcal{F}_1(x)\big)\right\}, \end{aligned}$$

而对于 μ_0-几乎处处的 $x\in\{\mathrm{d}u=0\}$，有 $\rho_t(\mathrm{F}_t(x)) = \rho_0(x) = \rho_1(\mathrm{F}_1(x))$。因此，我们得到 (5.9)，证明完毕。 □

我们指出，在 [55] 中关于芬斯勒情形的黎卡提方程里，由于 $R_{\alpha\beta}$，我们采用了 $g_\gamma(R_\gamma(J_\alpha)\ J_\beta)$，而不是 $g_\gamma(R_\gamma(E_\alpha)\ E_\beta)$。不过，在正定情形下，两者都适用；但我们发现，在当前设定下，后一种写法更为方便（这是因为 $g_\gamma(E_\alpha, E_\beta)$ 不是单位矩阵）。

注 5.10。对于负的 N，可以仿照方法 [21] 定义熵类类时曲率-维数条件 $\mathrm{TCD}^e_q(K,N)$。然而，在这一维数范围内，$\mathrm{TCD}^e_q(K,N)$ 似乎强于 $\mathrm{Ric}_N \ge K$ [56,注 4.16]。另一方面，若 $n\le N<+\infty$，则这些性质可由 [13] 推出其熵类对应条件。

5.4 类时 Brunn–Minkowski 不等式

定理 5.9 的一个重要推论是类时 Brunn–Minkowski 不等式。在任一维数情形下，都可以直接由 $\mathrm{TCD}_q(K,N)$ 通过詹森不等式推出。在范围 $N\in[1,\infty)$ 内，该不等式最初由 [21] 从熵类类时曲率-维数条件推出，随后 [25], 又在 [13] 给出了其锐利形式。正号差情形的讨论可参见例如 [55, 56, 62, 65] 。

定理 5.11 (类时 Brunn–Minkowski 不等式**)。** 设$(M, L, \mathfrak{m})$是满足$\mathrm{Ric}_N \geq K$的整体双曲加权芬斯勒时空，其中$K\in\mathbb{R}$且 $N\in(-\infty,0]\cup[n,+\infty]$。设 A_0, $A_1\subset M$是两个相对紧的 ***Borel*** 集，其 $\mathfrak{m}$-测度为正，且满足 $\overline{A}_0\times\overline{A}_1\subset\{l>0\}$。则对每个 $t\in(0,1)$，下列结论成立。

(i) 当 $N=+\infty$ 时，有

$$\log\mathfrak{m}\big[Z_t(A_0,A_1)\big]\geq(1-t)\log\mathfrak{m}[A_0]+t\log\mathfrak{m}[A_1]\\+\inf_{x\in A_0,y\in A_1}\frac{K}{2}\,t\,(1-t)\,l(x,y)^2.$$

(ii) 当 $n\leq N<+\infty$ 时，有

$$\mathfrak{m}\big[Z_t(A_0,A_1)\big]^{1/N}\geq\inf_{x\in A_0,y\in A_1}\tau_{K,N}^{(1-t)}\big(l(x,y)\big)\cdot\mathfrak{m}[A_0]^{1/N}\\+\inf_{x\in A_0,y\in A_1}\tau_{K,N}^{(t)}\big(l(x,y)\big)\cdot\mathfrak{m}[A_1]^{1/N}.$$

(iii) 当 $N<0$ 时，有

$$\mathfrak{m}\big[Z_t(A_0,A_1)\big]^{1/N}\leq\sup_{x\in A_0,y\in A_1}\tau_{K,N}^{(1-t)}\big(l(x,y)\big)\cdot\mathfrak{m}[A_0]^{1/N}\\+\sup_{x\in A_0,y\in A_1}\tau_{K,N}^{(t)}\big(l(x,y)\big)\cdot\mathfrak{m}[A_1]^{1/N}.$$

(iv) 当 $N=0$ 时，有

$$\mathfrak{m}\big[Z_t(A_0,A_1)\big]\geq\min\Big\{\inf_{x\in A_0,y\in A_1}\frac{(1-t)\,\mathfrak{s}_{-K}(l(x,y))}{\mathfrak{s}_{-K}((1-t)\,l(x,y))}\,\mathfrak{m}[A_0],\\\inf_{x\in A_0,y\in A_1}\frac{t\,\mathfrak{s}_{-K}(l(x,y))}{\mathfrak{s}_{-K}(t\,l(x,y))}\,\mathfrak{m}[A_1]\Big\}.$$

证明。 令 $\mu_0,\mu_1\in\mathrm{P}_c^{\mathrm{ac}}(M,\mathfrak{m})$ 分别为 A_0 和 A_1 关于 $\mathfrak{m}$ 的均匀分布，即 $\mu_0:=\mathfrak{m}[A_0]^{-1}\,\mathfrak{m}|_{A_0}$ 和 $\mu_1:=\mathfrak{m}[A_1]^{-1}\,\mathfrak{m}|_{A_1}$。根据我们对 A_0 和 A_1 的假设、引理 4.10 及定理 5.9，存在一条 q-测地线 $(\mu_t)_{t\in[0,1]}$，从 μ_0 到 μ_1，以及一个 ℓ_q-最优耦合 $\pi\in\Pi(\mu_0,\mu_1)$，见证了由 $\mathrm{TCD}_q(K,N)$ 给出的熵位移半凸性。根据 N 的取值范围，我们将从后者的精确形式推导出各相应情形下的结论。

首先做一些准备。由引理 4.10，(μ_0, μ_1) 是 q-分离的。因此，由推论 4.18 可知，$(\mu_t)_{t\in[0,1]}$ 实际上是连接 μ_0 与 μ_1 的唯一 q-测地线。由命题 4.19，它仅由 $\mathfrak{m}$-绝对连续测度构成，我们记作 $\mu_t = \rho_t\,\mathfrak{m}$。此外，回顾一下，对于给定的 $t \in (0,1)$，由推论 4.4 有 $\operatorname{spt}\mu_t \subset Z_t(A_0, A_1)$。

(i) 在 $N = +\infty$ 的情况下，该假设意味着

$$\begin{aligned}\operatorname{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_t) \le{}& (1-t)\operatorname{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_0) + t\operatorname{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_1)\\ &- \frac{K}{2}\,t\,(1-t)\int_{M\times M} l(x,y)^2\,\mathrm{d}\pi(x,y).\end{aligned} \tag{5.19}$$

很容易看出，

$$\operatorname{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_0) = -\log\mathfrak{m}[A_0], \qquad \operatorname{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_1) = -\log\mathfrak{m}[A_1],$$

因此，(5.19) 的右侧有如下上界：

$$-(1-t)\log\mathfrak{m}[A_0] - t\log\mathfrak{m}[A_1] - \inf_{x\in A_0, y\in A_1}\frac{K}{2}\,t\,(1-t)\,l(x,y)^2.$$

为了从下方估计 (5.19) 的左端，利用詹森不等式，我们得到

$$\operatorname{Ent}_{\mathfrak{m}}(\mu_t) \ge -\log\mathfrak{m}[\operatorname{spt}\mu_t] \ge -\log\mathfrak{m}\big[Z_t(A_0,A_1)\big].$$

(ii) 在 $n \le N < +\infty$ 的情况下，该假设意味着

$$\begin{aligned}S^N_{\mathfrak{m}}(\mu_t) \le -{}& \int_{M\times M}\tau^{(1-t)}_{K,N}\big(l(x,y)\big)\,\rho_0(x)^{-1/N}\,\mathrm{d}\pi(x,y)\\ &- \int_{M\times M}\tau^{(t)}_{K,N}\big(l(x,y)\big)\,\rho_1(y)^{-1/N}\,\mathrm{d}\pi(x,y).\end{aligned}$$

这个不等式的右侧有上界，且上界为

$$-\inf_{x\in A_0, y\in A_1}\tau^{(1-t)}_{K,N}\big(l(x,y)\big)\,\mathfrak{m}[A_0]^{1/N} - \inf_{x\in A_0, y\in A_1}\tau^{(t)}_{K,N}\big(l(x,y)\big)\,\mathfrak{m}[A_1]^{1/N}.$$

再次对 $[0,\infty)$ 上的凸函数 $r \longmapsto -r^{(N-1)/N}$ 应用詹森不等式，即可得出该结论

$$S^N_{\mathfrak{m}}(\mu_t) \ge -\mathfrak{m}[\operatorname{spt}\mu_t]^{1/N} \ge -\mathfrak{m}\big[Z_t(A_0,A_1)\big]^{1/N}.$$

(iii) 这与前一项的论证类似，因此省略。(iv) 在 $N = 0$ 的情况下，假设意味着

$$S^0_{\mathfrak{m}}(\mu_t) \le \operatorname*{ess\,sup}_{(x,y)\in\operatorname{spt}\pi}\max\left\{\frac{\mathfrak{s}_{-K}\big((1-t)\,l(x,y)\big)}{(1-t)\,\mathfrak{s}_{-K}\big(l(x,y)\big)}\,\rho_0(x), \frac{\mathfrak{s}_{-K}\big(t\,l(x,y)\big)}{t\,\mathfrak{s}_{-K}(x,y)}\,\rho_1(y)\right\}.$$

这个不等式的右侧有上界，为

$$\max\Big\{\sup_{x\in A_0,y\in A_1}\frac{\mathfrak{s}_{-K}((1-t)\,l(x,y))}{(1-t)\,\mathfrak{s}_{-K}(l(x,y))}\,\mathfrak{m}[A_0]^{-1},\\ \sup_{x\in A_0,y\in A_1}\frac{\mathfrak{s}_{-K}(t\,l(x,y))}{t\,\mathfrak{s}_{-K}(l(x,y))}\,\mathfrak{m}[A_1]^{-1}\Big\}.$$

通过估计即可得出该结论

$$\mathfrak{m}\big[Z_t(A_0,A_1)\big]^{-1}\le\mathfrak{m}[\operatorname{spt}\mu_t]^{-1}\le\operatorname*{ess\,sup}_{z\in\operatorname{spt}\mu_t}\rho_t(z)=S^0_{\mathfrak{m}}(\mu_t).$$

证明至此完成。 □

6 曲率-维数条件推出的里奇曲率界

现在我们转而证明定理 5.9 的逆命题，即在给定类时曲率-维数条件的情况下，推导加权里奇曲率的下界。我们的策略遵循 [39, 定理 7.3] 和 [52, 定理 4.3] 的证明。

定理 6.1 ($\mathrm{TCD}^q(K,N)$ 蕴含 $\mathrm{Ric}_N\ge K$)。 设 $(M,L,\mathfrak{m})$ 为一个满足 $\mathrm{TCD}^q(K,N)$ 的整体双曲加权芬斯勒时空，其中 $q\in(0,\,1)$，$K\in\mathbb{R}$，且 $N\in(-\infty,\,0]\cup[n,+\infty]$。那么在类时方向上有 $\mathrm{Ric}_N\ge K$。

证明。 我们先考虑 $n<N<+\infty$ 的情形。令 $p<0$ 表示 q 的对偶指数，即 $p^{-1}+q^{-1}=1$。反设对于某些 $\varepsilon>0$、$z\in M$ 以及类时切向量 $w\in\Omega_z$，

$$\mathrm{Ric}_N(w)<(K-2\,\varepsilon)\,F^2(w).$$

对于每个充分小的 $s>0$，我们都能找到 $\delta>0$ 以及一个光滑函数u：$B_\delta(z)\longrightarrow\mathbb{R}$，该函数定义在以 z 为中心的黎曼球 $B_\delta(z)$ 上，并且其在 z 处的一阶和二阶导数被规定为

$$\begin{aligned}F^*\big(\mathrm{d}u(z)\big)^{p-2}\,\mathscr{L}^*\big(\mathrm{d}u(z)\big)&=s\,w,\\ F^*\big(\mathrm{d}u(z)\big)^{p-2}\,Q\,H^u\,Q&=-\frac{\psi'_\gamma(0)}{N-n}\,I_n,\end{aligned}\tag{6.1}$$

其中，我们定义 $\gamma(t):=\exp_z(t\,s\,w)$，对于 $t\in[0,1]$，Q 和 H^u 是证明定理 5.9 时定义的矩阵，而 I_n 是单位矩阵。我们选择 s 和 δ，使得 $\mathrm{F}_t\colon B_\delta(z)\longrightarrow M$，其中

$$\mathcal{F}_t(x):=\exp_x\big(t\,F^*(\mathrm{d}u)^{p-2}\,\mathscr{L}^*(\mathrm{d}u)\big),$$

对于每个 $t \in [0,1]$，它都成为到其像上的微分同胚。由 (6.1) 和 [45, 引理 8.3]，在适当缩小 s 和 δ 后，我们可以并且将假设 u 是 (l^q/q)-凸的，从而上述映射最终将给出一个最优传输。最后，由于 u 的连续性，并在必要时进一步缩小 δ，我们也可以并且将假设曲线 $t \longmapsto \mathsf{F}_t(x)$ 的时间导数是类时的，并且在 $x \in B_\delta(z)$ 和 $t \in [0,1]$ 中与光锥保持一致的距离。

定义测度 $\mu_0 := \mathfrak{m}[B_\delta(z)]^{-1}\,\mathfrak{m}|_{B_\delta(z)} = \rho_0\,\mathfrak{m}$ 以及 $\mu_t := (\mathsf{F}_t)_\sharp \mu_0$，其中$t \in [0,1]$。如有必要，进一步缩小 δ，即可得到 $\mathrm{spt}\ \mu_0 \times \mathrm{spt}\ \mu_1 \subset \{l > 0\}$。特别地，根据引理 4.10 以及 u 的假设（l^q/q）-凸性，(μ_0, μ_1) 是 q-分离的；并且根据推论 4.18，$(\mu_t)_{t\in[0,1]}$ 构成连接 μ_0 与 μ_1 的唯一 q-测地线。经过重新缩放后，根据命题 4.19，对于每个$t \in [0,1]$，μ_t 都是 $\mathfrak{m}$-绝对连续的。

沿着上述的 $\gamma(t) = \exp_z(t\,s\,w)$，我们考虑如下分解

$$c(t) := \det{}_{\mathfrak{m}}[\mathrm{d}\mathcal{F}_t(z)]^{1/N} = c_1(t)^{(N-n)/N}\, c_2(t)^{n/N}$$

如定理 5.9 的证明中所示，其中

$$c_1(t) := \exp\left(\frac{\psi_\gamma(0) - \psi_\gamma(t)}{N-n}\right), \qquad c_2(t) := \mathrm{e}^{\phi(t)/n} = \det[\mathrm{d}\mathcal{F}_t(z)]^{1/n}.$$

然后根据 $\phi' =$迹$[B]$ 和黎卡提方程（5.11），

$$\begin{aligned} N\,\frac{c''}{c} &= (N-n)\,\frac{c_1''}{c_1} + n\,\frac{c_2''}{c_2} - \frac{n(N-n)}{N}\left(\frac{c_1'}{c_1} - \frac{c_2'}{c_2}\right)^2 \\ &= -\mathrm{Ric}_N(\dot\gamma) - \mathrm{trace}[B^2] + \frac{(\mathrm{trace}[B])^2}{n} - \frac{n(N-n)}{N}\left(\frac{c_1'}{c_1} - \frac{c_2'}{c_2}\right)^2. \end{aligned}$$

在 $t = 0$ 处，回顾 $B(0) = F^*(\mathsf{d}u(z))^{p-2}\,H^u\,Q^2$，由 (6.1) 可得

$$\frac{c_1'(0)}{c_1(0)} = -\frac{\psi_\gamma'(0)}{N-n} = \frac{1}{n}\,\mathrm{trace}[B(0)] = \frac{c_2'(0)}{c_2(0)}$$

并且，由于 H^u 是对称的，

$$\mathrm{trace}[B(0)^2] = \frac{(\mathrm{trace}[B(0)])^2}{n} = \frac{n\,\psi_\gamma'(0)^2}{(N-n)^2}.$$

因此，我们得到

$$N\,\frac{c''(0)}{c(0)} = -\mathrm{Ric}_N(s\,w) > -(K - 2\,\varepsilon)\,F^2(s\,w).$$

因此，根据连续性并经过进一步缩放，我们可以并且将假设

$$N\,\frac{c''(t)}{c(t)} > -(K-\varepsilon)\,F^2\big(\dot{\mathcal{F}}_t(x)\big)$$

对于每个 $x \in B_\delta(z)$ 以及每个 $t \in [0,1]$。通过令 $d(x) := F(\mathrm{F}_t(x))$，该不等式意味着:

$$c(t) \le \frac{\mathfrak{s}_{(K-\varepsilon)/N}((1-t)\,d(x))}{\mathfrak{s}_{(K-\varepsilon)/N}(d(x))}\,c(0) + \frac{\mathfrak{s}_{(K-\varepsilon)/N}(t\,d(x))}{\mathfrak{s}_{(K-\varepsilon)/N}(d(x))}\,c(1) \tag{6.2}$$

多亏了（.....的一个类比） [25, 引理 2.2]。然后，由 Monge– Amp`ere 方程（推论 4.20 ）可知

$$\begin{aligned}\rho_t\big(\mathcal{F}_t(x)\big)^{-1/N} \le{}& \frac{\mathfrak{s}_{(K-\varepsilon)/N}((1-t)\,d(x))}{\mathfrak{s}_{(K-\varepsilon)/N}(d(x))}\,\rho_0(x)^{-1/N} \\ &+ \frac{\mathfrak{s}_{(K-\varepsilon)/N}(t\,d(x))}{\mathfrak{s}_{(K-\varepsilon)/N}(d(x))}\,\rho_1\big(\mathcal{F}_1(x)\big)^{-1/N}.\end{aligned}$$

因此，由 [13, 定理1.5(v)] 可知，约化类时曲率-维数条件 $\mathsf{TCD}^*_q(K,N)$ 不成立，而该条件弱于 $\mathsf{TCD}_q(K,N)$（见 [13, 命题 3.6]）。

通过利用 $(M,L,\mathfrak{m})$ 的光滑性，情形 $N=n$ 可归结为上述论证。具体而言，若 $\mathrm{Ric}_n(w) < (K-2\,\varepsilon)F^2(w)$，则对充分小的 $N>n$，有 $\mathrm{Ric}_N(w) < (K-\varepsilon)F^2(w)$。这意味着 $\mathsf{TCD}^*_q(K,N)$ 不成立，因此更强的条件 $\mathsf{TCD}^*_q(K,n)$ 也不成立（见 [13, 命题 3.7]）。

$N<0$ 这一情形也可按照（6.2）中的论证处理。我们有

$$c(t) \ge \frac{\mathfrak{s}_{(K-\varepsilon)/N}((1-t)\,d(x))}{\mathfrak{s}_{(K-\varepsilon)/N}(d(x))}\,c(0) + \frac{\mathfrak{s}_{(K-\varepsilon)/N}(t\,d(x))}{\mathfrak{s}_{(K-\varepsilon)/N}(d(x))}\,c(1),$$

因此

$$\begin{aligned}\rho_t\big(\mathcal{F}_t(x)\big)^{-1/N} \le{}& \frac{\mathfrak{s}_{(K-\varepsilon)/N}((1-t)\,d(x))}{\mathfrak{s}_{(K-\varepsilon)/N}(d(x))}\,\rho_0(x)^{-1/N} \\ &+ \frac{\mathfrak{s}_{(K-\varepsilon)/N}(t\,d(x))}{\mathfrak{s}_{(K-\varepsilon)/N}(d(x))}\,\rho_1\big(\mathcal{F}_1(x)\big)^{-1/N}.\end{aligned}$$

回想一下，对于 $N<0$，N-R´enyi 熵没有负号，我们由此推得 $\mathsf{TCD}^*_q(K,\ N)$ 不成立；这同样弱于 $\mathsf{TCD}_q(K,\ N)$（其论证与 [56, 命题 4.7] 相同）。

在 $N=+\infty$ 这一情形下，我们将（6.1）的第二个条件替换为 $H^u = 0$。于是，如同定理 5.9 的证明中那样，我们有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\bigg|_0 \log\det\nolimits_{\mathfrak{m}}[\mathrm{d}\mathcal{F}_t(z)] &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\bigg|_0 \big[\psi_\gamma(0) - \psi_\gamma(t) + \phi(t)\big] \\ &= -\mathrm{Ric}_\infty(s\,w) > -(K-2\,\varepsilon)F^2(s\,w),\end{aligned}$$

借助这一点，可以用同样的方式证明 $\mathsf{TCD}_q(K,\ \infty)$ 不成立。

情形 $N=0$ 采用了备注 5.3 中的层级关系。Ric_0 的上界可推出对每个 $N<0$，Ric_N 也有相同的上界；沿用上述论证，我们得到

$$\rho_t\big(\mathcal{F}_t(x)\big) \geq \Bigg(\frac{\mathfrak{s}_{(K-\varepsilon)/N}\big((1-t)\,d(x)\big)}{\mathfrak{s}_{(K-\varepsilon)/N}\big(d(x)\big)}\,\rho_0(x)^{-1/N} + \frac{\mathfrak{s}_{(K-\varepsilon)/N}\big(t\,d(x)\big)}{\mathfrak{s}_{(K-\varepsilon)/N}\big(d(x)\big)}\,\rho_1\big(\mathcal{F}_1(x)\big)^{-1/N} \Bigg)^{-N}.$$

根据 [56, 命题 4.7], ，这意味着

$$\rho_t\big(\mathcal{F}_t(x)\big) \geq \Big(\tau^{(1-t)}_{K-\varepsilon,N}\big(d(x)\big)\,\rho_0(x)^{-1/N} + \tau^{(t)}_{K-\varepsilon,N}\big(d(x)\big)\,\rho_1\big(\mathcal{F}_1(x)\big)^{-1/N} \Big)^{-N}.$$

因此，令 $N\to 0$ （从而 $-1/N\to+\infty$），我们得到

$$\rho_t\big(\mathcal{F}_t(x)\big) \geq \max\left\{ \frac{\mathfrak{s}_{-K+\varepsilon}\big((1-t)\,d(x)\big)}{(1-t)\,\mathfrak{s}_{-K+\varepsilon}\big(d(x)\big)}\,\rho_0(x), \frac{\mathfrak{s}_{-K+\varepsilon}\big(t\,d(x)\big)}{t\,\mathfrak{s}_{-K+\varepsilon}\big(d(x)\big)}\,\rho_1\big(\mathcal{F}_1(x)\big) \right\},$$

这表明 TCD$_q$(K,0) 不成立。 □

参考文献

[1] N. Ahmad、H. K. Kim 和 R. J. McCann，最优传输、拓扑与唯一性。Bull. Math. Sci. 1 （2011），第 1 期，13–32。[2] S. B. Alexander 和 R. L. Bishop，具有 Alexandrov 曲率界的 Lorentz 空间与半黎曼空间。Comm. Anal. Geom. **16** （2008），251–282。[3] L. Ambrosio 和 N. Gigli，最优传输使用指南。网络上的流的建模与优化，1–155，数学讲义，2062，Fond. CIME/CIME Found. Subser.，施普林格，海德堡，2013。[4] L. A mbrosio、N. Gigli 和 G. Savar´e，里奇曲率下界为有界的黎曼度量测度空间。Duke Math. J.**163** （2014），1405–1490。[5] L. Ambrosio、N. Gigli 和 G. Savar´e，Bakry-´Emery 曲率-维数条件与黎曼里奇曲率界。Ann. Probab.**43** （2015），第 1 期，339–404。[6] K. Bacher 和 K.-T. Sturm，度量测度空间曲率-维数条件的局部化与张量化性质。J. Funct. Anal.**259** （2010），第 1 期，28–56。[7] D. Bakry 和 M. ´Emery，超收缩扩散。概率研讨会，XIX，1983/84，177–206，数学讲义，1123，施普林格，柏林，1985。

[8]V. Bangert，《黎曼流形上凸函数的解析性质》。《纯粹与应用数学杂志》**307(308)** (1979)，309–324。[9] D. Bao、S.-S. Chern 和 Z. Shen，《黎曼-芬斯勒几何导论》。《数学研究生教材》，**200**。施普林格出版社，纽约，2000。[10] J. K. Beem，不定芬斯勒空间与类时空间。《加拿大数学杂志》**22**(1970)，1035–1039。[11] J. K. Beem、P. E. Ehrlich 和 K. L. Easley，《整体洛伦兹几何》。第二版。《纯粹与应用数学专著与教材》，202。Marcel Dekker, Inc.，纽约，1996。xiv+635页。[12] T. Beran、A. Ohanyan、F. Rott 和 D. A. Solis，具有非负类时曲率的整体双曲洛伦兹长度空间的分裂定理。《数学物理快报》**113** (2023)，第 2 期，论文编号 48。[13] M. Braun，洛伦兹空间上的 Rényi 熵：类时曲率-维数条件。arXiv:2206.13005。[14] M. Braun，满足类时曲率-维数条件的良测地线。《非线性分析》**229** (2023)，论文编号 113205，共 30 页。[15] M. Braun 和 M. Calisti，通过最优传输为低正则性时空建立类时 Ricci 曲率界。arXiv:2209.03802。[16]Y. Brenier，向量值函数的极分解与单调重排。《纯粹与应用数学通讯》**44** (1991)，第 4 期，375–417。[17] P. Bernard 和 B. Buffoni，最优质量传输与 Mather 理论。《欧洲数学会杂志》（JEMS）**9** (2007)，第 1 期，85–121。[18] D. Burago、Y. Burago 和 S. Ivanov，《度量几何教程》。《数学研究丛书》，第**33**卷。美国数学学会，普罗维登斯（2001）。[19] S. Carroll，《时空与几何：广义相对论导论》。Addison Wesley，旧金山，加利福尼亚州，2004。xiv+513页。[20] J. S. Case，Bakry–Emery–Ricci 张量的奇点定理与洛伦兹分裂定理。《几何与物理杂志》**60** (2010)，477–490。[21] F. Cavalletti 和 A. Mondino，洛伦兹合成空间中的最优传输、合成类时 Ricci 曲率下界及其应用。arXiv:2004.08934[22] D. Cordero-Erausquin、R. J. McCann 和 M. Schmuckenschläger，Borell、Brascamp 和 Lieb 型黎曼插值不等式。《数学发明》**146** (2001)，第 2 期，219–257。

[23]G. B. De Luca, N. De Ponti, A. Mondino 和 A. Tomasiello，热力学引力：最优传输与负有效维数。arXiv:2212.02511[24] M. Eckstein 和 T. Miller，非局域现象的因果性。《亨利·庞加莱研究所年刊》´e**18** (2017)，第 9 期，3049–3096。[25] M. Erbar、K. Kuwada 和 K. T. Sturm，度量测度空间上的熵曲率-维数条件与博赫纳不等式的等价性。《数学发明》**201** (2015)，第 3 期，993–1071。[26] A. Figalli 和 N. Juillet，海森堡群中 Wasserstein 测地线的绝对连续性。《泛函分析杂志》**255** (2008)，第 1 期，133–141。[27] G. J. Galloway 和 E. Woolgar，Bakry–´Emery时空中的宇宙学奇点。《几何与物理杂志》**86** (2014)，359–369。[28] N. Gigli，非光滑背景下的分裂定理。arXiv:1302.5555[29] N. Gigli，度量测度空间的微分结构及其应用。《美国数学会回忆录》**236** (2015)，第 1113 号。[30] M. Graf，C^1-洛伦兹度量的奇点定理。《数学物理通讯》**378** (2020)，第 2 期，1417–1450。[31] S. G. Harris，洛伦兹流形的三角形比较定理。《印第安纳大学数学杂志》**31** (1982)，第 3 期，289–308。[32] S. W. Hawking，宇宙学中奇点的出现。I。《伦敦皇家学会会刊 A 辑》**294** (1966)，511–521。[33]S. W. Hawking 和 G. F. R. Ellis，时空的大尺度结构。剑桥数学物理专著，第 1 卷。剑桥大学出版社，伦敦—纽约，1973。xi+391页。[34] S. W. Hawking 和 R. Penrose，引力坍缩与宇宙学中的奇点。《伦敦皇家学会会刊 A 辑》**314** (1970)，529–548。[35] M. Hohmann、C. Pfeifer 和 N. Voicu，芬斯勒时空上场论的数学基础。《数学物理杂志》**63** (2022)，第 3 期，论文编号 032503，共 33 页。[36] M. Kell 和 S. Suhr，洛伦兹代价函数对偶解的存在性。《亨利·庞加莱研究所分析、非线性分析年刊》´e Anal. Non Lin´eaire**37** (2020)，343–372。[37] M. Kunzinger 和 C. S¨amann，洛伦兹长度空间。《全球分析与几何年刊》**54** (2018)，399–447。[38] M. Kunzinger、R. Steinbauer、M. Stojkovi´ć 和 J. A. Vickers，$C^{1,1}$-度量的霍金奇点定理。《经典与量子引力》**32** (2015)，第 7 期，075012，共 19 页。

[39] J. Lott 和 C. Villani，通过最优传输研究度量测度空间的里奇曲率。《数学年刊》（第 2 辑）**169** (2009)，第 3 期，903–991。[40] Y. Lu、E. Minguzzi 和 S. Ohta，加权洛伦兹–芬斯勒流形几何 I：奇点定理。《伦敦数学会杂志》**104** (2021)，362–393。[41] Y. Lu、E. Minguzzi 和 S. Ohta，具有 ϵ-范围的加权芬斯勒流形及时空的比较定理。《分析、几何与度量空间》**10**(2022)，1–30。[42] Y. Lu、E. Minguzzi 和 S. Ohta，加权洛伦兹–芬斯勒流形几何 II：分裂定理。《国际数学杂志》**34** (2023)，第 1 期，2350002。[43] M. Matsumoto，芬斯勒几何与特殊芬斯勒空间基础。Kaiseisha Press，滋贺县，1986。vi+344 页。[44] R. J. McCann，黎曼流形上映射的极分解。《几何与泛函分析》**11** (2001)，第 3 期，589–608。[45] R. J. McCann，玻尔兹曼熵的位移凸性刻画了广义相对论中的强能量条件。《剑桥数学杂志》**8**(2020)，609–681。[46] E. Minguzzi，利普希茨联络与喷射的凸邻域。《数学月刊》**177** (2015)，569–625。[47] E. Minguzzi，芬斯勒时空中的光锥。《数学物理通讯》**334**(2015)，1529–1551。[48] E. Minguzzi，芬斯勒时空中的Raychaudhuri方程与奇点定理。《经典与量子引力》**32**，185008 (2015)。[49] E. Minguzzi，闭锥结构的因果理论及其应用。《数学物理评论》**31** (2019)，1930001，共 139 页。[50] E. Minguzzi，洛伦兹因果理论。《相对论生活评论》**22**，3 (2019)。https://doi.org/10.1007/s41114-019-0019-x。[51] E. Minguzzi 和 S. Suhr，洛伦兹度量空间及其 Gromov–Hausdorff 收敛。arXiv:2209.14384[52] A. Mondino 和 S. Suhr，广义相对论爱因斯坦方程的最优传输表述。《欧洲数学会杂志》（即将出版）。[53] S. Ohta，度量测度空间的测度收缩性质。《瑞士数学评论》**82** (2007)，805–828。[54]S. Ohta，一致凸性与光滑性及其在芬斯勒几何中的应用。《数学年刊》**343** (2009)，669–699。

[55] S. Ohta，《芬斯勒插值不等式》。《微积分与偏微分方程》**36** （2009），211–249。[56] S. Ohta，(K,N)-凸性与负 N的曲率-维数条件。《几何分析杂志》**26** （2016），2067–2096。[57] S. Ohta，芬斯勒几何中的针分解与等周不等式。《日本数学会杂志》**70** （2018），651–693。[58] S. Ohta，《比较芬斯勒几何》。数学专著丛书，施普林格，查姆，2021年。[59]B. O'Neill，《半黎曼几何：及其在相对论中的应用》。纯粹与应用数学，第103卷。学术出版社 [哈考特·布雷斯·约万诺维奇出版社], 纽约，1983年。xiii+468 页。[60] M.-K. von Renesse 和 K.-T. Sturm，传输不等式、梯度估计、熵与里奇曲率。《纯粹与应用数学通讯》**58** （2005），923–940。[61] K.-T. Sturm，度量测度空间的几何学 I。《数学学报》**196**（2006），第1期，65–131。[62] K.-T. Sturm，度量测度空间的几何学 II。《数学学报》**196** （2006），第1期，133–177。[63] S. Suhr，洛伦兹代价函数的最优传输理论。M¨unster J. Math. **11** （2018），13–47。[64] J. Szilasi、R. L. Lovas 和 D. C. Kert´esz，联络、喷射与芬斯勒结构。世界科学出版公司，哈肯萨克，新泽西州，2014年。xxii+709 页[65] C. Villani，《最优传输：新旧论述》。数学科学基础丛书，第338卷。施普林格出版社，柏林，2009年。xxii+973 页。[66] E. Woolgar 和 W. Wylie，N-Bakry–´Emery 时空的宇宙学奇点定理与分裂定理。《数学物理杂志》**57** （2016），022504，1–12。[67] E. Woolgar 和 W. Wylie，洛伦兹分裂定理的曲率-维数界。《几何与物理杂志》**132** （2018），131–145。