arXiv:2305.04398v2 [math.SP] 7 Nov 2023

欧几里得空间中凸区域上拉普拉斯算子纽曼特征值的一个普适不等式

KEI FUNANO

Abstract. 我们得到了欧几里得空间中有界凸区域上拉普拉斯算子纽曼特征值的一个新上界。作为该上界的应用，我们推导出了拉普拉斯算子纽曼特征值的普适不等式。

1. Introduction

本文旨在给出欧几里得空间中有界凸区域上拉普拉斯算子纽曼特征值的一个新上界，并给出拉普拉斯算子纽曼特征值的一个普适不等式。

设 Ω 是欧几里得空间中的一个有界区域，其边界分片光滑。用 $\lambda_k(\Omega)$ 表示 Ω 上拉普拉斯算子的第 k 个正纽曼特征值。对于 Ω 的一个有限博雷尔子集序列 $\{A_\alpha\}_{\alpha=0}^k$，我们定义

$$\mathcal{D}(\{A_\alpha\}) := \min_{\alpha\neq\beta} d(A_\alpha, A_\beta),$$

其中 $d(A_\alpha, A_\beta) := \inf\{d(x,y) \mid x \in A_\alpha, y \in A_\beta\}$，而 d 是欧几里得距离函数。

本文中，若存在某个普适的具体常数 $c > 0$，使得 $\alpha \lesssim \beta$ $\alpha \leq c\beta$（这意味着 c 不依赖于维数、k 等任何参数），我们就记作

本文的主要定理之一如下。

定理1.1。设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个具有分片光滑边界的有界凸区域，且 $\{A_\alpha\}_{\alpha=0}^k$ 是 Ω 的一列博雷尔子集。

日期：2023年11月8日。2010年数学主题分类。35P15、53C23、58J50。关键词和短语：拉普拉斯算子的纽曼特征值；普适不等式；凸区域。

于是我们有

$$\lambda_k(\Omega) \lesssim \frac{n^2}{(\mathcal{D}(\{A_\alpha\})\log(k+1))^2} \max_{\alpha=0,\cdots,k} \Big(\log \frac{\mathrm{vol}(\Omega)}{\mathrm{vol}(A_\alpha)}\Big)^2. \tag{1.1}$$

注1.1。上述定理对于非负里奇曲率流形上的有界凸区域内拉普拉斯算子的纽曼特征值也成立。证明只用到了引理3.1，而该引理由 Bishop-Gromov 不等式推出。

在 [4, 5] 中，Chung-Grigory'an-Yau 得到

$$\lambda_k(\Omega) \lesssim \frac{1}{\mathcal{D}(\{A_\alpha\})^2} \max_{\alpha=0,\cdots,k} \Big(\log \frac{\mathrm{vol}(\Omega)}{\mathrm{vol}(A_\alpha)}\Big)^2.$$

对于有界（不一定是凸的）区域 Ω 及其博雷尔子集$\{A_\alpha\}$（另见 [10, 12]）。与他们的不等式相比，若固定 n，当 k 较大时，不等式（1.1）更优。若固定 k，当n较大时，他们的不等式更优。定理1.1也对 [8]中的问题5.1给出了一个答案，精确到 n^2 因子。

作为定理1.1的应用，我们得到以下关于拉普拉斯算子纽曼特征值的普适不等式。

定理1.2。设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界凸区域，具有分片光滑边界。那么有

$$\lambda_{k+1}(\Omega) \lesssim n^4 \lambda_k(\Omega). \tag{1.2}$$

关于（1.2），作者在 [6, 9]中猜想

$$\lambda_{k+1}(\Omega) \lesssim \lambda_k(\Omega)$$

在与定理1.2相同的假设下成立。在 [8, （1.3）]中，作者证明了

$$\lambda_{k+1}(\Omega) \lesssim (n\log k)^2 \lambda_k(\Omega)$$

对于有界凸区域 Ω。该不等式 (1.2) 避免了 k 对比值 $\lambda_{k+1}(\Omega)/\lambda_k(\Omega)$ 上界的影响，并且在 $\log k \geq n$ 时给出了更好的不等式。在 [6, 9]，作者证明了对于 $\mathbb{R}^n$ 中的有界凸区域以及某个普适常数 $c > 1$，成立一个与维数无关的普适不等式 $\lambda_k(\Omega) \lesssim c^k \lambda_1(\Omega)$。在 [15, 定理 1.5] 中，Liu 在相同假设下证明了一个最优的普适不等式 $\lambda_k(\Omega) \lesssim k^2 \lambda_1(\Omega)$。因此，对于较小的 k （例如 $k = 2$、3），(1.2) 中的 n^2 因子并非必需。如 [8, (1.5)] 所述，结合 E. Milman 的结果 [16] 与 Cheng-Li 的结果 [3]，可在相同假设下得到 $\lambda_k(\Omega) \gtrsim k^{2/n} \lambda_1(\Omega)$。结合 Liu 的不等式可知

$$\lambda_{k+1}(\Omega) \lesssim k^{2-2/n} \lambda_k(\Omega).$$

固定 n 时，当 k 较大，该不等式优于这个不等式。固定 k 时，当 n 较大，这个不等式更优。

2. Preliminaries

我们汇集若干结果，以便用于定理的证明。

命题 2.1（[1, 8.2.1 定理]）。设 Ω 是欧几里得空间中的一个有界区域，其边界分片光滑，且 $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha=0}^{l}$ 是 Ω 的一个有限划分，由子区域组成，满足如下意义：对于任意不同的 α、β，有 $\mathrm{vol}(\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta) = 0$。那么我们有

$$\lambda_{l+1}(\Omega) \geq \min_{\alpha} \lambda_1(\Omega_\alpha).$$

参见 [11, 附录 C_+]，其中给出了上述命题的弱形式。

定理 2.2（[17, (1.2)]）。设 Ω 是欧几里得空间中的一个具有分片光滑边界的有界凸区域。则有

$$\lambda_1(\Omega) \geq \frac{\pi^2}{\mathrm{Diam}(\Omega)^2}.$$

将命题 2.1 与定理 2.2 结合起来，要为拉普拉斯算子的纽曼特征值给出一个“良好”的下界，只需提供该区域的一个“良好”有限凸划分。

关于纽曼特征值的上界，我们提及以下定理。

定理 2.3（[14, 定理 1.1]）。设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中具有分片光滑边界的有界凸区域。对于任意自然数 k，我们有

$$\lambda_k(\Omega) \lesssim \frac{n^2 k^2}{\mathrm{Diam}(\Omega)^2}.$$

为了构造一个“良好”的划分，我们回顾一下度量空间的沃罗诺伊划分。设 X 是一个度量空间，$\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 X 的子集。对于每个 $\alpha \in I$，我们将与点 x_α 相关联的沃罗诺伊单元 C_α 定义为

$$C_\alpha := \{x \in X \mid d(x, x_\alpha) \leq d(x, x_\beta) \text{ for all } \beta \neq \alpha\}.$$

若 X 是欧几里得空间中的有界凸区域 Ω，则 $\{C_\alpha\}_{\alpha\in I}$是 Ω 的一个凸划分（边界 ∂C_α 可能彼此重叠）。还要注意，若半径为 r 的球 $\{B(x_\alpha, r)\}_{\alpha\in I}$ 覆盖 Ω，则$C_\alpha \subseteq B(x_\alpha, r)$，因此对于任意 $\alpha \in I$，$\mathrm{Diam}(C_\alpha) \leq 2r$。

3. Proof of Theorems 1.1 and 1.2

我们使用以下关键引理来证明定理1.1。

引理 3.1（[7, 引理 3.1]）。设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中具有分片光滑边界的有界凸区域。给定 $r > 0$，假设$\{x_\alpha\}_{\alpha=0}^{l}$ 是 Ω 中一组彼此 r 分离的点，即对于不同的 α、β，有 $d(x_\alpha, x_\beta) \geq r$。那么我们有

$$r \lesssim \frac{n}{\sqrt{\lambda_l(\Omega)}}.$$

定理1.1的证明。假设存在一个由 $\{A_\alpha\}_{\alpha=0}^{k}$ 个博雷尔子集构成的序列，使得

$$\lambda_k(\Omega) \geq \frac{cn^2}{(\mathcal{D}(\{A_\alpha\})\log(k+1))^2} \max_{\alpha=0,\cdots,k} \Big(\log \frac{\mathrm{vol}(\Omega)}{\mathrm{vol}(A_\alpha)}\Big)^2$$

对于充分大的 $c > 0$。由于 $(k+1)\,\mathrm{vol}(A_\alpha) \leq \mathrm{vol}(\Omega)$，对某个 α，我们有

$$\mathcal{D}(\{A_\alpha\}) \geq \frac{cn}{\sqrt{\lambda_k(\Omega)}} =: r_0. \tag{3.1}$$

对于每个 α，我们固定一个点 $x_\alpha \in A_\alpha$。根据 (3.1)，序列 $\{x_\alpha\}_{\alpha=0}^{k}$ 随后在 Ω 中是 r_0-分离的。利用引理 3.1，我们得到

$$\frac{cn}{\sqrt{\lambda_k(\Omega)}} = r_0 \lesssim \frac{n}{\sqrt{\lambda_k(\Omega)}}.$$

当 c 充分大时，这就产生矛盾。定理得证。

□

我们可以如下减少定理1.1中的 $\{A_\alpha\}$ 数量。

引理3.2. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个凸区域，且 $\{A_\alpha\}_{\alpha=0}^{k-1}$ 是 Ω 的博雷尔子集序列。则有

$$\lambda_k(\Omega) \lesssim \frac{n^2}{(\mathcal{D}(\{A_\alpha\})\log(k+1))^2} \max_{\alpha=0,\cdots,k-1} \Big(\log \frac{\mathrm{vol}(\Omega)}{\mathrm{vol}(A_\alpha)}\Big)^2.$$

上述引理由定理1.1和 [9, 定理3.4]推出。

为证明定理1.2，我们回顾黎曼几何中的 Bishop-Gromov 不等式。关于凸区域情形下的证明，见 [7, 引理3.4]，其中凸区域位于 $\mathbb{R}^n$中。

引理 3.3（Bishop-Gromov 不等式）。设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个凸区域。那么对于任意 $x \in \Omega$ 以及任意 $R > r > 0$，我们有

$$\frac{\mathrm{vol}(B(x,r)\cap\Omega)}{\mathrm{vol}(B(x,R)\cap\Omega)} \geq \Big(\frac{r}{R}\Big)^n.$$

在定理1.2的证明中，我们使用了与 [8, 定理1.3]中类似的论证。

定理1.2的证明。令 $R := cn^2/\sqrt{\lambda_{k+1}(\Omega)}$，其中 c 是稍后指定的正数。假设 Ω 包含 Ω 内的一个 $k+1$ R-分离网 $\{x_\alpha\}_{\alpha=0}^{k}$。由定理 2.3 可知，$\mathrm{Diam}(\Omega) \le c'n(k+1)/\sqrt{\lambda_{k+1}(\Omega)}$，其中 $c'>0$为某个普适常数。应用 Bishop-Gromov 不等式可得

$$\frac{\mathrm{vol}(B(x_\alpha,R)\cap\Omega)}{\mathrm{vol}(\Omega)} \ge \frac{R^n}{(\mathrm{Diam}\,\Omega)^n} \ge \Big(\frac{c}{c'(k+1)}\Big)^n \ge \frac{1}{(k+1)^n}$$

当 $c>c'$时，由引理3.2可得

$$\lambda_{k+1}(\Omega) \lesssim \frac{n^2(\log(k+1)^n)^2}{(\mathcal{D}(\{B(x_\alpha,R)\cap\Omega\})\log(k+2))^2} \lesssim \frac{n^4}{R^2} = \frac{1}{c}\lambda_{k+1}(\Omega).$$

当 c 充分大时，这就产生了矛盾。

令 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_l$ 为 Ω 中极大的 R-分离点，其中 $l \le k-1$。由极大性可知 $\Omega \subseteq \bigcup_{\alpha=0}^{l} B(x_\alpha, R)$。若 $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha=0}^{l}$ 是与 $\{x_\alpha\}$ 相关联的 Ω 的沃罗诺伊划分，则有 $\mathrm{Diam}(\Omega_\alpha) \le 2R$。因此，由定理 2.2 可得，对于每个 α，$\lambda_1(\Omega_\alpha) \gtrsim 1/R^2$。根据命题 2.1，我们得到

$$\lambda_k(\Omega) \ge \min_\alpha \lambda_1(\Omega_\alpha) \gtrsim \frac{1}{R^2} \gtrsim \frac{\lambda_{k+1}(\Omega)}{n^4}.$$

至此，定理得证。 □

致谢。作者谨向匿名审稿人致以诚挚谢意，感谢他们提出的有益且宝贵的意见。

References

[1] P. Buser，《紧致黎曼曲面的几何与谱》。1992年版重印。现代 Birkh¨auser 经典著作。Birkh¨auser Boston, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，2010。[2] S. Y. Cheng，特征值比较定理及其几何应用，《数学杂志》143（1975），第3期，289–297。[3] S. Y. Cheng 和 P. Li，热核估计与特征值下界。《瑞士数学杂志》56（1981），第3期，327–338。[4] F. R. K. Chung、A. Grigor'yan 和 S.-T. Yau，离散与连续拉普拉斯算子特征值的上界，《数学进展》117（1996），第2期，165–178。[5] F. R. K. Chung、A. Grigor'yan 和 S.-T. Yau，流形与图的特征值和直径，《清华几何与分析讲座》（新竹，1990–1991），79–105，Int. Press，剑桥，马萨诸塞州，1997。[6] K. Funano，带权黎曼流形上拉普拉斯算子的特征值与多路等周常数，预印本 arXiv:1307.3919。

[7] K. Funano，关于拉普拉斯算子的纽曼特征值的区域单调性札记，即将在《伊利诺伊数学杂志》发表。[8] K. Funano，“火腿三明治定理”在拉普拉斯算子特征值中的应用，《分析、几何与度量空间》4（2016），317–325。[9] K. Funano，通过减少子集数量估计拉普拉斯算子的特征值，《以色列数学杂志》217（2017），第1期，413–433。[10] K. Funano 和 Y. Sakurai，高阶庞加莱常数的上界。《美国数学会汇刊》373（2020），第6期，4415–4436。 ´M. Gromov，《黎曼与非黎曼空间的度量结构》，基于1981年法文原版。附有 M. Katz、P. Pansu 和 S. Semmes 的附录。Sean Michael Bates 由法文译出。2001年英文版重印。现代 Birkh[11] auser 经典著作。Birkh ¨auser Boston, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，2007。¨N. Gozlan 和 R. Herry，多重集合的指数集中与高阶特征值，预印本 arXiv:1804.06133，即将在《势分析》发表。[12] M. Gromov 和 V. D. Milman，等周不等式的一个拓扑应用，《美国数学杂志》105（1983），第4期，843–854。[13] P. Kr[14] oger，欧几里得空间中凸区域高阶纽曼特征值的上界。（英文摘要）《美国数学会会刊》127（1999），第6期，1665–1669。¨S. Liu，特征值比的最优无维数上界，预印本 arXiv:1405.2213v3。[15] E. Milman，凸性在等周问题、谱隙与集中现象中的作用，《数学发明》177（2009），第1期，1–43。[16] L. E. Payne 和 H. F. Weinberger。凸区域的最优庞加莱不等式。《有理力学与分析档案》5：286—292，1960。

Division of Mathematics & Research Center for Pure and Applied Mathematics, Graduate School of Information Sciences, Tohoku Uni-versity, 6-3-09 Aramaki-Aza-Aoba, Aoba-ku, Sendai 980-8579, Japan电子邮箱地址：kfunano@tohoku.ac.jp