关于一类椭圆正交多项式及其可积性

HARINI DESIRAJU[1], TOMAS LASIC LATIMER[1], 和 PIETER ROFFELSEN[1]

arXiv:2305.04404v1 [math.CA] 8 May 2023

摘要。在 Bertola；Fasondini、Olver 和 Xu 近期工作的基础上，我们定义了椭圆曲线上的一类正交多项式，并建立了相应的黎曼-希尔伯特框架。随后，我们聚焦于由常数权函数定义的特殊情形，并利用黎曼-希尔伯特问题推导出这些正交多项式的递推关系和微分方程。我们还证明，偶多项式这一子类与 Painlevé VI 的椭圆形式相关，其 τ 函数在一个缩放因子之外由偶矩的 Hankel 行列式给出。这些偶多项式的首次迭代对应于 Hitchin 研究的 Painlevé VI 特殊情形，该情形与自对偶爱因斯坦度量有关。

目录

1. 引言 2 2. 黎曼-希尔伯特问题与矩 5 3. 一般情形的线性问题与递推关系 15 4. 偶数情形的线性问题与 Painlevé VI 的椭圆形式 18 5. Painlevé VI 的 τ 函数与 Hankel 行列式 24

[1]悉尼大学数学与统计学院，坎珀当，新南威尔士州 2006电子邮件地址：
harini.desiraju@sydney.edu.au, t.lasiclatimer@maths.usyd.edu.au, pieter.roffelsen@sydney.edu.au.

1. 引言

正交多项式是一类重要的特殊函数，在从组合学到信号处理的广泛领域中有着重要应用。特别是，它们为理解随机矩阵系综的普适性 [Dei99] 以及矩阵模型的大 N 极限 [DGZ95], 提供了有用工具，并刻画了 Painlevé 方程等可积系统的特殊解 [Van17]。

传统上，正交多项式构成实系数多项式的一组基，这些多项式关于由在实数轴的某个子集上对权函数积分所定义的内积彼此正交。例如，Hermite 多项式关于实数轴上的权函数 e^{-x^2} 正交。此外，众所周知，经典 Chebyshev 多项式和 Jacobi 多项式的推广可以用椭圆函数来描述，参见例如 [Akh90; Car60; IVY01; Ree45; VZ09]。

过去几年中，在椭圆曲线上直接定义正交多项式方面取得了显著突破，现代技术使得对其性质进行系统分析成为可能 [Ber21; Ber22; BGK22; FOX22; FOX23]。受这些研究启发，我们考察由 Weierstrass $\wp$ 函数及其导数构造的一族亚纯函数，它们关于给定的权函数正交。鉴于其构造方式与 Heine [Hei78]和 Rees [Ree45]所引入的函数相近，我们称之为椭圆正交多项式（EOPs）。

我们建立了一个通用框架，利用这些多项式的矩和 Riemann-Hilbert 方法进行分析。此外，当权函数为常数时，我们证明，以 k 为指标的偶椭圆正交多项式与 Painlevé VI 的椭圆形式有关。对于 $k=1$，椭圆 Painlevé VI 方程的参数为 $\left(\frac{1}{8},\ 1_8,\ -\frac{1}{8},\ \frac{3}{8}\right)$，其通解已知可由椭圆函数描述 [Hit95; Man98]。

本文采用的椭圆正交多项式概念如下：设 τ 是上半平面 H 中的一个元素，且 $\pi(z)$ 是周期为 1 和 τ 的椭圆函数。若 $\pi(z)$ 的所有极点都位于格子 $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\cdot\tau$ 上，则称其为椭圆多项式。如果位于$z=0$ 处的极点阶数为 n，则其次数为 n；若对于 $n\geq 0$，则称其为首一多项式，

$$\pi(z)=z^{-n}(1+\mathcal{O}(z)),\qquad \text{as}\quad z\to 0.$$

特别要注意，不存在一次椭圆多项式。我们考虑椭圆多项式序列 $(\pi_n)_{n\geq 0,n\neq 1}$，其中 π_n 是次数为 n 的首一多项式，对 $n\in\mathbb{N}_{\neq 1}$ 成立，并满足如下形式的正交条件

$$\int_{\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}+1}\pi_m(z)\pi_n(z)\mathsf{w}(z)dz=\delta_{mn}h_n, \tag{1.1}$$

对于某个 $h_n\in\mathbb{C}$，其中 δ_{mn} 是克罗内克δ函数，而 $w(z)$ 是区间 $\gamma:=[\frac{\tau}{2},\frac{\tau}{2}+1]$ 上的一个 L^1 函数，称为权函数，对所有 $m,n\in\mathbb{N}_{\neq 1}$ 均成立。在这种情况下，我们称 $(\pi_n)_{n\geq 0,n\neq 1}$ 为椭圆正交多项式序列（EOPs）。选择支集 γ，是因为它在环面上关于取负和复共轭变换保持不变

$$\mathbb{T}:=\mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\cdot\tau),$$

且不包含 $[0]\in\mathbb{T}$。

我们注意到椭圆多项式与传统复多项式之间存在如下类比。复多项式可以刻画为 $\mathbb{CP}^1$，上至多只有一个极点、且该极点位于 ∞ 的亚纯函数。类似地，如上所定义的椭圆多项式可以刻画为环面 T 上至多只有一个极点、且该极点位于 $[0]\in\mathbb{T}$ 的亚纯函数。

可以利用 Weierstrass $\wp$-函数及其 z-导数构造椭圆多项式的一个有用的基，

$$\mathcal{B}=\{\mathcal{E}_n\}_{n\geq 0,n\neq 1},\qquad \mathcal{E}_{2k}=\wp(z)^k,\qquad \mathcal{E}_{2k+3}=-\tfrac{1}{2}\wp'(z)\wp(z)^k,\qquad k\geq 0, \tag{1.2}$$

选取使得 $\mathcal{E}_n$ 是次数为 n 的首一多项式，其中 $n\in\mathbb{N}_{\neq 1}$。回顾从 T 到该三次曲线的同构

$$x=\wp(z),\qquad\qquad y=\wp'(z), \tag{1.3}$$

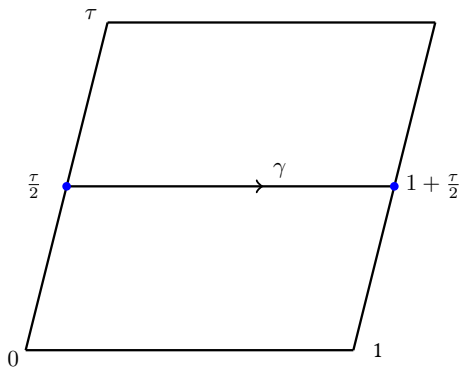


图1. 基本域 T 中的正交区间。

从 T 到三次曲线

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3, \tag{1.4}$$

其中，$g_{2,\ 3}$ 是椭圆不变量。在该映射下，EOP π_n 变为关于 $\{x, y\}$ 的一个二元多项式，其权函数次数为 n，其中

$$\deg(x) = 2, \quad \deg(y) = 3.$$

在这种对应关系下，我们对椭圆多项式的定义便与[FOX22], 所使用的定义一致，而变换 (1.3) 得出的椭圆多项式基的定义与 (1.2) 中给出的定义等价。

当 w(z) 关于轮廓 γ 的中点在 z 上为偶函数时，也就是说，

$$\mathsf{w}(\tfrac{1}{2}(1+\tau)+z) = \mathsf{w}(\tfrac{1}{2}(1+\tau)-z) \quad z \in [0,1], \tag{1.5}$$

首一椭圆多项式自然分为偶多项式和奇多项式:

$$\pi_{2k}(z,\tau) = \sum_{i=0}^{k} \widehat{a}_{i,2k}(\tau)\wp(z)^{k-i}, \qquad \widehat{a}_{0,2k} = 1, \tag{1.6}$$

$$\pi_{2k+3}(z,\tau) = -\sum_{i=0}^{k} \widehat{a}_{i,2k+3}(\tau)\wp(z)'\wp(z)^{k-i}/2, \qquad \widehat{a}_{0,2k+3} = 1, \tag{1.7}$$

其中,

$$\pi_{2k}(-z) = \pi_{2k}(z), \qquad \pi_{2k+3}(-z) = -\pi_{2k+3}(z). \tag{1.8}$$

下文中，我们将 π_{2k} 和 π_{2k+3} 分别称为偶椭圆正交多项式和奇椭圆正交多项式。注意，根据（1.2），$\pi_{2k}(z)$ 完全是 $x = \wp(z)$ 的函数；这类多项式在本质上类似于 [IC08], 中的 Akheizer 多项式，以及文献中由 [Car60；Hei78；IVY01；Ree45] 等人研究的广义 Jacobi 多项式。

在本文中，我们展示了对于任意选择的权函数，椭圆正交多项式都可以表示为矩的行列式，并可刻画为相应 2×2 黎曼-希尔伯特问题（RHP）的唯一解的 (1,1) 元素。

正交多项式与 RHP 之间的联系由 Fokas、Its 和 Kitaev [FIK91] 于 20 世纪 90 年代建立。此后，这一联系在许多场合发挥了重要作用，用于证明不同类别正交多项式的各种结果 [Dei+99；JL21；Mar06],，最常见的应用是确定不同类别正交多项式的渐近展开以及随机矩阵系综的普适性。RHP 还被用于 [Ber22] 确定椭圆曲线上一类解析性质不同的正交多项式在次数较大时的渐近行为，并允许基中存在一个额外的极点。

与给定权函数对应的一族正交多项式，可由该权函数的矩 [Sze39] 完全确定。这种表示在正交多项式的多个方面及其应用中都发挥着重要作用，包括

组合学和概率论等领域，例如参见综述文章 [CKS16; Kön05] 。具体而言，矩的 Hankel 行列式被用于研究随机矩阵系综的配分函数，以及相应的 τ 函数，或者等价地，研究可积方程的解。关于 Painlevé VI 情形下的这一方法，参见 Forrester 和 Witte [FW06] ；关于其他类别的等单值系统，参见 Bertola [Ber08]。在当前情形下，相关的矩和行列式定义如下:

$$\mu_{i,j} := \int_\gamma \mathcal{E}_i(z)\mathcal{E}_j(z)\mathrm{w}(z)dz, \qquad\qquad D_n := \det(\mu_{i,j})_{i,j=0}^{n-1}.$$

与经典正交多项式的情形相同， [FIK91], 上述针对椭圆正交多项式的 RHP 有唯一解，当且仅当行列式 $D_n \neq 0$。此外，矩矩阵是一个具有奇数阶矩和偶矩构成的棋盘格模式的分块矩阵。因此，其行列式可分解为两个汉克尔行列式，分别由偶矩和奇数阶矩构成，二者都定义了 Painlevé τ 函数。 [BCH15]通过研究广义 Jacobi 多项式，得到了类似结果，将由某些椭圆函数构造的汉克尔行列式与 Painlevé VI 的 τ 函数联系起来。

1.1. **展望**。 下面列出本文结果之后的一些可能研究方向:

(1) 利用第 2 节中的构造，可以系统地提高权函数的复杂度。例如，权函数可以是关于 $\wp(z)$ 的代数函数，这可能导出其他可积方程的解；(2) 可以利用本文所述的 RHP 研究椭圆正交多项式的大次数渐近展开。(3) 汉克尔行列式与随机矩阵系综的配分函数有关。研究这类关系的椭圆扩展将会很有趣。(4) 另一个自然的问题是，将本文建立的黎曼–希尔伯特框架推广到高亏格曲面上的正交多项式研究中 [FOX22]。

1.2. **概要**。 在第 2 节中，我们首先通过矩的行列式来描述一般多项式和偶多项式，并分别构造与这两类多项式相关的黎曼–希尔伯特问题的解 Y_n 和 Y_{2k} 。定理2.1证明了一般 RHP 的解的存在性和唯一性。在本文其余部分中，我们取权函数 $\mathrm{w}(z) \equiv 1$。

在第 3 节中，我们得到一般 RHP 的解 Y_n 所满足的微分线性系统和离散线性系统，分别见命题 3.1 和 3.2。在定理 3.1 和 3.2 中，我们推导出多项式 π_n 及其系数的递推关系。

在第 4 节中，定理 4.1 表明，偶 RHP Y_{2k} 的解 $k = 1$ 所满足的线性问题描述了 Painlevé VI 的椭圆形式的 Lax 对。对于 $k = 1$，单值化指数具有一种特殊形式，这与命题 4.3 中所示的 Painlevé VI 的 Hitchin 情形有关。

在第 5 节中，我们推导出由偶矩的 Hankel 行列式构造的 Painlevé VI 的显式解，见定理 5.1。此外，在定理 5.2 中，我们证明这些 Hankel 行列式是相应的 Painlevé VI τ 函数。

1.3. **致谢**。 我们感谢 Nalini Joshi 和 Milena Radnović 提出的宝贵讨论和建议。H.D. 感谢澳大利亚研究理事会 Discovery Project #DP200100210 的支持。P.R. 感谢澳大利亚研究理事会 Discovery Project #DP210100129 的支持。TL 的研究得到澳大利亚政府研究培训计划以及悉尼大学可积系统研究生补充奖学金的资助。

部分工作是在作者于2022年秋季学期访问艾萨克·牛顿研究所期间完成的。他们感谢 Møller研究所及“适用的复苏渐近：迈向普适理论”项目的组织者给予的热情接待。HD感谢西蒙斯基金会资助她访问INI。

2. 黎曼-希尔伯特问题与矩

本节首先详细介绍一般椭圆正交多项式（EOPs）和偶椭圆正交多项式（even EOPs）如何用矩的行列式表示。接着，我们证明，相邻的椭圆正交多项式及其适当的柯西变换构成相应黎曼-希尔伯特问题（RHP）的唯一解。我们将多项式的存在唯一性与RHP的唯一可解性联系起来，并求出解的行列式的显式表达式。进而，这将使我们能够推导出在 $\mathsf{w}(z) \equiv 1$ 情形下多项式所满足的微分和差分线性系统。

2.1. 一般情形下的矩。我们首先假设 $\tau \in i\mathbb{R}$，使得 Weierstrass$_\wp$-函数在 γ 上为实数，即椭圆多项式的基 $\mathcal{B}$ 由在 γ 上为实值的函数构成。此外，若权函数 $\mathsf{w}(z)$ 严格为正，则

$$\langle f, g\rangle = \int_\gamma f(z)g(z)\mathsf{w}(z)dz$$

在实椭圆多项式空间上定义了一个内积，而 Gram–Schmidt 过程表明，相应的椭圆正交多项式存在且唯一，其中 π_n 由下式给出

$$\pi_n(z) = D_n^{-1}\begin{vmatrix} \mu_{0,0} & \mu_{0,2} & \mu_{0,3} & \cdots & \mu_{0,n} \\ \mu_{2,0} & \mu_{2,2} & \mu_{2,3} & \cdots & \mu_{2,n} \\ \mu_{3,0} & \mu_{3,2} & \mu_{3,3} & \cdots & \mu_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1,0} & \mu_{n-1,1} & \mu_{n-1,2} & \cdots & \mu_{n-1,n} \\ \mathcal{E}_0(z) & \mathcal{E}_2(z) & \mathcal{E}_3(z) & \ldots & \mathcal{E}_n(z) \end{vmatrix}, \tag{2.1}$$

其中

$$\mu_{i,j} = \int_\gamma \mathcal{E}_i(z)\mathcal{E}_j(z)\mathsf{w}(z)dz \qquad (i, j \in \mathbb{N}_{\neq 1}), \tag{2.2}$$

and

$$D_n = |S_n|, \quad S_n := \begin{vmatrix} \mu_{0,0} & \mu_{0,2} & \mu_{0,3} & \cdots & \mu_{0,n-1} \\ \mu_{2,0} & \mu_{2,2} & \mu_{2,3} & \cdots & \mu_{2,n-1} \\ \mu_{3,0} & \mu_{3,2} & \mu_{3,3} & \cdots & \mu_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1,0} & \mu_{n-1,1} & \mu_{n-1,2} & \cdots & \mu_{n-1,n-1} \end{vmatrix}. \tag{2.3}$$

参见附录 C 中的示例。由上述方程可得以下恒等式,

$$h_n := \int_{\frac{1}{2}\tau+0}^{\frac{1}{2}\tau+1} \pi_n(z)^2\mathsf{w}(z)dz = \int_{\frac{1}{2}\tau+0}^{\frac{1}{2}\tau+1} \mathcal{E}_n\pi_n(z)\mathsf{w}(z)dz = \frac{D_{n+1}}{D_n}. \tag{2.4}$$

对于 $\tau \notin i\mathbb{R}$，或者 $\mathsf{w}(z)$ 并非严格为正，多项式 $\pi_n(z)$ 存在且唯一，当且仅当行列式 D_n 非零。类似地，我们将发现，相关的 RHP 有唯一解，当且仅当 $D_n \neq 0$。

In F图 2、3 和 4 中绘出了前几组 EOP，它们位于 γ 上，其中 $\tau = i$ 和 $\mathsf{w}(z) \equiv$ 1.

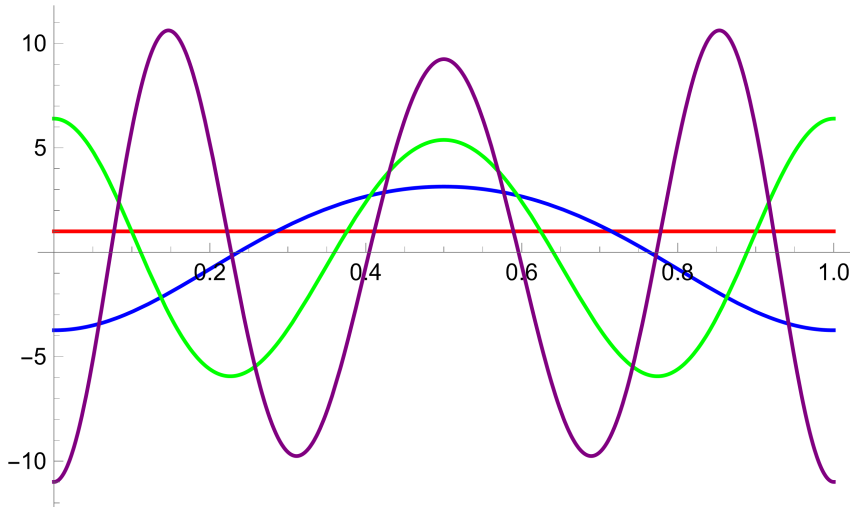


图 2. 显示偶椭圆正交多项式 π_0、 π_2、 π_4 和π_6在区间 $\frac{1}{2}\tau+[0,1]$ 上函数值的图形，分别以红色、蓝色、绿色和紫色表示，且$\tau=i$。

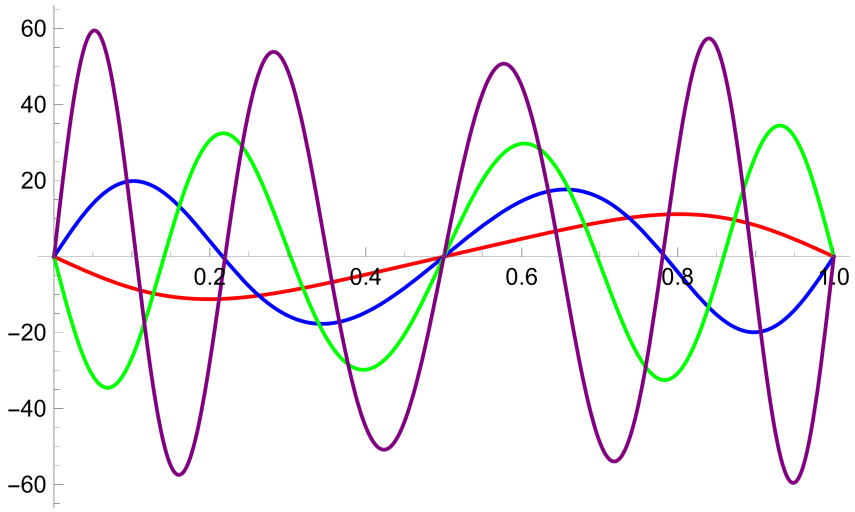


图 3. 显示奇椭圆正交多项式 π_3、 π_5、 π_7 和 π_9在区间 $\frac{1}{2}\tau+[0,1]$ 上函数值的图形，分别以红色、蓝色、绿色和紫色表示，且 $\tau=i$。

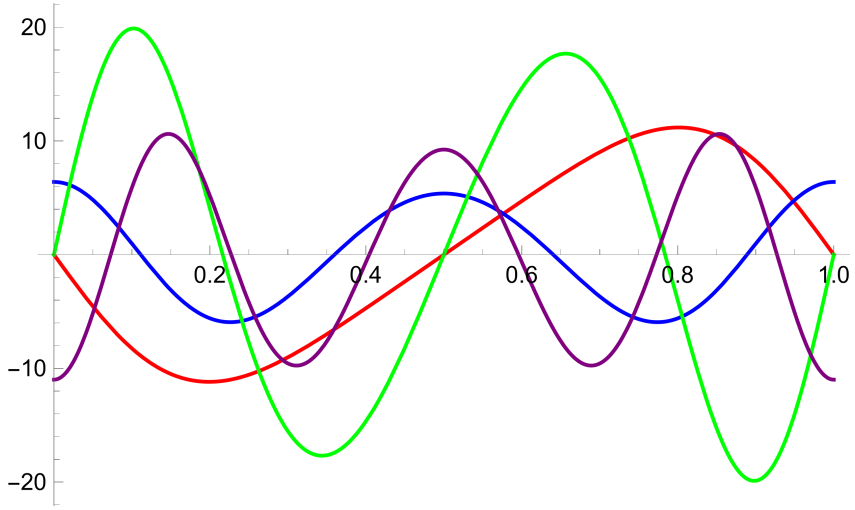


图 4. 显示椭圆正交多项式 π_3、 π_4、 π_5 和 π_6在区间 $\frac{1}{2}\tau+[0,1]$ 上函数值的图形，分别以红色、蓝色、绿色和紫色表示，且 $\tau=i$。

2.2. **一般情形下的黎曼-希尔伯特问题**。定义 RHP 的第一步是分析多项式的柯西变换

$$\mathcal{C}(\pi_n)(z) := \int_\gamma \pi_n(w) C(w,z) \mathsf{w}(w) \frac{dw}{2\pi i}. \tag{2.5}$$

一般而言，柯西核是关于 z 的亚纯函数，也是关于 w 的一形式，在其极点处的留数为 ± 1 ；即 它是第三类阿贝尔微分。环面上的此类核的具体形式并不唯一，文献中可以找到若干实例 [BI88; Rod87; DDG20; Ber22]。对于当前情形，我们考虑标量核

$$C(w,z) = \zeta(w-z) - \zeta(w), \tag{2.6}$$

其中， $\zeta(.)$ 表示 Weierstrass ζ-函数（见 A）。此柯西核具有以下性质。

(1) ζ-函数的周期性（见方程 (A.6)）意味着

$$C(w,z+1) = C(w,z) - \eta_1(\tau), \qquad C(w,z+\tau) = C(w,z) - \eta_2(\tau). \tag{2.7}$$

(2) 核 $C(w,\ z)$ 在 $w=z,\ w=0$ 处有极点，其留数分别为 ± 1 ,
（3）在 $w \to z$ 的极限下,

$$C(w,z) = \frac{1}{w-z} + \mathcal{O}(w-z), \tag{2.8}$$

(4)，并在极限中 $z \to 0$,

$$C(w,z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{z^k}{k!} \zeta^{(k)}(w), \tag{2.9}$$

其中， $\zeta^{(k)}(\cdot)$ 表示 ζ 的第 k 阶导数。

那么，以下结论对 (2.5) 成立。

引理2.1。 π_n 的柯西变换是一个分段解析的双周期函数，适用于$n \geq 2$。

证明。 根据定义可直接得出， $\mathcal{C}(\pi_n)(z)$ 在 γ 之外是解析的。由关系式 (2.7)，我们可知

$$\mathcal{C}(\pi_n)(z+1) = \mathcal{C}(\pi_n)(z) - \int_\gamma \eta_1(\tau) \pi_n(w) \mathsf{w}(w) \frac{dw}{2\pi i}, \tag{2.10}$$

由于正交性 (1.1)，对于 $n \neq 0$，第二项消失。对 $\mathcal{C}(\pi_n)(z+\tau)$ 进行类似计算同样成立。□

引理 2.2。 在渐近极限 $z \to 0$ 下，多项式具有如下形式的渐近展开

$$\pi_n(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_{j,n}(\tau)}{z^{n-j}}, \qquad c_{0,n} = 1, \tag{2.11}$$

并且，类似地，它们的柯西变换具有如下形式的渐近展开，[1]

$$\mathcal{C}(\pi_n)(z) = \frac{h_n(\tau)}{2\pi i} \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{c}_{j,n}(\tau) z^{n+j-1}, \qquad \widetilde{c}_{0,n} = 1, \qquad \widetilde{c}_{1,n} = -c_{1,n+1}. \tag{2.12}$$

[1]除非另有说明，所有系数都依赖于 τ。为便于记号，我们通常省略系数对 τ 的依赖。

证明。 利用方程 (2.9) 中柯西核在 $z=0$ 附近的泰勒展开，该展开关于 $w\in\gamma$ 一致成立，我们得到如下渐近展开，其中 $z\to 0$,

$$\mathcal{C}(\pi_n)(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{z^k}{k!}\zeta^{(k)}(w)\pi_n(w)\mathsf{w}(w)\frac{dw}{2\pi i} \tag{2.13}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{z^k}{k!}\int_\gamma\zeta^{(k)}(w)\pi_n(w)\mathsf{w}(w)\frac{dw}{2\pi i} \tag{2.14}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=n-1}^{\infty}(-1)^k\frac{z^k}{k!}\int_\gamma\zeta^{(k)}(w)\pi_n(w)\mathsf{w}(w)\frac{dw}{2\pi i} \tag{2.15}$$

$$=\frac{h_n(\tau)}{2\pi i}\sum_{j=0}^{\infty}\widetilde{c}_{j,n}(\tau)z^{n+j-1}, \tag{2.16}$$

其中，在第三个等式中，我们使用了正交性，以及这样一个事实： $\zeta^{(k)}(w)$ 是一个次数为 k 的椭圆多项式，其中 $k\geq 1$，其系数由以下各项给出。

$$\frac{h_n(\tau)}{2\pi i}\widetilde{c}_{j,n}(\tau)=\frac{(-1)^{n-1+j}}{(n-1+j)!}\int_\gamma\zeta^{(n-1+j)}(w)\pi_n(w)\mathsf{w}(w)\frac{dw}{2\pi i},$$

对于 $j\geq 0$。为了计算首阶系数，注意到

$$\frac{(-1)^{n-1+j}}{(n-1+j)!}\zeta^{(n-1+j)}(w)=w^{-(n+j)}(1+\mathcal{O}(w^2)),$$

作为 $w\to 0$，因此

$$\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\int_\gamma\zeta^{(n-1)}(w)\pi_n(w)\mathsf{w}(w)dw=\int_\gamma\pi_n(w)^2dw=h_n,$$

and

$$\frac{(-1)^n}{n!}\int_\gamma\zeta^{(n)}(w)\pi_n(w)\mathsf{w}(w)dw=\int_\gamma(\pi_{n+1}(w)-c_{1,n+1}\pi_n(z))\pi_n(w)\mathsf{w}(w)dw=-c_{1,n+1}h_n.$$

因此，$\widetilde{c}_{0,\ n}=1$ 和 $\widetilde{c}_{1,\ n}=-c_{1,\ n+1}$，引理得证。 □

注 2.1。 对于$\mathsf{w}(z)\equiv 1$， h_n 的值发生特化，所有奇数指标系数均消失，即$c_{j,\ n}=\widetilde{c}_{j,\ n}=0$ 对于 $j\geq 1$ 为奇数时成立。

L现在定义一个 RHP，使其解的 11 元素为多项式 $\pi_n($$z$).

黎曼-希尔伯特问题 1. 黎曼-希尔伯特问题是求一个具有以下性质的 2×2矩阵值函数 $Y_n(z,\ \tau)$:

- $Y_n(z,\ \tau)$ 在 $z\in\mathbf{T}\setminus(\gamma\cup\{0\})$ 中解析。
- 对 $z\in\gamma$ 满足以下跳跃条件:

$$Y_{n,+}(z,\tau)=Y_{n,-}(z,\tau)\begin{pmatrix}1&\mathsf{w}(z)\\0&1\end{pmatrix}, \tag{2.17}$$

  其中，按照标准记法， $\pm$ 分别表示相对于 γ 的定向位于其左侧和右侧的分段解析函数，见图 1。
- 在极限 $z\to 0$ 下:

$$Y_n(z,\tau)=(\mathbb{1}+\mathcal{O}(z))\begin{pmatrix}z^{-n}&0\\0&z^{n-2}\end{pmatrix}. \tag{2.18}$$

定理2.1。 设 $n\geq 3$，则 *RHP 1* 有唯一解，当且仅当行列式$D_n\neq 0$；此时，解为

$$Y_n(z,\tau)=\begin{pmatrix}\pi_n(z)&\mathcal{C}(\pi_n)(z)\\\frac{2\pi i}{h_{n-1}}\pi_{n-1}(z)&\frac{2\pi i}{h_{n-1}}\mathcal{C}(\pi_{n-1})(z)\end{pmatrix},\qquad(n\geq 3). \tag{2.19}$$

证明。 为证明该定理，我们分别分析 RHP 解的两行。先看第一行，$(Y_{11}(z)\ Y_{12}(z))$。RHP 中施加的条件可转化为

- $Y_{11}(z)$ 和 $Y_{12}(z)$ 在 $\mathbb{T} \setminus (\gamma \cup \{0\})$ 上解析且具有双周期性，
- $Y_{11}(z)$ 在 γ 上解析，且 $Y_{12}(z)$ 满足跳跃条件

$$(Y_{12})_+(x) = (Y_{12})_-(x) + Y_{11}(x)\mathsf{w}(x) \qquad (x \in \gamma).$$

- 渐近条件

$$Y_{11}(z) = z^{-n}(1 + \mathcal{O}(z)), \quad Y_{12}(z) = \mathcal{O}(z^{n-1}); \qquad z \to 0.$$

我们将此称为第一行 RHP。

注意， $Y_{11}(z)$ 必然是次数为 n 的首一椭圆多项式。为了研究$Y_{12}(z)$，我们首先考虑以下函数，

$$r(z) := Y_{12}(z) - \mathcal{C}(Y_{11})(z) + \zeta(z) \int_{\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}+1} Y_{11}(x)\mathsf{w}(x)dx.$$

注意， $r(z)$ 在 γ 上没有跳跃，并且关于 1 和 τ 周期，因此它必定是一个椭圆函数。此外，根据渐近条件，

$$r(z) := z^{-1} \int_{\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}+1} Y_{11}(x)\mathsf{w}(x)dx + \mathcal{O}(1) \qquad (z \to 0).$$

由于 $r(z)$ 在格子 $\mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot \tau$ 之外没有极点，且不存在次数为一的椭圆函数，因此 $r(z)$ 必定是一个常数，并且

$$\int_{\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}+1} Y_{11}(x)\mathsf{w}(x)dx = 0. \tag{2.20}$$

但是，根据最后一个等式，以及 $Y_{11}(z)$ 和 $Y_{12}(z)$ 的渐近展开，我们现在得到

$$r(z) = Y_{12}(z) - \mathcal{C}(Y_{11})(z) = \mathcal{O}(z^{n-1})$$

作为 $z \to 0$。因此， $r(z) \equiv 0$ ，由此可得

$$Y_{12}(z) = \mathcal{C}(Y_{11})(z).$$

特别地，根据 $Y_{12}(z)$ 的渐近展开

$$\mathcal{C}(Y_{11})(z) = \mathcal{O}(z^{n-1}) \quad (z \to 0).$$

换言之，

$$\int_{\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}+1} Y_{11}(z)\zeta^{(k)}(z)\mathsf{w}(z)dz = 0$$

对于 $1 \le k \le n-2$，这意味着

$$\int_{\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}+1} Y_{11}(z)\mathcal{E}_m(z)\mathsf{w}(z)dz = 0 \tag{2.21}$$

对于 $2 \le m \le n-1$。我们已经看到，这个等式对于 $m = 0$ 也成立，参见方程（2.20）。

现在，让我们写出

$$Y_{11}(z) = c_0\mathcal{E}_0 + c_2\mathcal{E}_2 + c_3\mathcal{E}_3 + \ldots + c_{n-1}\mathcal{E}_{n-1} + \mathcal{E}_n.$$

那么，方程（2.21）等价于

$$S_n \begin{pmatrix} c_0 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu_{n,0} \\ -\mu_{n,2} \\ \vdots \\ -\mu_{n,n-1} \end{pmatrix}, \tag{2.22}$$

其中， S_n 是方程（2.3）中定义的矩阵。

总而言之，我们发现，当且仅当方程（2.22）具有唯一解时，行一 RHP 的解（$Y_{11}(z)$ $Y_{12}(z)$）存在且唯一；而这又当且仅当 $D_n \neq 0$ 成立。特别地，在这种情况下， $\pi_n(z)$ 存在，并且

$$Y_{11}(z) = \pi_n(z), \quad Y_{12}(z) = \mathcal{C}(\pi_n)(z).$$

以大致相同的方式分析 Y 的第二行。注意，第二行（$Y_{21}(z)$ $Y_{22}(z)$）必须满足

- $Y_{21}(z)$ 和 $Y_{22}(z)$ 在 $\mathbb{T} \setminus (\gamma \cup \{0\})$ 上解析且具有双周期性,
- $Y_{21}(z)$ 在 γ 上解析，且 $Y_{22}(z)$ 满足跳跃条件

$$(Y_{22})_+(x) = (Y_{22})_-(x) + Y_{21}(x)\mathsf{w}(x) \qquad (x \in \gamma).$$

- 渐近条件

$$Y_{21}(z) = \mathcal{O}(z^{-(n-1)})), \quad Y_{22}(z) = z^{n-2}(1 + \mathcal{O}(z)) \qquad (z \to 0).$$

我们将此称为第二行Riemann–Hilbert问题。

由此可知， $Y_{21}(z)$ 必须是次数小于或等于 $n-1$ 的椭圆多项式,

$$Y_{22}(z) = \mathcal{C}(Y_{21})(z),$$

并且我们发现】【。

$$\int_{\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}+1} Y_{21}(z)\mathcal{E}_m(z)\mathsf{w}(z)dz = \delta_{m,n-1}2\pi i, \tag{2.23}$$

对于 $m = 0$，2，3，.....， $n-1$。写成

$$Y_{21}(z) = c_0\mathcal{E}_0 + c_2\mathcal{E}_2 + c_3\mathcal{E}_3 + \ldots + c_{n-1}\mathcal{E}_{n-1},$$

这等价于

$$S_n \begin{pmatrix} c_0 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-2} \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 2\pi i \end{pmatrix}, \tag{2.24}$$

其中， S_n 是方程（2.3）中定义的矩阵。

总而言之，我们发现，第二行Riemann–Hilbert问题存在唯一解 ($Y_{21}(z)$ $Y_{22}(z)$)，当且仅当方程（2.24）有唯一解；而这又当且仅当 $D_n \neq 0$。

此外，如果 $D_n \neq 0$，那么

$$\frac{2\pi i}{h_{n-1}}\pi_{n-1}(z) = \frac{2\pi i}{D_n}\,\widetilde{\pi}_{n-1}(z),$$

是良定义的，且必然

$$Y_{21}(z) = \frac{2\pi i}{h_{n-1}}\pi_{n-1}(z), \quad Y_{22}(z) = \frac{2\pi i}{h_{n-1}}\mathcal{C}(\pi_{n-1})(z).$$

我们现在已经证明，当且仅当 $D_n \neq 0$ 时，RHP 解的两行都存在；并且在这种情况下，我们证明了公式 (1) 成立。定理得证。□

引理 2.2 中的渐近展开现在有助于我们得到 RHP 解的行列式的精确形式： $1\ Y_n$。

引理 2.3. 对于 $\mathsf{w}(z) \equiv 1$，解的行列式具有如下形式

$$\det Y_n(z,\tau) = \wp(z,\tau) + \alpha_n(\tau) =: f_n(z), \tag{2.25}$$

其中 $\alpha_n(\tau)$ 由下式给出

$$\alpha_n := c_{2,n} + \widetilde{c}_{2,n-1} - \beta_n, \qquad \beta_n := \frac{h_n}{h_{n-1}}. \tag{2.26}$$

证明。令 $\mathsf{w}(z) \equiv 1$，先注意到 $\det Y_n$

(1) 是一个双周期函数

$$\det Y_n(z+\tau) = \det Y_n(z+1) = \det Y_n(z), \tag{2.27}$$

(2)，且在 γ 上没有跳跃，

$$\det Y_{n,+} = \det Y_{n,-}. \tag{2.28}$$

根据 $\pi_n(z)$ 的渐近行为（2.11），以及 $\mathcal{C}(\pi_n)(z)$（2.12），将其代入 Y_n（2.19）的行列式中，我们可以看出，当 $z \to 0$ 时

$$\det Y_n(z,\tau) = \frac{1}{z^2} + c_{2,n} + \widetilde{c}_{2,n-1} - \frac{h_n}{h_{n-1}} + \mathcal{O}(z^2). \tag{2.29}$$

由于 $\det Y_n$ 根据性质 (2.27)-(2.28) 是一个椭圆函数，因此它只有一个极点，该极点位于 $z=0$ 处，阶数为 2。因此，它必定等于 (2.19)、(2.26) 中定义的 Weierstrass $\wp(z)$-函数加上一个常数 α_n 。□

现在我们将范围限定为偶多项式，并重复上述方法。

2.3. **汉克尔行列式与偶数情形**。 考虑偶椭圆多项式构成的向量空间，

$$\mathcal{P}_{\text{even}} = \mathcal{P}_{\text{even}}(\tau) = \{\text{even elliptic functions with only a pole at } 0\},$$

具有相应的基

$$\{1, \wp(z), \wp(z)^2, \wp(z)^3, \ldots\}.$$

设 w 是区间 $\frac{1}{2}\tau + [0,1]$ 上的偶权函数，也就是说，

$$\mathsf{w}(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\tau + x) = \mathsf{w}(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\tau - x), \qquad x \in \tfrac{1}{2}\tau + [0,1].$$

对于任意自然数 $k \in \mathbb{N}$，如果 k 次正交多项式 $\pi_{2k}(z)$ 存在，我们定义它相对于 w 满足以下条件。

$$\int_{\frac{1}{2}\tau+0}^{\frac{1}{2}\tau+1} \wp(z)^m \pi_{2k}(z)\mathsf{w}(z)dz = 0, \quad (0 \le m < 2k),$$
$$\pi_{2k}(z) = \wp(z)^k(1 + \mathcal{O}(\wp(z)^{-1})) \quad (z \to 0).$$

对于 $i+j=k \in \mathbb{N}$,

$$\nu_{2i,2j} \equiv \nu_{2(i+j)} = \nu_{2k} := \int_{\frac{1}{2}\tau+0}^{\frac{1}{2}\tau+1} \wp(z)^k \mathsf{w}(z)dz. \tag{2.30}$$

那么， $\pi_{2k}(z)$ 存在，当且仅当矩的 Hankel 行列式

$$\Delta_{2k} := \begin{vmatrix} \nu_0 & \nu_2 & \ldots & \nu_{2k-2} \\ \nu_2 & \nu_4 & \ldots & \nu_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu_{2k-2} & \nu_{2k} & \ldots & \nu_{4k-2} \end{vmatrix}, \tag{2.31}$$

非零，其中 $\Delta_0 = 1$。反过来， π_{2k} 由以下公式明确给出。

$$\pi_{2k}(z) = \frac{1}{\Delta_{2k}} \begin{vmatrix} \nu_0 & \nu_2 & \ldots & \nu_{2k} \\ \nu_2 & \nu_4 & \ldots & \nu_{2k+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu_{2k-2} & \nu_{2k} & \ldots & \nu_{4k-2} \\ 1 & \wp(z) & \ldots & \wp(z)^k \end{vmatrix},$$

进一步意味着

$$h_{2k} := \int_{\frac{1}{2}\tau+0}^{\frac{1}{2}\tau+1} \pi_{2k}(z)^2 \mathsf{w}(z)dz = \int_{\frac{1}{2}\tau+0}^{\frac{1}{2}\tau+1} \wp(z)^k \pi_{2k}(z)\mathsf{w}(z)dz = \frac{\Delta_{2k+2}}{\Delta_{2k}}. \tag{2.32}$$

另一个直接推论是，现可将偶多项式展开为

$$\pi_{2k}(z) = \wp(z)^k - \frac{\Gamma_{2k}}{\Delta_{2k}}\wp(z)^{k-1} + \frac{\Lambda_{2k}}{\Delta_{2k}}\wp(z)^{k-2} + \mathcal{O}(\wp(z)^{k-3}), \tag{2.33}$$

其中

$$\Gamma_{2k} := \begin{vmatrix} \nu_0 & \nu_2 & \dots & \nu_{2k-4} & \nu_{2k} \\ \nu_2 & \nu_4 & \dots & \nu_{2k-2} & \nu_{2k+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \nu_{2k-2} & \nu_{2k} & \dots & \nu_{4k-6} & \nu_{4k-2} \end{vmatrix}, \quad \Lambda_{2k} := \begin{vmatrix} \nu_0 & \nu_2 & \dots & \nu_{2k-6} & \nu_{2k-2} & \nu_{2k} \\ \nu_2 & \nu_4 & \dots & \nu_{2k-4} & \nu_{2k} & \nu_{2k+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \nu_{2k-2} & \nu_{2k} & \dots & \nu_{4k-8} & \nu_{4k-4} & \nu_{4k-2} \end{vmatrix},$$

对于 $k \geq 1$，其中 $\Gamma_2 = \mu_2$ 和 $\Gamma_0 = \Lambda_2 = \Lambda_0 = 0$。

命题 2.1。 对于 $\mathsf{w}(z) \equiv 1$，矩满足以下递归关系

$$(8k+12)\nu_{2k+4} = (2k+1)g_2\nu_{2k} + 2kg_3\nu_{2k-2}. \tag{2.34}$$

证明。 对于给定的权函数，矩（2.30）可写为

$$\nu_{2k} = \int_{\frac{1}{2}\tau+0}^{\frac{1}{2}\tau+1} \wp(z)^k dz = \oint_{\text{cycle}} \frac{x^k}{y} dx, \tag{2.35}$$

其中 $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$，如通过变量变换 $x = \wp(z)$ 可见。注意，表达式 n

$$\frac{d}{dx}x^k y = kx^{k-1}y + \frac{1}{2y}(12x^{k+2} - g_2x^k),$$

由此我们得到以下恒等式

$$k \oint_{cycle} x^{k-1} y \, dx = \tfrac{g_2}{2}\nu_{2k} - 6\nu_{2k+4}, \tag{2.36}$$

对于 $k \geq 1$。因此，

$$\begin{aligned} 4\nu_{2k+4} =& 4 \oint_{\text{cycle}} \frac{4x^{k+2}}{y} dx, && (2.37) \\ =& \oint_{\text{cycle}} \frac{x^{k-1}y^2 + g_2x^k + g_3x^{k-1}}{y} dx && (2.38) \\ =& \oint_{\text{cycle}} x^{k-1}y dx + g_2\nu_{2k} + g_3\nu_{2k-2} && (2.39) \\ =& \frac{1}{k}(\tfrac{g_2}{2}\nu_{2k} - 6\nu_{2k+4}) + g_2\nu_{2k} + g_3\nu_{2k-2}, && (2.40) \end{aligned}$$

其中最后一个等式用到了恒等式 (2.36)。这就得到了命题中的递归关系。 □

前几个值为

$$\nu_0 = 1, \qquad \nu_1 = -2\eta_1, \qquad \nu_2 = \frac{1}{12}g_2, \qquad \nu_3 = \frac{1}{10}(g_3 - 3g_2\eta_1),$$

其中 $\eta_1 = \zeta(\frac{1}{2})$ 是第一个第二类周期。相应地，由方程 (2.31) 定义的前几个偶数阶汉克尔行列式为

$$\begin{aligned} &\Delta_0 = \Delta_2 = 1, \\ &\Delta_4 = \frac{1}{12}(g_2 - 48\eta_1^2), \\ &\Delta_6 = \frac{1}{37800}(25g_2^3 - 378g_3^2 + 108g_2g_3\eta_1 - 1872g_2^2\eta_1^2 + 43200g_3\eta_1^3). \end{aligned}$$

矩的 Hankel 行列式是模参数 $\tau \in \mathsf{H}$ 的函数，并且根据附录 A 中关于 g_2, g_3 和 η_1 的方程，可以将它们写成 τ 的显式函数。它们满足以下对称性，

$$\Delta_{2k}(\tau)^\diamond = \Delta_{2k}(\tau^\diamond), \quad \Delta_{2k}(\tau+2) = \Delta_{2k}(\tau) \quad (\tau \in \mathbb{H}),$$

其中 $(\alpha+\beta i)^\diamond = -\alpha + \beta i$ 当 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$。

图5中以蓝色显示了 $\Delta_{2k}(\tau)$ 的零点分布，其中 $k = 2,4,6,8$，位于被截断的上半平面内

$$\Im\,\tau \geq \tfrac{1}{\pi}\log(\tfrac{5}{4}).$$

之所以进行这一截断，是因为在实数轴附近数值计算会变得不稳定。具体来说，尽管图中只显示了有限个零点，但偶数阶 Hankel 行列式 Δ_{2k}、$k \geq 2$ 的零点实际上可能会在 $\tau \in \mathbb{Z}$ 中的点处无限聚集。

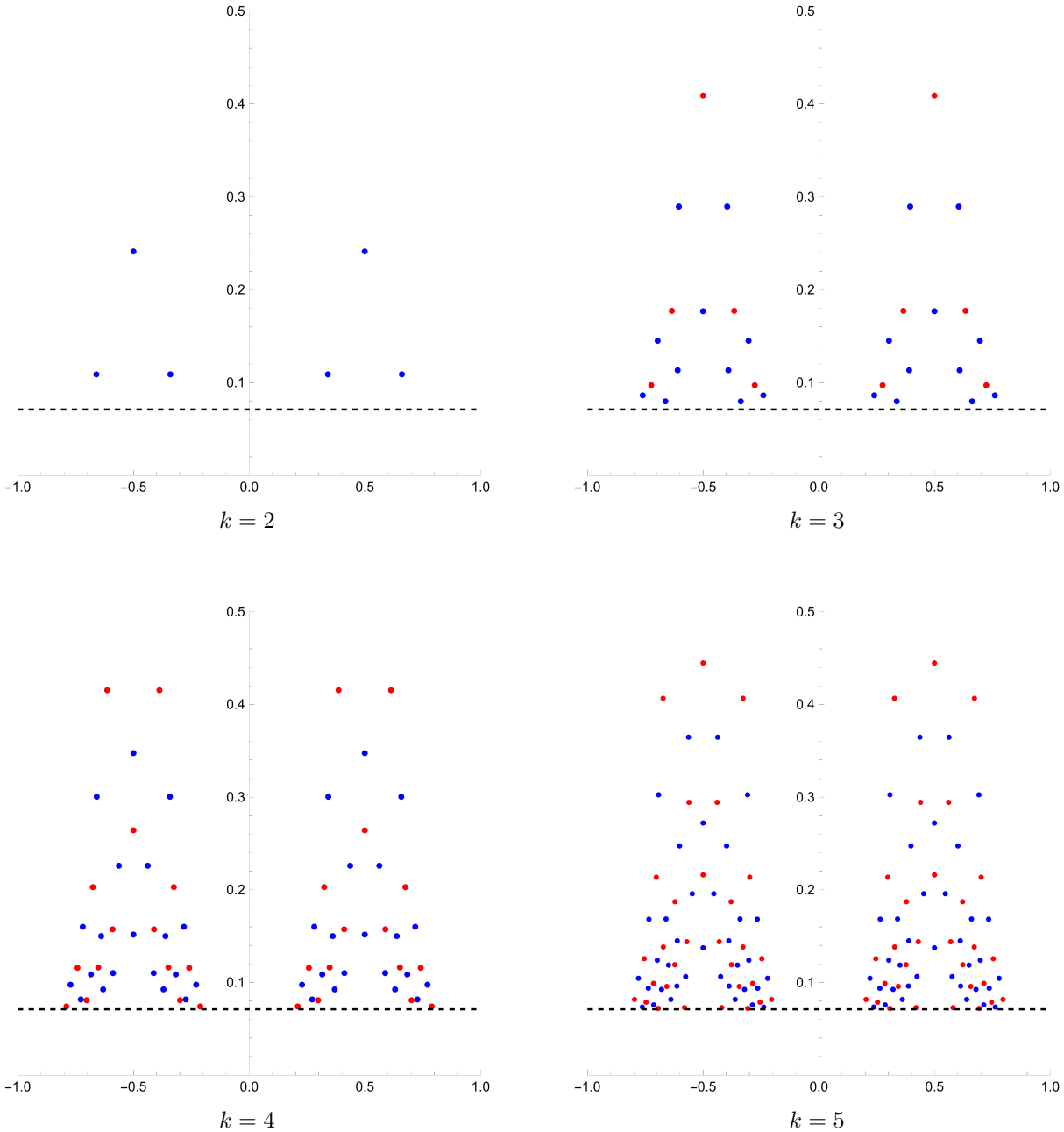


图5。在这些图中，$\Delta_{2k-1}(\tau)$ 和 $\Delta_{2k}(\tau)$ 的零点分布分别以红色和蓝色显示，取 $k = 2,3,4,5$，定义域由 $-1 \leq \Re\,\tau \leq 1$ 和 $\Im\,\tau \geq \frac{1}{\pi}\log(\frac{5}{4}) \approx 0.071$ 给出。此外，每幅图中的虚线均为直线 $\Im\,\tau = \frac{1}{\pi}\log(\frac{5}{4})$。

注2.2。从 (2.2) 出发，对奇数情形进行类似的计算即可：

$$\nu_{2i+3,2j+3} = \int_{\frac{\tau}{2}}^{1+\frac{\tau}{2}} (\wp'(z))^2 \wp(z)^{i+j} dz = \oint_{cycle} y x^k dx \tag{2.41}$$

按照 (2.35) 中的变量变换。经过直接计算，我们得到

$$\nu_{2k+3} = 4\nu_{2k+6} - g_2\nu_{2k+4} - g_3\nu_{2k}. \tag{2.42}$$

奇数阶矩的行列式为

$$\Delta_{2k+3} := \begin{vmatrix} \nu_3 & \nu_5 & \dots & \nu_{2k+1} \\ \nu_5 & \nu_7 & \dots & \nu_{2k+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu_{2k+1} & \nu_{2k+3} & \dots & \nu_{4k-1} \end{vmatrix}.$$

我们在图5中用红色绘出了前几个奇数阶汉克尔行列式的零点分布。

注意，对于 $k \geq 0$， Δ_{2k} 和 Δ_{2k+1} 是汉克尔行列式。然而，行列式 D_n通常不是汉克尔行列式，但其奇数阶矩和偶数阶矩呈棋盘格模式，从而可以分解为

$$D_n = \Delta_n\Delta_{n+1}, \qquad\qquad n \geq 2.$$

2.4. 偶数情形的黎曼-希尔伯特问题。 如果权函数在 γ 上为偶函数，即方程 (1.5) 成立，则正交多项式序列分为两列，分别为偶椭圆正交多项式和奇椭圆正交多项式，并且我们可以为偶多项式 π_{2k}, $k \geq 0$ 定义一个相应的 RHP。奇数情形的分析与偶数情形类似，因此我们将分析限制在偶数情形。

Ana与 RHP 1 类似，偶多项式 π_{2k} 作为解的 1,1 元出现 n

$$Y_{2k}(z,\tau) = \begin{pmatrix} \pi_{2k}(z) & \mathcal{C}(\pi_{2k}\mathsf{w})(z) \\ \frac{2\pi i}{h_{2k-2}}\pi_{2k-2}(z) & \frac{2\pi i}{h_{2k-2}}\mathcal{C}(\pi_{2k-2}\mathsf{w})(z) \end{pmatrix}, \qquad k \geq 1, \tag{2.43}$$

满足以下 RHP。

黎曼-希尔伯特问题 2。

- 函数 $Y_{2k}(z,\tau)$ 在 $\mathbb{T}\setminus(\gamma\cup\{0\})$ 上分段解析 ,
- 对于 $z \in \gamma$，以下跳跃条件成立

$$Y_{2k,+}(z,\tau) = Y_{2k,-}(z,\tau)\begin{pmatrix} 1 & \mathsf{w}(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.44}$$

- 并且在极限 $z \to 0$ 下，

$$Y_{2k}(z,\tau) = (\mathbb{1} + \mathcal{O}(z))\begin{pmatrix} z^{-2k} & 0 \\ 0 & z^{2k-3} \end{pmatrix}. \tag{2.45}$$

与定理2.1类似，当且仅当偶矩的 Hankel 行列式 $\Delta_{2k}(\tau) \neq 0$ 时，RHP 2 可解。

仿照一般多项式的分析，我们先考察偶多项式及其柯西变换的渐近行为。

引理 2.4。 当 $z \to 0$ 时，多项式

$$\pi_{2k}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_{i,2k}}{z^{2(k-i)}}, \qquad a_{0,2k} = 1, \tag{2.46}$$

及其柯西变换

$$\mathcal{C}(\pi_{2k})(z) = \frac{h_{2k}}{2\pi i}\sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{a}_{i,2k} z^{2(k+i)-1}, \qquad \widetilde{a}_{0,2k} = 1, \qquad \widetilde{a}_{1,2k} = -a_{1,2k+2}. \tag{2.47}$$

证明。 证明与引理 2.2 相同。 □

引理 2.5. Y_{2k} 的行列式为

$$\det Y_{2k}(z,\tau) = -\frac{\wp'(z)}{2}. \tag{2.48}$$

证明。 考虑 RHP 2 的解的行列式 $\det Y_{2k}(z)$。注意，$\det Y_{2k}(z)$ 沿 γ 具有平凡跳跃，因此可延拓为一个仅在 $z=0$ 处有极点的椭圆函数。此外，由 $Y_{2k}(z)$ 的渐近行为可知，

$$\det Y_{2k}(z) = z^{-3}(1+\mathcal{O}(z)) \qquad (z\to 0).$$

最后请注意，$Y_{2k}(-z)\sigma_3$ 也满足 RHP 2，因此 $Y_{2k}(z) = Y_{2k}(-z)\sigma_3$，且 $\det Y_{2k}(-z) = -\det Y_{2k}(z)$。至此，我们证明了 $\det Y_{2k}(z)$ 是一个三次奇椭圆首一多项式。这样的多项式只有一个，即 $-\frac{1}{2}\wp'(z)$。引理得证。□

3. 一般情形的线性问题与递推关系

在本节中，我们证明一般多项式 π_n 的 RHP 1 的解满足一组线性微分方程和差分方程，而它们的相容条件导出这些多项式的递推关系以及其系数的递归。今后，我们采用以下记号

$$' = \frac{d}{dz}, \qquad \dot{} = \frac{d}{d\tau}$$

命题 3.1. *RHP 的解：1 满足线性差分方程*

$$Y_{n+1} = R_n Y_n, \qquad R_n = \frac{1}{f_n}\begin{pmatrix} -\wp'(z)/2 & -\frac{h_n}{2\pi i}f_{n+1} \\ \frac{2\pi i}{h_n}f_n & 0 \end{pmatrix}, \qquad n\geq 3, \tag{3.1}$$

其中 f_n 是 Y_n (2.25)的行列式。

证明. 我们从 $(n+1)^{th}$ 解 (2.19) 开始

$$Y_{n+1}(z,\tau) = \begin{pmatrix} \pi_{n+1}(z) & \mathcal{C}(\pi_{n+1})(z) \\ \frac{2\pi i}{h_n}\pi_n(z) & \frac{2\pi i}{h_n}\mathcal{C}(\pi_n)(z) \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

并注意到

$$\begin{aligned} Y_{n+1}Y_n^{-1}\det Y_n &= \begin{pmatrix} \pi_{n+1}(z) & \mathcal{C}(\pi_{n+1})(z) \\ \frac{2\pi i}{h_n}\pi_n(z) & \frac{2\pi i}{h_n}\mathcal{C}(\pi_n)(z) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2\pi i}{h_{n-1}}\mathcal{C}(\pi_{n-1})(z) & -\mathcal{C}(\pi_n)(z) \\ -\frac{2\pi i}{h_{n-1}}\pi_{n-1}(z) & \pi_n(z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2\pi i}{h_{n-1}}\left(\pi_{n+1}\mathcal{C}(\pi_{n-1}) - \pi_{n-1}\mathcal{C}(\pi_{n+1})\right) & -\frac{h_n}{2\pi i}\det(Y_{n+1}) \\ \frac{2\pi i}{h_n}\det(Y_n) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

上述表达式中的 11 元素确定如下。在极限 $z\to 0$ 下，

$$\frac{2\pi i}{h_{n-1}}\left(\pi_{n+1}(z)\mathcal{C}(\pi_{n-1})(z) - \pi_{n-1}(z)\mathcal{C}(\pi_{n+1})(z)\right) = \frac{1}{z^3}\left(1+\mathcal{O}(z)\right), \tag{3.4}$$

根据 Y_n、$\det Y_n$ 的周期性，(3.3) 的左端是一个矩阵值椭圆函数。因此，

$$\left(Y_{n+1}Y_n^{-1}\det Y_n\right)_{11} = -\frac{\wp'(z)}{2}. \tag{3.5}$$

上述表达式结合 (2.25) 得到 (3.1)。 □

命题 3.2。 *RHP 的解： 1 Y_n 满足关于 $n\geq 3$ 的以下线性微分方程：*

$$Y_n' = L_n Y_n, \quad L_n = \frac{1}{f_n}\begin{pmatrix} n\wp'(z)/2 & \frac{h_n}{2\pi i}\left((n-1)f_n + nf_{n+1}\right) \\ \frac{2\pi i}{h_{n-1}}\left((2-n)f_{n-1} + (1-n)f_n\right) & (2-n)\wp'(z)/2 \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

证明。将式 (2.19) 中 Y_n 的导数[2] 代入，可得

$$Y_n'Y_n^{-1}\det Y_n = \begin{pmatrix} \pi_n'(z) & \partial_z\mathcal{C}(\pi_n)(z) \\ \frac{2\pi i}{h_n}\pi_n'(z) & \frac{2\pi i}{h_n}\partial_z\mathcal{C}(\pi_n)(z) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2\pi i}{h_{n-1}}\mathcal{C}(\pi_{n-1})(z) & -\mathcal{C}(\pi_n)(z) \\ -\frac{2\pi i}{h_{n-1}}\pi_{n-1}(z) & \pi_n(z) \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

[2]为简洁起见，我们省略对 z,τ 的依赖。

回顾引理 2.2 中以下对象在 $z \to 0$ 附近的渐近行为，同时注意到，在我们的权函数下，多项式分为奇部和偶部,

$$\pi_n(z) = \frac{1}{z^n} + \frac{c_{2,n}}{z^{n-2}} + \dots, \tag{3.8}$$

$$\mathcal{C}(\pi_n)(z) = \frac{h_n}{2\pi i}\left(z^{n-1} + \widetilde{c}_{2,n} z^{n+1} + \dots\right), \tag{3.9}$$

(3.7) 中 11 元素的渐近行为为

$$\left(Y_n' Y_n^{-1} \det Y_n\right)_{11} = -\frac{n}{z^3} - \frac{1}{z}\left(n\widetilde{c}_{2,n-1} + (n-2)c_{2,n} + (n-1)\beta_n\right) + \mathcal{O}(z), \tag{3.10}$$

并且由于左端是一个椭圆函数,

$$\left(Y_n' Y_n^{-1} \det Y_n\right)_{11} = n\frac{\wp'(z)}{2}, \tag{3.11}$$

满足约束

$$n\widetilde{c}_{2,n-1} + (n-2)c_{2,n} + (n-1)\beta_n = 0. \tag{3.12}$$

另请注意,

$$c_{2,n} + \widetilde{c}_{2,n-2} = 0. \tag{3.13}$$

极限 $z \to 0$ 中的 12 元素为

$$\left(Y_n' Y_n^{-1} \det Y_n\right)_{12} = \frac{h_n}{2\pi i}\left(\frac{n}{z^2} + \frac{(n-1)}{z^2} + (2n+1)\widetilde{c}_{2,n} + (2n-3)c_{2,n} + \mathcal{O}(z^2)\right), \tag{3.14}$$

并且我们可以验证 that

$$\begin{aligned}
(n-1)f_n + nf_{n+1} &= (n-1)\left(\wp(z) + c_{2,n} + \widetilde{c}_{2,n-1} - \beta_n\right) + n\left(\wp(z) + c_{2,n+1} + \widetilde{c}_{2,n} - \beta_{n+1}\right) \\
&\overset{(3.12)}{=} \frac{(n-1)}{z^2} + \frac{n}{z^2} + (n-1)c_{2,n} + (n-1)\widetilde{c}_{2,n-1} + n\widetilde{c}_{2,n-1} + (n-2)c_{2,n} \\
&\quad + nc_{2,n+1} + n\widetilde{c}_{2,n} + (n+1)\widetilde{c}_{2,n} + (n-1)c_{2,n+1} \\
&\overset{(3.13)}{=} \frac{(n-1)}{z^2} + \frac{n}{z^2} + (2n-3)c_{2,n} + (2n+1)\widetilde{c}_{2,n}.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

因此,

$$\left(Y_n' Y_n^{-1} \det Y_n\right)_{12} = \frac{h_n}{2\pi i}\left((n-1)f_n + nf_{n+1}\right). \tag{3.16}$$

类似地，21 元素。

$$\left(Y_n' Y_n^{-1} \det Y_n\right)_{21} = \frac{2\pi i}{h_{n-1}}\left(\frac{1-n}{z^2} + \frac{2-n}{z^2} + (5-2n)c_{2,n-1} + (1-2n)\widetilde{c}_{2,n-1} + \mathcal{O}(z^2)\right), \tag{3.17}$$

与之前一样，我们可以看到

$$\begin{aligned}
(2-n)f_{n-1} + (1-n)f_n &= (2-n)\left(\wp(z) + c_{2,n-1} + \widetilde{c}_{2,n-2} - \beta_{n-1}\right) \\
&\quad + (1-n)\left(\wp(z) + c_{2,n} + \widetilde{c}_{2,n-1} - \beta_n\right) \\
&= \frac{(2-n)}{z^2} + \frac{(1-n)}{z^2} + (2-n)c_{2,n-1} + (2-n)\widetilde{c}_{2,n-2} - (2-n)\beta_{n-1} \\
&\quad + (1-n)c_{2,n} + (1-n)\widetilde{c}_{2,n-1} - (1-n)\beta_n \\
&\overset{(3.12)}{=} \frac{(2-n)}{z^2} + \frac{(1-n)}{z^2} + (2-n)c_{2,n-1} + (2-n)\widetilde{c}_{2,n-2} + (1-n)\widetilde{c}_{2,n-2} \\
&\quad + (3-n)c_{2,n-1} + (1-n)c_{2,n} + (1-n)\widetilde{c}_{2,n-1} - n\widetilde{c}_{2,n-1} + (2-n)c_{2,n} \\
&\overset{(3.13)}{=} \frac{(2-n)}{z^2} + \frac{(1-n)}{z^2} + (5-2n)c_{2,n-1} + (1-2n)\widetilde{c}_{2,n-1}.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

因此，

$$\left(Y_n' Y_n^{-1} \det Y_n\right)_{21} = \frac{2\pi i}{h_{n-1}} \left((2-n) f_{n-1} + (1-n) f_n\right). \tag{3.19}$$

最后，我们看到

$$\left(Y_n' Y_n^{-1} \det Y_n\right)_{22} = (2-n) \frac{\wp'(z)}{2}, \tag{3.20}$$

这就完成了命题的证明。 □

上述命题的一个直接推论是，线性方程 (3.6) 的第 11 个元素给出了关于多项式的一个常微分方程。

Cor推论 3.1。 多项式 π_n 满足以下二阶微分方程 n

$$\begin{aligned}\pi_n''(z) = &\left(\frac{\wp'(z)}{f_n} + n \left(\frac{f_{n+1}}{f_n} \right)' \left((n-1) + n \frac{f_{n+1}}{f_n} \right)^{-1} \right) \pi_n' \\ &+ \left(\left(\frac{n\wp'(z)}{2f_n} \right)' - n \left(\frac{f_{n+1}}{f_n} \right)' \frac{n\wp'(z)}{2\left((n-1)f_n + n f_{n+1}\right)} - \det L_n \right) \pi_n.\end{aligned}$$

3.1. 递推关系。 利用上述线性系统，我们首先得到椭圆多项式的递推关系。我们得到

$$\pi_{n+1} = -\frac{\wp' \pi_n}{2f_n} - \frac{\beta_n f_{n+1}}{f_n} \pi_{n-1}, \tag{3.21}$$

这由方程 (3.1) 的第一项得到。注意，(2.25) 中定义的 f_n 取决于 z。再次迭代上述方程，可得到以下定理。

定理 3.1。 多项式 $\{\pi_n\}_{n=4}^{\infty}$ 满足关系式

$$\pi_{n+2} = (\wp - B_n) \pi_n - \beta_n \beta_{n-1} \pi_{n-2}, \tag{3.22}$$

其中，

$$B_n = \beta_{n+1} + \beta_n + \alpha_n + \alpha_{n+1}.$$

此外，

$$-\alpha_n^3 + \frac{g_2}{4}\alpha_n - \frac{g_3}{4} = \beta_n(\alpha_{n-1} - \alpha_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n). \tag{3.23}$$

证明。 通过 $n \pm 1$ 迭代 (3.21)，我们得到

$$\pi_{n+2} = \left(\frac{(\wp')^2}{4(\wp + \alpha_n)(\wp + \alpha_{n+1})} - \beta_{n+1} \frac{\wp + \alpha_{n+2}}{\wp + \alpha_{n+1}} - \beta_n \frac{\wp + \alpha_{n-1}}{\wp + \alpha_n} \right) \pi_n - \beta_n \beta_{n-1} \pi_{n-2}. \tag{3.24}$$

然而，由偶数情形的差分方程 (4.31) 可知，利用方程 π_{n+2} 可以用 π_n 和 π_{n-2} 表示

$$\pi_{n+2} = (\wp - B_n) \pi_n - \beta_n \beta_{n-1} \pi_{n-2}, \tag{3.25}$$

其中 B_n 是一个常数。此外，(3.24) 中第一项在 $z = 0$ 附近的行为给出了如下表达式

$$B_n = \beta_{n+1} + \beta_n + \alpha_n + \alpha_{n+1}.$$

通过考察 (3.24) 在 $\wp + \alpha_n$ 的极点附近的行为，我们进一步确定 t hat

$$-\alpha_n^3 + \frac{g_2}{4}\alpha_n - \frac{g_3}{4} = \beta_n(\alpha_{n-1} - \alpha_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n), \tag{3.26}$$

定理得证。 □

现在我们利用线性系统 (3.1)、(3.6) 的相容条件，得到椭圆多项式系数的递推关系。

定理 3.2。 相容条件

$$R_n' - L_{n+1}R_n + R_nL_n = 0, \tag{3.27}$$

得到以下递推关系：

$$\beta_n = \frac{g_3 - g_2\alpha_n + 4\alpha_n^3}{4(\alpha_{n-1} - \alpha_n)(\alpha_n - \alpha_{n+1})}, \tag{3.28}$$

$$\alpha_{n+1} = \frac{(1-n)\alpha_n\left(4\alpha_n^3 - 3g_2\alpha_n + 4g_3\right) - \alpha_{n-1}\left(4(n-2)\alpha_n^3 + ng_2\alpha_n - (2n-1)g_3\right)}{4n\alpha_n^3 + (n-1)\alpha_{n-1}\left(g_2 - 12\alpha_n^2\right) + g_2(n-2)\alpha_n - g_2(2n-3)}. \tag{3.29}$$

证明。 将 (3.1) 和 (3.6) 代入方程 (3.27)，我们发现只有 (1,1) 项非零，且它是关于 $\wp(z)$ 的三次式。令三次、二次、一次和零次项的系数分别为零，可依次得到以下方程组

$$0 = (n-2)\alpha_n - (n+1)\alpha_{n+1} + (2n-3)\beta_n - (2n+1)\beta_{n+1}, \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned} 3\alpha_n\alpha_{n+1} + \frac{g_2}{2} = {} & ((n-2)\alpha_{n-1} + (n-1)\alpha_n + 2(2n-3)\alpha_{n+1})\beta_n \\ & - ((4n+2)\alpha_n + n\alpha_{n+1} + (n+1)\alpha_{n+2})\beta_{n+1}, \end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned} 3g_3 + g_2n\alpha_n - g_2(n-1)\alpha_{n+1} = {} & 4\alpha_{n+1}(2(n-2)\alpha_{n-1} + 2(n-1)\alpha_n + (2n-3)\alpha_{n+1})\beta_n \\ & - 4\alpha_n((2n+1)\alpha_n + 2n\alpha_{n+1} + 2(n+1)\alpha_{n+2})\beta_{n+1}, \end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned} -\alpha_{n+1}(g_2\alpha_n + g_3(n-2)) + g_3(n+1)\alpha_n = {} & -4(n\alpha_{n+1} + (n+1)\alpha_{n+2})\alpha_n^2\beta_{n+1} \\ & + 4((n-2)\alpha_{n-1} + (n-1)\alpha_n)\alpha_{n+1}^2\beta_n. \end{aligned} \tag{3.33}$$

β_n 的递推式 (3.28) 可由 (3.26) 得出。将 (3.28) 代入 (3.30)，得到一个关于 α_n、α_{n+1} 的三次约束，以及关于 α_{n-1}、α_{n+2} 的一次约束：

$$\alpha_{n+2} = \frac{X}{Y}$$

with

$$\begin{aligned} X = {} & \alpha_{n+1}\left(2g_2(1-2n)\alpha_n + \alpha_{n-1}\left(4(n-2)\alpha_n^2 + 2g_2n + g_2\right) + 4(n-1)\alpha_n^3 + g_3(2n-3)\right) \\ & - g_3(2n+1)(\alpha_{n-1} - \alpha_n) + 4n(\alpha_n - \alpha_{n-1})\alpha_{n+1}^3 - 4(2n-1)(\alpha_{n-1} - \alpha_n)\alpha_n\alpha_{n+1}^2, \\ Y = {} & \alpha_n(4\alpha_n((n-2)\alpha_{n-1} + (n-1)\alpha_n) + g_2(3-2n)) + 4(n+1)(\alpha_{n-1} - \alpha_n)\alpha_{n+1}^2 \\ & + 4(2n-1)\alpha_n(\alpha_n - \alpha_{n-1})\alpha_{n+1} + g_3(2n-3). \end{aligned}$$

利用上述表达式对方程组 (3.30)-(3.33) 进行整理，可得 (3.29)。 □

定理 3.2 中 α_n 的递推关系 (3.29) 的初始条件可直接计算得到：

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= \frac{3g_3 - 4g_2\eta_1}{g_2 - 48\eta_1^2}, \\ \alpha_4 &= \frac{5g_2^3 - 108g_3^2 + 108g_2g_3\eta_1 - 432g_2^2\eta_1^2 + 8640g_3\eta_1^3}{18(3g_3 - 4g_2\eta_1)(g_2 - 48\eta_1^2)}, \end{aligned}$$

这里我们指出，g_2，g_3 和 η_1 的显式公式见附录 A。

4. L偶数情形的线性问题及 Painlevé V 的椭圆形式 I

在本节中，我们将研究范围限定于偶椭圆多项式的情形。首先，我们用 Hankel 行列式表示这些多项式。其次，RHP 的解给出了 Painlevé VI 的椭圆形式的 Lax 对，其中模参数 τ 扮演等单值时间的角色。此外，相应离散线性系统所导出的递推关系提供了 Painlevé VI 方程的椭圆形式的解的一种表述。

4.1. **Painlevé VI 的椭圆形式的 Lax 对。**

定理 4.1. 对于 $k \geq 1$，解 (2.43) 满足以下一对对应于 *Painlevé VI* 的椭圆形式的线性方程。

$$L_{2k}(z,\tau) := Y'_{2k}(z,\tau)Y_{2k}(z,\tau)^{-1} = \sum_{i=1}^{3} \wp'(z)\frac{L^{(i)}_{2k}}{(\wp(z)-e_i)}, \tag{4.1}$$

$$M_{2k}(z,\tau) := \frac{d}{d\tau}Y_{2k}(z,\tau)Y_{2k}(z,\tau)^{-1} = \sum_{i=1}^{3} \frac{L^{(i)}_{2k}(\dot\wp(z)-\dot e_i)}{2(\wp(z)-e_i)}, \tag{4.2}$$

其中，矩阵 $L^{(i)}_{2k}$ 由(4.15)给出。

我们先计算 z 导数，然后计算 τ 导数。

证明。我们采用偶多项式及其柯西变换的以下渐近展开，引理 2.4[3]

$$\pi_{2n} = \frac{1}{z^{2n}} + \frac{a_{1,2n}}{z^{2n-2}} + \frac{a_{2,2n}}{z^{2n-4}} + \mathcal{O}(z^{6-2n}), \tag{4.3}$$

$$\mathcal{C}(\pi_{2n})(z) = \frac{h_{2k}}{2\pi i}\left(z^{2n-1} + \widetilde{a}_{1,2n}z^{2n+1} + \widetilde{a}_{2,2n}z^{2n+3} + \mathcal{O}(z^{2n+5})\right). \tag{4.4}$$

解 Y_{2k} (2.43) 在 $z \to 0$ 附近的主导行为为♀♀♀♀♀♀

$$Y_{2k} = \left(\mathbb{1} + z^2U + z^4V + \mathcal{O}(z^6)\right)\begin{pmatrix} z^{-2k} & 0 \\ 0 & z^{2k-3}\end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

其中

$$U = \begin{pmatrix} a_{1,2k} & \frac{h_{2k}}{2\pi i} \\ \frac{2\pi i}{h_{2k-2}} & \widetilde{a}_{1,2k-2}\end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} a_{2,2k} & \frac{h_{2k}}{2\pi i}\widetilde{a}_{1,2k} \\ \frac{2\pi i}{h_{2k-2}}a_{1,2k-2} & \widetilde{a}_{2,2k-2}\end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

并且由 (2.47) 可知， U, V 是无迹的。因此，在相同的极限下，

$$\begin{aligned} Y'_{2k}Y_{2k}^{-1}\det Y_{2k} = \frac{1}{z^4}\begin{pmatrix} -2k & 0 \\ 0 & 2k-3\end{pmatrix} + \frac{1}{z^2}\left(2U + \left[U, \begin{pmatrix} -2k & 0 \\ 0 & 2k-3\end{pmatrix}\right]\right) \\ + 4V - 2U^2 + \left[V, \begin{pmatrix} -2k & 0 \\ 0 & 2k-3\end{pmatrix}\right] + \mathcal{O}(z^2). \end{aligned} \tag{4.7}$$

注意，上述表达式的左端是一个椭圆函数

$$Y'_{2k}(z+\tau)Y_{2k}(z+\tau)^{-1} = Y'_{2k}(z+1)Y_{2k}(z+1)^{-1} = Y'_{2k}(z)Y_{2k}(z)^{-1}. \tag{4.8}$$

因此，利用 (2.48) 可得

$$Y'_{2k}Y_{2k}^{-1} = \frac{1}{\wp'(z)}\left(\widetilde{L}^{(2)}_{2k}\wp^2(z) + \widetilde{L}^{(1)}_{2k}\wp(z) + \widetilde{L}^{(0)}_{2k}\right), \tag{4.9}$$

其中

$$\widetilde{L}^{(2)}_{2k} = -2\begin{pmatrix} -2k & 0 \\ 0 & 2k-3\end{pmatrix}, \qquad \widetilde{L}^{(1)}_{2k} = -2\left(2U + \left[U, \begin{pmatrix} -2k & 0 \\ 0 & 2k-3\end{pmatrix}\right]\right) \tag{4.10}$$

$$\widetilde{L}^{(0)}_{2k} = -2\left(4V - 2U^2 + \left[V, \begin{pmatrix} -2k & 0 \\ 0 & 2k-3\end{pmatrix}\right]\right), \tag{4.11}$$

and

$$\operatorname{tr}\widetilde{L}^{(1)}_{2k} = 0 \qquad \operatorname{tr}\widetilde{L}^{(0)}_{2k} = -\frac{2h_{2k-2}}{i\pi}\left(\beta_{2k} + a^2_{1,2k}\right). \tag{4.12}$$

此外，利用三次方程

$$\left(\wp'(z)\right)^2 = 4\left(\wp - e_1\right)\left(\wp - e_2\right)\left(\wp - e_3\right), \tag{4.13}$$

[3]在证明余下部分中，我们略去对 z, τ 的依赖。

（4.9）可改写为

$$L_{2k}(z,\tau) := Y'_{2k}Y_{2k}^{-1} = \wp'(z)\left(\frac{L_{2k}^{(1)}}{\wp(z)-e_1} + \frac{L_{2k}^{(2)}}{\wp(z)-e_2} + \frac{L_{2k}^{(3)}}{\wp(z)-e_3}\right), \tag{4.14}$$

满足以下关系

$$\begin{aligned} L_{2k}^{(1)} &= \frac{e_1(1-e_2)\widetilde{L}_{2k}^{(2)} + \widetilde{L}_{2k}^{(0)} - e_1e_3\widetilde{L}_{2k}^{(1)}}{4(e_1-e_2)(e_1-e_3)}, \\ L_{2k}^{(2)} &= \frac{e_2(e_1-1)\widetilde{L}_{2k}^{(2)} + e_2e_3\widetilde{L}_{2k}^{(1)} - \widetilde{L}_{2k}^{(0)}}{4(e_1-e_2)(e_2-e_3)}, \\ L_{2k}^{(3)} &= \frac{\widetilde{L}_{2k}^{(0)} + e_3^2\widetilde{L}_{2k}^{(1)} + e_3(1+2e_3)\widetilde{L}_{2k}^{(2)}}{4(e_1-e_3)(e_2-e_3)}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

现在我们推导 τ 导数。由 (4.1) 可得

$$\partial_z \log Y_{2k}(z,\tau) = \sum_{i=1}^{3} L_{2k}^{(i)} \partial_z \log\left(\wp(z)-e_i\right), \tag{4.16}$$

这意味着 Y_{2k} 在 $z-\frac{\omega_i}{2}\to 0$ 附近具有以下局部行为：

$$Y_{2k}(z,\tau) \sim G_i\left(\wp(z)-e_i\right)^{\Lambda_i}\left(\mathbb{1}+\mathcal{O}(z^2)\right)C_i, \tag{4.17}$$

其中

$$\Lambda_i = G_i^{-1}L_{2k}^{(i)}G_i. \tag{4.18}$$

τ 在 $z=\frac{w_i}{2}$ 附近的导数为

$$\begin{aligned} &\frac{dY_{2k}}{d\tau} = \left(\frac{dG_i}{d\tau}\left(\wp(z)-e_i\right)^{\Lambda_i} + G_i\Lambda_i\left(\wp(z)-e_i\right)^{\Lambda_i-\mathbb{1}}\left(\dot{\wp(z)}-\dot{e}_i\right)\right)\left(\mathbb{1}+\mathcal{O}(z^2)\right)C_i, \\ \Rightarrow &\frac{dY_{2k}}{d\tau}Y_{2k}^{-1} = \frac{dG_i}{d\tau}G_i^{-1} + \frac{L_{2k}^{(i)}\left(\dot{\wp(z)}-\dot{e}_i\right)}{\left(\wp(z)-e_i\right)} + \mathcal{O}(z^4). \end{aligned} \tag{4.19}$$

此外，在 $z=0$ 附近，

$$\dot{Y}_{2k}Y_{2k}^{-1} \sim z^2\left(U+\dot{U}\right) + \mathcal{O}(z^4). \tag{4.20}$$

因此，利用刘维尔定理，我们可以唯一确定

$$\frac{dY_{2k}}{d\tau}Y_{2k}^{-1} =: M_{2k}(z,\tau) = \sum_{i=1}^{3}\frac{L_{2k}^{(i)}\left(\dot{\wp}(z)-\dot{e}_i\right)}{\left(\wp(z)-e_i\right)}, \tag{4.21}$$

并且满足以下周期性关系

$$M_{2k}(z+1,\tau) = M_{2k}(z+,\tau), \qquad M_{2k}(z+\tau,\tau) = M_{2k}(z,\tau) + L_{2k}(z,\tau). \tag{4.22}$$

□

矩阵 L_{2k}、M_{2k} 实际上是 Painlevé VI 的椭圆形式 [Tak01], 的 Lax 对，通过变量变换可将其化为通常的 Lax 对，正如命题 4.3 将要证明的那样。此外，我们可以计算 L_{2k} 的留数矩阵的特征值，由于 Y_{2k} (2.48) 的行列式具有特定形式，这些特征值为以下数值。

在下文中，将线性系统 (4.1) 化为无迹形式会很有用。为此，我们首先注意到 $L_{2k}(z)$ (4.1) 是一个椭圆矩阵函数，其迹可利用雅可比公式求得：

$$\operatorname{tr} L_{2k}(z) = \frac{d}{dz}\log\det Y_{2k}(z) = \frac{\wp''(z)}{\wp'(z)},$$

其中使用了行列式（2.48）

$$\det Y_{2k}(z) = -\tfrac{1}{2}\wp'(z) = f_{2k}. \tag{4.23}$$

现在我们使用以下规范变换，以得到一个无迹线性系统 :

$$\mathcal{Y}_{2k}(z) = f_{2k}^{-\frac{1}{2}} Y_{2k}(z), \tag{4.24}$$

因此

$$\mathcal{Y}'_{2k}(z) = \mathcal{L}_{2k}(z)\mathcal{Y}_{2k}(z), \qquad \mathcal{L}_{2k}(z) = L_{2k}(z) - \frac{\wp''(z)}{2\wp'(z)}\mathbb{1}, \tag{4.25}$$

命题 4.1. 线性系统 (4.25)在奇点 ω_i周围的单值化指数为 $\pm\theta_i$ ，在奇点 $z=0$ 周围的单值化指数为 $\pm\theta_0$ ，即

$$\theta_0 = \frac{1}{2}(4k-3), \qquad \theta_i = \frac{1}{2}, \qquad i = 1,2,3, \tag{4.26}$$

而 $k=1$ 是与自对偶爱因斯坦度量 *[Tod94; Hit95]*相关的情形。

证明。 我们从 $z \to 0$处 $\mathcal{Y}_{2k}$ 的行为入手:

$$\mathcal{Y}_{2k} = (\mathbb{1} + \mathcal{O}(z)) \begin{pmatrix} z^{-2k} & 0 \\ 0 & z^{2k-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^{3/2} & 0 \\ 0 & z^{3/2} \end{pmatrix}, \tag{4.27}$$

因此， $z=0$ 周围的单值化指数为 $\pm\frac{1}{2}(4k-3)$，可由渐近展开式 (4.5) 得出。系数矩阵在 $z = w_1, w_2, w_1+w_2, 0$处有简单极点，它们来自项 $\wp'(z)$。现在我们确定奇点处留数矩阵的特征值。 $\mathcal{Y}_{2k}(z)$在 $z = w_i$, i =1,2,3附近的渐近行为为

$$\mathcal{Y}_{2k}(z) = c^{-\frac{1}{2}}(z-w_1)^{-\frac{1}{2}} Y_{2k}(w_1)(I + \mathcal{O}(z-w_1)),$$

作为某个 $c \neq 0$ 的 $f_{2k} = (z-w_i)(c+\mathcal{O}(z-w_i))$。此外，(4.23) 表明 $\det Y_{2k}(w_i)$ 为零，因此 $Y_{2k}(w_i)$ 是一个秩为一的矩阵，可以表示为

$$Y_{2k}(w_i)C = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & * \end{pmatrix},$$

其中第二列非零，且 C 是一个常数矩阵。于是我们得到，对于 $z \to w_i$,

$$\mathcal{Y}_{2k}(z)C = U_0(\mathbb{1} + \mathcal{O}(z-w_i))(z-w_i)^{\frac{1}{2}\sigma_3}, \qquad U_0 \in SL_2(\mathbb{C})$$

as $z \to w_i$，对于一个矩阵。因此，绕 $z = w_i$ 的单值化指数为 $\pm\frac{1}{2}$ -. □

我们将在下文（由 (4.46)）看到， $L_{2k}(z)$ 的 (1,2) 项的唯一零点为 $z = Q(\tau)$，其中 $Q(\tau)$ 满足 Painlevé VI 的椭圆形式 [Tak01] 在当前情形下写为

$$(2\pi i)^2 \frac{d^2Q(\tau)}{d\tau^2} = \sum_{i=0}^{3} \alpha_i \wp'(Q(\tau) + w_i), \tag{4.28}$$

其中 $w_0 = 0$，并且

$$\alpha_0 = \frac{(\theta_0-1)^2}{2} = \frac{(4k-5)^2}{8}, \quad \alpha_1 = -\frac{\theta_1^2}{2} = -\frac{1}{8}, \quad \alpha_2 = \frac{\theta_3^2}{2} = \frac{1}{8}, \quad \alpha_3 = \frac{\left(1-\theta_2^2\right)}{2} = \frac{3}{8}. \tag{4.29}$$

对于 $k=1$ ，这是 Hitchin 情形 [Hit95；Man98], ，相应的解 $Q = Q(\tau)$ 给出为

$$\wp(Q(\tau)) = e_1 + e_2 + 2\frac{16\eta_1^3 + g_2\eta_1 - g_3}{48\eta_1^2 - g_2}. \tag{4.30}$$

该公式由方程 (5.3) 得出。

我们以 Y_{2k} 的一个递推公式结束本小节。

命题 4.2。 矩阵函数 $Y = Y_{2k}$ 满足关于 k 的以下离散演化，

$$Y_{2k+2} = R_{2k}Y_{2k}, \qquad R_{2k} := \begin{pmatrix} \wp(z) + a_{1,2k+2} - a_{1,2k} & -\frac{h_{2k}}{2\pi i} \\ \frac{2\pi i}{h_{2k}} & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.31}$$

对于 $k \geq 1$。

证明。 证明与命题 3.1 类似，只需将引理 2.4 和 2.5 中的表达式直接代入 (2.43) 即可。□

由上述命题，我们得到以下关于正交多项式的三项递推关系，

$$\wp(z)\pi_{2k} = \pi_{2k+2} + \widetilde{\alpha}_{2k}\pi_{2k} + \beta_{2k}\pi_{2k-2}, \tag{4.32}$$

如利用关系式 (2.26)、(2.12) 和 (2.47) 可知，该式与 (3.22) 一致。

4.2. **与 Painlevé VI 的关系**。在同时变换因变量和自变量的情况下，

$$t = \frac{e_3 - e_1}{e_2 - e_1}, \qquad\qquad u(t) = \frac{\wp(Q(\tau)) - e_1}{e_2 - e_1}, \tag{4.33}$$

Painlevé VI 的椭圆形式 (4.28) 化简为通常形式 [Tak01]

$$\begin{aligned}\ddot{u} = &\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{u-1} + \frac{1}{u-t}\right)\frac{\dot{u}^2}{2} - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{u-t}\right)\dot{u} \\ &+ \frac{u(u-1)(u-t)}{2t^2(t-1)^2}\left((2k-\tfrac{1}{2})^2 - \frac{t}{4u^2} + \frac{(t-1)}{4(u-1)^2} + \frac{3t(t-1)}{4(u-t)^2}\right),\end{aligned}$$

其中 $u \equiv u_k(t)$, $\dot{}$表示对 t 的导数。

本节推导 Lax 对的相应变换。

命题 4.3。 变量变换

$$x = \frac{\wp(z) - e_1}{e_2 - e_1}, \qquad t = \frac{e_3 - e_1}{e_2 - e_1}, \qquad \widetilde{Y}_{2k}(x,t) = \mathcal{Y}_{2k}(z,\tau)\,(e_1 - e_2)^{-(k-\frac{3}{4})\,\sigma_3}, \tag{4.34}$$

将定理 *4.1* 中的线性系统变换为以下4点 *Fuchs* 系统，其奇点 w_1、 w_2、 w_3、0 分别映射到0、1、 t、 ∞，相应的变形方程为，

$$\frac{d\widetilde{Y}_{2k}}{dx} = A_{2k}\widetilde{Y}_{2k}, \quad \frac{d\widetilde{Y}_{2k}}{dt} = B_{2k}\widetilde{Y}_{2k}, \tag{4.35}$$

with

$$A_{2k}(x,t) = \frac{A^{(1)}_{2k}}{x} + \frac{A^{(2)}_{2k}}{x-1} + \frac{A^{(3)}_{2k}}{x-t}, \qquad B_{2k}(x,t) = -\frac{A^{(3)}_{2k}}{x-t},$$

且上述系数矩阵与 $\mathcal{L}_{2k}$ 的关系为

$$A^{(i)}_{2k} = (e_2 - e_1)^{(4k-3)\sigma_3/4}\,\mathcal{L}^{(i)}_{2k}\,(e_2 - e_1)^{-(4k-3)\sigma_3/4}, \qquad i = 1,2,3. \tag{4.36}$$

$\widetilde{}$特别地，关于 x， $Y_{2k}(x,t)$的单值化在 t中为常数。

证明。 线性系统 (4.25)：

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{Y}_{2k}(z,\tau) = \wp'(z)\left(\frac{\mathcal{L}^{(1)}_{2k}(\tau)}{\wp(z) - e_1} + \frac{\mathcal{L}^{(2)}_{2k}(\tau)}{\wp(z) - e_2} + \frac{\mathcal{L}^{(3)}_{2k}(\tau)}{\wp(z) - e_3}\right)\mathcal{Y}_{2k}(z,\tau)$$

在变量变换 (4.34) 下写为

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{Y}_{2k}(x,t) = \left(\frac{\mathcal{L}^{(1)}_{2k}(t)}{x} + \frac{\mathcal{L}^{(2)}_{2k}(t)}{x-1} + \frac{\mathcal{L}^{(3)}_{2k}(t)}{x-t}\right)\mathcal{Y}_{2k}(x,t). \tag{4.37}$$

现在让我们来理解方程 (4.2) τ 在规范变换 (4.24) 之后的变量变换：

$$\frac{d}{d\tau}\mathcal{Y}_{2k}(z,\tau) = \left(\sum_{i=1}^{3}\frac{(\dot{\wp}(z) - \dot{e}_i)\mathcal{L}^{(i)}_{2k}}{(\wp(z) - e_i)}\right)\mathcal{Y}_{2k}(z,\tau). \tag{4.38}$$

我们首先简化右侧的求和。为此，我们注意到， x 在方程 (4.34) 中的定义以及 $\frac{dx}{d\tau}=0$ 这一事实意味着

$$\dot{\wp}(z)=\frac{(\wp(z)-e_1)\,\dot{e}_2-(\wp(z)-e_2)\,\dot{e}_1}{e_2-e_1}.$$

由上述方程和恒等式 $e_1+e_2+e_3=0$，我们得到以下关系

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{\wp}(z)-\dot{e}_1}{\wp(z)-e_1}&=\frac{\dot{e}_2-\dot{e}_1}{e_2-e_1},\\
\frac{\dot{\wp}(z)-\dot{e}_2}{\wp(z)-e_2}&=\frac{\dot{e}_2-\dot{e}_1}{e_2-e_1},\\
\frac{\dot{\wp}(z)-\dot{e}_3}{\wp(z)-e_3}&=\frac{\dot{e}_2-\dot{e}_1}{e_2-e_1}-3\frac{e_1\dot{e}_2-\dot{e}_1e_2}{(e_2-e_1)(\wp(z)-e_3)}.
\end{aligned}$$

利用上述恒等式，我们可以将方程右侧的和表示为关于 x 的有理式，得到 (4.38)

$$\frac{d}{d\tau}\mathcal{Y}_{2k}(x,\tau)\mathcal{Y}_{2k}(x,\tau)^{-1}=\left(\mathcal{L}_{2k}^{(1)}+\mathcal{L}_{2k}^{(2)}+\mathcal{L}_{2k}^{(3)}\right)\frac{(\dot{e}_2-\dot{e}_1)}{e_2-e_1}-\frac{3\mathcal{L}_{2k}^{(3)}\,(e_1\dot{e}_2-e_2\dot{e}_1)}{\left(x-\left(\frac{e_3-e_1}{e_2-e_1}\right)\right)(e_2-e_1)^2},\quad(4.39)$$

其中

$$\mathcal{L}_{2k}^{(1)}+\mathcal{L}_{2k}^{(2)}+\mathcal{L}_{2k}^{(3)}=\frac{1}{4}(4k-3)\sigma_3,\quad(4.40)$$

由 (4.15) 以及规范变换 (4.25) 可知。现在我们注意到，规范变换

$$\widetilde{Y}:=\mathcal{Y}_{2k}\,(e_1-e_2)^{-(4k-3)\,\sigma_3/4},\quad(4.41)$$

消去了 (4.39) 中的常数项，得到

$$\frac{d}{d\tau}\widetilde{Y}(x,\tau)\widetilde{Y}(x,\tau)^{-1}=-\frac{3\,(e_1\dot{e}_2-e_2\dot{e}_1)}{(e_2-e_1)^2}\frac{A_{2k}^{(3)}}{\left(x-\left(\frac{e_3-e_1}{e_2-e_1}\right)\right)}.\quad(4.42)$$

利用变量变换 $\tau\to t$ 得到的下述恒等式

$$\frac{dt}{d\tau}=3\frac{(\dot{e}_2e_1-\dot{e}_1e_2)}{(e_2-e_1)^2}\quad(4.43)$$

意味着

$$\frac{d}{dt}\widetilde{Y}(x,t)\widetilde{Y}(x,t)^{-1}=-\frac{A_{2k}^{(3)}(t)}{(x-t)}.\quad(4.44)$$

此外，经过规范变换 (4.41) 的 (4.37) 与 (4.36) 是

$$\frac{d}{dx}\widetilde{Y}(x,t)\widetilde{Y}(x,t)^{-1}=\frac{A_{2k}^{(1)}}{x}+\frac{A_{2k}^{(2)}}{x-1}+\frac{A_{2k}^{(3)}}{x-t}.\quad(4.45)$$

至此，命题得证。 □

注意到下列有理矩阵是无迹的，

$$A_{2k}^{(1)}+A_{2k}^{(2)}+A_{2k}^{(3)}=-\frac{\theta_0}{2}\sigma_3,\quad\theta_0:=\tfrac{3}{2}-2k,$$

and

$$|A_{2k}^{(i)}|=-\frac{\theta_i^2}{4},\quad\theta_i\equiv\theta=\frac{1}{2}\qquad(i=1,2,3),$$

这可由命题 4.1 和 (4.36) 得出。引入标准坐标 $(u_k,\ v_k,\ g_k)$，例如参见 [JM81], 通过

$$(A_{2k})_{12}(x,t) = -\theta_0 g_k \frac{x-u_k}{2x(x-t)(x-1)}, \tag{4.46}$$
$$(A_{2k})_{11}(x,t) = v_k - \frac{\theta}{2}\left(\frac{1}{u_k} + \frac{1}{u_k-t} + \frac{1}{u_k-1}\right),$$

我们得到 $u \equiv u_k$ 和 $v \equiv v_k$ 满足以下方程。

$$t(t-1)\dot{u} = -\tfrac{1}{2}t + u\left(t - \tfrac{1}{2}u + 2p(u-t)(u-1)\right), \tag{4.47}$$
$$t(t-1)\dot{v} = \tfrac{3}{16} + \frac{\theta_0}{4}(\theta_0-2) - tv(1+v) + vu + 2(1+t)v^2u - 3v^2u^2, \tag{4.48}$$

且 $g(t) = g_k(t)$ 是解。

$$\frac{g_k'(t)}{g_k(t)} = (1-4k)\frac{u(t)-t}{2t(t-1)}. \tag{4.49}$$

注意，在变量变换 (4.33) 下，由 (4.46) 可知 $(\mathcal{L}_{2k})_{12}$ 的零点为 $z = Q(\tau)$。

5. Painlevé VI τ 函数与 Hankel 行列式

在本节中，我们将用方程 (2.31) 中定义的矩的 Hankel 行列式，求出式 (4.46) 中引入的 Painlevé VI 解 u_k 的显式公式。为此，我们计算 RHP 2 解在 $z=\infty$ 附近展开时的前几个矩阵系数。

引理 5.1。 解 *RHP 2* 在 $z=0$ 附近的渐近展开可写为

$$Y_{2k}(z) = \left(\mathbb{1} + \wp(z)^{-1}U + \wp(z)^{-2}V + \mathcal{O}(\wp(z)^{-3})\right)\begin{pmatrix}\wp(z)^k & 0\\ 0 & \wp(z)^{-k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\wp'(z)\end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

其中，矩阵 U 和 V 由下式明确给出

$$U = \begin{pmatrix} -\frac{\Gamma_{2k}}{\Delta_{2k}} & \frac{\Delta_{2k+2}}{2\pi i\Delta_{2k}} \\ \frac{2\pi i\Delta_{2k-2}}{\Delta_{2k}} & +\frac{\Gamma_{2k}}{\Delta_{2k}}\end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} \frac{\Lambda_{2k}}{\Delta_{2k}} & \frac{\Gamma_{2k+2}}{2\pi i\Delta_{2k}} \\ -\frac{2\pi i\Gamma_{2k-2}}{\Delta_{2k}} & \mathsf{v}_{22}\end{pmatrix},$$

with

$$\mathsf{v}_{22} = \frac{\Gamma_{2k}^2}{\Delta_{2k}^2} + \frac{\Delta_{2k-2}\Delta_{2k+2}}{\Delta_{2k}} - \frac{\Lambda_{2k}}{\Delta_{2k}}.$$

证明。 回顾 RHP 2 的显式且唯一的解 $Y_{2k}(z)$，其定义见方程 (2.43)。注意到，$Y(z) = Y_{2k}(-z)\sigma_3$也满足 RHP 中的所有条件，因此

$$Y_{2k}(z) = Y_{2k}(-z)\sigma_3.$$

由此对称性可知，$Y_{2k}(z)$可按引理所示展开为 $\wp(z)$ 的幂级数。

下面计算系数矩阵 U 和 V。$\mathsf{u}_{11}, \mathsf{v}_{11}, \mathsf{u}_{21}$ 和 v_{21} 的表达式可直接由方程 (2.33) 中相应正交多项式的展开得到。接下来，根据方程 (2.12)，有

$$\mathcal{C}(\pi_{2k})(z) = \frac{h_{2k}}{2\pi i}z^{2k-1}(1+\mathcal{O}(z^2)),$$

fro由此得到 u_{12}的表达式。最后，注意到 $|Y_{2k}(z)| = -\frac{1}{2}\wp'(z)$意味着 –

$$|\mathbb{1} + \wp(z)^{-1}U + \wp(z)^{-2}V| = 1 + \mathcal{O}(\wp(z)^{-3})$$

作为 $z\to 0$，这等价于

$$\operatorname{Tr} U = 0, \quad \operatorname{Tr} V + |U| = 0,$$

这也可由 (4.5) 看出。(4.6)。u_{22} 和 v_{22} 的表达式可由上述两个方程得到。□

~由 $Y_{2k}(z)$ 的渐近展开 (5.1) 可知， $Y_{2k}(x)$ 在 $x=\infty$ 附近具有如下形式的展开

$$\begin{aligned}
&\widetilde{Y}_{2k}(x) = \Psi_{2k}(x)G(x),\\
&\Psi_{2k}(x) = I + x^{-1}\widetilde{U} + x^{-2}\widetilde{V} + \mathcal{O}(x^{-3}),\\
&G(x) := x^{(k-\frac{3}{4})\sigma_3}\left(1+\frac{e_2}{(e_1-e_2)x}\right)^{k\,\sigma_3}((1-t/x)(1-1/x))^{-\frac{1}{4}\sigma_3},
\end{aligned}$$

其中

$$\widetilde{U} = \frac{U}{e_1-e_2}, \qquad \widetilde{V} = \frac{V-e_2\,U}{(e_1-e_2)^2}.$$

现在，根据 方程 (4.45)，我们可以用 $\Psi_{2k}(x)$ 表示系数矩阵 $A_{2k}(x)$，其 s 如下 ，

$$\widetilde{A}_{2k}(x) = \Psi'_{2k}(x)\Psi_{2k}(x)^{-1} + \Psi_{2k}(x)G'(x)G(x)^{-1}\Psi_{2k}(x)^{-1}. \tag{5.2}$$

该表达式使我们能够计算方程 (4.46) 中引入的坐标 (u_k, v_k, g_k)。事实上，通过对方程 (5.2) 的右端在 $x=\infty$ 附近进行展开，我们可以得到其 (1,2) 元素的如下展开式，

$$\begin{aligned}
(\widetilde{A}_{2k})_{12}(x) &= -\tfrac{1}{2}(4k-1)\widetilde{\mathrm{u}}_{12}x^{-2} + \tfrac{1}{2}s\,x^{-3} + \mathcal{O}(x^{-4}),\\
s &:= -(4k+1)t - (4k-3)\widetilde{\mathrm{u}}_{11}\widetilde{\mathrm{u}}_{12} + \left(1+t+4k\frac{e_2}{e_1-e_2}\right)\widetilde{\mathrm{u}}_{12}.
\end{aligned}$$

将此渐近展开与方程 (4.46) 进行比较，并回想起。

$$e_1 - e_2 = 4\mathcal{K}(t)^2,$$

其中 $\mathcal{K}(t)$ 是第一类完全椭圆积分（见附录 A），我们得到

$$u_k(t) = \frac{1}{4\mathcal{K}(t)^2}\left(\frac{2k-3}{2k-1}\frac{\Gamma_{2k}}{\Delta_{2k}} - \frac{2k+1}{2k-1}\frac{\Gamma_{2k+1}}{\Delta_{2k+1}}\right) + \frac{1+t}{3}, \tag{5.3}$$

$$g_k(t) = -\frac{(2k-1)}{4\pi i(2k-3)}\mathcal{K}(t)^{1-2k}h_{2k}(t). \tag{5.4}$$

现在我们可以证明以下定理。

定理 5.1. 对于 $k \geq 0$,

$$u_k(t) = \frac{2t(t-1)}{2k-1}\left(\frac{\dot{\Delta}_{2k}(t)}{\Delta_{2k}(t)} - \frac{\dot{\Delta}_{2k+2}(t)}{\Delta_{2k+2}(t)}\right) + 1 - \frac{\mathcal{E}(t)}{\mathcal{K}(t)}, \tag{5.5}$$

求解 P_{VI}，其中 $\mathcal{K}$（t）和 $\mathcal{E}$（t）分别表示第一类和第二类完全椭圆积分（见附录 A），参数值为

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \tfrac{1}{2}, \quad \theta_0 = \tfrac{1}{2}(3-2k).$$

<escape>证明。 回顾 $\Delta_0(t) = \Delta_2(t) = 1$ 和</escape>

$$\Delta_4(t) = \tfrac{16}{3}\mathcal{K}(t)^2((t-1)\mathcal{K}(t)^2 - 2(t-2)\mathcal{K}(t)\mathcal{E}(t) - 3\mathcal{E}(t)^2),$$

可以通过直接计算验证,

$$u_0(t) = 1 - \frac{\mathcal{E}(t)}{\mathcal{K}(t)}, \tag{5.6a}$$

$$u_1(t) = 1 - \frac{\mathcal{E}(t)}{\mathcal{K}(t)} - \frac{2t(t-1)}{3}\frac{\dot{\Delta}_4(t)}{\Delta_4(t)}, \tag{5.6b}$$

对定理中所示的参数值求解 P_{VI}。

现在，假设 $k \geq 2$。将规范因子 $g_k(t)$ 的微分方程（方程 (4.49)）与 $g_k(t)$ 关于 $h_{2k}(t)$ 的显式表达式（方程 (5.4)）结合起来，我们得到

$$\frac{\dot{h}_{2k}(t)}{h_{2k}(t)} = -\frac{(2k-1)}{2t(t-1)}\left(\frac{\mathcal{E}(t)}{\mathcal{K}(t)} + u_k(t) - 1\right).$$

求解该方程可得 $u_k(t)$，再利用方程 (2.32)，即可得到定理中给出的 $u_k(t)$ 的表达式。由于我们已经知道 $u_k(t)$ 满足 Painlevé VI，因此定理得证。□

5.1. **Painlevé VI τ-函数**。 与线性系统（4.35）对应的 Painlevé VI τ 函数 $\mathcal{T}_k(t)$ 可定义为

$$\zeta_k(t) = t(t-1)\frac{d}{dt}\log \mathcal{T}_k(t), \tag{5.7}$$

相差一个乘法常数，其中

$$\begin{aligned}\zeta_k =& (t-1)\operatorname{Tr} A_2A_3 + t\operatorname{Tr} A_1A_3\\ =& u_k(u_k-t)(u_k-1)v_k^2 - \tfrac{1}{2}(t-2(1+t)u_k+3u_k^2)v_k\\ & - \tfrac{1}{2}k(2k-3)u_k + \tfrac{1}{4}(4k^2-6k+1)t - \tfrac{1}{8}.\end{aligned} \tag{5.8}$$

它是在挖孔球面 $\mathbf{CP}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$ 的万有覆盖空间上的解析函数，并满足常微分方程。

$$(t(t-1)\ddot{\zeta}(t))^2 = -2\begin{vmatrix} \frac{1}{8} & t\dot{\zeta}-\zeta & \frac{3}{8}-\frac{1}{4}\theta_0^2+\dot{\zeta} \\ t\dot{\zeta}-\zeta & \frac{1}{8} & (t-1)\dot{\zeta}-\zeta \\ \frac{3}{8}-\frac{1}{4}\theta_0^2+\dot{\zeta} & (t-1)\dot{\zeta}-\zeta & \frac{1}{8}\end{vmatrix}.$$

在以下定理中，我们给出 $\mathcal{T}_k(t)$ 的显式表达式。

定理 5.2. 对于 $k \geq 0$,

$$\mathcal{T}_k(t) = t^{\frac{1}{8}}(1-t)^{\frac{1}{8}}(2\mathcal{K}(t))^{-n(2k-3)}\Delta_{2k}(t). \tag{5.9}$$

证明。 为了证明该定理，只需推导出 $\zeta_k(t)$ 的以下表达式

$$\zeta_k(t) = t(t-1)\frac{\dot{\Delta}_{2k}(t)}{\Delta_{2k}(t)} + \frac{1}{2}(2k)(2k-3)\left(\frac{\mathcal{E}(t)}{\mathcal{K}(t)} + t - 1\right) + \frac{1}{8}(2t-1). \tag{5.10}$$

对于 $k \geq 0$。我们将用归纳法证明此表达式。

我们先处理 $k = 0$ 和 $k = 1$ 的情形。回顾方程（5.6）中 u_0 和u_1 的显式表达式。利用方程（4.47），我们得到 v_0 和 v_1 的相应表达式如下,

$$\begin{aligned} v_0(t) &= 0,\\ v_1(t) &= -\frac{3\Delta_4(t)}{32\mathcal{K}(t)\mathcal{E}(t)(\mathcal{K}(t)-\mathcal{E}(t))((1-t)\mathcal{K}(t)-\mathcal{E}(t)},\end{aligned}$$

因此 接着，利用方程（5.8），我们得到 $\zeta_0(t)$ 和 $\zeta_1(t)$ 的以下表达式

$$\begin{aligned}\zeta_0(t) &= \tfrac{1}{8}(2t-1),\\ \zeta_1(t) &= \tfrac{1}{8}(2t-1) - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\mathcal{E}(t)}{\mathcal{K}(t)} + t - 1\right).\end{aligned}$$

这表明方程（5.10）对 $k = 0$,1 成立。

接下来，我们推导关于 $\zeta_k(t)$的递归方程。为此，我们注意到命题 4.2 中的~递推关系可转化为关于 $Y_{2k}(x,t)$ 的以下递推关系,

$$\widetilde{Y}_{2k+2}(x,t) = R_{2k}(x,t)\widetilde{Y}_{2k}(x,t),$$

其中

$$R_{2k}(x,t) = \begin{pmatrix} x + r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & 0\end{pmatrix},$$

with

$$r_{12}=\frac{\theta_0 k}{2(\theta_0-1)},\quad r_{21}=-\frac{2(\theta_0-1)}{\theta_0 k},$$

and

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\theta_0(\theta_0-2)r_{11}=&\tfrac{1}{2}u_k(u_k-t)(u_k-1)v_k^2-\tfrac{1}{4}\left(3u_k^2-2(t+1)u_k+t\right)v_k\\&+\tfrac{3}{32}(3u_k-t-1)+\tfrac{1}{8}\theta_0(\theta_0-2)(u_k-t-1).\end{aligned}$$

这里 $\theta_0=\frac{3}{2}-k$，与前面一样。

由此递归公式，我们得到方程（4.35）中线性系统的系数矩阵满足的如下递推关系，

$$\widetilde{A}_{2k+2}(x,t)=R_{2k}(x,t)\widetilde{A}_{2k}(x,t)R_{2k}(x,t)^{-1}+\left(\frac{\partial}{\partial x}R_{2k}(x,t)\right)R_{2k}(x,t)^{-1}.$$

直接代入即可得到一个非常简洁的 $\zeta_k(t)$ 递归公式，

$$\zeta_{k+1}(t)=\zeta_k(t)+(\theta_0-1)(u_k(t)-t). \tag{5.11}$$

将此递归公式与定理 5.1 中关于 $u_k(t)$ 的方程结合起来，通过归纳法即可得到方程（5.10）。至此，定理得证。□

推论 5.1。 由方程 (5.11)、(5.5) 和 (5.7)，我们得到 *Painlevé VI τ* 函数 $\mathcal{T}_k(t)$满足的如下递归关系，

$$\begin{aligned}s_k\mathcal{T}_{k-1}(t)\mathcal{T}_{k+1}(t)=&4(4k-3)^2t^2(t-1)^2\mathcal{T}_k(t)\ddot{\mathcal{T}}_k(t)-4(4k-1)(4k-5)t^2(t-1)^2\dot{\mathcal{T}}_k(t)^2\\&+2((4k-3)^2+1)t(t-1)(2t-1)\mathcal{T}_k(t)\dot{\mathcal{T}}_k(t)\\&+\left[2(k-1)(2k-1)(4k^2-6k+1+t-t^2)-\tfrac{1}{4}\right]\mathcal{T}_k(t)^2,\end{aligned}$$

对于 $k\geq 1$。这里， s_k 是一些非零常数，通常并未被严格定义。然而，利用精确公式 (5.9)，它们便成为数值常数，前几个常数如下：

$$s_1=-3,\quad s_2=525,\quad s_3=6237,\quad s_4=27885,\quad s_5=82365.$$

附录 A. 椭圆函数及其周期性

魏尔斯特拉斯三次曲线表示为

$$\left(\wp'(z)\right)^2=4\wp^3(z)-g_2\wp(z)-g_3=4\left(\wp(z)-e_1\right)\left(\wp(z)-e_2\right)\left(\wp(z)-e_3\right), \tag{A.1}$$

其中

$$e_1=\wp\left(\frac{1}{2}\right),\qquad e_2=\wp\left(\frac{\tau}{2}\right),\qquad e_3=\wp\left(\frac{1+\tau}{2}\right). \tag{A.2}$$

魏尔斯特拉斯 $\wp$ 函数是双周期的

$$\wp(z+1)=\wp(z),\qquad \wp(z+\tau)=\wp(z), \tag{A.3}$$

且在零点处有一个二阶极点

$$\lim_{z\to 0}z^2\wp(z)=1. \tag{A.4}$$

魏尔斯特拉斯 ζ 函数定义为 $\wp(z)$ 的原函数，其特征由以下条件唯一确定

$$\zeta'(z)=-\wp(z),\quad \zeta(z)=\frac{1}{z}+\mathcal{O}(z)\quad (z\to 0), \tag{A.5}$$

并具有以下周期性质

$$\zeta(z+1)=\zeta(z)+\eta_1(\tau),\qquad \zeta(z+\tau)=\zeta(z)+\eta_2(\tau), \tag{A.6}$$

进而定义了 Weierstrass η-函数。

椭圆模数定义为

$$q=\exp\frac{i\pi\omega_3}{\omega_1}=\exp i\pi(1+\tau),$$

并定义

$$t=\frac{e_3-e_2}{e_1-e_2}=\lambda(\tau),$$

其中， $\lambda(\cdot)$ 是模 λ 函数。

我们有以下关于 q 和 t的 (e_1,e_2,e_3) 的显式表达式，

$$\begin{aligned}(e_1,e_2,e_3)=&\frac{\pi^2}{3}\left(\theta_3(0,q)^4+\theta_4(0,q)^4,\theta_2(0,q)^4-\theta_4(0,q)^4),-\theta_2(0,q)^4-\theta_3(0,q)^4\right)\\=&\frac{4}{3}\mathcal{K}(t)^2(2-t,-1-t,2t+1),\end{aligned}$$

其中， $\theta_j(z,q)$ 表示 $1\le j\le 4$ 的第 j 个雅可比椭圆函数。特别是

$$\theta_2(0,q)=2q^{\frac{1}{4}}\sum_{n=0}^{\infty}q^{n(n+1)},\quad \theta_3(0,q)=1+2\sum_{n=0}^{\infty}q^{n^2},\quad \theta_4(0,q)=\theta_3(0,-q).$$

这给出了以下以 q 和 t 表示不变量 $\{g_2,g_3\}$ 的公式，

$$\begin{aligned}g_2=&\frac{64}{3}(t^2-t+1)\mathcal{K}(t)^4,\\=&\frac{4\pi^4}{3}(\theta_2(0,q)^8-\theta_2(0,q)^4\theta_3(0,q)^4+\theta_3(0,q)^8),\\g_3=&\frac{256}{27}(2t-1)(t-2)(t+1)\mathcal{K}(t)^6,\\=&\frac{8\pi^6}{27}\left(\theta_2(0,q)^{12}+\theta_3(0,q)^{12}-\frac{3}{2}\theta_2(0,q)^4\theta_3(0,q)^4(\theta_2(0,q)^4+\theta_3(0,q)^4\right).\end{aligned}$$

最后，我们指出关于 η_1 的以下一个有用公式，

$$\begin{aligned}\eta_1=&-\frac{\pi^2}{6}\frac{\theta_1^{(3)}(0,q)}{\theta_1^{(1)}(0,q)}\\=&\frac{2}{3}\mathcal{K}(t)((t-2)\mathcal{K}(t)+3\mathcal{E}(t)),\end{aligned}$$

其中， $\theta_1^{(j)}(z,q)$ 表示 $\theta_1(z,q)$ 关于 z 的第 j 阶导数。

Appendix B. List of polynomials

$$\begin{aligned}\pi_0&=1,\\\pi_2&=\wp(z)+a_{1,1},\\\pi_3&=-\tfrac{1}{2}\wp'(z),\\\pi_4&=\wp^2(z)+a_{1,2}\wp+a_{2,2},\\\pi_5&=-\tfrac{1}{2}\wp'(z)\wp+b_{2,2}\wp(z).\end{aligned}$$

我们计算前几个系数

$$a_{1,1}=2\eta_1(\tau),\ a_{1,2}=2\left(\frac{4\eta_1(\tau)g_2-3g_3}{5g_2-240\eta_1^2(\tau)}\right),\ a_{2,2}=4\eta_1(\tau)\left(\frac{4\eta_1(\tau)g_2-3g_3}{5g_2-240\eta_1^2(\tau)}\right)-\frac{g_2}{12},\tag{B.1}$$

and

$$h_1(\tau)=1,\qquad h_2(\tau)=-4\eta_1^2(\tau)+\frac{g_2}{12},\qquad h_3(\tau)=\frac{1}{5}\left(g_2\eta_1^2(\tau)-3g_3\right).\tag{B.2}$$

附录 C. 矩矩阵的结构

让我们详细阐述矩矩阵 D_n (2.3) 的结构。关于矩 (2.2)，有三点需要注意：

(1) 所有混合矩均为零，即 对于所有 i， j

$$\mu_{2i,2j+1} = 0, \tag{C.1}$$

(2) 以下对称性成立

$$\mu_{i,j} = \mu_{j,i}, \tag{C.2}$$

(3) 并且，一般而言

$$\mu_{2i,2j} \neq \mu_{2i-1,2j+1}. \tag{C.3}$$

根据上述性质，下图展示了 $n =$ 的矩矩阵 9.

$\mu_{0,0}$	$\mu_{0,2}$	0	$\mu_{0,4}$	0	$\mu_{0,6}$	0	$\mu_{0,8}$
$\mu_{2,0}$	$\mu_{2,2}$	0	$\mu_{2,4}$	0	$\mu_{2,6}$	0	$\mu_{2,8}$
0	0	$\mu_{3,3}$	0	$\mu_{3,5}$	0	$\mu_{3,7}$	0
$\mu_{4,0}$	$\mu_{4,2}$	0	$\mu_{4,4}$	0	$\mu_{4,6}$	0	$\mu_{4,8}$
0	0	$\mu_{5,3}$	0	$\mu_{5,5}$	0	$\mu_{5,7}$	0
$\mu_{6,0}$	$\mu_{6,2}$	0	$\mu_{6,4}$	0	$\mu_{6,6}$	0	$\mu_{6,8}$
0	0	$\mu_{7,3}$	0	$\mu_{7,5}$	0	$\mu_{7,7}$	0
$\mu_{8,0}$	$\mu_{8,2}$	0	$\mu_{8,4}$	0	$\mu_{8,6}$	0	$\mu_{8,8}$

图6. 矩矩阵 D_9 (2.3) 中奇数 和偶数矩以颜色区分。

请注意，上述矩阵具有由该元素生成的棋盘格模式分块结构

$$M_{i,j} = \begin{pmatrix} \mu_{2i-1,2j-1} & 0 \\ 0 & \mu_{2i,2j} \end{pmatrix}, \qquad i,j \geq 2. \tag{C.4}$$

偶数带是亏格1情形下亚纯函数空间维数的直接结果。

参考文献

[Akh90] N. Akhiezer. 椭圆函数理论导论. 第79卷. 美国数学学会，1990年。

[BCH15] E. L. Basor、Y. Chen 和 N. S. Haq。“通过非线性差分方程研究汉克尔矩阵行列式的渐近展开”。载于：《逼近理论杂志》198（2015），第 63–110 页。doi：10.1016/j.jat.2015.05.002。arXiv：1401.2073。

[Ber08] M. Bertola。“矩行列式作为等单值变形的 tau 函数”。载于：《非线性》22.1（2008），第 29 页。doi：10.1088/0951-7715/22/1/003。arXiv：0805.0446。

[Ber21] M. Bertola. “黎曼曲面上的帕德逼近与KP tau函数”。载于：*Anal.Math.Phys* 11 (1492021). doi: 10.1007/s13324-021-00585-2. arXiv: 2101. 09557.

[Ber22] M. Bertola. “椭圆曲线上的正交性问题的非线性最速下降方法”。载于：《逼近理论杂志》276 (2022), p. 105717. doi: 10.1016/j.jat. 2022.105717. arXiv: 2108.11576.[BGK22] M. Bertola, A. Groot, and A. B. Kuijlaars. “高亏格黎曼曲面上的临界测度”。载于：(2022). arXiv: 2207.02068.[BI88] R. Bikbaev and A. Its. “Landau-Lifshitz方程柯西问题解在 $t \to \infty$ 处的渐近展开”。载于：理论与数学物理 76.1 (1988), pp. 665–675.[Car60] L. Carlitz. “一些与椭圆函数相关的正交多项式”。载于：Duke Math. J. 27.1 (1960), pp. 443–459. doi: 10.1215/S0012-7094-60-02742-3.[CKS16] S. Corteel, J. S. Kim, and D. Stanton. “正交多项式的矩与组合学”。载于：组合学新趋势 (2016), pp. 545–578. doi: 10 . 1007/978-3-319-24298-9_22.[DDG20] F. Del Monte, H. Desiraju, and P. Gavrylenko. “环面上的等单值tau函数作为Fredholm行列式及带电分拆”。载于：(2020). doi: 10.1007/ s00220-022-04458-y. arXiv: 2011.06292.[Dei+99] P. Deift et al. “关于指数权函数的正交多项式的强渐近展开”。载于：纯粹与应用数学通讯 52.12 (1999), pp. 1491–1552.[Dei99] P. Deift. 正交多项式与随机矩阵：一种黎曼-希尔伯特方法。第3卷。American Mathematical Soc., 1999.[DGZ95] P. Di Francesco, P. Ginsparg, and J. Zinn-Justin. “二维引力与随机矩阵”。载于：Physics Reports 254.1-2 (1995), pp. 1–133. doi: 10.1016/0370-1573(94)00084-G. arXiv: hep-th/9306153.[FIK91] A. Fokas, A. Its, and A. Kitaev. “离散Painlevé方程及其在量子引力中的出现”。载于：Communications in Mathematical Physics 142 (1991), pp. 313–344. doi: 10.1007/BF02102066.[FOX22] M. Fasondini, S. Olver, and Y. Xu. “一类平面代数曲线上的正交多项式”。载于：(2022). arXiv: 2211.06999.[FOX23] M. Fasondini, S. Olver, and Y. Xu. “平面三次曲线上的正交多项式”。载于：计算数学基础 23.1 (2023), pp. 1–31. doi: 10.1007/ s10208-021-09540-w. arXiv: 2011.10884.[FW06] P. J. Forrester and N. S. Witte. “随机矩阵理论与第六Painlevé方程”。载于：Journal of Physics A: Mathematical and General 39.39 (2006), p. 12211.[Hei78] E. Heine. 球函数手册：理论与应用：第1卷，球函数及相关函数理论。第1卷。G. Reimer, 1878.[Hit95] N. J. Hitchin. “扭量空间、爱因斯坦度量与等单值变形”。载于：微分几何杂志 42.1 (1995), pp. 30–112. doi: 10.4310/jdg/1214457032.[IC08] A. Its and Y. Chen. “Akhiezer多项式的黎曼–希尔伯特方法”。载于：Phil.Trans. R. Soc. A. 366973–1003 (2008). doi: 10.1098/rsta.2007.2058. arXiv: 0401271v1.[IVY01] M. E. Ismail, G. Valent, and G. J. Yoon. “一些与椭圆函数相关的正交多项式”。载于：《逼近理论杂志》112.2 (2001), pp. 251–278. doi: 10.1006/jath.2001.3593.[JL21] N. Joshi and T. Lasic Latimer. “关于一类 q-正交多项式及 q-黎曼-希尔伯特问题”。载于：Proc. R. Soc. A. 477 (2254 2021). doi: 10 . 1098 / rspa.2021.0452. arXiv: 2106.01042.[JM81] M. Jimbo and T. Miwa. “具有有理系数的线性常微分方程的保单值变形。II”。载于：Phys. D 2.3 (1981), pp. 407–448. doi: 10.1016/0167-2789(81)90021-X.[Kön05] W. König. “概率论中的正交多项式系综”。载于：Probability Surveys 2 (2005), pp. 385–447. doi: 10.1214/154957805100000177. arXiv: math/ 0403090

.

[Man98] Y. I. Manin。《通用椭圆曲线与 P2 的镜像》。载于：微分方程几何 39（1998），第 131 页。arXiv：代数几何 /9605010。[Mar06] A. Martínez-Finkelshtein。《 Szegő 多项式：从黎曼–希尔伯特窗口看》。载于：电子数值分析汇刊 **25**（2006），第 369–392 页。arXiv：数学/0508117。[Ree45] C. Rees。《椭圆正交多项式》。载于：杜克数学杂志 12.1（1945），第 173–187 页。doi：10.1215/S0012-7094-45-01214-2。[Rod87] Y. L. Rodin。《闭黎曼曲面上的黎曼边值问题与可积系统》。载于：*Physica D*：非线性现象 24.1-3（1987），第 1–53 页。doi：10.1016/0167-2789(87)90065-0。[Sze39] G. Szegö。正交多项式。第 23 卷。美国数学学会，1939 年。[Tak01] K. Takasaki。《重新审视 Painlevé–Calogero 对应》。载于：数学物理学杂志 42.3（2001），第 1443–1473 页。doi：10.1063/1.1348025。arXiv：数学/0004118。[Tod94] K. Tod。《由 Painlevé VI 方程得到的自对偶爱因斯坦度量》。载于：*A* 辑物理学快报 190.3-4（1994），第 221–224 页。doi：10.1016/0375-9601(94)90745-5。[Van17] W. Van Assche。正交多项式与 *Painlevé* 方程。第 27 卷。剑桥大学出版社，2017 年。[VZ09] L. Vinet 和 A. Zhedanov。《受限 Toda 链的椭圆解、Lamé 多项式与椭圆 Stieltjes 多项式的推广》。载于：数学与理论物理学杂志 42.45（2009），第 454024 页。doi：10. 1088 / 1751-8113/42/45/454024。