arXiv:2305.04438v1 [cs.DS] 8 May 2023

Max-kAND 问题的无偏算法

Noah G. Singer*

2023年5月9日

摘要

受近期关于约束满足问题（约束满足问题）的流式算法研究启发，我们定义并分析了用于 Max-k AND 问题的 *oblivious algorithms* 。这推广了 Feige 和 Jozeph（Algorithmica '15）对最大有向割的无偏算法的定义；最大有向割是 Max-2AND 的一个特例。无偏算法以仅取决于一个称为变量 *bias*的量的概率对每个变量进行舍入。

对于每种无偏算法，我们都设计了一个所谓的 *factor-revealing* 线性规划（LP），以刻画其最坏情形实例；这是对 Feige 和 Jozeph 为最大有向割提出的方法的推广。随后，我们不再沿用他们的做法，而是对这些（无穷多个！）线性规划进行了完全显式的分析。特别是，我们证明，对于所有 k，用于 Max-k AND 的无偏算法都能确定性地优于一类特殊的算法，我们称之为"超无偏"算法。

我们的结果对流式算法具有重要意义：作为对 Saxena、Singer、Sudan 和 Velusamy（SODA'23）关于最大有向割结果的推广，我们证明，对于 *infinitely many* CSP，流式模型之间存在某些分离结果：对于已知在 $o(\sqrt{n})$ 空间内达到最优的 Max-kAND 问题的 *every* k, $O(\log n)$ 空间草图算法，在以下条件下可以获得更优结果：(a) 在随机排序假设下，使用 $O(\log n)$ 空间；(b) 在最大度数为 D 的假设下，使用 $O(n^{1-1/k}D^{1/k})$ 空间。即使对于此前已知的 Max-DICUT 情形，我们的解析证明也无需借助计算机，便能更全面地呈现这些分离结果。

目录

1 引言 **2**
1.1 背景与上下文.2 1.2 结果.3 1.3 技术概述.4 1.4 未来问题.5

2 定义： Max-kAND 和无感知算法 **6**

3 无偏算法的线性规划框架 **8**
3.1 子句模式.8 3.2 因子揭示线性规划.8

4 通过分析"定理 1.5对偶松弛量"进行证明 **12**
4.1 一个充分条件.12 4.2 通过分析"松弛量"证明 定理 1.5.13 4.3 一个"双侧伯努利不等式"：证明 引理 4.4 .16 4.4 "松弛量"分析：证明引理 4.5 和 4.6 .18

5 "超无知"算法的局限性：证明 定理 1.4 **21**

6 对流式算法的启示 **24**

*美国宾夕法尼亚州匹兹堡卡内基梅隆大学计算机科学系。获得 NSF 研究生研究奖学金（奖项编号 DGE2140739）资助。电子邮箱：ngsinger@cs.cmu.edu。

1 引言

在这项工作中，我们研究了一类受限但自然的随机化算法，称为无偏算法，用于一类约束满足问题（约束满足问题），称为Max-kAND ，适用于 $k \geq 2$。在这个问题中，算法接收一个由 m 个约束组成的列表，这些约束涉及 n 个布尔变量；每个约束都为 k 个 n 变量指定期望的值；目标是尽可能满足最高比例的约束。[1] 我们首先非正式地介绍这些问题和算法，并讨论这项工作的背景和动机。

1.1 背景与背景介绍

Max-kAND 是“表达能力最强”的布尔约束满足问题：每个约束都明确指定其 k 变量必须赋什么值。从某种意义上说，这使它成为 k元布尔约束满足问题的“通用”形式。具体而言，正如 Trevisan [Tre98a], 所观察到的，任意一个具有 k 元、且有 r 个满足赋值的布尔谓词 ϕ，都可以转换为 Max-kAND 约束的 r 个“互不相交”应用；这一变换将 Max-CSP(ϕ) 的一个实例转化为 Max-kAND 的一个实例，并使值恰好降低 r倍。进而，这意味着 Max-kAND 的算法可以近似 k位概率可检验证明（PCP）验证器的接受概率。因此，许多研究开发了 Max-kAND 的算法 [Tre98a; Has04; Has05; CMM09] ，也给出了近似问题的 NP 困难性结果 [Tre98b; ST98; ST00; EH08; ST09]；我们现在知道，假设 P $\neq$ NP[CMM09; ST09], $(k/2^k)$-近似是多项式时间内所能达到的最佳结果。

研究者对 Max-kAND 的重要特殊情形给予了更多关注。一个尤为重要的例子是最大有向割问题，它是 Max-2AND 的一个特殊情形，其中每个约束的形式为“$x \wedge \neg y$”。最大有向割也可以视为一个有向图优化问题，其目标是找到一个有向割 (S, T)，使满足 $s \in S$和 $t \in T$ 的边 (s, t) 数量最大。针对最大有向割（有时也包括 Max-2AND）的近似算法见 [GW95; FG95; MM01; LLZ02]，而其近似困难性则见 [H$\mathring{\text{a}}$as01]。Max-3AND 见 [Zwi98; TSSW00]。

Max-kAND 的重要性、关于其多项式时间可近似性的广泛研究，以及其约束的“表达能力”，促使研究者深入探讨它在受限算法设定下的可近似性。例如，Trevisan [Tre98a] 证明，针对 Max-kAND 的自然线性规划（LP）松弛，其近似比比平凡的（均匀随机舍入）算法高出两倍；并且，该线性规划的“良好”结构使其能够通过分布式算法（近似地）求解。特别是，研究者已在各种受限的算法框架和模型中广泛研究最大有向割，包括“组合”算法 [HZ01], 、谱划分算法 [ZDW+21]、局部搜索算法 [Ali96; Ali97], 、并行算法 [BEF22], 、近线性时间算法 [Ste10], 以及在线算法 [BL12]。

在流式算法的研究背景下，过去十年间，关于Max-DICUT在多种模型下的近似性，研究成果不断涌现 [GVV17; CGV20; SSSV23b; SSSV23a]。尤其是，Saxena、Singer、Sudan 和 Velusamy 最近的研究 [SSSV23b; SSSV23a] 表明，Max-DICUT 展现出一种此前在任何约束满足问题中都未曾发现的现象：在某些流式处理场景下，它存在近似算法，其效果优于较弱场景下的最优算法。这些研究的关键在于 Feige 和 Jozeph 早先的一项研究 [FJ15] ，该研究为Max-DICUT定义并分析了一类称为“无偏”的简单算法。本文关注的是将无偏算法推广到Max-kAND，以及它们对流式算法的影响。

在（图论视角下的）最大有向割问题中，无偏算法会对每个顶点进行随机舍入，且只取决于该顶点的偏置，即其入度与出度之间的（相对）差值。推广到 Max-kAND 的自然做法，是设计一种算法，对每个顶点进行随机舍入，且只取决于该顶点在实例中正向出现次数与负向出现次数之间的（相对）差值。[2] 这类算法足够简单，可以在各种在线或分布式环境中实现，而这种简洁性也使其在数据流场景中非常有用。

[1]等价地，每个约束都是由 k 个文字构成的析取。[2]或者，更一般地，对于加权实例，可以比较该文字以正向形式出现的子句与以负向形式出现的子句的总权重。

在另一项近期工作中，Boyland、Hwang、Prasad、Singer 和 Velusamy [BHP+22] 研究了 Max-k AND 问题（以及其他布尔约束满足问题）的流式近似性。他们通过分析 Chou、Golovnev、Sudan 和 Velusamy 提出的算法与下界框架 [CGSV21a], ，证明了一个最优的 $o(\sqrt{n})$-空间草图算法对于 Max-kAND 问题而言，“对应于”（宽泛地说）本文所称的超无偏算法。这类算法是无偏算法的一个子类，其舍入仅依据哪一方更常见，即正出现还是负出现，而不考虑多出多少。例如，对于特殊情形 Max-DICUT，最优算法实现的近似比为 $4/9$，对应于这样一种超无偏算法：对于出度超过入度的顶点，以概率 S将其舍入到割的 $2/3$ 侧。

当前工作的关键技术要素，是定义并分析所谓的因子揭示型线性规划（LP）。在这类线性规划中，可行解编码了所研究问题的实例（即 最大-k与）；当我们在指定类别中固定一个算法（即无偏算法）时，目标函数会“揭示”该算法在任意给定实例上所达到的近似比。Jain、Mahdian、Markakis、Saberi 和 Vazirani 首先对设施选址问题中的类似规划进行了深入研究[JMM+03]，此类规划也已在其他背景下得到研究，例如在线二分图匹配 [MY11]。我们的线性规划是 Feige 和 Jozeph 为 [FJ15] 开发的规划的推广，适用于 最大-DICUT。

Feige 和 Jozeph [FJ15] 通过对其线性规划进行计算机分析，证明存在一种用于最大有向割的 0.483 近似无偏算法。 $0.483 > 4/9$ 这一事实——也就是说，对于最大有向割，无偏算法优于$o(\sqrt{n})$空间的流式算法——正是 [SSSV23b; SSSV23a] 的工作中用于证明在更强的流式模型下存在更优近似算法的关键。不过， [FJ15] 的这一结果被当作黑箱使用。我们认为，我们的方法通过对比“超无偏”算法与更一般的“无偏”算法，并从解析视角研究相应的线性规划，能更自然、更系统地解释为什么最大有向割存在这些更优近似算法；同时也意味着，对所有 k，最大-kAND 同样如此。

1.2 结果

接下来，我们陈述本文的结果。按照我们的记法，Max-kAND 问题的无偏算法记作$\mathtt{Obl}^{\mathbf{t}}{}_{,k}{}^{\mathbf{p}}$，其中 $\mathbf{t}$ 和 $\mathbf{p}$ 分别表示一个偏置划分，它将可能偏置的空间（即区间 $[-1,+1]$）划分为离散区间；以及一个舍入向量$\mathbf{p}$，它指定了对每个区间中的变量进行舍入的概率。我们用 $\alpha(\mathtt{Obl}^{\mathbf{t}}{}_{,k}{}^{\mathbf{p}})$ 表示该算法达到的近似比。（这些对象的正式定义见下文 §2 。）

为恰当地陈述定理，我们先定义一些相关量。这些量最初出现在 Boyland等人关于kMax- [AND 的小空间草图算法的研究中。我们定义

$$\gamma_k \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{1}{k} & k \text{ odd} \\ \frac{1}{k+1} & k \text{ even}, \end{cases} \tag{1.1}$$

and

$$p_k^* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(1+\gamma_k) \tag{1.2}$$

and

$$\alpha_k^* \stackrel{\text{def}}{=} 2 \cdot (p_k^*(1-p_k^*))^{\lfloor k/2 \rfloor}. \tag{1.3}$$

也就是说，对于偶数 k $\alpha_k^* = 2^{-(k-1)}\left(1-1/(k+1)\right)^{k/2}\left(1+1/(k+1)\right)^{k/2}$ $1/k^{(k-1)/2}\,1+1/k^{(k-1)/2}$ $k=2$ $p_k^*=2/3$ $\alpha_k^*=4/9$ k $\alpha_k^* = 2^{-(k-1)}\left(1-\right.$，$(())(())$，而对于奇数，$()()$。特别地，在 时，我们有 和。

我们的第一个定理指出，Max-kAND 的最优超无偏算法可达到比率 α_k^*，且该算法以概率 p_k^* 进行舍入：

定理 1.4（超无偏算法的刻画）。对于每个 $k \geq 2$，都存在唯一的超无偏算法 $\mathrm{Obl}^{\mathbf{t}}{}_{,k}{}^{\mathbf{p}}$，其比率为 $\alpha(\mathrm{Obl}^{\mathbf{t}}{}_{,k}{}^{\mathbf{p}}) = \alpha_k^*$，而所有其他超无偏算法的表现都严格更差。（特别地，对于 $\mathbf{t} = (0,1)$，每个舍入向量 $\mathbf{p} = (p)$ 都满足 $\alpha(\mathrm{Obl}^{\mathbf{t}}{}_{,k}{}^{\mathbf{p}}) \leq \alpha_k^*$，且等号成立当且仅当 $p = p_k^*$。）

我们的主要定理随后指出，可以通过使用其他无偏算法来改进这些超无偏算法，而且事实上，只需考虑最优超无偏算法的轻微“扰动”即可：

定理 1.5（主定理：更优的无偏算法）。对于每个 $k \geq 2$，都存在一个偏置划分 t 和一个舍入向量 p，使得无偏算法 $\mathrm{Obl}^{\mathbf{t}}{}_{,k}{}^{\mathbf{p}}$ 达到 $\alpha(\mathrm{Obl}^{\mathbf{t}}{}_{,k}{}^{\mathbf{p}}) \gtrsim \alpha_k^*$。（特别地，存在 $\epsilon^* > 0$，使得对于所有 $0 < \epsilon \leq \epsilon^*$，都存在 $0 < \delta < 1$，满足 $\mathbf{t} = (\delta, 1)$ 且 $\mathbf{p} = (p_k^* + \epsilon)$，并有 $\alpha(\mathrm{Obl}^{\mathbf{t}}{}_{,k}{}^{\mathbf{p}}) \gtrsim \alpha_k^*$。）

这两个定理都是通过分析某个自然线性规划的对偶问题来证明的。可以说，这种“对偶”视角将针对 Max-DICUT 的小空间草图算法在 [CGV20] 中以及针对 Max-kAND 在 [BHP+22] 中的临时性分析系统化了。事实上，这些论文中的分析考察了某些线性不等式系统，并采用了“初等”推理方法（即取非负线性组合）；而对偶线性规划这一工具恰好能够刻画这种类型的推理。

我们的结果对于流式算法还有如下推论，推广了 Saxena、Singer、Sudan 和 Velusamy [SSSV23b] 在特殊情形 Max-DICUT 下建立的联系。我们称一个 Ψ Max-kAND 实例属于输入形式，如果它是无权的（即每个子句的权重均为 1），不过允许同一子句有多个副本。这些实例将作为我们算法的输入，不过这基本上不失一般性，因为一般实例可以通过标准论证“舍入”为此类实例。

定理 1.6（随机顺序流式算法）。对于所有 $k \geq 2$，存在 $\alpha > \alpha_k^*$，使得对于所有$\epsilon > 0$，以下结论成立：存在一个占用 $O(\log n)$ 空间的流式算法，对于每个具有输入形式的 Max-kAND 实例 Ψ，其中包含 n 个变量和 poly(n) 个子句，其输入为以随机顺序排列的数据流中的 Ψ 的子句；该算法以概率 $99/100$ 输出 Ψ 的 Max-kAND 值的 $(\alpha - \epsilon)$-近似。

定理 1.7（有界度流式算法）。对于所有 $k \geq 2$，存在 $\alpha > \alpha_k^*$，使得对于所有 $\epsilon > 0$，以下结论成立：对于所有 $D \geq 2$，存在一个占用 $O(D^{1/k} n^{1-1/k} \log n/\epsilon^{2/k})$ 空间的流式算法，对于每个具有输入形式的实例 Ψ，其中包含 n 个变量且最大度为 $\leq D$（即每个变量包含在 $\leq D$ 个子句中），其输入为以对抗性顺序排列的数据流中的 Ψ 的子句；该算法以概率 $99/100$ 输出 Ψ 的 Max-kAND 值的 $(\alpha_k^* + \epsilon)$-近似。

这两项结果都很有意思，因为正如 Boyland 等人 [BHP+22]（分析了 Chou 等人 [CGSV21a]提出的算法族和下界）所示，对于对抗性排序的数据流，存在空间复杂度为 $O(\log n)$ 的流式算法，能够输出（任意接近）α_k^*-近似解；而在 $o(\sqrt{n})$ 空间内，这是可达到的最佳近似比。[3] 因此，我们的结果表明，放宽对抗性排序假设或空间上界，就能得到更好的算法（后者需要满足有界度假设）。Saxena、Singer、Sudan 和 Velusamy [SSSV23a] 针对最大有向割的特殊情形，证明了与定理 1.6 和 1.7 类似的结果；在这一情形下，这些结果与 Chou、Golovnev 和 Velusamy [CGV20]提出的算法和下界形成了对比。

我们还列出了通过计算机搜索和线性规划求解器计算得到的一些明确改进的近似比，见 表 1。

1.3 技术概述

本文的第一个主要技术步骤是：针对每个无偏算法 $\mathrm{Obl}^{\mathbf{t}}{}_{,k}{}^{\mathbf{p}}$（由偏置划分 t 和舍入向量 p 定义），构造一个刻画 $\mathrm{Obl}^{\mathbf{t}}{}_{,k}{}^{\mathbf{p}}$ 近似比的线性规划（LP）；该 LP 在下文的引理 3.4 中给出，是对 [FJ15]中为最大有向割问题的无偏算法构造的 LP 的推广。该 LP 结构简单：每个可行解都对应于 Max-kAND 的一族特定实例，在这些实例上，$\mathrm{Obl}^{\mathbf{t}}{}_{,k}{}^{\mathbf{p}}$ 对 Max-kAND 值给出相同的近似，而目标值等于该近似值。具体而言，我们将根据变量的偏置和取反情况，为 Max-kAND 实例 Ψ 中的每个子句指定一个“模式”，并利用这样一个观察：任一子句被满足的概率仅取决于该模式。

接下来，我们将为这个原始“原始问题”线性规划构造对偶线性规划（见下文的引理 3.5）。我们在这里能大获裨益，正是因为无偏算法的性能可以用线性规划来刻画：借助线性规划对偶性的神奇力量，我们可以构造性地证明无偏算法表现良好：对偶算法的可行解为无偏算法所达到的比率提供了上界。

[3] 严格来说，目前已知该下界仅适用于一类称为 *sketching* 算法的流式算法，但定理 1.7中的算法似乎正属于此类算法。

k	上界	超盲	先前	新型扰动	新型分段线性
2	$1/2 = 0.5$	$4/9 \approx 0.4444$	0.4835 [FJ15]	0.4457	0.4844 @ (200, 0.5, 1.0)
3	$1/4 = 0.25$	$2/9 \approx 0.2222$		0.2226	0.2417 @ (30, 0.7, 1.0)
4	$1/8 = 0.125$	$72/625 = 0.1152$		0.1157	0.1188 @ (11, 0.8, 0.8)
5	$1/16 = 0.0625$	$36/625 \approx 0.0576$		0.0578	0.0589 @ (7, 0.95, 0.8)

表 1：上表展示了 Max-kAND 在 $k \in \{2, \ldots, 5\}$ 下的具体近似比。第二列给出了所有无偏算法（更广义地说，所有“局部”算法）在 Max-kAND 上近似比的平凡上界 2^{-k}（见下文观察 2.5）。第三列给出了 α_k^*，即最佳超无偏算法（以及最佳 $o(\sqrt{n})$-空间草图算法 [BHP+22]）达到的近似比。第四列指出，此前唯一已知无偏算法优于超无偏算法的约束满足问题是 Max-2AND（出自 [FJ15]）。第五列列出了我们“扰动超无偏”算法的近似比，如定理 1.5 中 $\delta = 0.01$ 和 $\epsilon = 0.001$ 所示。最后，第六列报告了我们构造的复杂得多的算法所达到的比率。这些算法由三元组 (ℓ, x, y) 参数化，其中 ℓ 指定偏置类别的数量，而 x, y 指定一个舍入向量。我们选择 ℓ，使变量数量（约为 $(2\ell)^k$；见下文 §3.1）不超过数十万，以便线性规划求解器能在合理时间内运行。偏置划分将 $[0, 1]$ 均匀划分为 ℓ 个区间；仿照 [FJ15 的证明定理 1.3]，中的算法，我们的舍入向量采用“双段分段线性函数”：向量的第一段截至偏置 x，在概率 1 2 与 y 之间线性插值；第二段则在概率 y 与 1 之间线性插值。最后两列中的数值由 Python 脚本和线性规划求解器 glpk 计算得出；代码可在线获取：https://github.com/singerng/oblivious-csps。对于最后一列，参数 (x, y) 是通过网格搜索选取的；求解最终的线性规划在 2021 年款 MacBook Pro 上耗时 1 小时 56 分钟。

$\mathrm{Obl}^{\mathrm{t}}_{,\ k}{}^{\mathrm{P}}$，对偶线性规划的可行解为比率提供下界！换言之，要证明一个无偏算法在所有实例上都表现良好，只需构造一个可行的对偶解即可。

为了证明定理 1.5，我们现在希望比较超无偏算法及其“扰动”的对偶线性规划，并证明在后一种情况下我们可以得到“改进的”可行解。事实证明，在这种设置下，原始线性规划有 $O(k^5)$ 个变量，且只有 7 个不等式约束；因此，对偶线性规划有 7 个变量和 $O(k^5)$ 个不等式约束。我们作出关键观察：在超无偏情形下，存在一个稀疏的最优对偶解：它仅由 3 个变量支撑。由于该对偶解非常简单，我们可以通过对所有 k 建立某个“双边伯努利不等式”（引理 4.4）来解析地证明其可行性。此外，该不等式将表明，在超无偏情形下，代入我们的特殊解时，$O(k^5)$ 个对偶约束中除 6 个以外的所有约束都具有松弛量！因此，对于非常小的 δ值，只需以一种使这 6 个“核心”约束得到严格满足的方式，对该特殊解进行轻微扰动即可，而这正是我们在下面的引理 4.5 和4.6 中所做的工作。这需要基于某些初等不等式进行细致分析，并使用诸如以下简单不等式：对于所有 $\frac{1-\epsilon}{1-k\epsilon} > \frac{1+\epsilon}{1+k\epsilon}$，$\epsilon > 0$ 以及 $k > 1$。

1.4 未来问题

流式算法。 我们推测，定理 1.7 中的有界度假设可以放宽，从而得到一个针对 $\widetilde{O}(n^{1-1/k})$-空间的算法，适用于所有实例（输入形式包含 poly(n) 个子句）。具体而言，Saxena、Singer、Sudan 和 Velusamy [SSSV23a] 提出了草图技术，使得对Max-DICUT也能给出这样的保证；而他们早期的工作则给出了对应的有界度版本 [SSSV23b]；或许这些思路可以推广到Max-kAND。

更多约束满足问题。 将本文的框架扩展到更多约束满足问题也很有趣，包括其他布尔约束满足问题，以及定义在更大字母表上的约束满足问题。据我们所知，甚至可以合理地认为，每个允许非平凡 $O(\log n)$-空间草图算法的约束满足问题（如 [CGSV21b] 中所分析的）也允许“无偏式”近似算法，进而带来更优的亚线性空间流式算法。一个不错的起点是分析对称布尔约束满足问题，因为在这种情形下

我们知道，所有不支持满足赋值的一元分布的约束满足问题（CSPs），都存在此类非平凡的草图算法（参见 [CGSV21a，命题 2。10]）；这一类包括 Max-kAND，我们在本文中针对该问题得出了此类结果。不过，我们也可以期待针对其他此类约束满足问题（CSPs）开发出改进的“无感知风格”算法，例如对称阈值函数。

“均匀”困难实例。在最大有向割的特殊情形中，Feige 和 Jozeph[FJ15] 构造了一个可称为最大有向割均匀困难实例的对象：对于这个单一实例，每种无偏算法所达到的近似比都小于 0.49。（这强化了来自一个“平凡”实例（即一条双向边）的$1/2$ 界；另见下文观察 2.5 。）构造最大-kAND 的类似实例会很有意思，$k \geq 3$，尤其是如果这种构造可以通过解析方法实现。我们注意到，这样的对象对应于引理 3.4 中的线性规划的一个可行解，且对于每一种舍入向量的选择，其目标值都严格小于$1/2$。因此，对于最大-kAND，任何证明都需要证实某个次数为 k 的多项式在 $p \in [0,1]$ 上有小于$1/2$的下界。

最优舍入曲线？为了构造一个 0.483-近似无偏算法来处理 最大-有向割，Feige 和 Jozeph [FJ15] 使用 sigmoid 形状的分段线性函数（的离散化）对顶点进行舍入：对于偏置为 $b \in (0,1]$ 的顶点，以概率舍入为 1

$$p(b) = \begin{cases} \frac{1}{2} + b & 0 \leq b \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \leq b \leq 1 \end{cases}.$$

但是，是否可能以解析方式计算出最优舍入函数（以及它是否唯一）？给定将偏置离散化为区间的任意方式，原则上可以枚举该线性规划的所有基本可行解，然后计算最佳舍入向量；也就是说，每个舍入向量都会为该线性规划诱导出一个目标函数，而最佳舍入向量则使所有基本可行解中的最小目标值最大化。为此，了解该线性规划多面体的顶点，以及是否存在某种简单的方法来枚举这些顶点，或许会有所帮助。

概要

我们在 Max-kAND 中正式定义无偏算法，并在 §2 中建立无偏算法近似比的线性规划刻画，以及一些其他基本工具；在 §3 中分析对偶线性规划，以证明 定理 1.5 （见 §4）。我们通过分析原始线性规划证明 定理 1.4，具体见 §5。最后，我们在 §6 中证明关于流式算法的定理（定理 1.6 和 1.7）。

2 定义：Max-kAND 与无偏算法

现在，我们给出 Max-kAND 问题和无偏算法的正式定义。在本文余下部分，我们采用一种（非标准的）约定，将 Max-kAND 中的变量视为取 $\{-1,+1\}$值；这样做是为了方便定义偏置等类似概念。

定义 2.1（Max-kAND）。含有 n 个变量的 Max-kAND 问题实例由一系列约束 $C_1,\ldots,C_m$ 给出，其中 $C_j = (V_j^+, V_j^-, w_j)$ 由“正变量” $V_j^+ \subseteq [n]$ 和“负变量” $V_j^- \subseteq [n]$ 组成，且满足 $V_j^+ \cap V_j^- = \emptyset$ 和 $|V_j^+ \cup V_j^-| = k$，并带有权重 $w_j \geq 0$。该问题的一个赋值表示为 $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n) \in \{\pm 1\}^n$，此赋值的值为

$$\mathsf{val}_\Psi(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_{j=1}^m \mathbb{I}[x_v = +1\ \forall v \in V_j^+ \wedge x_v = -1\ \forall v \in V_j^-] \cdot w_j}{\sum_{j=1}^m w_j}.$$

实例 Ψ 的值为

$$\mathsf{val}_\Psi \stackrel{\text{def}}{=} \max_{\mathbf{x} \in \{\pm 1\}^n} \mathsf{val}_\Psi(\mathbf{x}).$$

接下来，为了定义实例中变量的偏置，对于任意变量 $v \in [n]$，我们定义其正权重和负权重：

$$w_\Psi^+(v) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{m} \mathbb{I}[v \in V_j^+] \cdot w_j \text{ and } w_\Psi^-(v) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{m} \mathbb{I}[v \in V_j^-] \cdot w_j. \tag{2.2}$$

然后，我们将变量的偏置定义为：[4]

$$\mathsf{bias}_\Psi(v) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{w_\Psi^+(v) - w_\Psi^-(v)}{w_\Psi^+(v) + w_\Psi^-(v)}. \tag{2.3}$$

接下来，我们考虑将可能的偏置空间 $[-1,1]$ 划分为标记为 $\{-\ell,\dots,+\ell\}$ 的 $L = 2\ell+1$个区间的对称方式。这种划分的数据是一个“偏置划分”向量 $\mathbf{t} = (t_0,\dots,t_\ell)$，满足 $0 \le t_0 < \cdots < t_{+\ell} = 1$。我们将第 i 个区间记为 $\mathsf{Int}_i^{\mathbf{t}}$，并且对于 $i \ge 1$，令 $\mathsf{Int}_{+i}^{\mathbf{t}} = (t_{i-1}, t_i]$ 和 $\mathsf{Int}_{-i}^{\mathbf{t}} = [-t_i, -t_{i-1})$；第 0 个区间为中心 $[-t_0, t_0]$。因此，区间 $\mathsf{Int}_{-\ell}^{\mathbf{t}}$、…、$\mathsf{Int}_0^{\mathbf{t}}$、…、$\mathsf{Int}_{+\ell}^{\mathbf{t}}$ 将可能偏置的区间 $[-1,1]$ 划分为若干部分。[5] 为方便记号起见，我们令 t_i^+ 和 t_i^- 分别表示 $\sup \mathsf{Int}_i^{\mathbf{t}}$ 和 $\inf \mathsf{Int}_i^{\mathbf{t}}$ 的上界和下界。（因此，例如，对于 $i \ge 0$，有 $t_i^+ = t_i$；而对于 $i < 0$，有 $t_i^+ = t_{-(i+1)}$。）我们还考虑基于这些类别对顶点进行舍入的对称方式。这种舍入方案的数据是一个概率“舍入向量” $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_\ell)$。给定这些内容，我们可以定义“$L$-类”无偏算法：

定义 2.4（Max-kAND 的无偏算法）。令 $L = 2\ell+1 \ge 3$ 为一个奇数。令 $\mathbf{t} = (t_0,\dots,t_\ell)$ 为一个偏置划分，$\mathbf{p} = (p_1,\dots,p_\ell)$ 为一个舍入向量。对于任意 $k \ge 2$，Max-kAND 的无偏算法 $\mathsf{Obl}_k^{\mathbf{t},\mathbf{p}}$ 的行为如下：给定一个实例 Ψ，对于每个变量 $v \in \{1,\dots,n\}$独立地：

- 如果 $\mathsf{bias}_\Psi(v) \in \mathsf{Int}_{t_0}$，则以概率 $\frac{1}{2}$ 赋值为 $x_v \mapsto 1$，以概率 $\frac{1}{2}$ 赋值为 $x_v \mapsto -1$。
- 如果 $\mathsf{bias}_\Psi(v) \in \mathsf{Int}_{t+i}$ 对于 $i \ge 1$，则以概率 p_i 赋值为 $x_v \mapsto 1$，以概率 $1-p_i$ 赋值为 $x_v \mapsto -1$。
- 如果 $\mathsf{bias}_\Psi(v) \in \mathsf{Int}_{t-i}$ 对于 $i \ge 1$，则以概率 $1-p_i$ 赋值为 $x_v \mapsto 1$，以概率 p_i 赋值为 $x_v \mapsto -1$。

我们用 Ob 表示 $\mathsf{l}^{\mathbf{t}}{}_k{}^{\mathbf{p}}(\Psi)$ 表示该舍入方案所产生赋值的期望值，[6] 而 b y

$$\alpha(\mathsf{Obl}_k^{\mathbf{t},\mathbf{p}}) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_\Psi \frac{\mathsf{Obl}_k^{\mathbf{t},\mathbf{p}}(\Psi)}{\mathsf{val}_\Psi}$$

表示该算法所达到的近似比。

在最简单且有意义的情形下，我们有 $\ell = 1$，$\mathbf{t} = (0,1)$，以及 $\mathbf{p} = (p)$。这些算法称为超无视算法，它们忽略每个变量偏置的大小，只根据符号进行舍入：例如，负偏变量以 $1-p$ 的概率舍入为 1。

我们指出，对无偏算法的这一概念有几种自然的推广方式。首先，我们可以考虑非“反对称”的舍入函数，即以不互补的概率对偏置为$+b$和偏置为$-b$的变量进行舍入。具体而言，对于 $b = 0$，偏置为 0 的变量可以按非均匀概率进行舍入；然而，在简单实例上，这类算法的表现严格劣于任何反对称算法（见下文观察 2.5）。此外，我们还可以使用连续舍入函数，而不是将偏置范围划分为离散区间，但这类算法不便于通过线性规划分析其近似比。

观察 2.5。存在一个简单的下界构造，表明对于 Max-kAND，任何无偏算法都无法达到优于 $2^{-(k-1)}$ 的比率。（注意，最优超无知比率 α_k^* 等于这个上界乘以一个“折扣”因子。）考虑任意 k：在两个权重相等的实例中。

[4] 在全文中，我们假设每个变量都至少出现在一个约束中，因此 $w_\Psi^+(v) + w_\Psi^-(v) > 0$。（这是不失一般性的，因为对于 Max-$k$ AND 而言，可以忽略不出现在任何约束中的变量。）[5] 我们对于这些区间哪一端取开、哪一端取闭的选择是任意约定；分解 $[-1,1]$ 为区间时，唯一重要的性质是它是 *symmetric*。[6] 我们会滥用这一记号，并经常将 $\mathsf{Obl}^{\mathbf{t}}{}_k{}^{\mathbf{p}}(\Psi)$ 视为无偏算法的 *output*，也就是说，我们将无偏算法的目标理解为输出该实例的值的一个（标量）估计；这在流式算法的语境下尤其如此。

约束，$C^+ = (+1, \ldots, +1)$、$(1, \ldots, k)$ 和 $C^- = (-1, \ldots, -1)$、$(1, \ldots, k)$，也就是说，这两个约束分别要求 $x_1, \ldots, x_k$ 全部为 $(+1)$ 和全部为 (-1)。每个变量的偏置均为零，因此任何无偏算法都会对其进行均匀舍入，得到的值为 2^{-k}，而全部赋值为 $(+1)$（或全部赋值为 (-1)）的“贪心”赋值则能达到值 $1 \ 2$。事实上，对于任何无法打破这两种贪心赋值之间对称性的算法类别，这一下界都成立。

3 无偏算法的线性规划框架

在本节中，我们将构建一个线性规划，用于刻画任意无偏算法的“最坏情况实例”，因此可用于计算其近似比（引理 3.4），以及相应的对偶线性规划（引理 3.5）。在接下来的章节中，我们将利用这些结果来界定某些无偏算法的近似比。

3.1 子句模式

令 Ptn_k^L 表示向量集合 $\mathbf{c} = (\mathbf{c}^+, \mathbf{c}^-) = (c^+_{-\ell}, \ldots, c^+_{+\ell}, c^-_{-\ell}, \ldots, c^-_{-\ell})$，其中各项均为自然数且总和为 k。这些向量很有用，因为它们从一个 L 类无偏算法的角度描述了每个特定子句。具体而言，给定一个子句 C，我们将其模式记为 $\mathsf{ptn}^{\mathbf{t}}(C) = (c^+_{-\ell}, \ldots, c^+_{+\ell}, c^-_{-\ell}, \ldots, c^-_{-\ell}) \in \mathsf{Ptn}_k^L$，其中，对于每个 $i \in \{-\ell, \ldots, +\ell\}$，$c_i^+$ 和 c_i^- 分别表示 C 中变量偏置类别为 i 的正文字和负文字的数量。也就是说，例如，

$$c_i^+ = |\{v \in V_j^+ : \mathsf{bias}_\Psi(v) \in \mathsf{Int}_i^{\mathbf{t}}\}|.$$

现在，对于任意舍入向量 $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_\ell)$，我们定义

$$\mathsf{prob}^{\mathbf{p}}(\mathbf{c}) = 2^{-(c_0^+ + c_0^-)} \prod_{i=1}^{\ell} p_i^{c^+_{+i} + c^-_{-i}} (1 - p_i)^{c^-_{+i} + c^+_{-i}} \tag{3.1}$$

对每个 $\mathbf{c} \in \mathsf{Ptn}_k^L$.[7] 于是我们有：

引理 3.2. 设 Ψ 是一个 Max-kAND 实例，其子句为 $C_1, \ldots, C_m$，权重分别为 $w_1, \ldots, w_m$。那么

$$\mathtt{Obl}_k^{\mathbf{t},\mathbf{p}}(\Psi) = \frac{\sum_{j=1}^m \mathsf{prob}^{\mathbf{p}}(\mathsf{ptn}^{\mathbf{t}}(C_j)) \cdot w_j}{\sum_{j=1}^m w_j}.$$

证明。根据期望的线性性，只需证明每个子句 C_j 被满足的概率为 $\mathsf{prob}^{\mathbf{p}}(\mathsf{ptn}^{\mathbf{t}}(C_j))$。我们可以改写为

$$\mathsf{prob}^{\mathbf{p}}(\mathbf{c}) = 2^{-c_0^+} 2^{-c_0^-} \prod_{i=1}^{\ell} p_i^{c^+_{+i}} p_i^{c^-_{-i}} (1 - p_i)^{c^-_{+i}} (1 - p_i)^{c^+_{-i}}.$$

回想一下，每个变量都是独立赋值的，并且当且仅当子句中的每个文字都成立时，该子句才成立。上述表达式恰好表示该子句成立的概率。（例如，若有一个负文字，其变量属于偏置类别 $+i$，则该文字以概率 $1 - p_i$成立；该概率中此类因子的数量为 c^-_{+i}。）□

我们注意到，根据“星与杠”公式，$|\mathsf{Ptn}_k^L| = \binom{k+2L-1}{2L-1}$。例如，若 $L = 3$（后续章节的具体分析中就是如此），则有 $|\mathsf{Ptn}_k^L| = O(k^5)$。

3.2 因子揭示线性规划

我们用 $\mathsf{PosPtn}_k^L \subseteq \mathsf{Ptn}_k^L$表示不含否定的子句模式空间，即满足 $c^-_{-\ell} = \cdots = c^-_{+\ell} = 0$ 的 $\mathbf{c}$。对于两个向量 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$、$\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$，令 $\mathbf{x} \odot \mathbf{y} = (x_1 y_1, \ldots, x_n y_n)$ 表示它们的逐项乘积。为了设计线性规划，我们需要以下有用的命题：

[7] 在本例中 pression we adopt the convention $0^0 = 1$, i.e., if $p_i = 0$ but $c^-_{+i} + c^+_{-i} = 0$ then we ignore the factor 0.

命题 3.3（翻转）。设 Ψ 是 Max-kAND 的一个实例，对于任意赋值 $\mathbf{y}=(y_1,\dots,y_n)\in\{\pm1\}^n$，令 $\mathsf{flip}^{\mathbf{y}}(\Psi)$ 表示 Max-kAND 的一个实例，其中我们将变量 v 与 $y_v=-1$「翻转」；也就是说，Ψ 中的每个子句 $C_j=(V_j^+,V_j^-,w_j)$ 都变为子句 $D_j=(U_j^+,U_j^-,w_j)$，其中 $U_j^+=\{v\in V_j^+:\ y_v=+1\}\cup\{v\in V_j^-:\ y_v=-1\}$ 且 $U_j^-=\{v\in V_j^+:\ y_v=-1\}\cup\{v\in V_j^-:\ y_v=+1\}$。那么：

- 对于每个赋值 $\mathbf{x}\in\{\pm1\}^n$，$\mathsf{val}_\Psi(\mathbf{x})=\mathsf{val}_{\text{翻转}_{\mathbf{y}}(\Psi)}(\mathbf{x}\odot\mathbf{y})$。
- 特别地，如果 $\mathbf{x}$ 是 Ψ 的最优赋值，那么 $\mathbf{x}\odot\mathbf{y}$ 就是 $\mathsf{flip}_{\mathbf{y}}(\Psi)$ 的最优赋值。
- $\mathsf{Oblt}_{\mathbf{p}_k}(\Psi)=\mathsf{Oblt}_{\mathbf{p}_k}(\text{翻转}(\Psi))$。

证明。由定义可立即得出。 □

引理 3.4（原始问题刻画）。对于每个偏置划分 $\mathbf{t}=(t_0,\dots,t_\ell)$ 和舍入向量 $\mathbf{p}=(p_1,\dots,p_\ell)$，$\mathsf{Obl}^{\mathbf{t}}_{,k}{}^{\mathbf{p}}$ 的近似比 α（由 $\mathsf{Obl}^{\mathbf{t}}_{,k}{}^{\mathbf{p}}$ 实现）等于以下线性规划的值：

$$\begin{cases}\text{minimize} & \displaystyle\sum_{\mathbf{c}\in\mathsf{Ptn}_k^L}\mathsf{prob}^{\mathbf{p}}(\mathbf{c})\cdot W(\mathbf{c}) & \\ \text{s.t.} & W(\mathbf{c})\ge 0 & \forall\mathbf{c}\in\mathsf{Ptn}_k^L\\ & \displaystyle\sum_{\mathbf{c}\in\mathsf{PosPtn}_k^L}W(\mathbf{c})=1 & \\ & t_i^-(W^+(i)+W^-(i))\le W^+(i)-W^-(i) & \forall i\in\{-\ell,\dots,+\ell\}\\ & W^+(i)-W^-(i)\le t_i^+(W^+(i)+W^-(i)) & \forall i\in\{-\ell,\dots,+\ell\}\end{cases}$$

其中，我们定义线性函数

$$W^+(i)=\sum_{\mathbf{c}\in\mathsf{Ptn}_k^L}c_i^+W(\mathbf{c})\ \textit{and}\ W^-(i)=\sum_{\mathbf{c}\in\mathsf{Ptn}_k^L}c_i^-W(\mathbf{c}).$$

证明。令 α_{alg} 表示 $\mathtt{Obl}^{\mathbf{t}}_{,k}{}^{\mathbf{p}}$ 和 α_{LP} 线性规划的最小值。此证明推广了[FJ15中定理 1 的证明。2]。

($\alpha_{\text{LP}}\le\alpha_{\text{alg}}$) 我们证明，对于每个 Max-$k$AND 实例 Ψ，都存在一个可行的线性规划解 $\{W(\mathbf{c})\}_{\mathbf{c}\in\mathsf{Ptn}_k^L}$，其目标值为 $\mathsf{Obl}^{\mathbf{t}}_{,k}{}^{\mathbf{p}}(\Psi)/\mathsf{val}_\Psi$。

为证明这一点，根据命题 3.3，不失一般性，我们可以假设全-$+1$赋值对于 Ψ 是最优的。此外，通过重新缩放，不失一般性地假设 Ψ 的总权重为 $1/\mathsf{val}_\Psi$，即 $\sum_{j=1}^m w_j=1/\mathsf{val}_\Psi$。现在，令 $C_1,\dots,C_m$ 表示 Ψ 的约束，~~并令~~ $W(\mathbf{c}):=\sum_{j=1}^m\mathbb{I}[\mathsf{ptn}^{\mathbf{t}}(C_j)=\mathbf{c}]w_j$。我们声称，$\{W(\mathbf{c})\}_{\mathbf{c}\in\mathsf{Ptn}_k^L}$ 是可行的，其目标值为 $\sum_{\mathbf{c}\in\mathsf{Ptn}_k^L}\mathsf{prob}^{\mathbf{p}}(\mathbf{c})W(\mathbf{c})=\mathsf{Obl}^{\mathbf{t}}_{,k}{}^{\mathbf{p}}(\Psi)/\mathsf{val}_\Psi$。

首先，我们检查可行性。显然，所有 $W(\mathbf{c})$ 都是非负的。接下来，我们有

$$\begin{aligned}\mathsf{val}_\Psi&=\mathsf{val}_\Psi(+\mathbf{1}) && \text{（所有 }+1\text{ 均为最优）}\\ &=\frac{\sum_{j=1}^m w_j\mathbb{I}[|V_j^-|=0]}{\sum_{j=1}^m w_j} && (\text{def. of }\mathsf{val}_\Psi(+\mathbf{1}))\\ &=\frac{\sum_{\mathbf{c}\in\mathsf{PosPtn}_k^L}W(\mathbf{c})}{1/\mathsf{val}_\Psi} && (\mathsf{PosPtn}_k^L\text{ 的定义及总权重假设})\end{aligned}$$

整理后得到 $\sum_{\mathbf{c}\in\mathsf{PosPtn}_k^L}W(\mathbf{c})=1$。

现在，回顾 §2 中偏置$_\Psi,w_\Psi^+,w_\Psi^-$的定义。固定一个偏置类别 $i\in\{-\ell,\dots,+\ell\}$。对于任意偏置类别为 i 的变量 v，我们有 $\mathsf{bias}_\Psi(v)\in\mathsf{Int}_i^{\mathbf{t}}$，因此 $t_i^-\le\mathsf{bias}_\Psi(v)\le t_i^+$，再将两边乘以 $w_\Psi^+(v)+w_\Psi^-(v)$，得到

$$t_i^-(w_\Psi^+(v)+w_\Psi^-(v))\le w_\Psi^+(v)-w_\Psi^-(v)\le t_i^+(w_\Psi^+(v)+w_\Psi^-(v)).$$

令 $\mathcal{V}_i$ 表示　　对于 Ψ 中所有偏置类别为 i 的变量构成的集合，我们可以对这些等式求和，得到

$$t_i^- \sum_{v\in\mathcal{V}_i}(w_\Psi^+(v)+w_\Psi^-(v)) \le \sum_{v\in\mathcal{V}_i}(w_\Psi^+(v)-w_\Psi^-(v)) \le t_i^+ \sum_{v\in\mathcal{V}_i}(w_\Psi^+(v)+w_\Psi^-(v)).$$

我们断言

$$W^+(i)=\sum_{v\in\mathcal{V}} w_\Psi^+(v),$$

类似地，$W^-(i)=\sum_{v\in\mathcal{V}} w_\Psi^-(v)$。这些等式表明，$W(\cdot)$ 满足可行性约束，接下来只需证明这一点。现在回顾 $w_\Psi^+(v)=\sum_{j=1}^m \mathbb{I}[v\in V_j^+]w_j$；因此，

$$\sum_{v\in\mathcal{V}} w_\Psi^+(v)=\sum_{j=1}^m \sum_{v\in V_j^+} \mathbb{I}[\mathsf{bias}_\Psi(v)\in \mathsf{Int}_i^{\mathbf{t}}]w_j,$$

以及 j在该总和中的第 c_i^+ 项，其中 $\mathbf{c}=(\mathbf{c}^+、\mathbf{c}^-)=\mathsf{ptn}^{\mathbf{t}}(C_j)$。对于 $W^-(i)$ 的证明类似。最后，根据 引理 3.2 以及我们的假设 $\sum_{j=1}^m w_j = 1/\mathsf{val}_\Psi$，我们有

$$\mathtt{Obl}_k^{\mathbf{t},\mathbf{p}}(\Psi)=\frac{\sum_{j=1}^m w_j \mathsf{prob}^{\mathbf{p}}(\mathsf{ptn}^{\mathbf{t}}(C_j))}{\sum_{j=1}^m w_j}=\frac{\sum_{\mathbf{c}\in\mathsf{Ptn}_k^L} W(\mathbf{c})\cdot\mathsf{prob}^{\mathbf{p}}(\mathbf{c})}{1/\mathsf{val}_\Psi},$$

重新整理可得 $\mathsf{Obl}^{\mathbf{t}}_{,k}{}^{\mathbf{p}}(\Psi)/\mathsf{val}_\Psi=\sum_{\mathbf{c}\in\mathsf{Ptn}_k^L} W(\mathbf{c})\cdot\mathsf{prob}^{\mathbf{p}}(\mathbf{c})$，正如所需。

($\alpha_{\mathrm{LP}}\ge\alpha_{\mathrm{alg}}$) 该论证基本上是前一个论证的逆向版本，但存在两个技术问题：(i) 线性规划并未编码严格不等式约束，而无偏算法需要编码这类约束（例如，从以下意义上说：如果 $t_0=0$，那么该算法会以不同方式对偏置为 0 和偏置为 $+\epsilon$ 的顶点进行舍入）；(ii) 由于一个 Max-kAND 约束不能两次使用同一个变量，我们可能需要在所构造的实例中使用许多具有相同偏置的变量。

在我们的论证中，我们定义了某些可行解的一种性质，称为“良好性”，并证明：(1) 对于每个目标值为 v 的可行线性规划解 $\{W(\mathbf{c})\}_{\mathbf{c}\in\mathsf{Ptn}_k^L}$，对于所有 $\epsilon>0$，都存在一个目标值为 $\le v+\epsilon$ 的良好可行解$\{W'(\mathbf{c})\}_{\mathbf{c}\in\mathsf{Ptn}_k^L}$；(2) 对于每个目标值为 v 的良好可行解 $\{W(\mathbf{c})\}_{\mathbf{c}\in\mathsf{Ptn}_k^L}$，都存在一个 Max-$k$AND 实例 Ψ，其中 $\mathsf{Obl}^{\mathbf{t}}_{,k}{}^{\mathbf{p}}(\Psi)/\mathsf{val}_\Psi\le v+\epsilon$。综合这两点可知，对于每个目标值为 v 的可行线性规划解 $\{W(\mathbf{c})\}_{\mathbf{c}\in\mathsf{Ptn}_k^L}$，对于所有 $\epsilon>0$，都存在一个 Max-kAND 实例 Ψ，其中 $\mathsf{Obl}^{\mathbf{t}}_{,k}{}^{\mathbf{p}}(\Psi)/\mathsf{val}_\Psi\le v+\epsilon$，这就足够了。

为了得到 (1)，令 $\{W(\mathbf{c})\}_{\mathbf{c}\in\mathsf{Ptn}_k^L}$ 为任意一个目标值为 v 的可行解。我们对“良好性”的定义如下：对于所有 $i\ne 0\in\{-\ell,\dots,+\ell\}$，假设的“偏置”不等式都严格成立，即

$$t_i^-(W^+(i)+W^-(i))<W^+(i)-W^-(i)<t_i^+(W^+(i)+W^-(i)).$$

（我们排除 $i=0$，因为我们可以有 $t_0^-=t_0^+=0$；但对于其他 i，偏置划分的定义意味着 $t_i^-<t_i^+$。）为了从 $\{W(\mathbf{c})\}_{\mathbf{c}\in\mathsf{Ptn}_k^L}$ 构造良好的 $\{W'(\mathbf{c})\}_{\mathbf{c}\in\mathsf{Ptn}_k^L}$，对于每个 $i\in\{-\ell,\dots,+\ell\}\setminus\{0\}$，若 $t_i^-(W^+(i)+W^-(i))=W^+(i)-W^-(i)$，则令 $W'(\mathbf{c})\leftarrow W(\mathbf{c})+\epsilon$，其中 $\mathbf{c}$ 在 $c_i^+=k$ 处取值，其余位置为零；同理，若 $W^+(i)-W^-(i)=t_i^+(W^+(i)+W^-(i))$，则令 $W'(\mathbf{c})\leftarrow W(\mathbf{c})+\epsilon$，其中 $\mathbf{c}$ 在 $c_i^-=k$ 处取值，其余位置为零；对于所有尚未定义的 $\mathbf{c}$，则令 $W'(\mathbf{c})\leftarrow W(\mathbf{c})$。最后，我们针对等式约束重新归一化，例如，令

$$W'(\mathbf{c})\leftarrow\frac{W'(\mathbf{c})}{\sum_{\mathbf{c}'\in\mathsf{PosPtn}_k^L} W'(\mathbf{c})}.$$

注意，根据定义，$\{W'(\mathbf{c})\}$ 是良好的（因为重新归一化会保持不等式的严格性），也是可行的（当 ϵ足够小时）；此外，通过重新参数化 ϵ，我们可以将目标值的误差控制在任意小的范围内。

现在考虑 (2)，对于任意良好的可行解 $\{W(\mathbf{c})\}_{\mathbf{c}\in\mathsf{Ptn}_k^L}$，我们构造一个含有 $n=Lk$ 个变量的实例 Ψ，使得 $\mathsf{Obl}^{\mathbf{t}}_{,k}{}^{\mathbf{p}}(\Psi)/\mathsf{val}_\Psi\le v$。这些变量用 $\mathcal{I}:=\{-\ell,\dots,+\ell\}\times[k]$ 中的元组标记，即其中

每个偏置类别都对应 k 个变量。对于每个模式 $\mathbf{c} = (c^+_{-\ell}, \dots, c^+_{+\ell}, c^-_{-\ell}, \dots, c^-_{+\ell}) \in \mathsf{Ptn}^L_k$，我们令 $\mathcal{J}_{\mathbf{c}}$ 表示由集合组成的 $2L$ 元组 $(J^+_{-\ell}, \dots, J^+_{+\ell}, J^-_{-\ell}, \dots, J^-_{+\ell})$ 的集合，使得对于每个 $i \in \{-\ell, \dots, +\ell\}$，都有 $J^+_i \subseteq \{i\} \times [k]$ 和 $J^-_i \subseteq \{i\} \times [k]$, $|J^+_i| = c^+_i$ 和 $|J^-_i| = c^-_i$，且 $J^+_i \cap J^-_i = \emptyset$。现在，对于每个这样的 $2L$ 元组 $J \in \mathcal{J}_{\mathbf{c}}$，我们在 Ψ 中创建一个子句，标记为 $C_{\mathbf{c},J}$，其中 $V^+{}_{\mathbf{c}\,J} = J^+_{-\ell} \cup \cdots J^+_{+\ell}$ 且 $V^-{}_{\mathbf{c}\,J} = J^-_{-\ell} \cup \cdots J^-_{+\ell}$，其权重为

$$w_{\mathbf{c},J} = \frac{W(\mathbf{c})}{|\mathcal{J}_{\mathbf{c}}|}.$$

现在我们观察到，在这个实例中，全体-+1 的赋值的值为

$$\begin{aligned}
\mathsf{val}_\Psi(+\mathbf{1}) &= \frac{\sum_{\mathbf{c}\in\mathsf{Ptn}^L_k} \sum_{J\in\mathcal{J}_{\mathbf{c}}} \mathbb{I}[V^-_{\mathbf{c},J} = \emptyset] w_{\mathbf{c},J}}{\sum_{\mathbf{c}\in\mathsf{Ptn}^L_k} \sum_{J\in\mathcal{J}_{\mathbf{c}}} w_{\mathbf{c},J}} && \text{(def. of } \mathsf{val}) \\
&= \frac{\sum_{\mathbf{c}\in\mathsf{Ptn}^L_k} \sum_{J\in\mathcal{J}_{\mathbf{c}}} \mathbb{I}[V^-_{\mathbf{c},J} = \emptyset] W(\mathbf{c})/|\mathcal{J}_{\mathbf{c}}|}{\sum_{\mathbf{c}\in\mathsf{Ptn}^L_k} \sum_{J\in\mathcal{J}_{\mathbf{c}}} W(\mathbf{c})/|\mathcal{J}_{\mathbf{c}}|} && \text{(def. of } w_{\mathbf{c},J}) \\
&= \frac{\sum_{\mathbf{c}\in\mathsf{Ptn}^L_k} \mathbb{I}[\mathbf{c} \in \mathsf{PosPtn}^L_k] \sum_{J\in\mathcal{J}_{\mathbf{c}}} W(\mathbf{c})/|\mathcal{J}_{\mathbf{c}}|}{\sum_{\mathbf{c}\in\mathsf{Ptn}^L_k} \sum_{J\in\mathcal{J}_{\mathbf{c}}} W(\mathbf{c})/|\mathcal{J}_{\mathbf{c}}|} && \text{(def. of } V^-_{\mathbf{c},J} \text{ and } J) \\
&= \frac{\sum_{\mathbf{c}\in\mathsf{Ptn}^L_k} \mathbb{I}[\mathbf{c} \in \mathsf{PosPtn}^L_k] W(\mathbf{c})}{\sum_{\mathbf{c}\in\mathsf{Ptn}^L_k} W(\mathbf{c})} && \text{(summing constant)} \\
&= \frac{1}{\sum_{\mathbf{c}\in\mathsf{Ptn}^L_k} W(\mathbf{c})}. && (W(\cdot) \text{ is feasible})
\end{aligned}$$

因此 $\mathsf{val}_\Psi \geq \sum \frac{1}{\sum_{\mathbf{c}\in\mathsf{Ptn}^L_k} W(\mathbf{c})}$。

接下来，我们声称，对于每个变量 $(i,a) \in \mathcal{I}$, $w^+_\Psi(i,a) = W^+(i)/k$ 以及 $w^-_\Psi(i,a) = W^-(i)/k$。假设这一点成立，则对于所有 $(i,a) \in \mathcal{I}$，$\mathsf{bias}_\Psi(i,a) = (W^+(i) - W^-(i))/(W^+(i) + W^-(i))$，因此由良好性可得 $\mathsf{bias}_\Psi(i,a) \in \mathsf{Int}^{\mathbf{t}}_i$，进而对于每个子句 $C_{\mathbf{c},j}$ in Ψ，$\mathsf{ptn}^{\mathbf{t}}(C_{\mathbf{c},j}) = \mathbf{c}$。由此，根据引理 3.2 以及与 val_Ψ 情形类似的论证，我们有

$$\mathtt{Obl}^{\mathbf{t},\mathbf{p}}_k(\Psi) = \frac{\sum_{\mathbf{c}\in\mathsf{Ptn}^L_k} \sum_{J\in\mathcal{J}_{\mathbf{c}}} \mathsf{prob}^{\mathbf{p}}(\mathsf{ptn}^{\mathbf{t}}(C_{\mathbf{c},J})) w_{\mathbf{c},J}}{\sum_{\mathbf{c}\in\mathsf{Ptn}^L_k} \sum_{J\in\mathcal{J}_{\mathbf{c}}} w_{\mathbf{c},J}} = \frac{\sum_{\mathbf{c}\in\mathsf{Ptn}^L_k} \mathsf{prob}^{\mathbf{p}}(\mathbf{c}) W(\mathbf{c})}{\sum_{\mathbf{c}\in\mathsf{Ptn}^L_k} W(\mathbf{c})} = \frac{v}{\sum_{\mathbf{c}\in\mathsf{Ptn}^L_k} W(\mathbf{c})}.$$

因此 $\mathtt{Obl}^{\mathbf{t}}{}_{,k}{}^{\mathbf{p}}(\Psi)/\mathsf{val}_\Psi \leq v$，正如所愿。

最后，还需证明这一断言。这里采用计数论证。我们证明 $w^+_\Psi(i,a) = W^+(i)/k$；对于 W^- 的证明类似。我们有：

$$\begin{aligned}
w^+_\Psi(i,a) &= \sum_{\mathbf{c}\in\mathsf{Ptn}^L_k} \sum_{J\in\mathcal{J}_{\mathbf{c}}} \mathbb{I}[(i,a) \in V^+_{\mathbf{c},J}] w_{\mathbf{c},J} && \text{(def. of } w^+) \\
&= \sum_{\mathbf{c}\in\mathsf{Ptn}^L_k} \sum_{J\in\mathcal{J}_{\mathbf{c}}} \mathbb{I}[(i,a) \in V^+_{\mathbf{c},J}] W(\mathbf{c})/|\mathcal{J}_{\mathbf{c}}| && \text{(def. of } w) \\
&= \sum_{\mathbf{c}\in\mathsf{Ptn}^L_k} \sum_{J\in\mathcal{J}_{\mathbf{c}}} \mathbb{I}[a \in J^+_i] W(\mathbf{c})/|\mathcal{J}_{\mathbf{c}}|. && \text{(def. of } C_{\mathbf{c},J})
\end{aligned}$$

因此，由于 $W^+(i) = \sum_{\mathbf{c}\in\mathsf{Ptn}^L_k} c^+_i W(\mathbf{c})$，只需证明对于所有 $a \in [k]$ 以及满足 $\mathbf{c} \in \mathsf{Ptn}^L_k$ 的情形，我们有

$$\frac{|\{J \in \mathcal{J}_{\mathbf{c}} : a \in J^+_i\}|}{|\mathcal{J}_{\mathbf{c}}|} = \frac{c^+_i}{k}.$$

事实上，我们有 $|\mathcal{J}_{\mathbf{c}}| = \prod_{i'=-\ell}^{+\ell} \binom{k}{c^+_{i'}} \binom{k-c^+_{i'}}{c^-_{i'}}$（因为每个 $J \in \mathcal{J}_{\mathbf{c}}$ 都会针对每个 i'，独立地从 $[k]$ 中选择一对互不相交的子集，其中一个子集的大小为 c^+_i，另一个子集的大小为 c^-_i），类似地

$$|\{J \in \mathcal{J}_{\mathbf{c}} : a \in J^+_i\}| = \binom{k-1}{c^+_i - 1} \binom{k-c^+_i}{c^-_i} \prod_{i'\neq i \in \{-\ell,\dots,+\ell\}} \binom{k}{c^+_{i'}} \binom{k-c^+_{i'}}{c^-_{i'}}$$

（因为对于 $i' \neq i$，我们的选择相同，但对于 i，我们被迫包含 a），最后我们可以使用二项式恒等式 $\binom{k}{n} = \frac{k}{n}\binom{k-1}{n-1}$。 □

引理 3.5（对偶刻画）。对于任意偏置划分 $\mathbf{t} = (t_0, .., t_\ell)$ 和舍入向量 $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_\ell)$，由 $\mathsf{Obl}^{\mathbf{t}}_{,k}{}^{\mathbf{P}}$ 实现的近似比 α 等于 $\mathsf{Obl}^{\mathbf{t}}_{,k}{}^{\mathbf{P}}$ 的值，即以下线性规划的值：

$$
\begin{cases}
\text{maximize} & z \\
\text{s.t.} & \mathbb{I}[\mathbf{c} \in \mathsf{PosPtn}^L_k] \cdot z \\
& \quad + \sum_{i=-\ell}^{+\ell} \left(((1-t_i^-)c_i^+ - (t_i^-+1)c_i^-)y_i^- + ((t_i^+-1)c_i^+ + (1+t_i^+)c_i^-)y_i^+\right) \le \mathsf{prob}^{\mathbf{P}}(\mathbf{c}) & \forall \mathbf{c} \in \mathsf{Ptn}^L_k \\
& y_i^- \ge 0 & \forall i \in \{-\ell, \ldots, +\ell\} \\
& y_i^+ \ge 0 & \forall i \in \{-\ell, \ldots, +\ell\}
\end{cases}
$$

证明。为了将原始线性规划（引理 3.4 中给出）改写为更标准的形式，我们将原始不等式 $t_i^-(W^+(i) + W^-(i)) \le W^+(i) - W^-(i)$ 改写为 $(t_i^- - 1)W^+(i) + (t_i^- + 1)W^-(i) \le 0$；展开 $W^+(i)$ 和 $W^-(i)$ 的定义后，这等价于 $(t_i^- - 1)\sum_{\mathbf{c}\in\mathsf{Ptn}^L_k} c_i^+ W(\mathbf{c}) + (t_i^- + 1)\sum_{\mathbf{c}\in\mathsf{Ptn}^L_k} c_i^- W(\mathbf{c}) \le 0$。类似地，不等式 $W^+(i) - W^-(i) \le t_i^+(W^+(i) + W^-(i))$ 变为 $(1 - t_i^+)\sum_{\mathbf{c}\in\mathsf{Ptn}^L_k} c_i^+ W(\mathbf{c}) - (1 + t_i^+)\sum_{\mathbf{c}\in\mathsf{Ptn}^L_k} c_i^- W(\mathbf{c}) \le 0$。因此，原始线性规划等价于以下标准形式的线性规划：

$$
\begin{cases}
\text{minimize} & \sum_{\mathbf{c}\in\mathsf{Ptn}^L_k} \mathsf{prob}^{\mathbf{P}}(\mathbf{c}) \cdot W(\mathbf{c}) & \\
\text{s.t.} & W(\mathbf{c}) \ge 0 & \forall \mathbf{c} \in \mathsf{Ptn}^L_k \\
& \sum_{\mathbf{c}\in\mathsf{PosPtn}^L_k} W(\mathbf{c}) = 1 & \\
& (1-t_i^+)\sum_{\mathbf{c}\in\mathsf{Ptn}^L_k} c_i^+ W(\mathbf{c}) - (1+t_i^+)\sum_{\mathbf{c}\in\mathsf{Ptn}^L_k} c_i^- W(\mathbf{c}) \le 0 & \forall i \in \{-\ell, \ldots, +\ell\} \\
& (t_i^- - 1)\sum_{\mathbf{c}\in\mathsf{Ptn}^L_k} c_i^+ W(\mathbf{c}) + (t_i^- + 1)\sum_{\mathbf{c}\in\mathsf{Ptn}^L_k} c_i^- W(\mathbf{c}) \le 0 & \forall i \in \{-\ell, \ldots, +\ell\}
\end{cases}
$$

根据线性规划对偶性，上述线性规划 与其对偶线性规划具有相同的值；后者就是假设中的线性规划。[8] □

4 通过分析定理 1.5 “对偶松弛量”来证明

本节中，我们通过构造对偶解来证明定理 1.5，这些对偶解可用于证明无偏算法的近似比下界。

4.1 一个充分条件

我们的第一步是证明以下引理：通过构造某个稀疏对偶解并应用对偶规划（引理 3.5），可以得到近似比下界的一个简洁充分条件。

[8] 例如参见 [MG07，第 85] 页）。符号的正负需要格外小心，因为我们的原始线性规划是一个 $\mathit{minimization}$ LP。我们可以转而考虑使 $-\sum_{\mathbf{c}\in\mathsf{Ptn}^L_k} \mathsf{prob}^{\mathbf{P}}(\mathbf{c}) \cdot W(\mathbf{c})$ 最大化的线性规划（其输出是我们所需输出的相反数）。对这个线性规划应用对偶性，可得到一个使 z' $\mathbb{I}[\in \mathsf{Ptn}^L_k] \cdot z' +$ 最小化的线性规划，满足 $\mathbf{c} \in \mathsf{PosPtn}$ 的 $\sum_{i=-\ell}^{\ell}\left(1 - t_i^-\right)c_i^+ - \left(t_i^- + 1\right)c_i^- y_i^- + \left(t_i^+ - 1\right)c_i^+ + \left(1 + t_i^+\right)c_i^- y_i^+\right) \ge -\mathsf{prob}^{\mathbf{P}}(\mathbf{c})$。将其转换为与原始线性规划等价的最大化问题（因为我们取了相反数！），得到最大化 $-z'$ $\mathbb{I}[\in \mathsf{Ptn}^L_k] \cdot z' +$，满足 $\mathbf{c} \in \mathsf{PosPtn}$ 的 $\sum_{i=-\ell}^{\ell}\left(1 - t_i^-\right)c_i^+ - \left(t_i^- + 1\right)c_i^- y_i^- + \left(t_i^+ - 1\right)c_i^+ + \left(1 + t_i^+\right)c_i^- y_i^+\right) \ge -\mathsf{prob}^{\mathbf{P}}(\mathbf{c})$。最后，对不等式两边取相反数，并使用双射变换 $z = -z'$。

引理 4.1（良好近似的充分条件）。对于每个 $k \geq 2 \in \mathbb{N}$, $0 \leq \gamma, \delta \leq 1$, 令 $\mathbf{t} = (\delta, 1)$, 且 $\mathbf{p} = (\frac{1}{2}(1+\gamma))$。若以下陈述成立，则算法 $\mathsf{Obl}^{\mathbf{t}}_{,k}{}^{\mathbf{p}}$ 的近似比为 $\alpha(\mathsf{Obl}^{\mathbf{t}}_{,k}{}^{\mathbf{p}}) \geq 2^{-(k-1)}\beta$：存在 $X, Y \geq 0$，使得：

$$\begin{cases} (1+\delta)\left(1-\dfrac{i+j}{k}\right)Y + (1-\delta)\dfrac{j}{k}X \leq \beta^{-1}(1-\gamma)^i(1+\gamma)^j & \forall i,j \in \mathbb{N}, i+j \leq k \\ 2-(1-\delta)\left(1-\dfrac{i+j}{k}\right)Y - (1+\delta)\dfrac{i}{k}X \leq \beta^{-1}(1-\gamma)^i(1+\gamma)^j & \forall i,j \in \mathbb{N}, i+j \leq k \end{cases}$$

证明。考虑使用近似比的对偶刻画（引理 3.5），其中解为$z = 2\beta/2^k$、$y^+_{-1} = X\beta/(k2^k)$、$y^+_0 = Y\beta/(k2^k)$ 以及 $y^+_{+1} = y^-_{-1} = y^-_0 = y^-_{+1} = 0$；只需证明该解是可行的。注意到 $t^+_{-1} = -\delta$ 和 $t^+_0 = \delta$。因此，引理 3.5中的可行性约束变为

$$\frac{\beta}{2^k}\left(\mathbb{I}[\mathbf{c} \in \mathsf{PosPtn}^L_k] \cdot 2 + ((-\delta-1)c^+_{-1} + (1-\delta)c^-_{-1})\frac{X}{k} + ((\delta-1)c^+_0 + (1+\delta)c^-_0)\frac{Y}{k}\right) \leq \mathsf{prob}^{\mathbf{p}}(\mathbf{c}) \quad \forall \mathbf{c} \in \mathsf{Ptn}^L_k. \tag{4.2}$$

根据公式（3.1），并且由于 $c^+_{-1} + c^+_0 + c^+_{+1} + c^-_{-1} + c^-_0 + c^-_{+1} = k$，我们有

$$\mathsf{prob}^{\mathbf{p}}(\mathbf{c}) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\gamma}{2}\right)^{c^+_{-1}+c^-_{+1}}\left(\frac{1}{2}\right)^{c^+_0+c^-_0}\left(\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)^{c^+_{+1}+c^-_{-1}} = 2^{-k}(1-\gamma)^{c^+_{-1}+c^-_{+1}}(1+\gamma)^{c^+_{+1}+c^-_{-1}}.$$

因此，两边除以 $\beta/2^k$后，公式（4.2）变为

$$\mathbb{I}[\mathbf{c} \in \mathsf{PosPtn}^L_k] \cdot 2 + ((1-\delta)c^-_{-1} - (1+\delta)c^+_{-1})\frac{X}{k} + ((1+\delta)c^-_0 - (1-\delta)c^+_0)\frac{Y}{k} \leq \beta^{-1}(1-\gamma)^{c^+_{-1}+c^-_{+1}}(1+\gamma)^{c^+_{+1}+c^-_{-1}} \quad \forall \mathbf{c} \in \mathsf{Ptn}^L_k. \tag{4.3}$$

最后，我们断言公式（4.3）可由该假设推出。事实上，我们考虑两种情形。首先，如果$\mathbf{c} \in \mathsf{PosPtn}^L_k$，那么$c^-_{-1} = c^-_0 = c^-_{+1} = 0$ 并且$c^+_0 = k - c^+_{-1} - c^+_{+1}$，因此公式（4.3）变为

$$2 - (1+\delta)\frac{c^+_{-1}}{k}X - (1-\delta)\frac{k - c^+_{-1} - c^+_{+1}}{k}Y \leq \beta^{-1}(1-\gamma)^{c^+_{-1}}(1+\gamma)^{c^+_{+1}}.$$

这恰好是针对 $c^+_{-1} = i, c^+_{+1} = j$ 的第二个假设不等式。另一方面，如果 $\mathbf{c} \notin \mathsf{PosPtn}^L_k$，那么我们注意到，将 $(c^+_{-1}, c^+_0, c^+_{+1}, c^-_{-1}, c^-_0, c^-_{+1}) \mapsto (0,0,0, c^-_{-1}+c^+_{-1}, c^-_0+c^+_0, c^-_{+1}+c^+_{+1})$ 替换后，公式（4.3）的右端保持不变，而左端只会增大；因此，只需在这一极端情形下证明公式（4.3）。于是，我们可以假设 $c^-_0 = k - c^-_{-1} - c^-_{+1}$，因此公式（4.3）变为

$$(1-\delta)\frac{c^-_{-1}}{k}X + (1+\delta)\frac{k - c^-_{-1} - c^-_{+1}}{k}Y \leq \beta^{-1}(1-\gamma)^{c^-_{+1}}(1+\gamma)^{c^-_{-1}},$$

这恰好是针对 $c^-_{-1} = j, c^-_{+1} = i$ 的第一个假设条件。 □

注。我们通过检查线性规划求解器对 $k = 2$ 和 $k = 3$的输出，选定了证明 引理 4.1 中所使用的那族特定对偶解。我们的研究还表明，从某种意义上说，该解是唯一的：在 $k = 2$ 和 $\delta = \gamma = 0$的最简单情形中，似乎 每个 最优可行解都需要$y^+_{-1} = 2/9$；此外，唯一一个仅有两个非零 y 项的解设置了 $y^+_0 = 1/9$。

4.2 通过分析定理 1.5 的“松弛量”进行证明

本小节的目标是通过满足引理 4.1中列出的充分条件来证明定理 1.5，其中会用到一些引理。我们的第一步是证明，当 $\delta = 0$, $\gamma = \gamma_k$（见公式 (1.1)），$X = 2$, $Y = 1$, 以及 $\beta = (1-\gamma_k)^{\lfloor k/2 \rfloor}(1+\gamma_k)^{\lfloor k/2 \rfloor}$时，引理 4.1中的条件均得到满足。这意味着定理 1.4中假设存在的超无偏算法确实能提供一个 α^*_k-近似（通过引理 4.1），同时也是证明定理 1.5的基础。具体而言，我们证明，将该解代入后，引理 4.1中的条件除少数几个外均较宽松。

注意，当 $X=2$，$Y=1$，$\delta=0$时，引理 4.1中第一个不等式的左端为 $(1-(i+j)/k)+2j/k=1+(j-i)/k$，第二个不等式的左端也为 $2-(1-(i+j)/k)-2i/k=1+(j-i)/k$，因此这两个不等式重合。也就是说，引理 4.1的假设变为

$$1+\frac{j-i}{k}\le(1-\gamma_k)^{i-\lfloor k/2\rfloor}(1+\gamma_k)^{j+\lfloor k/2\rfloor}\quad\forall i,j\in\mathbb{N},i+j\le k.$$

例如，考虑 k 为偶数、$i=k/2-1$ 和 $j=k/2+1$ 的情形；此时左端为 $1+\frac{2}{k}$，右端为 $(1-\gamma_k)^{-1}(1+\gamma_k)=(1+1/(k+1))/(1-1/(k+1))=((k+2)/(k+1))/(k/(k+1))=(k+2)/k=1+2/k$，因此等号成立。事实上，我们有如下引理：

引理 4.4（“双边伯努利不等式”）。对于每个 $k\ge 2\in\mathbb{N}$ 和 i、$j\in\mathbb{N}$、$i+j\le k$，以下结论成立：

- 若 k 为偶数，则
$$1+\frac{j-i}{k}\le\left(1-\frac{1}{k+1}\right)^{i-k/2}\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{j-k/2}.$$
此外，当且仅当 $(i,j)\in\{(k/2,k/2)、(k/2-1,k/2)、(k/2-1,k/2+1)\}$ 时，不等式取等号。
- 若 k 是奇数，则
$$1+\frac{j-i}{k}\le\left(1-\frac{1}{k}\right)^{i-(k-1)/2}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{j-(k-1)/2}.$$
此外，当且仅当 $(i,j)\in\{((k-1)/2,(k-1)/2),((k-1)/2,(k+1)/2),((k+1)/2,(k-1)/2)\}$ 时，不等式取等号。

我们将在§4.3 节中证明这一引理。请注意，无论 k的奇偶性如何，该不等式中恰好存在三个紧情形，对应于引理 4.1 中的六个紧情形（因为其中每一对（i，j）都会产生两个不等式，而当 $X=2$，$Y=1$，$\delta=0$时，这两个不等式重合）。接下来的引理表明，当 δ 为正数时，如果我们还可以对右端项进行微小扰动，那么这六个不等式都存在相应的可行解（X，Y）：

引理 4.5（核心不等式的严格满足，偶数情形）。固定任意偶数 $k\ge 2$。存在 ϵ_0，使得对所有 $0<\epsilon<\epsilon_0$，以下结论成立。设 $\beta=(1-1/(k+1))^{k/2}(1+1/(k+1))^{k/2}$ 且 $\eta=1-\beta^{-1}(1-1/(k+1)-\epsilon)^{k/2}(1+1/(k+1)+\epsilon)^{k/2}$。那么存在满足严格不等式的 $X,Y\ge 0$：

$$\begin{cases}\frac{1}{2}(1-\delta)X<1-\eta\\ 2-\frac{1}{2}(1+\delta)X<1-\eta\\ \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{k}\right)(1-\delta)X<(1-\eta)\left(1+\frac{1}{k+1}+\epsilon\right)\left(1-\frac{1}{k+1}-\epsilon\right)^{-1}\\ 2-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{k}\right)(1+\delta)X<(1-\eta)\left(1+\frac{1}{k+1}+\epsilon\right)\left(1-\frac{1}{k+1}-\epsilon\right)^{-1}\\ \frac{1}{k}(1+\delta)Y+\frac{1}{2}(1-\delta)X<(1-\eta)\left(1-\frac{1}{k+1}-\epsilon\right)^{-1}\\ 2-\frac{1}{k}(1-\delta)Y-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{k}\right)(1+\delta)X<(1-\eta)\left(1-\frac{1}{k+1}-\epsilon\right)^{-1}.\end{cases}$$

其中，当 $k=2$ 时为 $\delta=\epsilon$，否则为 $\delta=4\eta$。

引理 4.6（核心不等式的严格满足，奇数情形）。固定任意奇数 $k\ge 3$。存在 $\epsilon_0>0$，使得对于所有 $0<\epsilon<\epsilon_0$，下述结论成立。设 $\beta=(1-1/k)^{(k-1)/2}(1+1/k)^{(k-1)/2}$，且 $\eta=1-\beta^{-1}(1-1/k-\epsilon)^{(k-1)/2}(1+1/k+\epsilon)^{(k-1)/2}$。则存在 $X,Y\ge 0$ 满足严格不等式：

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2k}\right)(1-\delta)X < (1-\eta)\left(1+\frac{1}{k}+\epsilon\right) \\ 2-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}\right)(1+\delta)X < (1-\eta)\left(1+\frac{1}{k}+\epsilon\right) \\ \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}\right)(1-\delta)X < (1-\eta)\left(1-\frac{1}{k}-\epsilon\right) \\ 2-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2k}\right)(1+\delta)X < (1-\eta)\left(1-\frac{1}{k}-\epsilon\right) \\ \frac{1}{k}(1+\delta)Y+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}\right)(1-\delta)X < 1-\eta \\ 2-\frac{1}{k}(1-\delta)Y-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}\right)(1+\delta)X < 1-\eta \end{cases}$$

其中 $\delta = 5\eta$】【。

我们将在下文的§4.4 中证明这些引理；但目前，我们先用本小节汇总的引理来证明定理 1.5：

定理 1.5 的证明。 我们考虑 k 为偶数的情形，并应用 引理 4.5。（如果 k 是奇数，则我们会应用 引理 4.6，但证明的其余部分仍以相同方式进行。）

令 $\beta = (1-\frac{1}{k+1})^{k/2}(1+\frac{1}{k+1})^{k/2}$，因此我们的目标是证明：对于某些 $0 \le \delta \le 1$ 和 $0 \le \epsilon \le 1-1/k$，算法 $\mathrm{Obl}^{\mathsf{t}}_{,\,k}{}^{\mathsf{p}}$ 在 $\mathsf{t} = (\delta, 1)$ 且 $\mathsf{p} = (1+\frac{1}{k}+\epsilon)$ 时，能够达到严格优于 $2^{-(k-1)}\beta$ 的比率。

为此，假设我们可以证明存在 δ, ϵ, X, Y，使得以下不等式均严格成立：

$$\begin{cases} (1+\delta)\left(1-\frac{i+j}{k}\right)Y-(1-\delta)\frac{j}{k}X < \beta^{-1}\left(1-\frac{1}{k+1}-\epsilon\right)^{i}\left(1+\frac{1}{k+1}+\epsilon\right)^{j} & \forall i,j\in\mathbb{N}, i+j\le k. \\ 2-(1-\delta)\left(1-\frac{i+j}{k}\right)Y-(1+\delta)\frac{i}{k}X < \beta^{-1}\left(1-\frac{1}{k+1}-\epsilon\right)^{i}\left(1+\frac{1}{k+1}+\epsilon\right)^{j} & \forall i,j\in\mathbb{N}, i+j\le k \end{cases} \tag{4.7}$$

由于这些不等式都是严格成立的，我们知道存在 $\beta' > \beta$，使得将 β 替换为 β' 后，这些不等式仍然成立。因此，根据 引理 4.1，算法 $\mathrm{Obl}^{\mathsf{t}}_{,\,k}{}^{\mathsf{p}}$ 的近似比至少为 β'，严格大于 β。

令 $\epsilon > 0$ 稍后选取；令 $\delta = \delta(\epsilon)$ $X = X(\epsilon)$ $Y = Y(\epsilon)$ 为应用引理 4.5 的结果。我们声称，对于充分小的 ϵ，(ϵ, δ, X, Y) 满足式 (4.7)。首先，我们考虑情形 $(i,j) \in \{(k/2,k/2)、(k/2-1,k/2+1)、(k/2-1,k)\}$。事实上，令 $\eta(\epsilon) = 1-\beta^{-1}(1-1/(k+1)-\epsilon)^{k/2}(1+1/(k+1)+\epsilon)^{k/2}$。因此，$1-\eta(\epsilon) = \beta^{-1}(1-1/(k+1)-\epsilon)^{k/2}(1+1/(k+1)+\epsilon)^{k/2}$，这恰好是上述不等式在 $i=j=k/2$ 处的右端。类似地，在 $i=k/2-1, j=k/2+1$ 处，右端为

$$\beta^{-1}\left(1-\frac{1}{k+1}-\epsilon\right)^{k/2-1}\left(1+\frac{1}{k+1}+\epsilon\right)^{k/2+1} = (1-\eta(\epsilon))\left(1+\frac{1}{k+1}+\epsilon\right)\left(1-\frac{1}{k+1}-\epsilon\right)^{-1},$$

且在 $i=k/2-1, j=k/2$ 处的右端为

$$\beta^{-1}\left(1-\frac{1}{k+1}-\epsilon\right)^{k/2-1}\left(1+\frac{1}{k+1}+\epsilon\right)^{k/2} = (1-\eta(\epsilon))\left(1-\frac{1}{k+1}-\epsilon\right)^{-1}.$$

因此，我们可以 写出 式（4.7）在（i, j）$\in$ {（$k/2$, $k/2$），（$k/2-1$, $k/2+1$），（$k/2-1$, k）} 等价地写作：

$$
\begin{cases}
\frac{1}{2}(1-\delta)X < 1-\eta & (4.8)\\
2-\frac{1}{2}(1+\delta)X < 1-\eta & (4.9)\\
\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{k}\right)(1-\delta)X < (1-\eta)\left(1+\frac{1}{k}+\epsilon\right)\left(1-\frac{1}{k+1}-\epsilon\right)^{-1} & \\
2-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{k}\right)(1+\delta)X < (1-\eta)\left(1+\frac{1}{k+1}+\epsilon\right)\left(1-\frac{1}{k+1}-\epsilon\right)^{-1} & \\
\frac{1}{k}(1+\delta)Y+\frac{1}{2}(1-\delta)X < (1-\eta)\left(1-\frac{1}{k+1}-\epsilon\right)^{-1} & (4.10)\\
2-\frac{1}{k}(1-\delta)Y-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{k}\right)(1+\delta)X < (1-\eta)\left(1-\frac{1}{k+1}-\epsilon\right)^{-1}. & (4.11)
\end{cases}
$$

这正是引理 4.5的结论。

最后，仍需证明当 ϵ 足够小时，严格不等式（式 (4.7)）对于 $(i,j) \notin \{(k/2,k/2)、(k/2-1,k/2+1)、(k/2-1,k)\}$ 也成立。为此，我们注意到，当 $\epsilon \to 0$ 时，有 $\delta,\eta \to 0$。此外，我们注意到，对于所有 ϵ，式 (4.8) 和式 (4.9) 蕴含

$$
\frac{1+\eta}{1+\delta} < \frac{X}{2} < \frac{1-\eta}{1-\delta}
$$

, a因此，当 $\epsilon \to 0$ 时，有 $X \to 2$。同样，式 (4.10) 和 式 (4.11) 共同蕴含

$$
\frac{2-(1-\eta)(1+\frac{1}{k})-(\frac{1}{2}-\frac{1}{k})(1+\delta)X}{\frac{1}{k}(1-\delta)} < Y < \frac{(1-\eta)(1+\frac{1}{k})-\frac{1}{2}(1-\delta)X}{\frac{1}{k}(1+\delta)},
$$

因此，当 $\epsilon \to 0, Y \to 1$ 时。最后，注意在式 (4.7) 中，对于每个 i,j，两个不等式右端的极限分别为$\beta^{-1}(1-1/(k+1))^i($ $1+1/(k+1))^j$，当 $\epsilon \to 0$ 时，两个不等式左端的极限为 $1+(j-i)/k$。因此，根据引理 4.4，只要 $(i,j) \notin \{(k/2,k/2)、($ $k/2-1,k/2+1)、(k/2-1,k)\}$，这些极限之间就满足严格不等式。因此，只要选择足够小的 ϵ, X， Y 就满足式 (4.7)，如所需。 □

4.3 “双侧伯努利不等式”：证明引理 4.4

在本小节中，我们证明引理 4.4，它（回顾一下）对应于不等式系统中解 $(X,Y) = (2,1)$ 的可行性，见引理 4.1，其中 $\delta = 0$ 且 $\gamma = \gamma_k$。为完整起见，我们列出标准伯努利不等式：

命题 4.12（伯努利不等式）。对于所有 $x,r \in \mathbb{R}$，若 $x > -1$ 且 $r \le 0$ 或 $r \ge 1$，则 $1+rx \le (1+x)^r$。此外，除非 $r = 0$ 或 $r = 1$，否则该不等式为严格不等式。

引理 4.4 的证明。引理 4.4。 首先注意，无论 k 的奇偶性如何，同时增加 j 和 i 都会使所需不等式的左端保持不变，同时严格减小右端。也就是说，对于左端，我们有$(j+1)-(i+1) = j-i$；而对于右端，我们有

$$
\frac{(1-\gamma_k)^{(i+1)-\lfloor k/2\rfloor}(1+\gamma_k)^{(j+1)-\lfloor k/2\rfloor}}{(1-\gamma_k)^{i-\lfloor k/2\rfloor}(1+\gamma_k)^{j-\lfloor k/2\rfloor}} = (1-\gamma_k)(1+\gamma_k) = 1-\gamma_k^2 < 1
$$

因为 $\gamma_k > 0$。此外，当且仅当 $j+i \le k-2$ 时，我们可以增加 j 和 i，同时使总和不超过 k。因此，我们只需不失一般性地在情形 $i+j \in \{k-1,k\}$ 中证明该不等式；而且，只有在这些情形下等号才可能成立。

现在，我们根据 k 的奇偶性继续讨论各种情形。

情形： k 为偶数。在这种情形下，我们有 $\lfloor k/2 \rfloor = k/2$，并且（回想一下） $\gamma_k = 1/(k+1)$。首先，我们注意到，当 $j = \frac{k}{2}$、$i = \frac{k}{2} - 1$ 时，所需不等式的左端和右端均为 $1 + \frac{1}{k}$，因此等号成立。暂且不考虑这种情形，由于 j、i 是和为 $k-1$ 或 k 的整数，我们有 $j - i \neq 1$。此外，我们有以下有用的等式

$$1 + \frac{2}{k} = \left(\frac{k+2}{k+1}\right)\left(\frac{k+1}{k}\right) = \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)\left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^{-1}. \tag{4.13}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}
1 + \frac{j-i}{k} &= 1 + \frac{j-i}{2} \cdot \frac{2}{k} \\
&\leq \left(1 + \frac{2}{k}\right)^{(j-i)/2} && \text{(Proposition 4.12 and } j - i \neq 1) \\
&= \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^{(j-i)/2} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^{(i-j)/2} && \text{(Eq. (4.13))} \\
&= \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^{i-k/2} \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^{j-k/2} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^{(k-(i+j))/2} \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^{(k-(i+j))/2}
\end{aligned}$$

这仅比我们所需的右端小，是因为 $(1 - 1/(k+1))(1 + 1/(k+1)) = 1 - 1/(k+1)^2 < 1$且 $j + i \leq k$。最后，我们回顾一下，伯努利不等式（命题 4.12）当且仅当 0 或 1 时取等号；由于指数为 $(j-i)/2$，因此在情形 $i = j = \frac{k}{2}$和 $i = \frac{k}{2} - 1$，$j = \frac{k}{2} + 1$中分别取等号。

情形： k 为奇数。在这种情形下，我们有 $\lfloor k/2 \rfloor = (k-1)/2$ 且（回想一下） $\gamma_k = 1/k$。我们不知道有何种同样简洁的方法（只应用一次伯努利不等式），因此还得多做一些工作。我们注意到，由于 $i + j \in \{k-1, k\}$, $\lfloor (i+j)/2 \rfloor = (k-1)/2$, 所以我们想要证明

$$1 + \frac{j-i}{k} \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{i - \lfloor (i+j)/2 \rfloor} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{j - \lfloor (i+j)/2 \rfloor},$$

此外，我们还会用到

$$\lfloor (i+j)/2 \rfloor + \lceil (i+j)/2 \rceil = i + j. \tag{4.14}$$

我们还会用到

$$1 + \frac{1}{k} = \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^{-1}. \tag{4.15}$$

首先，假设 $j \geq i$。由于 j 是整数，因此 $j \geq \lceil (i+j)/2 \rceil$。于是我们有：

$$\begin{aligned}
1 + \frac{j-i}{k} &= 1 + \frac{2j - (i+j)}{k} \\
&\leq \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{2j-(i+j)} && \text{(Proposition 4.12)} \\
&= \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{j - \lfloor (i+j)/2 \rfloor} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{j - \lceil (i+j)/2 \rceil} && \text{(Eq. (4.14))} \\
&= \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{j - \lfloor (i+j)/2 \rfloor} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^{\lceil (i+j)/2 \rceil - j} && \text{(Eq. (4.15))} \\
&\leq \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{j - \lfloor (i+j)/2 \rfloor} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{\lceil (i+j)/2 \rceil - j} && (1 - 1/(k+1) > 1 - 1/k \text{ 和 } j \geq \lceil (i+j)/2 \rceil) \\
&= \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{j - \lfloor (i+j)/2 \rfloor} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{i - \lfloor (i+j)/2 \rfloor}. && \text{(Eq. (4.14))}
\end{aligned}$$

另一方面，假设 $i > j$。那么同样可以得到：

$$
\begin{aligned}
1+\frac{j-i}{k} &= 1-\frac{2i-(i+j)}{k} \\
&\le \left(1-\frac{1}{k}\right)^{2i-(i+j)} && \text{(Proposition 4.12)} \\
&= \left(1-\frac{1}{k}\right)^{i-\lfloor (i+j)/2\rfloor}\left(1-\frac{1}{k}\right)^{i-\lceil (i+j)/2\rceil} && \text{(Eq. (4.14))} \\
&\le \left(1-\frac{1}{k}\right)^{i-\lfloor (i+j)/2\rfloor}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)^{i-\lceil (i+j)/2\rceil} && (1-1/(k+1) > 1-1/k \text{ 与 } i \ge \lceil (i+j)/2\rceil) \\
&= \left(1-\frac{1}{k}\right)^{i-\lfloor (i+j)/2\rfloor}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\lceil (i+j)/2\rceil-i} && \text{(Eq. (4.15))} \\
&= \left(1-\frac{1}{k}\right)^{i-\lfloor (i+j)/2\rfloor}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{j-\lfloor (i+j)/2\rfloor}. && \text{(Eq. (4.14))}
\end{aligned}
$$

要确定紧情形：若 $j \ge i$，伯努利不等式（命题 4.12）取等号的唯一条件是$j-i \in \{0,1\}$；这些分别对应于 $j=\frac{k-1}{2}$，$i=\frac{k-1}{2}$ 和 $j=\frac{k+1}{2}$，$i=\frac{k-1}{2}$。类似地，若 $i>j$，则需要 $i-j=1$，对应于 $j=\frac{k-1}{2}$，$i=\frac{k+1}{2}$。□

4.4 “松弛量”的分析：证明引理 4.5 和4.6

在本节中，我们证明引理 4.5 和4.6，从而完成定理 1.5的证明 .

证明引理 4.5。我们分别处理 $k \ge 4$ 和 $k=2$ 的情形。

情形： $k=2$。我们有

$$
1-\eta = \left(\frac{4}{3}+\epsilon\right)\left(\frac{2}{3}-\epsilon\right) / \left(\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{8}(4+3\epsilon)(2-3\epsilon),
$$

同理

$$
(1-\eta)\left(\frac{4}{3}+\epsilon\right)\left(\frac{2}{3}-\epsilon\right)^{-1} = \frac{1}{8}(4+3\epsilon)^2,
$$

and

$$
(1-\eta)\left(\frac{2}{3}-\epsilon\right)^{-1} = \frac{3}{8}(4+3\epsilon).
$$

因此，所需不等式分别变为：

$$
\begin{cases}
\frac{1}{2}(1-\delta)X < \frac{1}{8}(4+3\epsilon)(2-3\epsilon) & \text{(4.16a)} \\
2-\frac{1}{2}(1+\delta)X < \frac{1}{8}(4+3\epsilon)(2-3\epsilon) & \text{(4.16b)} \\
(1-\delta)X < \frac{1}{8}(4+3\epsilon)^2 & \text{(4.16c)} \\
2 < \frac{1}{8}(4+3\epsilon)^2 & \text{(4.16d)} \\
\frac{1}{2}(1+\delta)Y + \frac{1}{2}(1-\delta)X < \frac{3}{8}(4+3\epsilon) & \text{(4.16e)} \\
2-\frac{1}{2}(1-\delta)Y < \frac{3}{8}(4+3\epsilon). & \text{(4.16f)}
\end{cases}
$$

现在，我们观察到 式 (4.16d) 在 $\epsilon > 0$ (即它不依赖于 X或 Y) 时总是成立。同样，我们可以将 式 (4.16c) 与 式 (4.16a)进行比较；将 式 (4.16a) 乘以 2 得到 $(1-\delta)X <$

– $\frac{1}{8}(4+3\epsilon)(4-6\epsilon)$，这严格强于 式 (4.16c) 当 $\epsilon > 0$ 时。因此，我们可以将注意力限制在以下四个不等式上：式 (4.16a) 、 (4.16b) 、 (4.16e) 和 (4.16f)。

我们将公式 (4.16e) 和 (4.16f) 改写为

$$Y < \frac{\frac{3}{8}(4+3\epsilon) - \frac{1}{2}(1-\delta)X}{\frac{1}{2}(1+\delta)} \text{ and } Y > \frac{2 - \frac{3}{8}(4+3\epsilon)}{\frac{1}{2}(1-\delta)},$$

分别。因此， Y 存在当且仅当

$$\frac{2 - \frac{3}{8}(4+3\epsilon)}{\frac{1}{2}(1-\delta)} < \frac{\frac{3}{8}(4+3\epsilon) - \frac{1}{2}(1-\delta)X}{\frac{1}{2}(1+\delta)}$$

交叉相乘后得到

$$\left(\frac{3}{8}(4+3\epsilon) - \frac{1}{2}(1-\delta)X\right)\left(\frac{1}{2}(1-\delta)\right) - \left(2 - \frac{3}{8}(4+3\epsilon)\right)\left(\frac{1}{2}(1+\delta)\right) > 0,$$

这又可化简为

$$X < \frac{\left(\frac{3}{8}(4+3\epsilon)\right)\left(\frac{1}{2}(1-\delta)\right) - \left(2 - \frac{3}{8}(4+3\epsilon)\right)\left(\frac{1}{2}(1+\delta)\right)}{\left(\frac{1}{2}(1-\delta)\right)^2} = \frac{4 - 8\delta + 9\epsilon}{2(1-\delta)^2}. \tag{4.17}$$

现在，存在解当且仅当公式 (4.17) 和 (4.16a)中的上界都与公式 (4.16b)中的下界相容。我们可以将公式 (4.16a)和 (4.16b) 改写为

$$X < \frac{\frac{1}{8}(4+3\epsilon)(2-3\epsilon)}{\frac{1}{2}(1-\delta)} = \frac{8 - 6\epsilon - 9\epsilon^2}{4(1-\delta)} \text{ and } X > \frac{2 - \frac{1}{8}(4+3\epsilon)(2-3\epsilon)}{\frac{1}{2}(1+\delta)} = \frac{8 + 6\epsilon + 9\epsilon^2}{4(1+\delta)},$$

分别。最后，代入 $\delta = \epsilon$，对于 $0 < \epsilon < \epsilon_0 := 2/9$，有

$$\frac{8 + 6\epsilon + 9\epsilon^2}{4(1+\epsilon)} < \frac{8 - 6\epsilon - 9\epsilon^2}{4(1-\epsilon)} < \frac{4 - \epsilon}{2(1-\epsilon)^2},$$

通过再次交叉相乘即可验证，因此 X 存在。

情形： $k \geq 4$。在这种情形下，我们声称，以下这组不等式比所需不等式更强；它们对应于仅在右端代入$\epsilon = 0$：

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(1-\delta)X < 1 - \eta & (4.18a) \\ 2 - \frac{1}{2}(1+\delta)X < 1 - \eta & (4.18b) \\ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{k}\right)(1-\delta)X < (1-\eta)\left(1 + \frac{2}{k}\right) & (4.18c) \\ 2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k}\right)(1+\delta)X < (1-\eta)\left(1 + \frac{2}{k}\right) & (4.18d) \\ \frac{1}{k}(1+\delta)Y + \frac{1}{2}(1-\delta)X < (1-\eta)\left(1 + \frac{1}{k}\right) & (4.18e) \\ 2 - \frac{1}{k}(1-\delta)Y - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k}\right)(1+\delta)X < (1-\eta)\left(1 + \frac{1}{k}\right). & (4.18f) \end{cases}$$

事实上，前两个不等式相同。对于后四个，我们有 $(1 - 1/(k+1) - \epsilon)^{-1} > (1 - 1/(k+1))^{-1} = 1 + 1/k$ 以及 $(1+1/(k+1)+\epsilon)(1-1/(k+1)-\epsilon)^{-1} > (1+1/(k+1))(1-1/(k+1))^{-1} = 1+2/k$.[9]

[9]前一个不等式成立，是因为取倒数会反转 $1 - 1/(k+1) - \epsilon < 1 - 1/(k+1)$的方向。对于后一个不等式，交叉相乘可得 $(1 + 1/(k+1) + \epsilon)(1 - 1/(k+1)) - (1 + 1/(k+1))(1 - 1/(k+1) - \epsilon) = 2\epsilon > 0$。

现在我们注意到，式（4.18c）恰好是式（4.18a）两边同乘$1+\frac{2}{k}$所得，因此我们可以忽略式（4.18c），转而关注其余方程。我们可以将式（4.18a）等价地改写为

$$X < \frac{2(1-\eta)}{1-\delta}. \tag{4.19}$$

接下来，我们可以将 式 (4.18b)改写为

$$X > \frac{2(1+\eta)}{1+\delta}$$

并将 式 (4.18d)改写为

$$X > \frac{2-(1-\eta)\left(1+\frac{2}{k}\right)}{(1+\delta)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{k}\right)} = \frac{2(1+\eta\frac{k+2}{k-2})}{1+\delta}. \tag{4.20}$$

T因此，式 (4.18d) 严格强于 式 (4.18b)，所以我们同样可以忽略式 (4.18b)。[10]接下来，我们将 式 (4.18e) 和 (4.18f) 改写为

$$Y < \frac{(1-\eta)(1+\frac{1}{k})-\frac{1}{2}(1-\delta)X}{\frac{1}{k}(1+\delta)} \text{ and } Y > \frac{2-(1-\eta)(1+\frac{1}{k})-(\frac{1}{2}-\frac{1}{k})(1+\delta)X}{\frac{1}{k}(1-\delta)}.$$

因此， Y 存在，当且仅当 X 满足

$$(1-\delta)\left((1-\eta)\left(1+\frac{1}{k}\right)-\frac{1}{2}(1-\delta)X\right)-(1+\delta)\left(2-(1-\eta)\left(1+\frac{1}{k}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{k}\right)(1+\delta)X\right)>0,$$

这可化简为

$$X < \frac{2(1-k\delta-(k+1)\eta)}{1-2(k-1)\delta+\delta^2}.$$

令 $\delta = 4\eta$，并利用假设 $\delta \le 1$，可知以下条件足以推出该结论：

$$X < \frac{2(1-(5k+1)\eta)}{1-(8k-9)\eta}. \tag{4.21}$$

最后，我们注意到， X 当式 (4.20) 中的下界与式 (4.19) 和(4.21)中的上界相容时，才存在。对于 $0<\eta<\eta_0$: $=\min\{1/(8k-9),\ (13-3k)/(13+12k)\}$，我们有

$$\frac{2(1+\eta)}{1+4\eta} < \frac{2(1-(5k+1)\eta)}{1-(8k-9)\eta} < \frac{2(1-\eta)}{1-4\eta}$$

通过交叉相乘即可验证，因此 X 存在。 □

*Pro*引理 4.6 的引理 4.6。代入 $Z=\frac{1}{2}X$，我们分别将这六个不等式改写为 :

$$\begin{cases} Z < \dfrac{(1-\eta)\left(1+\frac{1}{k}+\epsilon\right)}{\left(1+\frac{1}{k}\right)(1-\delta)} & (4.22a)\\ Z > \dfrac{2-(1-\eta)\left(1+\frac{1}{k}+\epsilon\right)}{\left(1-\frac{1}{k}\right)(1+\delta)} & (4.22b)\\ Z < \dfrac{(1-\eta)\left(1-\frac{1}{k}-\epsilon\right)}{\left(1-\frac{1}{k}\right)(1-\delta)} & (4.22c)\\ Z > \dfrac{2-(1-\eta)\left(1-\frac{1}{k}-\epsilon\right)}{\left(1+\frac{1}{k}\right)(1+\delta)} & (4.22d)\\ Y < \dfrac{1-\eta-\left(1-\frac{1}{k}\right)(1-\delta)Z}{\frac{1}{k}(1+\delta)} & (4.22e)\\ Y > \dfrac{1+\eta-\left(1-\frac{1}{k}\right)(1+\delta)Z}{\frac{1}{k}(1-\delta)} & (4.22f) \end{cases}$$

[10]注意与情形 $k=2$ 的区别：当时第四个等式 *weaker* 第二个等式（实际上是恒真式）。

我们比较 公式 (4.22e)和 (4.22f)，并可见 Y 当且仅当

$$\frac{1+\eta-\left(1-\frac{1}{k}\right)(1+\delta)Y}{1-\delta}<\frac{1-\eta-\left(1-\frac{1}{k}\right)(1-\delta)Y}{1+\delta}.$$

我们可以交叉相乘，并推导出 Y 存在当且仅当

$$Z>\frac{\eta+\delta}{2\delta\left(1-\frac{1}{k}\right)} \tag{4.23}$$

现在，我们比较 式（4.22a）和 （4.22c）；可得

$$\frac{1-\frac{1}{k}-\epsilon}{1-\frac{1}{k}}<\frac{1+\frac{1}{k}+\epsilon}{1+\frac{1}{k}}$$

因为该不等式交叉相乘后得到 $2\epsilon>0$，因此 式（4.22c）推出 式（4.22a）。

最后，我们注意到 Z 存在，当且仅当式 Z （4.22c）中的上界大于式（4.23）、（4.22b）和（4.22d）中的下界。我们分别证明每个不等式。首先，式（4.23）和（4.22c）相容，当且仅当

$$\frac{(1-\eta)(1-\frac{1}{k}-\epsilon)}{1-\delta}>\frac{\delta+\eta}{2\delta}.$$

在 $\delta=5\eta$处，交叉相乘后得到 $2k-5(1-\eta)-5\epsilon k(1-\eta)+10k\eta>0$；由于 $k\geq 3$在 ϵ充分小时成立。其次，式（4.22b）和（4.22c）相容，当且仅当

$$\frac{(1-\eta)(1-\frac{1}{k}-\epsilon)}{1-\delta}>\frac{2-(1-\eta)(1+\frac{1}{k}+\epsilon)}{1+\delta},$$

并且在 $\delta=5\eta$交叉相乘可得 $4k-5(1-\eta)-5k\epsilon(1-\eta)>0$，对于足够小的$\epsilon$，由于 $k\geq 3$。最后，等式(4.22c)和(4.22d) 相容当且仅当

$$\frac{(1-\eta)(1-\frac{1}{k}-\epsilon)}{\left(1-\frac{1}{k}\right)(1-\delta)}>\frac{2-(1-\eta)(1-\frac{1}{k}-\epsilon)}{\left(1+\frac{1}{k}\right)(1+\delta)};$$

在 $\delta=5\eta$ 处，交叉相乘可得 $(4k+5-5\eta)(k-1)\eta-\epsilon k(1-\eta)(k+5\eta)>0$。遗憾的是，要完成证明，我们实际上需要比较 η 和 ϵ。考虑以下断言：

断言。对于足够小的 $\epsilon>0$，有 $\epsilon/2\leq\eta\leq\epsilon$。

于是得到下界 $(4k+5-5\eta)(k-1)\eta-\epsilon k(1-\eta)(k+5\eta)\geq(4k+5)(k-1)\epsilon/2-\epsilon k(k+5\epsilon)$；对于足够小的 ϵ，该下界为正，因为 $k\geq 3$，所以 $(4k+5)(k-1)\geq k^2$。

接下来只需验证这一断言。我们展开

$$\eta=1-\beta^{-1}\left(1-\frac{1}{k}-\epsilon\right)^{(k-1)/2}\left(1+\frac{1}{k}+\epsilon\right)^{(k-1)/2}=1-\left(1-\frac{\epsilon}{1-\frac{1}{k}}\right)^{(k-1)/2}\left(1+\frac{\epsilon}{1+\frac{1}{k}}\right)^{(k-1)/2}.$$

展开右端的表达式时，所有的 1 都会抵消，而 ϵ 的系数为 $-(\frac{k-1}{2})(-\frac{1}{1-1/k}+\frac{1}{1+1/k})=\frac{k}{k+1}$。（从左侧因子中选取 $-\epsilon/(1-1/k)$，并令其余因子都取 1，共有 $(k-1)/2$ 种选法；右侧因子同理。）所有其余项关于 ϵ 的阶数都较低，且$1/2<k/(k+1)<1$，因此当 $\epsilon>0$ 足够小时，有 $\epsilon/2\leq\eta\leq\epsilon$，如所需。

□

5 局限性　　类“超无视”算法：证明定理 1.4

回顾一下，Max-kAND 问题的“超无偏”算法形式为$\mathtt{Obl}^{\mathbf{t}}_{\cdot,k}{}^{\mathbf{p}}$ 其中 $\mathbf{t}=(0,1)$, $\mathbf{p}=(p)$，也就是说，该算法以概率 p 将正偏置顶点赋值为 1，以概率 $1-p$ 将负偏置顶点赋值为 1，并以概率 $_1{}_2$ 将零偏置顶点赋值为 1。本节证明定理 1.4，该定理指出，最佳超无偏算法在 α^*_k 的Max-kAND 问题上的近似比恰好为该值。本节的核心是证明以下引理：

引理 5.1。 对于所有 $k \geq 2 \in \mathbb{N}$，令 $\mathbf{t} = (0,1)$（且 $L = 3$）。存在一个可行解 $\{W(\mathbf{c})\}_{\mathbf{c} \in \mathsf{Ptn}_k^L}$，满足引理 3.4中的原始线性规划，且对于所有 $p \in [0,1]$，目标函数的值有如下上界：

$$\sum_{\mathbf{c} \in \mathsf{Ptn}_k^L} \mathsf{prob}^{(p)}(\mathbf{c}) \cdot W(\mathbf{c}) \leq \alpha_k^*.$$

此外，当且仅当 $p = p_k^*$ 时取等号。

这样的可行解也可以被视为一个针对Max-kAND 的超无偏算法困难实例。事实上，结合引理 5.1 及其在引理 4.1 和4.4中的匹配“对偶”构造，我们可以立即证明定理 1.4：

定理 1.4 的证明。首先，我们声称，若 $p \neq p_k^*$，则 $\alpha(\mathsf{Obl}^{\mathbf{t},\mathbf{P}}_k) < \alpha_k^*$。为此，我们将引理 5.1 中的（严格）上界与引理 3.4 结合起来。另一方面，我们声称，若 $p = p_k^*$，则$\alpha(\mathsf{Obl}^{\mathbf{t},\mathbf{P}}_k) = \alpha_k^*$。 $\alpha(\mathsf{Obl}^{\mathbf{t},\mathbf{P}}_k) \leq \alpha_k^*$ 可由同一对引理推出，而 $\alpha(\mathsf{Obl}^{\mathbf{t},\mathbf{P}}_k) \geq \alpha_k^*$ 则由引理 4.1 和引理 4.4 得出。（关于为何引理 4.4 的保证恰好是引理 4.1 对 $\delta = 0, X = 2, Y = 1$ 的假设，请参见第 4.2 节中的讨论。）

□

为了证明 引理 5.1，我们通过“合成”某些实例对来构造可行解。这种方法在 [BHP+22]中提出，这些实例对对于 草图化 算法而言无法区分。目前尚不清楚如何以黑箱方式做到这一点，因此我们选择从头开始给出下界的证明，同时重用一些关键不等式；这些不等式也曾出现在 [BHP+22]的下界证明中。本节末尾我们会再次讨论“对无视性困难”的实例与“对草图化困难”的实例对之间的联系。但现在，我们从 [BHP+22]中重用以下不等式：

命题 5.2 ([BHP+22，引理证明中 17])。 对所有 $k \geq 2 \in \mathbb{N}$，以下结论成立。

- 当 k 为奇数时，多项式 $r_k(p) := p^{(k+1)/2}(1-p)^{(k-1)/2}$ 在单位区间上于 $p = p_k^*$ 处取得唯一最小值。特别地，

$$\frac{\min_{p \in [0,1]} r_k(p)}{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{k}\right)} = \frac{r_k(p_k^*)}{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{k}\right)} = \alpha_k^*.$$

- 对于偶数 k，多项式 $r_k(p) := \left(\frac{k+2}{k^2+k+2}\right)^{k/2+1}(1-p)^{k/2-1} + \frac{k^2}{k^2+k+2}p^{k/2}(1-p)^{k/2}$ 在单位区间上的唯一最小值点为 $p = p_k^*$。特别地，

$$\frac{\min_{p \in [0,1]} r_k(p)}{\frac{(k+1)(k+2)}{k^2+(k+2)^2}} = \frac{r_k(p_k^*)}{\frac{(k+1)(k+2)}{k^2+(k+2)^2}} = \alpha_k^*.$$

为完整起见，我们指出，可以通过注意到导数 $\frac{dr_k}{dp}$ 等于

$$-(1-p)^{(k-3)/2}p^{(k-1)/2}\left(kp - \frac{k+1}{2}\right)$$

and

$$-\frac{k}{2+2k+2k^2}(1-p)^{k/2-2}p^{k/2-1}\left(\frac{k}{2}+1-2p\right)\left((k+1)p - \left(\frac{k}{2}+1\right)\right)$$

在奇数和偶数 k 的情形下分别成立，因此 p_k^* 是 r_k^* 在单位区间内唯一的临界点。（注意，对于奇数 k，$kp_k^* - (k+1)/2 = 0$；对于偶数 k，$(k+1)p_k^* - (k/2+1) = 0$。）

现在，我们准备证明引理 5.1：

引理的证明 引理 5.1。 我们构造一个 稀疏的 解 W。由于 $L = 3$（即存在三个偏置类别$[1,0)$ $\{0\}$，$(0,1]$），W 由自然数的六元组（c_{-1}^+，c_0^+，c_{+1}^+，c_{-1}^-，c_0^-，c_{+1}^-进行索引，这些自然数之和为 k。我们根据 k的奇偶性进行分类讨论。

情形： k 奇数。令 $\mathsf{a} = (\frac{k-1}{2}, 0, \frac{k+1}{2}, 0, 0, 0)$，并令 $\mathsf{b} = (0, 0, 0, \frac{k+1}{2}, 0, \frac{k-1}{2})$。（也就是说，$\mathsf{a}$ 对应于包含全为正文字的子句，且正偏变量仅占多数的情形。b 对应于包含全为负文字的子句，且负偏变量仅占多数的情形。）为方便起见，定义 $\gamma := \frac{1}{2}(1+\frac{1}{k})$。于是我们设 $W(\mathsf{a}) := \gamma^{-1} \cdot \frac{1}{2}(1+\frac{1}{k})$， $W(\mathsf{b}) := \gamma^{-1} \cdot \frac{1}{2}(1-\frac{1}{k})$，以及对所有 $\mathsf{c} \in \mathsf{Ptn}_k^L \setminus \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$，均有 $W(\mathsf{c}) = 0$。（因此，$W(\mathsf{a}) = 1$，而 $W(\mathsf{b}) = 1 - \frac{2}{k+1}$。我们这样写 W是为了按因子 γ“改变”归一化，从而可以认为 W中的总权重为 1。）

首先，我们检查 W是否可行。注意到 $\mathsf{a} \in \mathsf{PosPtn}_k^L$且 $\mathsf{b} \notin \mathsf{PosPtn}_k^L$，因此有 $\sum_{\mathsf{c} \in \mathsf{PosPtn}_k^L} W(\mathsf{c}) = W(\mathsf{a}) = 1$。我们还需要验证这些不等式

$$t_{-1}^-(W^+(-1) + W^-(-1)) \le W^+(-1) - W^-(-1) \le t_{-1}^+(W^+(-1) + W^-(-1)),$$

$$t_0^-(W^+(0) + W^-(0)) \le W^+(0) - W^-(0) \le t_0^+(W^+(0) + W^-(0)),$$

and

$$t_{+1}^-(W^+(+1) + W^-(+1)) \le W^+(+1) - W^-(+1) \le t_{+1}^+(W^+(+1) + W^-(+1)).$$

回想一下，$t_{-1}^- = -1$、 $t_{-1}^+ = t_0^- = t_0^+ = t_{+1}^- = 0$和$t_{+1}^+ = +1$，它们分别等价于

$$W^+(-1) \le W^-(-1), W^+(0) = W^-(0), \text{ and } W^-(+1) \le W^+(+1).$$

现在回忆一下，根据 $W^+(i)$ 和 $W^-(i)$ 的定义（见 引理 3.4），我们有

$$\begin{aligned}
W^+(+1) &= a_{+1}^+ W(\mathbf{a}) + b_{+1}^+ W(\mathbf{b}) \\
W^-(+1) &= a_{+1}^- W(\mathbf{a}) + b_{+1}^- W(\mathbf{b}) \\
W^+(0) &= a_0^+ W(\mathbf{a}) + b_0^+ W(\mathbf{b}) \\
W^-(0) &= a_0^- W(\mathbf{a}) + b_0^- W(\mathbf{b}) \\
W^+(-1) &= a_{-1}^+ W(\mathbf{a}) + b_{-1}^+ W(\mathbf{b}) \\
W^-(-1) &= a_{-1}^- W(\mathbf{a}) + b_{-1}^- W(\mathbf{b}).
\end{aligned}$$

幸运的是，根据定义，a_{+1}^-、 b_{+1}^+、 a_0^+、 b_0^+、 a_0^-、 b_0^-、 a_{-1}^-、 b_{-1}^+都为零，因此我们得出 $W^+(\mathsf{0}) = W^-(\mathsf{0}) = 0$，并且

$$\begin{aligned}
W^+(+1) = a_{+1}^+ W(\mathbf{a}) &= \frac{1}{\gamma}\left(\frac{k+1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{k}\right)\right) = \frac{1}{\gamma \cdot 4k}(k+1)^2 \\
W^-(+1) = b_{+1}^- W(\mathbf{b}) &= \frac{1}{\gamma}\left(\frac{k-1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{k}\right)\right) = \frac{1}{\gamma \cdot 4k}(k-1)^2 \\
W^+(-1) = a_{-1}^+ W(\mathbf{a}) &= \frac{1}{\gamma}\left(\frac{k-1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{k}\right)\right) = \frac{1}{\gamma \cdot 4k}(k+1)(k-1) \\
W^-(-1) = b_{-1}^- W(\mathbf{b}) &= \frac{1}{\gamma}\left(\frac{k+1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{k}\right)\right) = \frac{1}{\gamma \cdot 4k}(k+1)(k-1)
\end{aligned}$$

由于 $(k-1)^2 \le (k+1)(k-1) \le (k+1)^2,$，因此我们满足所需的两个不等式，所以$W$ 是可行的。

最后，我们证明 W 的目标值上界。根据公式（3.1），我们回顾一下：概率$^{(p)}(\mathbf{a})$ =概率$^{(p)}(\mathbf{b})$ $= p^{(k+1)/2}(1-p)^{(k-1)/2}$。因此，目标函数的值为

$$\mathsf{prob}^{(p)}(\mathbf{a}) \cdot W(\mathbf{a}) + \mathsf{prob}^{(p)}(\mathbf{b}) \cdot W(\mathbf{b}) = p^{(k+1)/2}(1-p)^{(k-1)/2}(W(\mathbf{a}) + W(\mathbf{b})) = \frac{p^{(k+1)/2}(1-p)^{(k-1)/2}}{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{k})}$$

根据 γ 的定义，这恰好是 $r_k(p)/(\frac{1}{2}(1+\frac{1}{k}))$。因此，根据 命题 5.2，我们得到目标函数的上界为 α_k^*，且当且仅当 $p = p_k^*$ 时取等号。

情形： k为偶数。令 $\mathbf{a} = (\frac{k}{2}, 0, \frac{k}{2}, 0, 0, 0)$，令 $\mathbf{b} = (\frac{k}{2}+1, 0, \frac{k}{2}-1, 0, 0, 0)$，令 $\mathbf{d} = (0, 0, 0, \frac{k}{2}, 0, \frac{k}{2})$。（即，$\mathbf{a}$ 对应于全部为正文字的子句，其中正偏变量和负偏变量数量相等。$\mathbf{b}$ 对应于全部为正文字的子句，其中正偏变量仅占微弱多数。$\mathbf{d}$ 对应于全部为负文字的子句，其中正偏变量和负偏变量数量相等。）我们令 $\gamma = (k+1)(k+2)\,k^2+(k+2)^2$。然后，我们定义 $W(\mathbf{a}) = \gamma^{-1}\,k^2+\,k+2()^2$；$W(\mathbf{b}) = \gamma^{-1}\,k^2+\,^{k^2}\,(k+2)^2$；$W(\mathbf{d}) = \gamma^{-1}\frac{k^2+k+2}{k^2+\,k+2}()^2$；以及对所有 $\mathbf{c} \in \mathrm{Ptn}_k^L \setminus \{\mathbf{a}、\mathbf{b}、\mathbf{d}\}$，$W(\mathbf{c}) = 0$。

我们对前一种情形进行类似但稍微更繁琐的分析。再次根据定义，我们有 $\sum_{\mathbf{c}\in\mathrm{PosPtn}_k^L} W(\mathbf{c}) = W(\mathbf{a}) + W(\mathbf{b}) = 1$，这是根据 W和 γ的定义得到的。我们再次有 $W^+(0) = W^-(0) = 0$。此外，通过类似的计算，

$$\begin{aligned}
W^+(+1) = a^+_{+1}W(\mathbf{a}) + b^+_{+1}W(\mathbf{b}) &= \frac{1}{\gamma\cdot(k^2+(k+2)^2)}\left(\left(\frac{k}{2}\right)(3k+2) + \left(\frac{k}{2}+1\right)k^2\right)\\
W^-(+1) = d^-_{+1}W(\mathbf{d}) &= \frac{1}{\gamma\cdot(k^2+(k+2)^2)}\left(\frac{k}{2}\right)(k^2+k+2)\\
W^+(-1) = a^+_{-1}W(\mathbf{a}) + b^+_{-1}W(\mathbf{b}) &= \frac{1}{\gamma\cdot(k^2+(k+2)^2)}\left(\left(\frac{k}{2}\right)(3k+2) + \left(\frac{k}{2}-1\right)k^2\right)\\
W^-(-1) = d^-_{-1}W(\mathbf{d}) &= \frac{1}{\gamma\cdot(k^2+(k+2)^2)}\left(\frac{k}{2}\right)(k^2+k+2).
\end{aligned}$$

现在我们可以验证

$$\left(\frac{k}{2}\right)(k^2+k+2) = \left(\frac{k}{2}\right)(3k+2) + \left(\frac{k}{2}-1\right)k^2 < \left(\frac{k}{2}\right)(3k+2) + \left(\frac{k}{2}+1\right)k^2$$

因此 W 是可行的。

最后，我们回顾一下公式（3.1）给出的概率$^{(p)}(\mathbf{a})$ = 概率$^{(p)}(\mathbf{d})$ = $p^{k/2}(1-p)^{k/2}$ 而概率$^{(p)}(\mathbf{b})$ = $p^{k/2+1}(1-p)^{k/2-1}$。因此，目标函数的值为

$$\mathrm{prob}^{(p)}(\mathbf{a})\cdot W(\mathbf{a}) + \mathrm{prob}^{(p)}(\mathbf{b})\cdot W(\mathbf{b}) + \mathrm{prob}^{(p)}(\mathbf{d})\cdot W(\mathbf{d}) = \frac{k^2p^{k/2}(1-p)^{k/2} + (k+2)^2p^{k/2+1}(1-p)^{k/2-1}}{(k+1)(k+2)}.$$

这再次恰好是 $r_k(p)/((k+1)(k+2)/(k^2+(k+2)^2))$，因此根据命题 5.2，可得目标函数的上界为 α_k^*，且当 $p = p_k^*$时取等号。 □

6 对流式算法的影响

在本节中，我们证明定理 1.6 和1.7，将我们在前几节中开发的无偏算法转换为流式算法；具体而言，我们将开发在两种不同假设下运行的算法，即随机排序和有界度数。这一转换遵循 Saxena、Singer、Sudan 和 Velusamy [SSSV23b] 关于Max-DICUT 问题的分析。

对于任意 Ψ 的Max-kAND实例，以及任意 L-类偏置划分$\mathbf{t}$，我们定义一个所谓的快照数组，用于Ψ 捕捉具有每种可能模式的约束的（相对）权重，从而推广Max-DICUT 在[SSSV23b中的情形定义；SSSV23a]。这是一个由$\mathrm{Snap}^{\mathbf{t}}_{\Psi} \in \mathbb{R}^{\mathrm{Ptn}_k^L}_{\geq 0}$ 给出的数组：

$$\mathrm{Snap}^{\mathbf{t}}_{\Psi}(\mathbf{c}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\sum_{j=1}^m w_j \mathbb{I}[\mathrm{ptn}^{\mathbf{t}}(C_j) = \mathbf{c}]}{\sum_{j=1}^m w_j}$$

当 Ψ 有子句 $C_1, \ldots, C_m$，权重分别为 $w_1, \ldots, w_m$ 时。注意，上文的 引理 3.2 指出，$\mathrm{Obl}^{\mathbf{t}}{}_{,k}{}^{\mathbf{p}}(\Psi)$，即无偏算法在实例 Ψ 上生成的赋值的期望值，恰好是 $\mathrm{Snap}^{\mathbf{t}}_{\Psi}$ 各项的线性组合，其中权重仅取决于舍入向量 $\mathbf{p}$（特别是，项 $\mathbf{c}$ 的权重为 $\mathrm{prob}^{\mathbf{p}}(\mathbf{c})$）。由此可得以下推论：

命题 6.1. 对于每个 $L, k \geq 2 \in \mathbb{N}$，假设 $\mathbf{t}$ 是一个偏置划分，$\mathbf{p}$ 是一个舍入向量，使得 $\mathrm{Obl}^{\mathbf{t}}_{,k}{}^{\mathbf{p}}$ 的比率为 α ($\mathrm{Obl}^{\mathbf{t}}_{,k}{}^{\mathbf{p}}$) $\geq \alpha$。对于 Max-kAND 的每个实例 Ψ，假设 $\widehat{M} \in \mathbb{R}^{\mathrm{Ptn}^L_k}$ 是 $\mathrm{Snap}^{\mathbf{t}}_{\Psi}$ 的一个估计，其含义是 $\|\mathrm{Snap}^{\mathbf{t}}_{\Psi} - \widehat{M}\|_1 := \sum_{\mathbf{c}\in\mathrm{Ptn}^L_k} |\mathrm{Snap}^{\mathbf{t}}_{\Psi}(\mathbf{c}) - \widehat{M}(\mathbf{c})| \leq \epsilon$。那么

$$(\alpha - 2^{k+1}\epsilon)\mathrm{val}_\Psi \leq \sum_{\mathbf{c}\in\mathrm{Ptn}^L_k} \mathrm{prob}^{\mathbf{p}}(\mathbf{c})\widehat{M}(\mathbf{c}) - \epsilon \leq \mathrm{val}_\Psi.$$

证明。利用假设 $\alpha\mathrm{val}_\Psi \leq \sum_{\mathbf{c}\in\mathrm{Ptn}^L_k} \mathrm{prob}^{\mathbf{p}}(\mathbf{c})M(\mathbf{c}) \leq \mathrm{val}_\Psi$ 以及

$$\left|\sum_{\mathbf{c}\in\mathrm{Ptn}^L_k} \mathrm{prob}^{\mathbf{p}}(\mathbf{c})\widehat{M}(\mathbf{c}) - \sum_{\mathbf{c}\in\mathrm{Ptn}^L_k} \mathrm{prob}^{\mathbf{p}}(\mathbf{c})M(\mathbf{c})\right| \leq \sum_{\mathbf{c}\in\mathrm{Ptn}^L_k} \mathrm{prob}^{\mathbf{p}}(\mathbf{c})|\widehat{M}(\mathbf{c}) - M(\mathbf{c})| \leq \sum_{\mathbf{c}\in\mathrm{Ptn}^L_k} |\widehat{M}(\mathbf{c}) - M(\mathbf{c})| \leq \epsilon$$

和 $\mathrm{val}_\Psi \geq 2^{-k}$。 □

我们描述的两个算法（用于证明定理 1.6 和定理 1.7）都具有以下结构：首先，我们固定来自定理 1.5 的偏置划分 $\mathbf{t}$ 和舍入向量 $\mathbf{p}$，它们能给出优于 α^*_k 的近似。现在，给定一个实例 Ψ，我们声称，只需生成一个数组 $\widehat{M} \in \mathbb{R}^{\mathrm{Ptn}^L_k}$，使得对于所有 $\mathbf{c} \in \mathrm{Ptn}^L_k$，都有 $|\widehat{M}(\mathbf{c}) - \mathrm{Snap}^{\mathbf{t}}_{\Psi}(\mathbf{c})| \leq \epsilon$。事实上，根据三角不等式，我们将有 $\|\widehat{M} - \mathrm{Snap}^{\mathbf{t}}_{\Psi}\|_1 \leq K\epsilon$，其中 $K := |\mathrm{Ptn}^L_k|$；然后可以应用上述命题（命题 6.1），这意味着我们可以生成一个 $(\alpha - 2^{k+1}K\epsilon)$-近似来逼近 val_Ψ（通过对 $\widehat{M}$ 的各项应用线性函数）；重新参数化 ϵ 以去掉这些因子，即可得到最终算法。

现在首先，我们来构建随机顺序算法：

定理 1.6 的证明。令 $p := \epsilon^2/C$，其中 $C = C(k)$ 是一个稍后选定的大常数。我们存储一个集合 E，其中包含数据流中的前 $1/p$ 个约束。令 S 表示在 E 中的约束里出现的变量集合，在数据流的其余部分中，我们跟踪 S 中每个变量的偏置。最后，在数据流结束时，我们通过 $\widehat{M}(\mathbf{c}) = \frac{1}{pm}\widehat{X}_{\mathbf{c}}$ 估计 $\mathrm{Snap}^{\mathbf{t}}_{\Psi}$，其中 $\widehat{X}_{\mathbf{c}}$ 是 E 中具有模式 $\mathbf{c}$ 的约束数量。显然，该方法仅使用 $O(\log n/\epsilon^2)$ 的空间即可运行，因为我们只需存储 E 以及 S 中每个顶点的偏置；这两个集合的大小均为常数 $O(1/\epsilon^2)$。因此，根据上一段中的推理，只需证明对于每个 $\mathbf{c} \in \mathrm{Ptn}^L_k$，都有 $|\widehat{M}(\mathbf{c}) - \mathrm{Snap}^{\mathbf{t}}_{\Psi}(\mathbf{c})| \leq \epsilon$。

对于每个模式 $\mathbf{c}$，令 $X_{\mathbf{c}} := \mathrm{Snap}^{\mathbf{t}}_{\Psi}(\mathbf{c}) \cdot m$ 表示 Ψ 中模式为 $\mathbf{c}$ 的约束的真实数量。因此，根据 M 和 $X_{\mathbf{c}}$的定义，我们等价地只需证明 $|X_{\mathbf{c}} - pX_{\mathbf{c}}| \leq \epsilon pm$。现在注意到，$X_{\mathbf{c}}$ 等于从 Ψ 中无放回抽取 $1/p$ 个约束所得随机样本中，模式为 $\mathbf{c}$ 的约束数量。~我们认为，可以改为证明关于 $X_{\mathbf{c}}$ 的不等式，它等于从 Ψ 中有放回抽取 $1/p$ 个约束所得随机样本中，模式为 $\mathbf{c}$ 的约束数量。事实上，当我们对

~ ~$X_{\mathbf{c}}$进行抽样时，令 $\mathcal{E}$ 表示未抽到任何约束 $C_j, j \in [m]$ 两次的事件。则 $X_{\mathbf{c}}$ 的分布与在条件 $\overline{\mathcal{E}}$下 $X_{\mathbf{c}}$ 的分布~相同；$\mathcal{E}$ 的概率为 $o(1)$，[11] 因此我们可以任意~舍弃所有发生 $\mathcal{E}$ 的样本。最后，我们注意到，$X_{\mathbf{c}}$ 可以写成 $1/p$ 个独立伯努利变量之和，每个变量以 $X_{\mathbf{c}}/m$的概率取值为 1。因此

$$\mathbb{E}[\widetilde{X}_{\mathbf{c}}] = X_{\mathbf{c}}/(pm) \tag{6.2}$$

并使用切尔诺夫界：

$$\begin{aligned}
\Pr[|\widetilde{X}_{\mathbf{c}} - pX_{\mathbf{c}}| \leq \epsilon pm] &\leq 2\exp\left(\frac{-(\epsilon pm)^2}{3\,\mathbb{E}[\widetilde{X}_{\mathbf{c}}]}\right) && \text{(Chernoff bound)}\\
&\leq 2\exp\left(\frac{-\epsilon^2 pm^2}{3X_{\mathbf{c}}}\right) && \text{(Eq. (6.2))}\\
&\leq 2\exp\left(\frac{-\epsilon^2 pm}{3}\right) && (X_{\mathbf{c}} \leq m)\\
&\leq 2\exp(-C/3). && \text{(def. of } p)
\end{aligned}$$

[11]技术说明：根据马尔可夫不等式，这一结论成立，但前提是只有 $\omega(1)$ 个约束，因此预期碰撞次数为 $o(1)$。如果不满足这一条件，我们只需将数据流中的所有约束都存储起来即可。

将 $C = C(k)$ 设得足够大后，该值小于例如 $1/(1000K)$（其中 $K := |\mathrm{Ptn}_k^L|$），因此我们可以对所有 $|\mathrm{Ptn}_k^L|$ 模式 c 使用并集界。 □

类似地，我们为有界度实例设计了一种算法：

定理 1.7 的证明。为简单起见，假设输入 m 是 Ψ 中边的数量。我们还可以进一步假设 $m \geq \Omega(n^{1-1/k})$，因为否则我们可以存储该实例中的所有约束，并准确计算 Max-kAND 的值。令 $p = (CD/(m\epsilon^2))^{1/k}$，其中 $C = C(k)$ 是稍后选定的一个较大常数。考虑以下算法：在数据流开始之前，通过以概率 p 独立地包含 $[n]$ 中的每个变量来采样 $S \subseteq [n]$。[12] 随后，在数据流处理过程中，我们将所有变量均属于 S 的约束存储在集合 E 中，同时跟踪 S 中每个变量的偏置。最后，我们通过 $\widehat{M}(\mathbf{c}) = \frac{1}{p^k m}\widehat{X}_{\mathbf{c}}$ 估计 $\mathsf{Snap}_\Psi^{\mathbf{t}}$，其中 $\widehat{X}_{\mathbf{c}}$ 统计 E 中具有模式 c 的约束数量。（注意，由于我们知道 S 中每个变量的偏置，因此知道 E 中每个约束的模式。）我们声称：(1) 这种采样方法所使用的空间不超过空间上界；(2) 对于每个 $\mathbf{c} \in \mathrm{Ptn}_k^L$，$|\widehat{M}(\mathbf{c}) - \mathsf{Snap}_\Psi^{\mathbf{t}}(\mathbf{c})| \leq \epsilon$。

空间上界。令 n^* 表示 Ψ中的非孤立变量数量，即至少出现在一个约束中的变量数量。注意到

$$\mathbb{E}[|S|] = pn^* = \left(\frac{CD}{\epsilon^2}\right)^{1/k} n^* m^{-1/k}.$$

现在利用 $m \geq n^*$，再利用 $n^* \leq n$，得到 $\mathbb{E}[|S|] \leq (CD/\epsilon^2)^{1/k} n^{1-1/k}$。此外，我们有

$$\mathbb{E}[|E|] = p^k m = \frac{CD}{\epsilon^2},$$

它作为 n的函数是常数。因此，利用马尔可夫不等式，当 n 足够大时，我们以概率 $999/1000$使用$O(D^{1/k} n^{1-1/k} \log n/\epsilon^{2/k})$ 的空间。

正确性。对于每个模式 $\mathbf{c}$，令 $X_{\mathbf{c}} = \mathsf{Snap}_\Psi^{\mathbf{t}}(\mathbf{c}) \cdot m$ 表示 Ψ 中具有模式 $\mathbf{c}$ 的约束的实际数量；回忆一下，$X_{\mathbf{c}}$ 统计的是 E 中具有模式 $\mathbf{c}$ 的约束数量。根据期望的线性性，我们有

$$\mathbb{E}[\widehat{X}_{\mathbf{c}}] = p^k X_{\mathbf{c}}. \tag{6.3}$$

因此，$\mathbb{E}[\widehat{M}(\mathbf{c})] = \mathsf{Snap}_\Psi^{\mathbf{t}}(\mathbf{c})$（回忆一下，$\widehat{M}(\mathbf{c}) = \frac{1}{m}p^{-k}\widehat{X}_{\mathbf{c}}$是我们对 $\mathsf{Snap}_\Psi^{\mathbf{t}}(\mathbf{c})$ 的估计值）。所以，剩下要证明的是 $M_{\mathbf{c}}$的集中性。

固定 $\mathbf{c} \in \mathrm{Ptn}_k^L$。令根据 $F := \{j \in [m] : \mathrm{pattern}(C_j) = \mathbf{c}\}$ 的定义，表明模型为 $\mathbf{c}$ 的子句构成的集合。那么我们可以写成 $\widehat{X}_{\mathbf{c}} = \sum_{j \in F} Y_j$，其中 Y_j 是这样一个事件的指示变量：C_j 的所有变量都在 S 中被采样。

因此，方差 $\mathrm{Var}[X_{\mathbf{c}}] = \sum_{j,\, j' \in F}$协方差 $\mathrm{Cov}[Y_j, Y_{j'}]$。于是，我们可以利用以下事实来界定 $\mathrm{Var}[X_{\mathbf{c}}]$：(a) 当 C_j 和 $C_{j'}$ 不共享任何变量时，Y_j 和 $Y_{j'}$ 相互独立（因此 $\mathrm{Cov}[Y_j, Y_{j'}] = 0$）；(b) 根据最大度假设，任意一个 C_j 至多与 kD 个其他约束 $C_{j'}$ 共享变量；(c) 即使 C_j 和 $C_{j'}$ 确实共享一个变量，我们仍有 $\mathrm{Cov}[Y_j, Y_{j'}] \leq \mathbb{E}[Y_j Y_{j'}] \leq \mathbb{E}[Y_j]$，因为 Y_j 和 $Y_{j'}$ 是 $\{0,1\}$ 值变量。因此，

$$\mathrm{Var}[\widehat{X}_{\mathbf{c}}] \leq (kD+1)\,\mathbb{E}[\widehat{X}_{\mathbf{c}}]. \tag{6.4}$$

最后，利用切比雪夫不等式并进行一些变换，我们得到：

[12]两个技术要点，详见 [SSSV23b, §3]：（1）通过标准技巧，我们可以避免假设将 m 作为输入。我们可以“猜测”它的一个等比数列值，并针对这些对数级数量的猜测并行运行算法。其中一个猜测值会与 m相差一个常数因子，我们将用它来生成估计值；我们可以在算法的每次运行中设置空间上限，以确保不会耗尽空间。（出于同样的原因，下文只证明空间上界以较高概率成立。）（2）我们可以使用哈希函数“即时”采样 S，其中 $2k$-路独立性即可满足要求，无需预先存储它。

$$
\begin{aligned}
\Pr[|\widehat{X}_{\mathbf{c}} - X_{\mathbf{c}}| \le \epsilon p^k m] &\le \frac{\mathrm{Var}[\widehat{X}_{\mathbf{c}}]}{\epsilon^2 p^{2k} m^2} && \text{(Chebyshev's inequality)} \\
&\le \frac{(kD+1)\,\mathbb{E}[\widehat{X}_{\mathbf{c}}]}{\epsilon^2 p^{2k} m^2} && \text{(Eq. (6.4))} \\
&= \frac{(kD+1) X_{\mathbf{c}}}{\epsilon^2 p^{k} m^2} && \text{(Eq. (6.3))} \\
&\le \frac{kD+1}{\epsilon^2 p^{k} m} && (X_{\mathbf{c}} \le m) \\
&= \frac{kD+1}{CD}. && \text{(def. of } p\text{)}
\end{aligned}
$$

当 $C = C(k)$ 取值足够大时，我们再次得到所需的集中性（即使对 c 进行并集界估计也是如此）。 □

致谢

我谨感谢 Madhu Sudan 和 Santhoshini Velusamy 对稿件提出的宝贵反馈和意见，也感谢 PraveshKothari 和 Peter Manohar 进行的有益讨论。

本材料基于美国国家科学基金会研究生研究奖学金计划在拨款编号 DGE2140739 下支持的研究工作。材料中表达的任何意见、发现、结论或建议均属于作者本人，不一定反映美国国家科学基金会的观点。

参考文献

[Ali96] Paola Alimonti. "最大广义可满足性问题的新型局部搜索近似技术"。载于： *Information Processing Letters* 57.3（1996 年 2 月 12 日）。会议版本发表于 CIAC 1994，第 151–158 页。 DOI: 10.1016/0020-0190(95)00196-4。[Ali97] Paola Alimonti. "用于 MAX 2-CCSP 的非无视局部搜索及其在最大有向割中的应用"。载于：*Graph-Theoretic Concepts in Computer Science*。Rolf H. M¨ ohring 编。《计算机科学讲义》。施普林格，1997 年，第 2–14 页。 DOI: 10.1007/BFb0024483。[BEF22] Nico Bertram、Jonas Ellert 和 Johannes Fischer。"可分割图中近似最大有向割的并行框架"。载于：

20th International Symposium on Experimental Algorithms。SEA 2022（德国海德堡，2022 年 7 月 25–27 日）。Christian Schulz 和 Bora U.car 编。第 233 卷。LIPIcs。Schloss Dagstuhl — Leibniz 信息学中心，2022 年，10:1–10:15。 DOI: 10.4230/LIPIcs.SEA.2022.10。[BHP+22] Joanna Boyland、Michael Hwang、Tarun Prasad、Noah Singer 和 Santhoshini Velusamy。"对称布尔约束满足问题的草图近似"。载于：

Approximation Randomization and Combina- , ,。APPROX（线上，9 月–）。*torial Optimization. Algorithms and Techniques* 2022 19 21, 2022
Amit Chakrabarti 和 Chaitanya Swamy 编。第 245 卷。LIPIcs。Schloss Dagstuhl — Leibniz 信息学中心，2022 年 7 月，38:1–38:23。 DOI: 10.4230/LIPIcs.APPROX/RANDOM.2022.38。[BL12] Amotz Bar-Noy 和 Michael Lampis。"在线最大有向割"。载于：*Journal of Combinatorial Optimization* 24 1 1, 2012 2009, 52 64 DOI 10 1007 10878 。（7 月）。会议版本发表于 ISAAC，第 – 页。：。/s -010-9318-

6.

[CGSV21a] Chi-Ning Chou、Alexander Golovnev、Madhu Sudan 和 Santhoshini Velusamy。《使用线性草图对所有布尔约束满足问题进行近似》。2021年2月。arXiv: 2102.12351v7 [cs.CC]。[CGSV21b] Chi-Ning Chou、Alexander Golovnev、Madhu Sudan 和 Santhoshini Velusamy。《使用线性草图对所有有限约束满足问题进行近似》。载于：*Proceedings of the 62nd Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science* 2021 7 10, 2022 。FOCS（美国科罗拉多州丹佛，2月–）。IEEE 计算机学会，2021年。 DOI: 10.1109/FOCS52979.2021.00117。[CGV20] Chi-Ning Chou、Alexander Golovnev 和 Santhoshini Velusamy。《所有布尔 Max-2 *k* *2020 IEEE 61st Annual Symposium on Foundations* 约束满足问题和 Max-SAT 的最优 *of Computer Science* 2020 16 19, 2020 2020, 数据流近似》。载于：。FOCS（线上，11月–）。IEEE 计算机学会，11月。第330–341页。 DOI: 10.1109/FOCS46700.2020.00039。

[CMM09] Moses Charikar、Konstantin Makarychev 和 Yury Makarychev。“最大约束满足问题的近最优算法”。载于：*ACM Transactions on Algorithms* 5.3（2009年7月）。会议版本发表于 SODA 2007，第 1–14 页。 DOI: 10.1145/1541885.1541893。[EH08] Lars Engebretsen 和 Jonas Holmerin。“用于 NP 的 PCP 中更高效的查询，以及最大 CSP 的近似难度改进”。载于：*Random Structures and Algorithms* 33.4（2008年12月）。会议版本发表于 STACS 2005，第 497–514 页。 DOI: 10.1002/rsa.20226。[FG95] Uriel Feige 和 Michel X. Goemans。“近似双证明者证明系统的值及其在最大 2 *Proceedings of the 3rd Israel Symposium on the Theory* SAT 和最大有向 *of Computing and Systems* 2003 4 6, 1995 1995, 182 189 割中的应用”。载于：。ISTCS（1995年1月–）。IEEE 计算机学会，第 – 页。DOI: 10.1109/ISTCS.1995.377033。[FJ15] Uriel Feige 和 Shlomo Jozeph。“最大有向割问题的无偏算法”。载于：*Algorithmica* 71.2（2015年2月），第 409–428 页。 DOI: 10.1007/s00453-013-9806-z。[GVV17] Venkatesan Guruswami、Ameya Velingker 和 Santhoshini Velusamy。“近似最大 2 *Approximation Randomization and Combina-* CSP 和最大无 *torial Optimization. Algorithms and Techniques* 2017 16 18, 2017 环子图的数据流复杂度”。载于：，，。APPROX（美国加利福尼亚州伯克利，2017年8月–）。Klaus Jansen、Jos´e D. P. Rolim、David Williamson 和 Santosh S. Vempala 编。第 81 卷。LIPIcs。Schloss Dagstuhl — 莱布尼茨信息学中心，2017年8月，8:1–8:19。 DOI: 10.4230/LIPIcs.APPROX-R ANDOM.2017.8.

[GW95] Michel X. Goemans 和 David P. Williamson。“使用半定规划改进最大割和可满足性问题的近似算法”。载于：*Journal of the ACM* 42.6（1995 年 11 月）。会议版本发表于 STOC 1994，第 1115–1145 页。 ISSN: 0004-5411, 1557-735X。 DOI: 10.1145/227683.227684。[H˚as01] Johan H˚astad。“一些最优的不可近似性结果”。载于：*Journal of the ACM* 48.4（2001），第 798–859 页。 DOI: 10.1145/502090.502098。[Has04] Gustav Hast。“使用随机限制近似最大约束满足问题”。载于：，，。APPROX（美国马萨诸塞州剑桥，2004 年 8 月 22–24 日）。Klaus Jansen、Sanjeev Khanna、Jos´e D. P. Rolim 和 Dana Ron 编。第 3122 卷。LNCS。施普林格，2004 年，第 151–162 页。 DOI: 10.1007/978-3-540-27821-4_14.[Has05] Gustav Hast。“近似最大约束满足问题——以近乎线性的幅度胜过随机赋值”。载于：*Automata, Languages and Programming*。ICALP 2005（2005 年 7 月 11–15 日）。Lu´ıs Caires、Giuseppe F. Italiano、Lu´ıs Monteiro、Catuscia Palamidessi 和 Moti Yung 编。第 3580 卷。LNCS。施普林格，2005 年，第 956–968 页。 DOI: 10.1007/11523468_77.[HZ01] Eran Halperin 和 Uri Zwick。“最大有向割问题的组合近似算法”。载于：*Proceedings of the 12th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*。SODA 2001（美国华盛顿特区，2001 年 1 月 7–9 日）。2001 年，第 1–7 页。[JMM+03] Kamal Jain、Mohammad Mahdian、Evangelos Markakis、Amin Saberi 和 Vijay V. Vazirani。“使用因子揭示型线性规划的对偶拟合分析贪心设施选址算法”。载于：*Journal of the ACM* 50 6 1, 2003 795 824 ISSN 0004 5411 DOI 10 1145 950620 950621 。（11 月），第 – 页。：-。：。/。。[LLZ02] Michael Lewin、Dror Livnat 和 Uri Zwick。“改进 MAX 2-SAT 和 MAX DI-CUT 问题的舍入技术”。载于：*Integer Programming and Combinatorial Optimization*。IPCO 2002。William J. Cook 和 Andreas S. Schulz 编。2002 年，第 67–82 页。 DOI: 10.1007/3-540-47867-1_6.[MG07] Jiˇr´ı Matouˇsek 和 Bernd G¨artner。*Understanding and Using Linear Programming*。Universitext。柏林；纽约：施普林格，2007 年。222 页。[MM01] Shiro Matuura 和 Tomomi Matsui。“0 863 *Ap-* 。MAX *proximation Randomization and Combinatorial Optimization: Algorithms and Techniques* DICUT 的 -近似算法”。载于：，，。APPROX 2001（美国加利福尼亚州伯克利，2001 年 8 月 18–20 日）。Michel Goemans、Klaus Jansen、Jos´e D. P. Rolim 和 Luca Trevisan 编。第 2129 卷。LNCS。柏林，海德堡：施普林格，2001 年，第 138–146 页。 DOI: 10.1007/3-540-44666-4_17.[MY11] Mohammad Mahdian 和 Qiqi Yan。“随机到达的在线二分图匹配：一种基于强因子揭示型线性规划的方法”。载于：*Proceedings of the 43rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing* 2011 6 8, 2011 。STOC（美国加利福尼亚州圣何塞，6 月 –）。计算机协会，2011 年 6 月 6 日，第 597–606 页。 DOI: 10.1145/1993636.1993716。[SSSV23a] Raghuvansh R. Saxena、Noah Singer、Madhu Sudan 和 Santhoshini Velusamy。*Improved Streaming Algorithms for Maximum Directed Cut via Smoothed Snapshots* 2023 2211 03916 [。投稿中。arXiv: 。cs .DS].
预印本。

[SSSV23b] Raghuvansh R. Saxena、Noah Singer、Madhu Sudan 和 Santhoshini Velusamy。“约束满足问题随机排序约束的流式复杂度”。载于：*Symposium on Discrete Algorithms* 2023 *Proceedings of the 2023 Annual ACM-SIAM* 22 25, 2023 2023 。

SODA（意大利佛罗伦萨，1 月 – ）。1 月。[ST00] Alex Samorodnitsky 和 Luca Trevisan。“具有最优摊销查询复杂度的 NP 的 PCP 刻画”。载于： *Proceedings of the 32nd Annual ACM Symposium on Theory of Computing*。STOC 2000（美国俄勒冈州波特兰，2000 年 5 月 21–23 日）。计算机协会，2000 年，第 191–199 页。 DOI: 10.1145/335305.335329。[ST09] Alex Samorodnitsky 和 Luca Trevisan。“Gowers 一致性、变量影响与 PCP”。载于：*SIAM Journal on Computing* 39。1（2009 年 1 月）。STOC 2006 会议版本，第 323–360 页。 DOI: 10.1137/070681612。[ST98] Madhu Sudan 和 Luca Trevisan。“具有低摊销查询复杂度的概率可检验证明”。载于： *Proceedings of the 39th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*。SFCS 1998（美国加利福尼亚州帕洛阿尔托，1998 年 11 月 8–11 日）。IEEE 计算机学会，1998 年，第 18–27 页。 DOI: 10.1109/SFCS.1998.743425。[Ste10] David Steurer。“约束满足问题的快速 SDP 算法”。载于： *Proceedings of the 21st Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms* 2010 17 。SODA（美国得克萨斯州 19, 奥斯汀，1 月 –2010 17, 2010, 684 697 DOI 10 1137 1 ）。工业与应用数学学会，1 月，第 – 页。: . / .9781611973075.56

.

[Tre98a] Luca Trevisan。《基于正线性规划的并行近似算法》。载于： *Algorithmica* 21 1 1998 72 88 DOI 10 1007 00009209 。（5 月），第 – 页。：。/

PL。[Tre98b] Luca Trevisan。《PCP 和线性测试中的查询复用》。载于： *Proceedings of the 30th Annual ACM Symposium on Theory of Computing* 1998 24 26, 1998 。STOC（美国得克萨斯州达拉斯，5 月 –）。计算机协会，1998 年，第 299–308 页。 DOI: 10.1145/276698.276769。[TSSW00] Luca Trevisan、Gregory B. Sorkin、Madhu Sudan 和 David P. Williamson。《构件、近似与线性规划》。载于： *SIAM Journal on Computing* 29.6（2000 年 1 月 1 日）。FOCS 1996 会议版本，第 2074–2097 页。 DOI: 10.1137/S0097539797328847。[ZDW+21] Zhenning Zhang、Donglei Du、Chenchen Wu、Dachuan Xu 和 Dongmei Zhang。《最大有向割问题的谱划分算法》。载于： *Journal of Combinatorial Optimization* 42.3（2021 年 10 月 1 日）。COCOA 2017 会议版本，第 373–395 页。 DOI: 10.1007/s10878-018-0369-4。[Zwi98] Uri Zwick。《每个约束至多涉及三个变量的约束满足问题的近似算法》。载于： *Proceedings of the 9th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms* 1998 25 27, 1998 。SODA（美国加利福尼亚州旧金山，1 月 –）。计算机协会，1998 年，第 201–210 页。 DOI: 10.5555/314613.314701。