具有等式约束和盒约束的一类优化问题的加速算法

Anjali Parashar Priyank Srivastava Anuradha M.Annaswamy

arXiv:2305.04433v1 [math.OC] 8 May 2023

摘要——在大规模系统的多种优化与控制问题中，带有等式约束和不等式约束的凸优化是一个普遍存在的问题。近年来，人们对实现损失函数的加速收敛产生了浓厚兴趣。近期提出了一类高阶调节器，旨在为无约束情形实现加速收敛。本文提出一种新的高阶调节器，可处理等式约束的存在。为处理底层的盒约束，我们在高阶调节器中引入时变增益，以利用凸性并确保约束始终可行。文中给出数值示例，以支持理论推导。

I. 引言

一类称为高阶调节器（HT）的算法被提出用于动态系统中的参数估计 [1]。这些迭代算法利用系统的二阶信息，从而加快离散时间参数估计的收敛速度。HT的这一特性受到Nesterov算法 [2], [3]的启发。此外，研究已证明，HT在时变回归量 [1] 存在时以及在存在时延和高相对阶的自适应控制中 [4], [5]均表现稳定。为进一步利用HT在机器学习和自适应控制问题中的加速收敛特性，文献 [6],提出了这些算法用于无约束凸优化的离散时间版本，并给出了有关收敛性和稳定性的理论保证。

加速算法已被推广至 [7], [8], [9] 中的等式约束凸优化问题。加速 HT 被推广至一类约束凸优化问题，其双重目标是解构约束优化问题的损失景观，并应用 HT，以在理论上保证性能稳定 [10]。过去的多项研究 [11]采用变量约简方法，将约束凸优化问题转化为低维可行解空间中的无约束优化问题。然而，这种转化并不能保证无约束优化问题具有凸性。在本文中，我们给出了使变换后的问题具有凸性的等式约束条件。

我们首先研究带等式约束的优化问题，并采用基于变量约简的技术，阐明在何种条件下可以部署 HT，并获得有关收敛性和稳定性的理论保证。随后，我们将这些结果扩展至带等式约束和盒不等式约束的优化问题。由于凸性的保证仅在可行区域内有效，因此求解复杂的不等式约束问题颇具挑战。为保留有关收敛性的理论保证，必须将决策变量限制在一个紧集内，使得由此得到的损失函数在该集合内为凸函数。我们证明，即使存在等式约束和盒约束，也可以使用 [1], [6] 和 [10]中提出的同一 HT，保证可行性并收敛至最优解。本文给出了两个数值示例问题，以验证该方法。

本文的组织结构如下。第二节介绍更广泛的约束优化问题类别，并给出关于高阶调节器（算法 1）求解此类问题性能的定理。第三节介绍一类特定的约束优化问题，其中损失函数并非处处凸，而是在已知的紧集上为凸。我们概述一种基于带时变增益的高阶调节器（算法 2）的新颖建模方法，用于求解此类问题。第四节通过一个标量示例，验证算法 2 在约束凸优化问题中的实现，并展示高阶调节器的加速收敛。第五节总结本文的主要贡献，并展望未来的研究方向。

记号

本文中始终采用以下记号。对于向量 $x \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq i < j \leq n$, $x_{i:j}$ 表示由 i的第 x 个元素至第j个元素构成的子向量。对于向量值函数 $p: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, p在 $\mathbb{R}^m$ 上是凸（分别地，凹）的，意味着对于所有 $i \in \{1, \ldots, n\}$, 标量函数 $p_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ 在$\mathbb{R}^m$ 上是凸（分别地，凹）的。我们使用简写 PSD 表示对称半正定矩阵。对于两个集合 A 和 B, $A \times B$ 表示它们的笛卡尔积。

第一作者获得了西门子奖学金的资助。本研究部分由波音战略大学计划资助，部分由 NSF CPS-DFG联合奖项 1932406 资助。A. Parashar、P. Srivastava 和 A. M. Annaswamy 任职于麻省理工学院机械工程系。电子邮箱：{anjalip,psrivast,aanna}@mit.edu。

II. 一类非凸问题的凸优化

考虑该优化问题

$$\begin{aligned} &\min\ f(x) \\ &\text{s.t. } h(x)=0, \end{aligned} \tag{1}$$

其中，$x \in \mathbb{R}^n$ 是决策变量，$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$、$h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$ 是连续可微的凸函数。不失一般性，我们假设问题（1）不是超定的，即 $m \le n$。求解由（1）给出的约束优化问题涉及两个关键方面，即可行性和最优性。为确保解满足可行性，我们首先讨论如何采用 [10] 中使用的变量约简技术来求解等式约束。

我们将 $\mathcal{L}(\cdot)$ 定义为由目标函数和一个可选项组成的损失函数；当无法求解等式约束时，该可选项用于惩罚违反等式约束的情况：

$$\mathcal{L}(x) = f(x) + \lambda_h \|h(x)\|^2, \lambda_h \ge 0 \tag{2}$$

本文中，我们仅关注$\mathcal{L}$ 为凸的问题；在许多 f 和h均为凸的情况下，这一条件都成立。为确保可行性，我们利用等式约束引入的可行解空间中的线性相关性，如 [11] 所示。x 被划分为自变量和因变量；$\theta \in \mathbb{R}^m$ 和 $z \in \mathbb{R}^{n-m}$ 分别

$$x = [\theta^T \quad z^T]^T, \quad z = p(\theta)$$

其中，$p: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n-m}$ 是一个函数，用于映射 z 对 θ 的依赖关系，使得 $h(x) = 0$。我们假设h 具有这样的性质：给定 x的 m 个元素后，其余的（$n-m$）个元素可通过闭式或递归方式计算得出。如果可以显式计算 $p(\theta)$，则在（2）中令 $\lambda_h = 0$。否则，将 λ_h 选为正实数标量。换言之，我们假设已知函数 $p: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n-m}$，使得

$$h([\theta^T \quad p(\theta)^T]^T) = 0, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^m$$

使用上述定义的函数 $p(\cdot)$，我们现在定义修正损失函数 l: $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ 为

$$l(\theta) = \mathcal{L}([\theta^T \quad p(\theta)^T]^T). \tag{3}$$

式（1）中的优化问题现已重新表述为如下无约束最小化问题：

$$\min\ l(\theta), \tag{4}$$

以 $\theta \in \mathbb{R}^m$ 为决策变量。现在，我们将在命题 II.1 中进一步阐述使 l 为凸的条件。

命题 II.1.（等式约束非凸规划的修正损失函数的凸性）：假设存在一个凸集 $\Omega_n \in \mathbb{R}^n$，使得函数 f 和 h 在 Ω_n 上为凸函数。令

$$\Omega_m = \{\theta \mid \theta = x_{1:m}, x \in \Omega_n\}. \tag{5}$$

如果 $\mathcal{L}$ 是凸的，且满足以下任一条件：*(i)* h是线性的；*(ii)* 对所有 $x \in \Omega_n$，$\nabla \mathcal{L}(x) \ge 0$，且 p 在Ω_m上是凸的；*(iii)* 对所有 $x \in \Omega_n$，$\nabla \mathcal{L}(x) \le 0$，且 p 在Ω_m上是凹的；那么 l 在Ω_m上是凸的。

证明。证明请参见 [10, 命题 IV.2]，证明中所用复合函数的凸性细节请参见 [12]。 □

利用隐函数定理，我们可以建立关于 $h(\cdot)$ 的以下充分条件，使得 $p(\cdot)$ 为凸或凹。这为判断 $l(\cdot)$ 的凸性提供了一组易于检验的条件，而无需确定函数 $p(\cdot)$ 的凸性/凹性，这有时可能无法做到。

命题 II.2。（p的凸性关于 $h(x)$ 的条件（θ））：由命题 *II.1* 可知，假设 f 在给定集合 Ω_n 上为凸函数，且 h 为严格凸函数，并且 h_i 二阶可微 $\forall\, i \in \mathbb{N}$，则可得：

(i) 如果 $\nabla_p h(x) < 0$，则 $p(\theta)$ 在 Ω_m 上严格凸；
(ii) 如果 $\nabla_p h(x) > 0$，则 $p(\theta)$ 在 Ω_m 上严格凹。
此外，如果 h 关于 z 是线性的，且关于 θ是严格凸的，那么条件 *(i)* 成立。
（参见注记 $p(\theta)$）

证明。我们证明条件 (i)；类似的论证可用于证明条件 (ii)。注意到

$$h([\theta^T \quad p(\theta)^T]^T) = 0, \tag{6}$$

并应用链式法则，对流形 $z = p(\theta)$ 上的 (6) 求两次导数，对于 $1 \le i \le m$和 $1 \le j \le n-m$，我们得到：

$$\underbrace{\frac{\partial^2 h_i}{\partial \theta^2}}_{I} + \underbrace{\frac{\partial h_i}{\partial z_j}\frac{\partial^2 z_j}{\partial \theta^2}}_{II} + \underbrace{\frac{\partial^2 h_i}{\partial z_j^2}\frac{\partial z_j}{\partial \theta}\left(\frac{\partial z_j}{\partial \theta}\right)^T}_{III} = 0 \tag{7}$$

由于 h_i 在 $\Omega_n\ \forall\, i \in \mathbb{N}$ 上是凸的，因此：

(i) I: $\frac{\partial^2 h_i}{\partial \theta^2}$ is a positive semi-definite matrix

(ii) III: $\frac{\partial z_j}{\partial \theta}\left(\frac{\partial z_j}{\partial \theta}\right)^T$ is a symmetrical dyad, i.e., PSD matrix multiplied by $\nabla^2_{z_j} h_i \ge 0$, hence III is a PSD matrix.

要使 (7) 成立，II 必须是负半定矩阵，因为它是若干正半定矩阵之和的相反数。根据条件 (i)，我们有 $\frac{\partial h_i}{\partial z_j} < 0$，因为 $z = p\ \theta$ $\frac{\partial^2 z_j}{\partial \theta^2}$ $\frac{\partial^2 p_j\ \theta}{\partial \theta^2}$ —— ()。因此，为半正定。因此，~~()~~ 为半正定，故 $p_j(\theta)$ 在 Ω_m，~~$\forall j =$~~1，...，$n-m$ 上是凸的 $\forall \theta \in$。 □

注记 1。命题 II.2 是本工作的主要贡献之一。函数 $p(\cdot)$ 的显式闭式表达式并不总是有保证，而且在实践中，p 通常通过迭代估计，这也是在损失函数 $\mathcal{L}(\cdot)$ 的定义中加入惩罚项 $\lambda_h \|h(x)\|^2$ 的理由。在缺乏关于 p 的信息时，我们可以使用链式法则和隐函数定理来计算 $\nabla_p h$，如 [10], [11] 所示。

A. 数值示例

下面的例子说明如何验证命题 II.1 和命题 II.2 的条件。我们考虑式 (1) 中的问题，其中 $x \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{L}$ 与 f 相同。现在，我们演示如何应用命题 II.2 来定义区域 Ω_n，使得 $p(\cdot)$ 为凸函数或凹函数。

显然，$\nabla_p h(x) = 2(p(x_1) - 4)$，并且显然，$\nabla_p h(x) < 0$ 适用于 $x_2 < 4$，而 $\nabla_p h(x) > 0$ 适用于 $x_2 > 4$（因为$x_2 = p(x_1)$）。根据命题 II.2，我们得出：对于 $x_2 \leq 4$，$p(\cdot)$ 是凸的；对于 $x_2 \geq 4$，$p(\cdot)$ 是凹的。此外，为确保 $p(x_1)$ 的结果为实数，我们必须约束 $-1 \leq x_1 \leq 1$。因此，根据命题 II.2，我们构造集合 $\bar{\Omega}_n^1$ 和 $\bar{\Omega}_n^2$ 如下：

$$\bar{\Omega}_n^1 = \{x = [x_1 \;\; x_2]^T | -1 \leq x_1 \leq 1, x_2 < 4\} \tag{8}$$
$$\bar{\Omega}_n^2 = \{x = [x_1 \;\; x_2]^T | -1 \leq x_1 \leq 1, x_2 > 4\} \tag{9}$$

由于 $\mathcal{L}(x_1, \; x_2) = \log(e^{x_1} + e^{x_2})$，显然：

$$\nabla_{x_1} \mathcal{L} = \frac{e^{x_1}}{e^{x_1} + e^{x_2}} \tag{10a}$$
$$\nabla_{x_2} \mathcal{L} = \frac{e^{x_2}}{e^{x_1} + e^{x_2}} \tag{10b}$$

显然，对于所有 $x \in \mathbb{R}^2$，$\nabla \mathcal{L}(x_1, \; x_2) > 0$。由命题 II.1 的情形 (ii) 可知，对于 $-1 \leq x_1 \leq 1$ 和$x_2 \leq 4$，$\nabla \mathcal{L}(x_1, \; x_2) > 0$，且 $p(\cdot)$ 是凸的。因此，$l(x_1)$ 在此区域内是凸的。形式上，我们将 $\Omega_n \equiv \bar{\Omega}_n^1$ 定义为：

$$\Omega_n = \{x = [x_1 \;\; x_2]^T | -1 \leq x_1 \leq 1, x_2 \leq 4\} \tag{11}$$

在所选的 Ω_n 内，命题 II.1 保证 $l(x_1)$ 是凸的。因此，Ω_m 自动定义为：

$$\Omega_m = \{x_1 \in \mathbb{R} \,|\, -1 \leq x_1 \leq 1\} \tag{12}$$

事实上，对于 $x_1 \in \Omega_m$ 的取值，利用隐函数定理 [13]，$p(x_1)$ 有以下两种情况：

$$p(x_1) = 4 - \sqrt{1 - {x_1}^2} \quad \text{for } x_2 \leq 4 \tag{13}$$

$$p(x_1) = 4 + \sqrt{1 - {x_1}^2} \quad \text{for } x_2 \geq 4 \tag{14}$$

由于我们希望扩展 $l(\cdot)$ 为凸的集合 Ω_n，并且这个问题的性质简单，因此很容易得出 $l(\cdot)$ 对于 $x_2 \geq 4$ 是凹的，所以该问题的 Ω_n 等价于式 (11) 中的集合。

因此，使用式 (11) 中定义的 Ω_n，$p(\cdot)$ 具有式 (13) 所述的形式；将 $l(\cdot)$ 定义为式 (3) 中的形式后，优化问题可简化为以下更易求解的凸优化问题：

$$\begin{aligned} &\min \;\; \log(e^{x_1} + e^{4 - \sqrt{1 - x_1^2}}) \\ &\text{s.t.} \;\; x_1 \in \Omega_m \end{aligned} \tag{15}$$

现在我们给出一种基于高阶调节器的算法；只要满足条件 $\theta \in \Omega_m$，即可保证收敛到最优解。

B. 高阶调节器

近期，有人针对凸函数提出了一种高阶调节器（HT），并证明它能够使损失函数收敛。由于本文以该高阶调节器为基础，下面简要概述 [6]中给出的高阶调节器算法，即算法 1。

归一化信号 $\mathcal{N}_k$ 选择为：

$$\mathcal{N}_k = 1 + H_k, \quad H_k = max\{\lambda : \lambda \in \sigma(\nabla^2 L_k(\theta))\}$$

这里，$\sigma(\nabla^2 L_k(\theta))$ 表示损失函数 [6] 的海森矩阵的谱。

算法 1 用于等式约束非凸优化的高阶调节器优化器

Initial conditions θ_0, ν_0, gains γ, β
对于 $k = 1$ 至 N **执行**
  计算 $\nabla l(\theta)$，并令 $\mathcal{N}_k = 1 + H_k$
  $\nabla \bar{q}_k(\theta_k) = \frac{\nabla l(\theta_k)}{\mathcal{N}_k}$
  $\bar{\theta}_k = \theta_k - \gamma\beta\nabla \bar{q}_k(\theta_k)$
  $\theta_{k+1} \leftarrow \bar{\theta}_k - \beta(\theta_k - \nu_k)$
  计算 $\nabla l(\theta_{k+1})$，并令
  $\nabla \bar{q}_k(\theta_{k+1}) = \frac{\nabla l(\theta_{k+1})}{\mathcal{N}_k}$
  $\nu_{k+1} \leftarrow \nu_k - \gamma\nabla \bar{q}_k(\theta_{k+1})$
</style}结束循环

在第 II-A 节中，我们给出了命题 II.1 中关于修正损失函数凸性的充分条件，这些条件很容易验证。现在我们陈述定理 II.3，该定理说明了算法 1 中高阶调节器 HT 对式 (1) 中约束优化问题的收敛性。

定理 II.3. 若目标函数 f 和式 (1) 中的等式约束 h 在集合 Ω_n上为凸，且 $\theta_0 \in \Omega_m$，其中 Ω_m 由式 (5) 定义，并且算法 1 生成的迭代序列$\{\theta_k\}$ 满足 $\{\theta_k\} \in \Omega_m$，则 $\lim_{k \to \infty} l(\theta_k) = l(\theta^*)$，其中 $l(\theta^*) = f([\theta^{*T} \;\; p(\theta^*)^T]^T)$ 是式 (1) 的最优值，其中 γ 和 β 取为 $0 < \beta < 1$，$0 < \gamma < \frac{\beta \; 2-\beta}{(\;)^{8+\beta}}$

证明。 证明请参阅 [6, 定理 2]。 □

C. 盒约束的满足

定理 II.3 使我们能够利用算法 1，前提是 $\theta_k \in \Omega_m \forall k \in \mathbb{N}$，即参数始终位于 $l(\cdot)$ 为凸的集合内。对于第 II-A 节所述的数值示例，显然，当 $x_1 \in \Omega_1$ 时，我们可以利用定理 II.3，其中 $\Omega_1 = [-1, 1]$。但应注意，定理 II.3 要求 $\theta \in \Omega_m$，这样高阶调节器才能实现收敛。为了将参数限制在集合 Ω_m 内，我们将式 (4) 改写为如下约束优化问题：

$$\begin{aligned} &\min \; l(\theta) \\ &\text{s.t.} \;\; \theta \in \Omega_m. \end{aligned} \tag{16}$$

需要注意的是，式 (16) 中的集合 Ω_m 是式 (1) 可行解空间的子集。如果命题 II.1 给出的条件是充要条件，则式 (16) 与式 (4) 具有相同的最优解 θ^*。虽然采用投影过程来确保 $\theta \in \Omega_m$ 看似可行，但由于无法保证对于所有 $\theta \in \mathbb{R}^m$，$l(\cdot)$ 都具有凸性，我们无法证明算法 1 的稳定性，因为我们需要 $l(\cdot)$ 对所有 θ_k，θ_k，$\nu_k \in \mathbb{R}^m$ 都是凸的。下一节将阐述一种通用方法，以确保约束 $\theta \in \Omega_m$ 始终得到满足。

III. 约束凸优化

本节从 l为凸的（16）问题开始。一般而言，我们假设 Ω_m 是 $\mathbb{R}^m$中的紧集。对于任意这样的 Ω_m，总可以找到一个有界区间 $I = I_1 \times I_2 ... \times I_m \subseteq \Omega_m$，其中 I_i 是 $\mathbb{R}$ 中的有界区间，定义为 $I_i = [\theta^i_{min}, \theta^i_{max}]$，对所有 $i = 1$、2..... m均成立。利用上述论证，我们将（16）中的约束优化问题改写为：

$$\begin{aligned} &\min\ l(\theta) \\ &\text{s.t. } \theta \in I \end{aligned} \tag{17}$$

其中，θ^* 是问题（17）的解。在第二节中，我们概述了使（16）等价于（4）的条件，即通过适当选择集合 Ω_n，Ω_m，θ^* 是问题（4）的解。

注意，如果 $\theta^* \in I$，则（16）和（17）是等价的。$\theta^* \in I$ 成立的条件已在命题 III.1 中进行了总结。

命题 III.1. 对于给定的紧集 I 和凸损失函数 $l(\theta)$，如果存在 θ_1、θ_2 使得 $l(\theta_1) = l(\theta_2)$，则$\theta^* \in I$。

证明。对于标量情形，即 $\Omega_m \subset \mathbb{R}$，可以将罗尔定理应用于连续且可微的函数 l。对于一个子集 $[\theta_1, \theta_2] \subset I$，满足 $l(\theta_1) = l(\theta_2)$，根据罗尔定理，存在一个 $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$，使得 $\nabla l(\theta) = 0$。由于 l 是可微且凸的，因此 $\nabla l(\theta) = 0 \iff \theta = \theta^*$。利用向量版罗尔定理（参见 [14]），这一结论可以推广到一般情形，其中 $m \geq 1$，$\Omega_m \subset \mathbb{R}^m$。

□

根据命题 III.1 所提供的 $\theta^* \in I$ 保证，我们现在将算法 1 修改为算法 2 的形式，以确保收敛至 θ^*，同时保证可行性，即 $\theta \in I$。我们通过命题 III.2 证明，对于所有 $k \in \mathbb{N}$，均有 $\theta_k, \nu_k, \theta_k \in I$，随后利用定理 III.3 保证由算法 2 生成的迭代序列 $\{\theta_k\}_{k=1}^{\infty}$ 收敛至 θ^*。

算法 2 用于局部化凸优化的高阶调节器优化器

Initial conditions θ_0, ν_0, gains γ, β
Choose $\theta_0, \nu_0 \in I$
for $k = 1$ to N **do**
  Compute $\nabla l(\theta)$ and let $\mathcal{N}_k = 1 + H_k$
  $\nabla \overline{q}_k(\theta_k) = \dfrac{\nabla l(\theta_k)}{\mathcal{N}_k}$
  $\overline{\theta}_k = \theta_k - \gamma\beta a_k \nabla \overline{q}_k(\theta_k)$
  $\theta_{k+1} = \overline{\theta}_k - \beta(\overline{\theta}_k - \nu_k)$
  Compute $\nabla l(\theta_{k+1})$ and let
  $\nabla \overline{q}_k(\theta_{k+1}) = \dfrac{\nabla l(\theta_{k+1})}{\mathcal{N}_k}$
  $\nu_{k+1} \leftarrow \nu_k - \gamma b_{k+1} \nabla \overline{q}_k(\theta_{k+1})$
end for

命题 III.2. 考虑算法 *2*，对于给定的 $k \in \mathbb{N}$，若 θ_k，$\nu_k \in I$，则存在实数 $a_k > 0$ 和 $b_{k+1} > 0$，使得 θ_k，$\nu_{k+1} \in I$。因此，对于 $0 < \beta \leq 1$，且$\theta_0, \nu_0 \in I$，算法 *2* 保证对 $k \in \mathbb{N}$ 的所有取值均有 $\theta_k, \theta_k, \nu_k \in I$。

证明。我们首先给出选择 a_k的条件。

给定 $\theta_k \in \mathbb{R}^m$ 和 $i \in \mathbb{N}$，考虑满足 $\theta^i_k \in [\theta^i_{min}, \theta^i_{max}]$的 $\theta^i_k \in \mathbb{R}$。有两种可能的情况：

(i) $\theta^i_k > \theta^{*i} \iff \nabla_i l(\theta_k) > 0$

(ii) $\theta^i_k < \theta^{*i} \iff \nabla_i l(\theta_k) < 0$

对于情况 (ii)，根据算法 2 的**步骤-6**，我们有：

$$\overline{\theta}^i_k = \theta^i_k + a_k \frac{\gamma\beta|\nabla_i l(\theta_k)|}{\mathcal{N}_k} \tag{18}$$

对于式 (18) 中的 $a_k > 0$、$\theta^i_k > \theta^i_{min}$，我们需要确保对所有 i，$\theta^i_k < \theta^i_{max}$。因此，我们必须确保：

$$\theta^i_k + a_k \frac{\gamma\beta|\nabla_i l(\theta_k)|}{\mathcal{N}_k} \leq \theta^i_{max} \quad \forall i. \tag{19}$$

若 $a_k \leq \hat{a}_k$，则不等式 (19) 成立，其中

$$\hat{a}_k = \min_{i \in \{1,\dots,m\}} \frac{(\theta^i_{max} - \theta^i_k)\mathcal{N}_k}{\gamma\beta|\nabla_i l(\theta_k)|}. \tag{20}$$

同理，对于情形 (i)，我们得到以下不等式判据，以确保对于所有 i，a_k 满足 $\theta^i_k > \theta^i_{min}$：

$$a_k \leq \tilde{a}_k = \min_{i \in \{1,\dots,m\}} \frac{(\theta^i_k - \theta^i_{min})\mathcal{N}_k}{\gamma\beta|\nabla_i l(\theta_k)|} \tag{21}$$

结合 (20) 和 (21)，可得

$$a_k \leq \bar{a}_k = \min\{\hat{a}_k, \tilde{a}_k\} \quad \forall k. \tag{22}$$

现在我们概述 b_{k+1}的选取条件，其方法与 a_k的选取类似，即对于给定的$\nu_k \in I$，我们规定 b_{k+1} 的取值范围，使得 $\nu_{k+1} \in I$。

根据算法 2 的**步骤-10**，可以推导出，对于所有 k，b_{k+1} 都必须满足

$$b_{k+1} \leq \bar{b}_{k+1} = \min\{\hat{b}_{k+1}, \tilde{b}_{k+1}\} \tag{23}$$

其中

$$\hat{b}_{k+1} = \min_{i\in\{1,\dots,m\}} \frac{(\theta^i_{max} - \nu^i_k)\mathcal{N}_k}{\gamma|\nabla_i l(\theta_{k+1})|}$$
$$\tilde{b}_{k+1} = \min_{i\in\{1,\dots,m\}} \frac{(\nu^i_k - \theta^i_{min})\mathcal{N}_k}{\gamma|\nabla_i l(\theta_{k+1})|}.$$

然而请注意，(22)、(23) 可能会产生 $a_k, b_{k+1} = 0$，这是我们不希望出现的。为此，我们引入一条附加规则：

$$a_k = \begin{cases} -\epsilon & \min_{i\in\{1,\dots,m\}} (\theta^i_k - \theta^i_{max}) = 0 \\ \epsilon & \min_{i\in\{1,\dots,m\}} (\theta^i_k - \theta^i_{min}) = 0 \end{cases} \tag{24}$$

这里，$0 < \epsilon < 1$ 是任意选取的一个非常小的实数。为避免出现 $a_k, b_{k+1} = 0$的情况，也可以为 b_{k+1} 规定类似的更新规则。对于给定的 k，通过选取满足 (22)、(23)、(24) 的 a_k、b_{k+1}，我们可以确保 $\theta_k, \nu_k \in I$。根据算法 2 的**第 7 步**：

$$\theta_{k+1} = (1-\beta)\bar{\theta}_k + \beta\nu_k \tag{25}$$

因此，对于给定的 k 和 $0 < \beta \leq 1$，$\bar{\theta}_{k+1}$ 是 θ_k 和 ν_k 的凸组合。此外，集合 I 是紧集，因此，如果$\theta_k, \nu_k \in I$，则对于给定的 $k \in \mathbb{N}$，有 $\theta_{k+1} \in I$。通过选取θ_0, $\nu_0 \in I$，利用归纳法可以证明，命题 III.2 可以迭代应用，从而生成有界于紧集 I 内的参数。 □

命题 III.2 概述了算法 2 生成的所有参数均有界于集合 I 内的条件，在此条件下，损失函数 $l(\cdot)$ 的凸性得以保证。定理 III.3 正式证明了算法 2 收敛至最优解 θ^*。

定理 *III.3*。（确保凸性的约束高阶调节器算法的收敛性）：对于可微的 L_k-光滑凸损失函数 $l(.)$，满足 $b_{k+1} \leq \min\{1, b_{k+1}\}$ *and (24)* 的算法 *2*（其中 $0 < \beta \leq 1$, $0 < \gamma < \frac{\beta}{8+\beta}$ *and* $a_k \leq \min\{1, \bar{a}_k\}$，且 $\bar{a}_{k+1}$ 和 b_{k+1} 分别由 *(22)* 和 *(23)* 定义）保证 $V = \frac{\|\nu-\theta^*\|^2}{\gamma} + \frac{\|\nu-\theta\|^2}{\gamma}$ 是李雅普诺夫函数。因此，由算法 *2* 生成的迭代序列 $\{\theta_k\}$ 满足 $\{\theta_k\} \in \Omega_m$，且 $\lim_{k\to\infty} l(\theta_k) = l(\theta^*)$，其中 $l(\theta^*) = f([\theta^{*T} \quad p(\theta^*)^T]^T)$ 是 *(16)* 的最优值。

证明。该证明采用了与凸优化高阶调节器稳定性证明类似的方法，如 [6,定理 2] 所示。

假设对于集合 I 中的所有这些参数，函数 $l(\cdot)$ 都是凸的。将凸性和光滑性性质（参见 [6, 第二节]）应用于 $l(\cdot)$，可得以下上界：

$$\begin{aligned} l(\vartheta_k) - l(\bar{\theta}_k) &= l(\vartheta_k) - l(\theta_{k+1}) + l(\theta_{k+1}) - l(\bar{\theta}_k) \\ &\leq \nabla l(\theta_{k+1})^T(\vartheta_k - \theta_{k+1}) + \frac{\bar{L}_k}{2}\|\vartheta_k - \theta_{k+1}\|^2 \\ &\quad + \nabla l(\theta_{k+1})^T(\theta_{k+1} - \bar{\theta}_k) \end{aligned} \tag{26}$$

$$\overset{\text{Alg.2}}{\leq} \nabla l(\theta_{k+1})^T(\vartheta_k - \bar{\theta}_k) + \frac{\bar{L}_k}{2}\|\vartheta_k - (1-\beta)\bar{\theta}_k - \beta\vartheta_k)\|^2 \tag{27}$$

$$\begin{aligned} &l(\vartheta_k) - l(\bar{\theta}_k) \\ &\leq -\nabla l(\theta_{k+1})^T(\bar{\theta}_k - \vartheta_k) + \frac{\bar{L}_k}{2}(1-\beta)^2\|\bar{\theta}_k - \vartheta_k\|^2. \end{aligned} \tag{28}$$

同理，我们得到：

$$\begin{aligned} &l(\bar{\theta}_k) - l(\vartheta_k) \\ &\leq \nabla l(\theta_k)^T(\bar{\theta}_k - \vartheta_k) + \frac{a_k^2\bar{L}_k\gamma^2\beta^2}{2\mathcal{N}_k^2}\|\nabla l(\theta_k)\|^2. \end{aligned} \tag{29}$$

利用 (28) 和 (29)，我们得到：

$$\begin{aligned} &\nabla l(\theta_{k+1})^T(\bar{\theta}_k - \vartheta_k) \\ &- \frac{\bar{L}_k}{2}(1-\beta)^2\|\bar{\theta}_k - \vartheta_k\|^2 \\ &- \frac{a_k^2\bar{L}_k\gamma^2\beta^2}{2\mathcal{N}_k^2}\|\nabla l(\theta_k)\|^2 \leq \nabla l(\theta_k)^T(\bar{\theta}_k - \vartheta_k) \end{aligned} \tag{30}$$

使用算法 2, [6, 1] 30 $\gamma <$ 定理和 $\frac{\beta}{8+\beta}$，令 $0 < a_k, b_{k+1} \leq 1$ 并定义 ΔV_k：$= V_{k+1} - V_k$，可以证明元棋牌

$$\begin{aligned} \Delta V_k \leq \frac{1}{\mathcal{N}_k}\Bigg\{ &- 2b_{k+1}(l(\theta_{k+1}) - l(\theta^*)) \\ &- \left(\frac{b_{k+1}}{2\bar{L}_k} - \frac{2\gamma b_{k+1}^2}{\mathcal{N}_k}\right)\|\nabla l(\theta_{k+1})\|^2 \\ &- \left(1 - \frac{\bar{L}_k\gamma\beta a_k}{\mathcal{N}_k}\right)\frac{\gamma\beta^2 a_k^2}{\mathcal{N}_k}\|\nabla l(\theta_k)\|^2 \\ &- [\beta - a_k\beta(1-\beta)^2]\bar{L}_k\|\bar{\theta}_k - \nu_k\|^2 \\ &- \left[\frac{\sqrt{b_{k+1}}}{\sqrt{2\bar{L}_k}}\|\nabla l(\theta_{k+1})\| - 2\sqrt{2\bar{L}_k}\|\bar{\theta}_k - \nu_k\|\right]^2 \\ &- 4(\sqrt{b_{k+1}} - b_{k+1})\|\bar{\theta}_k - \nu_k\|\|\nabla l(\theta_{k+1})\| \\ &- (8+\beta)\|\bar{\theta}_k - \nu_k\|^2\Bigg\} \leq 0 \end{aligned} \tag{31}$$

由（31）可知：

$$\Delta V_k \leq \frac{b_{k+1}}{\mathcal{N}_k}\{-2(l(\theta_{k+1}) - l(\theta^*)\} \leq 0 \tag{32}$$

将 ΔV_k 中从 t_0 到 T 的各项收集起来，并令 $T \to \infty$，可以看出 $l(\theta_{k+1}) - l(\theta^*) \in \ell_1 \cap \ell_\infty$，因此 $\lim_{k\to\infty} l(\theta_{k+1}) - l(\theta^*) = 0$. □

IV. 数值研究

A. 学术示例

我们考虑之前的同一个示例，该示例得出了以下约束凸优化问题：

$$\begin{aligned} &\min \ \log(e^{x_1} + e^{4-\sqrt{1-x_1^2}}) \\ &\text{s.t.} \ -1 \leq x_1 \leq 1 \end{aligned} \tag{33}$$

（33）中的盒约束旨在确保目标函数始终为实值。虽然我们可以

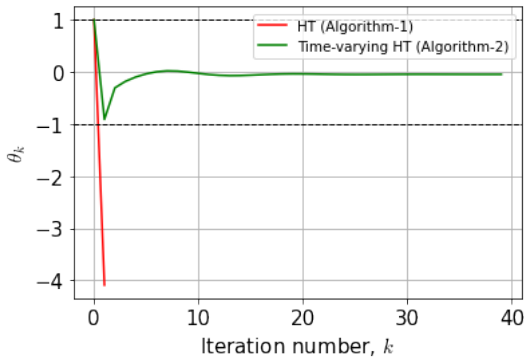

图 1. 使用算法 2 时 θ 的收敛情况（针对问题 (33)）；算法 1 无法收敛

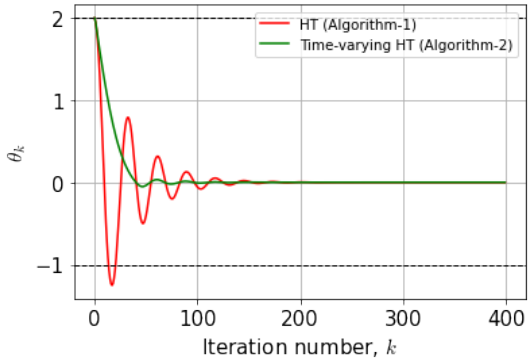

图2. 算法-2的约束满足情况。算法-1生成的迭代序列违反了盒约束 [-1,2]。与算法-1相比，算法-2表现出更小幅度的振荡。

选择适当的步长以确保 $-1 \leq x_1 \leq 1$。对于求解 (33)，并不能保证存在能够确保满足这一约束的步长。算法 2 通过采用定理 III.3 中指定的适当的 γ、β、a_k 和 b_{k+1}，解决了这一问题。图 1 展示了使用算法 2 时参数 θ（等价于 (33) 中的 x_1）在选定的 γ，β 值下的收敛情况。需要注意的是，在图 1 中，算法 1 未能收敛。这说明了定理 III.3 的重要价值，也是本文的另一项贡献。

B. Nesterov 的可证明困难问题

我们考虑一个已被证明是困难的问题，它对应于一个强凸函数（详情见 [6]）。

$$l(\theta) = \log\left(c_k e^{d_k\theta} + c_k e^{-d_k\theta}\right) + \frac{\mu}{2}\|\theta - \theta_0\|^2. \qquad (34)$$

这里，c_k 和 d_k 是选取为 $c_k = \frac{1}{2}$ 和$d_k = 1$的正标量。该函数在 $\theta^* = 0$处有唯一的最小值。在所有情况下，$\mu = 10^{-4}$，初始值均选为$\theta_0 = 2$，约束选为 $\theta_{min} = -1$ 和$\theta_{max} = 2$。从图 2 可以清楚看出，使用算法 2 时，参数在保持于$[\theta_{min}, \theta_{max}]$范围内的同时收敛到最优值。其收敛速度快于算法 1，且算法 2 的振荡较少，这是一个值得关注的优点。

V. 结论与未来工作

在本研究中，我们扩展了此前关于使用高阶调节器求解约束凸优化的研究。我们提出了一种新的高阶调节器，能够处理约束和非凸性，并保证收敛。我们提供了学术示例和数值模拟，以验证论文中提出的定理，这些定理涉及高阶调节器的加速收敛和可行性保证。本研究建立了一个框架，用于探索能够从更快收敛中受益的约束优化潜在应用，例如在某些情况下可重构为凸优化问题的神经网络训练 [15]，，以及如 [16], [17] 所示使用神经网络求解最优潮流（OPF）问题。

参考文献

[1] J. E. Gaudio、A. M. Annaswamy、M. A. Bolender、E. Lavretsky 和 T. E. Gibson，“自适应系统的高阶调节器”，*IEEE*控制系统快报，第 1–1 页，2020 年 6 月。[2] Y. Nesterov，凸优化讲义。Springer International Publishing，2018 年，第 137 卷。[3] W. Su、S. Boyd 和 E. J. Cand`es，“用于建模 Nesterov加速梯度法的微分方程：理论与见解”，机器学习研究杂志，第 17 卷，第 153 期，第 1–43 页，2016 年。[4] S. Evesque、A. Annaswamy、S. Niculescu 和 A. Dowling，“一类时滞系统的自适应控制”，动力系统、测量与控制杂志，第 125 卷，第 2 期，第 186–193 页，2003 年。[5] A. S. Morse，“用于线性与非线性系统自适应控制的高阶参数调节器”，载于系统、模型与反馈：理论与应用。Springer，1992 年，第 339–364 页。[6] J. M. Moreu 和 A. M. Annaswamy，“一般凸函数的稳定高阶调节器”，*IEEE*控制系统快报，第 6 卷，第 566–571 页，2022 年。[7] P. Srivastava 和 J. Cort´es，“通过连续可微惩罚函数实现等式约束凸优化的 Nesterov加速”，*IEEE*控制系统快报，第 5 卷，第 2 期，第 415–420 页，2021 年。[8] M. Fazlyab、A. Koppel、V. M. Preciado 和 A. Ribeiro，“约束凸优化对偶方法的变分方法”，载于*2017*年美国控制会议（*ACC*），2017 年，第 5269–5275 页。[9] Y. Xu，“线性约束复合凸规划的加速一阶原始-对偶近端方法”，*SIAM*优化杂志，第 27 卷，第 3 期，第 1459–1484 页，2017 年。[10] A. Parashar、P. Srivastava、A. M. Annaswamy、B. Dey 和 A. Chakraborty，“一类带约束优化问题的加速算法”，载于*2022*年*IEEE*第*61*届决策与控制会议（*CDC*），2022 年，第 6960–6965 页。[11] P. L. Donti、D. Rolnick 和 J. Z. Kolter，“DC3：一种带硬约束优化的学习方法”，载于国际学习表征会议，2021 年。[12] S. Boyd 和 L. Vandenberghe，凸优化。剑桥大学出版社，2004 年。[13] S. G. Krantz 和 H. R. Parks，隐函数定理导论。纽约州纽约市：Springer New York，2013 年，第 1–12 页。[14] M. Furi 和 M. Martelli，“罗尔定理的多维版本”，美国数学月刊，第 102 卷，第 3 期，第 243–249 页，1995 年。[15] M. Pilanci 和 T. Ergen，“神经网络是凸正则化项：双层网络的精确多项式时间凸优化表述”，载于第*37*届国际机器学习会议论文集，2020 年 7 月，第 7695–7705 页。[16] X. Pan、T. Zhao、M. Chen 和 S. Zhang，“DeepOPF：用于安全约束直流最优潮流的深度神经网络方法”，*IEEE*电力系统汇刊，第 36 卷，1735，2021 年 3 月，第 1725– 页，无期号。[17] X. Pan、T. Zhao 和 M. Chen，“DeepOPF：用于直流最优潮流的深度神经网络”，2019 年 10 月，第 1–6 页。