arXiv:2305.04444v1 [math.RT] 8 May 2023

特征层导出范畴 II：规范诱导／限制函子

PENGHUI LI

to Lanxin.

Abstract. 我们给出了复约化群上特征层 dg 范畴的组合描述 G，推广了[Li] 关于 G 单连通情形的结果。我们还明确确定了抛物诱导/限制函子。

1. Introduction

1.1. 主要结果。设 G 是一个连通复约化群。记 $\mathsf{Sh}(G/G)$ 为 G 上所有共轭等变层（经典拓扑意义下）构成的 dg-范畴。 G 上的特征层范畴按定义为 $\mathsf{Ch}(G/G) \subset \mathsf{Sh}(G/G)$，它是由具有幂零奇异支集的层构成的全子范畴；可构造特征层范畴 $\mathsf{Ch}_c(G/G) \subset \mathsf{Ch}(G/G)$，则是由可构造层构成的全子范畴。本文给出这些范畴的组合描述。

固定 $T \subset G$ 一个极大环面，记 $X_*(T)$ 为余权格， $W_G = N_G(T)/T$ 为魏尔群，且 $\widetilde{W}_G = W_G \ltimes X_*(T)$ 为扩张仿射魏尔群。令 $\mathfrak{C}_G$ 为由三元组 (L, R, F) 构成的集合，其中 L 是环群 LG 的一个 Levi-horic子群， $R \subset L$ 是包含 T 的一个 Borel 子群，而 F 是幂零锥 $\mathcal{N}_L/L$ 上尖点层的一个同构类。对于 $c = (L, R, F) \in \mathfrak{C}_G$，我们记 $\mathfrak{z}_c = \widetilde{\mathfrak{z}_{\mathfrak{l}}}$，$\widetilde{\ }$ 为 L 的李代数 $\mathfrak{l}$ 的中心。注意， W_G 自然作用于集合 $\mathfrak{C}_G$。我们的主定理如下：

定理1.1.1 (定理4.4.4)。 存在一个 dg-范畴之间的等价：

$$\mathrm{Ch}(G/G) \simeq \Big(\prod_{c \in \widetilde{\mathfrak{C}}_G} \mathrm{Sym}(\mathfrak{z}_c[1])\text{-mod}\Big)^{\widetilde{W}_G};$$

$$\mathrm{Ch}_c(G/G) \simeq \Big(\prod_{c \in \widetilde{\mathfrak{C}}_G} \mathrm{Sym}(\mathfrak{z}_c[1])\text{-mod}_{\mathrm{fd}}\Big)^{\widetilde{W}_G}.$$

其中，我们用 Sym 表示（微分分次）对称代数，mod 表示所有模构成的 dg-范畴，而 $\widetilde{\mathsf{mod}}_{\mathrm{fd}}$ 表示有限维模构成的 dg-范畴。上标 W_G 表示在 $\widetilde{\ }$ 由 W_G 在 $\mathfrak{C}_G$ 上的作用所诱导的自然作用下的不变范畴。

此外，设 $L \subset G$ 为某个包含 T 的抛物子群 P 的 Levi 子群。那么，自然的 $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ 包含 $W_L \subset W_G$ 和 $\mathfrak{C}_L \subset \mathfrak{C}_G$ 通过限制诱导出一个函子：

$$\mathrm{Res} : \Big(\prod_{c \in \widetilde{\mathfrak{C}}_G} \mathrm{Sym}(\mathfrak{z}_c[1])\text{-mod}\Big)^{\widetilde{W}_G} \to \Big(\prod_{c \in \widetilde{\mathfrak{C}}_L} \mathrm{Sym}(\mathfrak{z}_c[1])\text{-mod}\Big)^{\widetilde{W}_L}.$$

将 Res 的左伴随记为 归纳。另一方面，通过抛物诱导和限制，我们得到一对伴随函子：

$$\mathrm{Ind}_{L\subset P}^{G} : \mathrm{Ch}(L/L) \rightleftarrows \mathrm{Ch}(G/G) : \mathrm{Res}_{L\subset P}^{G}$$

定理1.1.2 (T 定理4.4.4)。 在定理 *1.1.1*中的等价下，这些图表自然交换 :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ch}(L/L) & \xrightarrow{\simeq} & \big(\prod_{c\in\widetilde{\mathfrak{C}}_L} \mathrm{Sym}(\mathfrak{z}_c[1])\text{-mod}\big)^{\widetilde{W}_L} \\ {\scriptstyle \mathrm{Ind}_{L\subset P}^{G}}\big\downarrow\big\uparrow{\scriptstyle \mathrm{Res}_{L\subset P}^{G}} & & {\scriptstyle \mathrm{Ind}}\big\downarrow\big\uparrow{\scriptstyle \mathrm{Res}} \\ \mathrm{Ch}(G/G) & \xrightarrow{\simeq} & \big(\prod_{c\in\widetilde{\mathfrak{C}}_G} \mathrm{Sym}(\mathfrak{z}_c[1])\text{-mod}\big)^{\widetilde{W}_G} \end{array}$$

可构造字符层范畴也有类似的陈述。

注记 1.1.3. 当 G 是单连通的时，集合 $\mathfrak{C}_G/W_G \simeq \{(J,F)\}$之间存在自然双射，其中 J 是一个固定仿射室的一个面，而 F 是与 J相关联的 Levihoric 的幂零锥上的一个尖点层。因此，鉴于下文的注记 3.5.1 ，定理 1.1.1 得以恢复 [Li]的主定理。

1.2. 思路与策略。我们非正式地介绍主要思想。本节中的讨论在后文不会用到。特征层构成了 G/G 上的一个范畴层，我们将其记作$\mathcal{C}\mathrm{h}_G$。令 $\chi\colon G/G \to T//W_G$ 为特征多项式映射。那么， $\chi_*(\mathcal{C}\mathrm{h}_G)$ 是 $T//W_G$ 上的一个范畴层。另一方面，我们明确地定义了仿射空间 $\mathfrak{t}$ 上的一个范畴层 $\mathcal{QC}\mathrm{oh}^{\sim}_{\mathfrak{C}_G}$。粗略地说， $\mathcal{QC}\mathrm{oh}^{\sim}_{\mathfrak{C}_G}$ 是 $\mathfrak{t}$ 的仿射根子空间上的常值范畴层的乘积，其重数由 $\widetilde{\mathfrak{C}_G}$ 标记。范畴层 $\mathcal{QC}\mathrm{oh}_{\mathfrak{C}_G}$ 自然地是 W_G-等变的，因此我们可以将其视为商叠 $\mathfrak{t}/\widetilde{W}_G$ 上的一个范畴层，记作 $\mathcal{QC}\mathrm{oh}^{W_G}_{\mathfrak{C}_G}$。令 $\pi\colon \mathfrak{t}/\widetilde{W}_G \to \mathfrak{t}//\widetilde{W}_G \simeq T//W_G$为忘掉稳定子的自然投影。我们预期，在 $T//W_G$ 上存在一个范畴层的同构：

$$\chi_*(\mathcal{C}\mathrm{h}_G) \simeq \pi_*(\mathcal{QC}\mathrm{oh}^{\widetilde{W}_G}_{\mathfrak{C}_G}) \tag{1.2.1}$$

定理1.1.1 可以通过取整体截面得到。在茎的层面上，(1.2.1) 很容易验证：事实上，对于任意 $s \in \mathfrak{t}$, 以及 $\bar{s}$在 $T//W$中的像 s，可以定义环群LG 的一个约化子群 $G_{\bar{s}}$（它是 LG的扭曲伴随作用下 s 的稳定子）。我们可以将茎 $\chi_*(\mathcal{C}\mathrm{h}_G)_{\bar{s}}$识别为 $\mathrm{Ch}(\mathfrak{g}_s/G_s)$，即李代数 $\mathfrak{g}_s$上的特征层范畴。并且根据李代数 [RR, Li] 上特征层的显式描述，还可以进一步将其识别为茎 $\pi_*(\mathcal{QC}\mathrm{oh}^{W_G}_{\mathfrak{C}_G})_{\bar{s}}$ 。

在本文中，我们不会直接将这一等价展示为范畴层。相反，我们选取一个显式覆盖来计算整体截面。为了在 ∞-范畴的语境下妥善完成这一工作，我们将考虑李代数上的特征层范畴的分次提升/混合版本，做法见 [RR]。我们借助具有横向权重和 t-结构的范畴，重新诠释分次提升（关于我们所用范畴论的一些事实，见第 2 节和附录 A ）。分次提升的优点在于，纯对象构成一个 1-范畴 $\mathrm{Pur}(X)$，因此， ∞-范畴图表中的无穷多个相干数据便归结为由 1-范畴 $\mathrm{Pur}(X)$ 构成的交换图。

一个微妙之处在于，局部识别先验地取决于抛物子群的选择。我们不会像[Li], 那样追踪这一选择，而将证明所涉及的函子（尤其包括抛物诱导函子）在典范意义下与抛物子群的选择无关。相关论证将在第3节给出。

最后，在第4 节，我们将这些局部识别粘合起来，从而得到主定理。在特征层一侧，这基本上就是 [LN], , 只是组合学略有修改。在谱侧，这只是一个直接的计算。

1.3. 致谢。本文的动机来自与 Quoc P. Ho 合作的项目，以及与 David Nadler 和 Zhiwei Yun 独立开展的合作项目。感谢他们的关注与启发。作者获得了国家自然科学基金委员会（资助编号 12101348）的部分资助。

2. Preliminary on category theory

2.1. 2-范畴。我们将简要回顾[JY].中定义的 2-范畴概念。

定义 2.1.1. 一个 2-范畴 $\mathcal{B}$ 包含以下数据：

- 一类对象 $\mathcal{B}_0$。
- 一个 $\mathcal{B}_1(X,Y)$ 类，包含从 X到 Y 的 1-态射，其中 $X,Y \in \mathcal{B}_0$。
- 一个恒等1-态射 $1_X \in \mathcal{B}_1(X,X)$，对于 $X \in \mathcal{B}_0$。
- 从 f到 f' 的 2-胞集合 $\mathcal{B}_2(X,Y)(f,f')$，或简称 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(f,f')$，对应于 1-胞 $f,f' \in \mathcal{B}_1(X,Y)$。
- 一个恒等2-态射 $1_f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(X,Y)$，对于每个1-态射 $f \in \mathcal{B}_1(X,Y)$ 以及每对对象 X,Y。
- 纵向复合：

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(f',f'') \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(f,f') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(f,f''), \qquad (\alpha',\alpha) \mapsto \alpha'\alpha,$$

对于对象 X、Y，以及 1-态射 f、f'、$f'' \in \mathcal{B}_1$（X、Y）。

- 1-态射的水平复合：

$$\mathcal{B}_1(Y,Z)\times\mathcal{B}_1(X,Y)\longrightarrow\mathcal{B}_1(X,Z),\qquad (g,f)\mapsto gf,$$

对于对象 X、Y 和 Z。

- 2-态射的水平复合：

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(g,g')\times\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(f,f')\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(gf,g'f'),\qquad (\beta,\alpha)\mapsto\beta\star\alpha.$$

这些数据必须满足[JY，命题 2.3 中的公理。4]。

所谓 (2, 1)-范畴，是指其所有 2-胞均可逆的 2-范畴。

例 2.1.2. 小 1-范畴构成一个 2-范畴，其中 1-胞是 1-范畴之间的函子，2-胞是函子之间的自然变换。我们将此 2-范畴记为 $\mathcal{C}\mathrm{at}_1$。

例 2.1.3. 2-范畴 $\mathcal{B}$中的一个交换方块：

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle g}\downarrow & \alpha & \downarrow{\scriptstyle h} \\ Z & \xrightarrow[k]{} & W \end{array}$$

是一个可逆 2-胞 $\alpha\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(kg,hf)$ 的数据。

关于 [JY，定义 4.1，2]给出了 2-范畴之间函子的定义。特别地，一个函子 $F\colon\mathcal{B}\to\mathcal{B}'$ 由以下部分组成：

- 一个定义在对象上的函数 $F\colon\mathcal{B}_0\to\mathcal{B}'_0$。
- 对于每一对对象 X,Y，一个函子 $F\colon\mathcal{B}_1(X,Y)\to\mathcal{B}'_1(X,Y)$。

定义 2.1.4. 若函子 $F\colon\mathcal{B}\to\mathcal{B}'$ 所对应的函子 $F\colon\mathcal{B}_1(X,Y)\to\mathcal{B}'_1(X,Y)$ 对 $\mathcal{B}$ 中所有对象 X,Y 都是忠实的，则称其为局部忠实函子。更明确地说，这意味着对于任意 2-胞 $f,g\in\mathcal{B}_1(X,Y)$，由此诱导的集合之间的映射

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(f,g)\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}'}(Ff,Fg)$$

是单射。

2.2. 横截范畴。关于 [Lurb、Lura] 所著 ∞-范畴理论。本文所说的dg-范畴是指一个 $\mathbb{C}$-线性稳定 ∞-范畴。权结构的概念由 [Pau、Bonb], 提出，横截 t-结构由[Bona]提出。关于一些基本事实，读者也可参阅 [HL第 5] 节。除非另有说明，本节中的范畴均假定为小范畴。

定义 2.2.1. 横截 ∞-范畴是一个稳定的 ∞-范畴 $\mathcal{C}$，配备有有界权结构和有界横截 t-结构，其权心等价于一个 1-范畴。

对于横截范畴 $\mathcal{C}$，我们将 $\mathcal{C}^{\heartsuit_w}$、 $\mathcal{C}^{\heartsuit_t}$分别记为权心和 t-心。令$\mathcal{C}^{\heartsuit_{w,\,t}}=\mathcal{C}^{\heartsuit_w}\cap\mathcal{C}^{\heartsuit_t}$。众所周知，横截范畴的权结构和 t-结构可由加性 1-子范畴 $\{\mathcal{C}^{w=k}\cap\mathcal{C}^{\heartsuit_t}\}_{k\in\mathbb{Z}}$（它们构成一个半正交族）恢复。

例 2.2.2. 记 Vect^c（分别地，$(\mathrm{Vect}^{\mathrm{gr},c})$）为有限维向量空间（分别地，分次向量空间）的 dg 范畴。则 $\mathrm{Vect}^{\mathrm{gr},c}$ 是一个横截范畴，其中 $\mathrm{Vect}^{\mathrm{gr},c,\heartsuit_w}=\{\oplus V_n\colon H^i(V_n)=0,\forall i\neq n\}$，且 $\mathrm{Vect}^{\mathrm{gr},c,\heartsuit_t}=\{\oplus V_n\colon H^i(V_n)=0,\forall i\neq 0\}$。

定义 2.2.3. 分次横截 ∞范畴是一个横截 ∞范畴 $\mathcal{C}$，并配备 $\mathrm{Vect}^{\mathrm{gr},\,c}$的作用，使得 $\mathrm{Vect}^{\mathrm{gr},\,c}$ 对 $\mathcal{C}$ 的作用既保持权重又是 t-正合的。

例 2.2.4（[HL] 命题 5.6.12）。附录 A 中的分次提升 $\mathrm{Sh}_{\mathrm{gr},c,S}(X)$ 是一个分次横截范畴，其权心由 $\mathrm{Pur}_{c,S}(X)$ 给出；$\mathrm{Sh}_{\mathrm{gr},c,S}(X)$ 中的对象属于 t-心，当且仅当它在 $\mathrm{Sh}_c(X)$ 中的像是反常的。此外，$\mathrm{Sh}_{\mathrm{gr},c,S}(X)^{\heartsuit_{w,t}}$ 由 X 上由 S 生成的半单反常层的加性范畴给出。

记号 2.2.5. (1) 对于 $\mathcal{D}$ 个 dg-范畴，以及 c、$d\in\mathcal{D}$，我们记作

- $\mathrm{RHom}(c,d)$ 是 $\mathcal{D}$ 中的 Hom 复形。
- $\mathrm{Hom}^i(c,d)=H^i(\mathrm{RHom}(c,d))$, 且 $\mathrm{Hom}^*(c,d)=\oplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}^i(c,d)$】【。

• $\mathrm{REnd}(c) = \mathrm{RHom}(c,c)$, $\mathrm{End}^i(c) = \mathrm{Hom}^i(c,c)$ 和 $\mathrm{End}^*(c) = \mathrm{Hom}^*(c,c)$。(2) 对于 $\mathcal{C}$ 一个 $\mathrm{Vect}_{\mathrm{gr}}{}^c$ 线性 ∞-范畴，以及 $c,d \in \mathcal{C}$，我们记作

• $\mathrm{RHom}_{\mathrm{gr}}(c,d)$ $\mathcal{C}$ 中的分次 Hom 复形。
• Hom^i，分级$(c,d) = H^i(\mathrm{RHom}$分级$(c,d))$，且 Hom^*，分级$(c,d) = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}^i$，分级$(c,d)$】【。
• $\mathrm{REnd}_{\mathrm{gr}}(c) = \mathrm{RHom}_{\mathrm{gr}}(c,c)$, 端omorphism 代数$^i{}_{,\mathrm{gr}}(c) = \mathrm{Hom}^i{}_{,\mathrm{gr}}(c,c)$ 和 端omorphism 代数$^*{}_{,\mathrm{gr}}(c) = \mathrm{Hom}^*{}_{,\mathrm{gr}}(c,c)$.

在.....下 自然映射遗忘函子$_{\mathcal{C}}$：$\mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathrm{oblv}} := \mathcal{C} \otimes_{\mathrm{Vect}^{\mathrm{gr},c}} \mathrm{Vect}^c$，我们有典范同构

$$\mathrm{oblv}(\mathrm{RHom}^{\mathrm{gr}}(c,d)) \simeq \mathrm{RHom}(\mathrm{oblv}_{\mathcal{C}}(c), \mathrm{oblv}_{\mathcal{C}}(d)),$$

其中，$\mathrm{oblv} : \mathrm{Vect}^{\mathrm{gr}} \to \mathrm{Vect}$ 是通过遗忘分次结构得到的自然映射。对于一个 $\mathrm{Vect}^{\mathrm{gr},c}$-线性函子$F$：$\mathcal{C} \to \mathcal{D}$，记 F^{oblv}：$\mathcal{C}^{\mathrm{oblv}} \to \mathcal{D}^{\mathrm{oblv}}$ 为其诱导函子。

如果 $\mathcal{C} = \mathrm{Sh}_{\mathrm{gr},c,S}(X)$，那么根据假设，$\mathrm{RHom}^{\mathrm{gr}}(c,d)$ 对于 $c,d \in \mathcal{C}^{\heartsuit_w}$ 是纯的，即 $H^i(\mathrm{Hom}^{\mathrm{gr}}(c,d))$ 集中于分次 i。因此，对于 $c \in \mathcal{C}^{\heartsuit_w}$，$\mathrm{REnd}^{\mathrm{gr}}(c)$ 是形式的分次微分分次代数，即我们有分次微分分次代数的同构 $\mathrm{REnd}^{\mathrm{gr}}(c) \simeq \mathrm{End}^*{}^{,\mathrm{gr}}(c)$。

例 2.2.6. 设 V 为有限维向量空间。记 $A = \mathrm{Sym}(V[-2]\langle -2\rangle)$ 为分次对称代数，其中 V 的上同调次数为 2，分次次数也为 2。那么，完美分次 dg 模范畴 $\mathcal{C} = A\text{-}\mathrm{perf}^{\mathrm{gr}}$ 是一个分次横截范畴，且 $\mathcal{C}^{w=k} \cap \mathcal{C}^{\heartsuit_t} =< A\langle k\rangle >$。令 $A^! = \mathrm{Sym}(V^*[1]\langle 2\rangle)$，则在 Koszul 对偶下：$A\text{-}\mathrm{perf}^{\mathrm{gr}} \simeq A^!\text{-}\mathrm{mod}^{\mathrm{gr}}{}_{\mathrm{fd}} =: \mathcal{D}$。$\mathcal{D}$ 上的横截结构可识别为 $\mathcal{D}^{w=k} \cap \mathcal{D}^{\heartsuit_t} =< \mathbb{C}\langle k\rangle >$。

定义 2.2.7. 设 F：$\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ be 是分次横截 ∞-范畴之间的 $\mathrm{Vect}^{\mathrm{gr},c}$-线性函子。若 F 同时是权精确且 t-精确的，则称其为横截精确。

对于任意 $\mathrm{Vect}^{\mathrm{gr},c}$-线性范畴 $\mathcal{C}$，以及 $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$，记 $\mathrm{RHom}^{\mathrm{gr}}(c_1,c_2)$ 为 $\in \mathrm{Vect}^{\mathrm{gr}}$ 中的富化分次同伦复形。

记 $\mathcal{TC}\mathrm{at}^{\mathrm{gr}}$ 为分次横截范畴及横截精确函子构成的 ∞-范畴，我们有：

命题 2.2.8. ∞-范畴 $\mathcal{TC}\mathrm{at}^{\mathrm{gr}}$ 等价于一个 2-范畴；此外，自然函子 $\mathcal{TC}\mathrm{at}_{\mathrm{gr}} \to \mathcal{C}\mathrm{at}_1$，经由 $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}^{\heartsuit_{w,t}}$ 是局部忠实的。

证明。由 [ES，定理 2.2。9],可得如下 ∞-范畴之间的等价：

$$(-)^{\heartsuit_w} : \mathcal{WC}\mathrm{at} \to \mathcal{C}\mathrm{at}_1^{\mathrm{add}} : (-)^{\mathrm{fin}}$$

其中 $\mathcal{WC}\mathrm{at}$ 表示具有有界权结构的 ∞-范畴，其权心与一个 1-范畴同构；$\mathcal{C}\mathrm{at}_1^{\mathrm{add}}$ 表示加性 1-范畴构成的 ∞-范畴。这自然提升为一个等价：

$$(-)^{\heartsuit_w} : \mathcal{WC}\mathrm{at}_{\mathrm{gr}} \to \mathcal{C}\mathrm{at}_{1,\mathrm{gr}}^{\mathrm{add}} : (-)^{\mathrm{fin}}$$

其中，$\mathcal{WC}\mathrm{at}^{\mathrm{gr}}$ 表示如上所述的 $\mathrm{Vect}^{\mathrm{gr},c}$-线性权范畴的 ∞-范畴，而 $\mathcal{C}\mathrm{at}_1^{\mathrm{add}}$、$_{\mathrm{gr}}$ 表示 $\mathrm{Vect}^{\mathrm{gr}}{}_{,c,}{}^{\heartsuit_w}$-线性加性 1-范畴的 ∞-范畴。注意，$\mathcal{C}\mathrm{at}_1^{\mathrm{add}}$、$\mathcal{C}\mathrm{at}_1^{\mathrm{add}}$、$_{\mathrm{gr}}$ 等价于一个 2-范畴。因此，对于任意 $\mathcal{C}$，$\mathcal{D} \in \mathcal{TC}\mathrm{at}^{\mathrm{gr}}$，应用 $(-)^{\heartsuit_w}$，我们将 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{TC}\mathrm{at}_{\mathrm{gr}}}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ 与 $\{F \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\mathrm{at}_{1,\mathrm{gr}}}(\mathcal{C}^{\heartsuit_w}, \mathcal{D}^{\heartsuit_w})$ 识别起来：$(F)^{\mathrm{fin}}$是 t-正合的。$\}$，这是一个 1-范畴。因此，$\mathcal{TC}\mathrm{at}^{\mathrm{gr}}$ 等价于一个 2-范畴。

设 α：$F \to G$：$\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是 $\mathcal{TC}\mathrm{at}^{\mathrm{gr}}$中的一个 2-胞。那么，$\alpha$ 由 $\alpha^{\heartsuit_w}$：$F^{\heartsuit_w} \to G^{\heartsuit_w}$：$\mathcal{C}^{\heartsuit_w} \to \mathcal{D}^{\heartsuit_w}$.唯一确定。我们还需证明，它进一步由 $\alpha^{\heartsuit_w}{}_{,}{}^t$：$F^{\heartsuit_w}{}_{,}{}_t \to G^{\heartsuit_w}{}_{,}{}^t$：$\mathcal{C}^{\heartsuit_w}{}_{,}{}_t \to \mathcal{D}^{\heartsuit_w}{}_{,}{}^t$.确定。事实上，任意对象 $c \in \mathcal{C}^{\heartsuit_w}$ 都同构于形如 $\oplus c_i(i)$的对象，其中$c_i \in \mathcal{C}^{\heartsuit_w}{}_{,}{}^t$。于是，$\alpha_c^{\heartsuit_w} = \oplus \alpha^{\heartsuit_w}{}_{,}{}_{c_i}{}^t(i)$是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\heartsuit_w}}(c,c)$ 中的元素（这是 $\mathcal{C}$at1,gr中 2-胞的定义所要求的）。因此，$\alpha^{\heartsuit_w}$由$\alpha^{\heartsuit_w}{}_{,}{}_t$确定。

□

3. Canonical induction/restriction functors

本节旨在对约化李代数上的特征层范畴及其间的诱导／限制函子作组合描述。主要结果是命题 3.4.3 及其变体命题3.5.3。乍看之下，这些结论可直接由[Lusa、RR]推出。然而，这里的重点是说明，所有涉及的函子在规范意义下均不依赖于所选的 Borel 子群／抛物子群。例如，我们将说明特征层之间的抛物诱导/限制函子

在李代数上的特征层之间规范地独立于抛物子群的选择。反常特征层的情形中已有这一结论（例如，见 [Gin]）。其论证关键地利用了反常层构成一个 1-范畴这一事实，因此难以推广到 dg-范畴的情形。我们的方法是使用混合几何，它为特征层 dg-范畴提供了规范的分次提升。其中的纯对象构成一个 1-范畴，我们借此证明其不依赖于抛物子群这一所需结论。在[LL], 近期的工作中，导出 Springer 对应通过权重新诠释；我们预计，本节中的一些结论可通过傅里叶变换从他们的结果推出。

本节内容安排如下：

- 第 3.1节：证明抛物诱导函子在主块上具有典范定义。
- 第 3.2节：主块的组合描述
- 第 3.3 & 3.4节：将第 3.1 & 3.2 节的内容推广到一般的尖点块。
- 第 3.5节：利用面几何重新诠释组合结构。

3.1. 主块的典范诱导/限制。令 S 为 $\mathfrak{g}/G$ 上不可约特征层的集合。按附录 A 的定义，置 $\mathrm{Ch}_c(\mathfrak{g}/G) = \mathrm{Sh}_{c,S}(\mathfrak{g}/G)$。于是由 [RR, 命题 3.5], S 满足 Hom-纯性假设 (A.1.1)。记 $\mathrm{Ch}_{\mathrm{gr},c}(\mathfrak{g}/G) := \mathrm{Sh}_{\mathrm{gr},c,S}(\mathfrak{g}/G)$。那么 $\mathrm{Ch}_{\mathrm{gr},c}(\mathfrak{g}/G)^{\heartsuit_w,t} = \mathrm{Sh}_{c,S}(\mathfrak{g}/G)^{\heartsuit_t}$ [1] 反常特征层范畴。我们有一个等价 $\mathrm{Ch}_{\mathrm{gr},c}(\mathfrak{g}/G) \otimes_{\mathrm{Vect}^{\mathrm{gr},c}} \mathrm{Vect}^c \simeq \mathrm{Ch}_c(\mathfrak{g}/G)$。

令 $T \subset G$ 为极大环面， B 为 G 的一个 Borel 子群，且包含 T。记相应的李代数为 $\mathfrak{t}, \mathfrak{b}, \mathfrak{g}$，正则半单元素为 $\mathfrak{t}^{\mathrm{reg}}, \mathfrak{b}^{\mathrm{reg}}, \mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}$。我们有一个交换图表：

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{t}^{\mathrm{reg}}/T & & \xrightarrow{\quad f \quad} & & \mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}/G \\ \downarrow{\scriptstyle j_T} & & & & \downarrow{\scriptstyle j_G} \\ \mathfrak{t}/T & \xleftarrow{\quad q \quad} & \mathfrak{b}/B & \xrightarrow{\quad p \quad} & \mathfrak{g}/G \end{array}$$

我们记这些函子为：

$$\mathrm{Ind}_B = \mathrm{Ind}_{T\subset B}^G := p_! q^* : \mathrm{Ch}_{\mathrm{gr},c}(\mathfrak{t}/T) \to \mathrm{Ch}_{\mathrm{gr},c}(\mathfrak{g}/G)$$

$$\mathrm{Ind}_B^{\heartsuit_t} = \mathrm{Ind}_{T\subset B}^{G,\heartsuit_t} := p_! q^* : \mathrm{Ch}_c(\mathfrak{t}/T)^{\heartsuit_t} \to \mathrm{Ch}_c(\mathfrak{g}/G)^{\heartsuit_t}$$

存在函子的一个典范同构：

$$\alpha_B^0 : \mathrm{Ind}_B^{\heartsuit_t} = p_! q^* \simeq j_{G!*} f_* j_T^* : \mathrm{Ch}_c(\mathfrak{t}/T)^{\heartsuit_t} \to \mathrm{Ch}_c(\mathfrak{g}/G)^{\heartsuit_t}$$

现在设 B_1, B_2 是包含 T 的两个 Borel 子群。那么我们有函子的一个典范同构：

$$\alpha_{B_1,B_2}^0 := (\alpha_{B_2}^0)^{-1} \circ \alpha_{B_1}^0 : \mathrm{Ind}_{B_1}^{\heartsuit_t} \to \mathrm{Ind}_{B_2}^{\heartsuit_t}$$

命题 3.1.1. 2-胞 α_{B_1,B_2}^0 在 $\mathcal{C}\mathrm{at}_1$ 中属于自然映射的像：

$$(-)^{\heartsuit_{t,w}} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}\mathcal{C}\mathrm{at}_{\mathrm{gr}}}(\mathrm{Ind}_{B_1}, \mathrm{Ind}_{B_2}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\mathrm{at}_1}(\mathrm{Ind}_{B_1}^{\heartsuit_t}, \mathrm{Ind}_{B_2}^{\heartsuit_t}) \tag{3.1.2}$$

证明。The $\alpha: \mathrm{Ind}_{B_1} \to \mathrm{Ind}_{B_2}$ 之间的自然变换的数据由以下内容组成 g:

- 对于任意 $F \in \mathrm{Ch}_{\mathrm{gr},c}(\mathfrak{t}/T)$，一个态射 $\alpha_F \in \mathrm{Hom}^0_{\mathrm{Ch}_{\mathrm{gr},c}(\mathfrak{g}/G)}$(归纳$_{B_1}(F)$, 归纳$_{B_2}(F)$).
- 使得对于任意 $b:\ F_1 \to F_2 \in \mathrm{Ch}_{\mathrm{gr},c}(\mathfrak{t}/T)$，图表交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ind}_{B_1}(F_1) & \xrightarrow{\alpha_{F_1}} & \mathrm{Ind}_{B_2}(F_2) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ind}_{B_1} b} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ind}_{B_2} b} \\ \mathrm{Ind}_{B_1}(F_2) & \xrightarrow{\alpha_{F_2}} & \mathrm{Ind}_{B_2}(F_2) \end{array}$$

[1] 这用到了 $\mathrm{Sh}_{c,S}(\mathfrak{g}/G)^{\heartsuit_t}$ 实际上是半单的这一事实。参见例 2.2.4。

现在，由于 $\mathbb{C}_{\mathfrak{t}/T}$ 在直和、直和项和 $\mathbf{Vect}^{\mathrm{gr},c}$-作用下生成 $\mathbf{Ch}_{\mathrm{gr},c}(\mathfrak{t}/T)$。因此，只需为 $F=\mathbb{C}_{\mathfrak{t}/T}$ 构造 α_F，使得对于任意态射 $b\colon \mathbb{C}_{\mathfrak{t}/T}\to\mathbb{C}_{\mathfrak{t}/T}\{i\}$，$\mathbf{Ch}_{\mathrm{gr},c}(\mathfrak{g}/G)$ 中的图表可交换：

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Ind}_{B_1}(\mathbb{C}_{\mathfrak{t}/T}) & \xrightarrow{\alpha_{\mathbb{C}_{\mathfrak{t}/T}}} & \mathrm{Ind}_{B_2}(\mathbb{C}_{\mathfrak{t}/T})\\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ind}_{B_1}b} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ind}_{B_2}b}\\ \mathrm{Ind}_{B_1}(\mathbb{C}_{\mathfrak{t}/T}\{i\}) & \xrightarrow{\alpha_{\mathbb{C}_{\mathfrak{t}/T}\{i\}}} & \mathrm{Ind}_{B_2}(\mathbb{C}_{\mathfrak{t}/T}\{i\})\end{array}\tag{3.1.3}$$

现在，自然函子 $\mathbf{Ch}_c(\mathfrak{g}/G)^{\heartsuit_t}\simeq\mathbf{Ch}^{\heartsuit_t,\,w_{\mathrm{gr}}}(\mathfrak{g}/G)\to\mathbf{Ch}_{\mathrm{gr},\,c}(\mathfrak{g}/G)$ 在 Hom 集上诱导出一个双射（两者都同构于 $\mathbb{C}[W]$）：

$$i:\mathrm{Hom}^0_{\mathbf{Ch}_c(\mathfrak{g}/G)^{\heartsuit_t}}(\mathrm{Ind}_{B_1}^{\heartsuit_t}\mathbb{C}_{\mathfrak{t}/T},\mathrm{Ind}_{B_2}^{\heartsuit_t}\mathbb{C}_{\mathfrak{t}/T})\to\mathrm{Hom}^0_{\mathbf{Ch}_{\mathrm{gr},c}(\mathfrak{g}/G)}(\mathrm{Ind}_{B_1}\mathbb{C}_{\mathfrak{t}/T},\mathrm{Ind}_{B_2}\mathbb{C}_{\mathfrak{t}/T})$$

定义 $\alpha_{\mathbb{C}_{\mathfrak{t}/T}}=i(\alpha^0_{B_1,\,B_2})$，我们只需证明图表（3.1.3）的交换性。应用函子 $-\otimes_{\mathbf{Vect}^{\mathrm{gr},\,c}}\mathbf{Vect}^c$，只需证明图表的交换性：

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Ind}^{\mathrm{oblv}}_{B_1}(\mathbb{C}_{\mathfrak{t}/T}) & \xrightarrow{(\alpha_{\mathbb{C}_{\mathfrak{t}/T}})^{\mathrm{oblv}}} & \mathrm{Ind}^{\mathrm{oblv}}_{B_2}(\mathbb{C}_{\mathfrak{t}/T})\\ \downarrow{\scriptstyle (\mathrm{Ind}_{B_1}b)^{\mathrm{oblv}}} & & \downarrow{\scriptstyle (\mathrm{Ind}_{B_2}b)^{\mathrm{oblv}}}\\ \mathrm{Ind}^{\mathrm{oblv}}_{B_1}(\mathbb{C}_{\mathfrak{t}/T}[i]) & \xrightarrow{(\alpha_{\mathbb{C}_{\mathfrak{t}/T}})^{\mathrm{oblv}}[i]} & \mathrm{Ind}^{\mathrm{oblv}}_{B_2}(\mathbb{C}_{\mathfrak{t}/T}[i])\end{array}\tag{3.1.4}$$

这里我们用到了 $\mathbf{oblv}(\mathbb{C}_{\mathfrak{t}/T}\{i\})\simeq\mathbb{C}_{\mathfrak{t}/T}[i]$ 这一事实，并且 $\mathrm{Ind}^{\mathrm{oblv}}_{B_j}$ 可以识别为某个形如 $\mathrm{Ind}^{\mathrm{oblv}}_{B_j}(b')$ 的元素，其中 $b'\in\mathrm{Hom}^0_{\mathbf{Ch}_c(\mathfrak{t}/T)}(\mathbb{C}_{\mathfrak{t}/T},\mathbb{C}_{\mathfrak{t}/T}[i])$（$b'$ 与 $j=1$ 无关，2）。

现在考虑交换图表：

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{C}[W]\otimes H^*(\mathfrak{t}/T) & & \\ \downarrow{\scriptstyle\simeq} & \searrow & \\ \mathrm{Hom}^0_{\mathfrak{g}/G}(\text{归纳}^{\mathrm{oblv}}_{B_1}(\mathbb{C}_{\mathfrak{t}/T}),\text{归纳}^{\mathrm{oblv}}_{B_2}(\mathbb{C}_{\mathfrak{t}/T}))\otimes\mathrm{Hom}^*_{\mathfrak{t}/T}(\mathbb{C}_{\mathfrak{t}/T},\mathbb{C}_{\mathfrak{t}/T}) & \xrightarrow{\theta} & \mathrm{Hom}^*_{\mathfrak{g}/G}(\text{归纳}^{\mathrm{oblv}}_{B_1}(\mathbb{C}_{\mathfrak{t}/T}),\text{归纳}^{\mathrm{oblv}}_{B_2}(\mathbb{C}_{\mathfrak{t}/T}))\\ \downarrow & & \downarrow\\ \mathrm{Hom}^0_{\mathfrak{g}/G}(\text{归纳}^{\mathrm{oblv}}_{B_1}(\mathbb{C}_{\mathfrak{t}^{\mathrm{reg}}/T}),\text{归纳}^{\mathrm{oblv}}_{B_2}(\mathbb{C}_{\mathfrak{t}^{\mathrm{reg}}/T}))\otimes\mathrm{Hom}^*_{\mathfrak{t}^{\mathrm{reg}}/T}(\mathbb{C}_{\mathfrak{t}^{\mathrm{reg}}/T},\mathbb{C}_{\mathfrak{t}^{\mathrm{reg}}/T}) & \xrightarrow{\theta^{\mathrm{reg}}} & \mathrm{Hom}^*_{\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}/G}(\text{归纳}^{\mathrm{oblv}}_{B_1}(\mathbb{C}_{\mathfrak{t}^{\mathrm{reg}}/T}),\text{归纳}^{\mathrm{oblv}}_{B_2}(\mathbb{C}_{\mathfrak{t}^{\mathrm{reg}}/T}))\\ \downarrow{\scriptstyle\simeq} & \nearrow & \\ \mathbb{C}[W]\otimes H^*(\mathfrak{t}^{\mathrm{reg}}/T) & & \end{array}$$

其中垂直箭头由拉回 $\mathfrak{t}^{\mathrm{reg}}/T\to\mathfrak{t}/T$ 诱导。映射 θ^{reg} 是一个同构，因为 $\mathrm{Ind}^{\mathrm{oblv}}_{B_1}$ 和 $\mathrm{Ind}^{\mathrm{oblv}}_{B_1}$ 都可以视为沿 W-覆盖 $\mathfrak{t}^{\mathrm{reg}}/T\to\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}/G$ 的推前。此外，在如下识别下：

$$\mathbb{C}[W]\otimes H^*(\mathfrak{t}^{\mathrm{reg}}/T)\simeq\mathbb{C}[W]\#H^*(\mathfrak{t}^{\mathrm{reg}}/T)\simeq\mathrm{Hom}^*_{\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}/G}(\mathrm{Ind}^{\mathrm{oblv}}_{B_1}(\mathbb{C}_{\mathfrak{t}^{\mathrm{reg}}/T}),\mathrm{Ind}^{\mathrm{oblv}}_{B_2}(\mathbb{C}_{\mathfrak{t}^{\mathrm{reg}}/T}))$$

$H^*(\mathfrak{t}^{\mathrm{reg}}/T)$ 在 $\mathrm{Hom}^*(\mathrm{Ind}^{\mathrm{oblv}}_{B_1}(\mathbb{C}_{\mathfrak{t}^{\mathrm{reg}}/T}),\mathrm{Ind}^{\mathrm{oblv}}_{B_2}(\mathbb{C}_{\mathfrak{t}^{\mathrm{reg}}/T}))$ 上的自然左、右作用，与 $\mathbb{C}[W]\#H^*(\mathfrak{t}^{\mathrm{reg}}/T)$ 上自然的左、右 $H^*(\mathfrak{t}^{\mathrm{reg}}/T)$-作用相对应。

此外，θ 也是一个同构（见下文（3.2.1）），由此类似地可得，在如下识别下

$$\mathbb{C}[W]\#H^*(\mathfrak{t}/T)\simeq\mathbb{C}[W]\otimes H^*(\mathfrak{t}/T)\simeq\mathrm{Hom}^*_{\mathfrak{g}/G}(\mathrm{Ind}^{\mathrm{oblv}}_{B_1}(\mathbb{C}_{\mathfrak{t}/T}),\mathrm{Ind}^{\mathrm{oblv}}_{B_2}(\mathbb{C}_{\mathfrak{t}/T}))$$

$H^*(\mathfrak{t}/T)$ 在 $\mathrm{Hom}^*(\text{归纳}^{\mathrm{oblv}}_{B_1}(\mathbb{C}_{\mathfrak{t}/T}),\text{归纳}^{\mathrm{oblv}}_{B_2}(\mathbb{C}_{\mathfrak{t}/T}))$ 上的左、右作用，可分别识别为 $\mathbb{C}[W]\#H^*(\mathfrak{t}/T)$ 上的左、右 $H^*(\mathfrak{t}/T)$-作用。现在，将 $(\alpha_{\mathbb{C}_{\mathfrak{t}/T}})^{\mathrm{oblv}}$ 视为 $\mathrm{Hom}^0_{\mathfrak{g}/G}(\text{归纳}^{\mathrm{oblv}}_{B_1}(\mathbb{C}_{\mathfrak{t}/T})$ 中的元素，可识别为 $1\otimes1\in\mathbb{C}[W]\#H^*(\mathfrak{t}/T)$（因为根据构造，$(\alpha_{\mathbb{C}_{\mathfrak{t}/T}})^{\mathrm{oblv}}$ 可识别为 $j_{G!*}f_*\mathbb{C}_{\mathfrak{t}^{\mathrm{reg}}/T}$ 之间的恒等映射）。因此，方形图 (3.1.4) 交换。根据定义，在 $(-)^{\heartsuit_{t,w}}$ 下，上文定义的 α 的像为 $\alpha^0_{B_1,B_2}$。□

令 α_{B_1,B_2} 为 $\alpha^0_{B_1,B_2}$ 在 (3.1.2) 中的原像；根据命题2.2.8，该原像必然唯一。唯一性也意味着 $\alpha_{B,B} = Id_{\mathrm{Ind}_B}$，以及 $\alpha_{B_2,B_3} \circ \alpha_{B_1,B_2} = \alpha_{B_1,B_3}$.。因此，我们可以将归纳$_{B,}\alpha_{B_1,B_2}$视为规范地定义了一个函子

$$\mathrm{Ind}_T^G : \mathrm{Ch}_{\mathrm{gr},c}(\mathfrak{t}/T) \to \mathrm{Ch}_{\mathrm{gr},c}(\mathfrak{g}/G), \tag{3.1.5}$$

我们将其称为典范归纳函子（针对主块）。

3.2. 通过 Springer 理论进行谱识别。本节中，我们利用显式的李理论数据来识别典范归纳函子。

令 $\mathrm{Ch}_{\mathrm{gr},\,c}(\mathfrak{g}/G)_{\mathrm{prin}} \subset \mathrm{Ch}_{\mathrm{gr},\,c}(\mathfrak{g}/G)$ 为由 Springer 层在 $\mathrm{Vect}^{\mathrm{gr}}$-作用下生成的全子范畴。固定一个极大环面 T，并选取一个包含 B T的 Borel 子群。根据 [Lusa，命题 3，2], 我们有一个同构：

$$\mathrm{End}^{0,\mathrm{gr}}(\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{gr}}(\mathbb{C}_{\mathfrak{t}/T})) \otimes \mathrm{End}^{*,\mathrm{gr}}(\mathbb{C}_{\mathfrak{t}/T}) \to \mathrm{End}^{*,\mathrm{gr}}(\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{gr}}(\mathbb{C}_{\mathfrak{t}/T})) \tag{3.2.1}$$

这给出了分次微分分次代数的同构：

$$\mathbb{C}[W]\#\mathrm{Sym}(\mathfrak{t}^*[-2]\langle -2\rangle) \simeq \mathrm{End}^{*,\mathrm{gr}}(\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{gr}}(\mathbb{C}_{\mathfrak{t}/T})) \simeq \mathrm{REnd}^{\mathrm{gr}}(\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{gr}}(\mathbb{C}_{\mathfrak{t}/T}))$$

其中最后一个同构 态射由形式性给出。因此，我们得到一个分次横截范畴之间的等价 :

$$\mathbb{L}_{\mathfrak{b}\subset\mathfrak{g},\mathrm{prin}} : \mathbb{C}[W]\#\mathrm{Sym}(\mathfrak{t}^*[-2]\langle -2\rangle)\text{-perf}^{\mathrm{gr}} \simeq \mathrm{Ch}_{\mathrm{gr},c}(\mathfrak{g}/G)_{\mathrm{prin}}$$

给定两个 Borel 子群 B_1, B_2，仿照第 3.1 节中的构造，我们可以定义一个 2-胞 $\beta_{B_1,\,B_2} : \mathbb{L}_{\mathfrak{b}_1\subset\mathfrak{g},\,\mathrm{prin}} \to \mathbb{L}_{\mathfrak{b}_2\subset\mathfrak{g},\,\mathrm{prin}}$。因此，我们得到一个典范函子

$$\mathbb{L}_{\mathfrak{g},\mathrm{prin}} : \mathbb{C}[W]\#\mathrm{Sym}(\mathfrak{t}^*[-2])\text{-perf}^{\mathrm{gr}} \simeq \mathrm{Ch}_{\mathrm{gr},c}(\mathfrak{g}/G)_{\mathrm{prin}}.$$

此外，该图表自然交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sym}(\mathfrak{t}^*[-2]\langle -2\rangle)\text{-perf}^{\mathrm{gr}} & \xrightarrow{\mathbb{L}_{\mathfrak{t}}} & \mathrm{Ch}_{\mathrm{gr},c}(\mathfrak{t}/T) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ind}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ind}_T^G} \\ \mathbb{C}[W]\#\mathrm{Sym}(\mathfrak{t}^*[-2]\langle -2\rangle)\text{-perf}^{\mathrm{gr}} & \xrightarrow{\mathbb{L}_{\mathfrak{g},\mathrm{prin}}} & \mathrm{Ch}_{\mathrm{gr},c}(\mathfrak{g}/G)_{\mathrm{prin}} \end{array}$$

让我们更明确地说明这种交换性：这意味着对于任意选取的 Borel 子群 B 和 R，我们都有一个 2-胞 $\gamma_{B,\,R}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sym}(\mathfrak{t}^*[-2]\langle -2\rangle)\text{-perf}^{\mathrm{gr}} & \xrightarrow{\mathbb{L}_{\mathfrak{t}}} & \mathrm{Ch}_{\mathrm{gr},c}(\mathfrak{t}/T) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ind}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ind}_{T\subset R}^G} \\ \mathbb{C}[W]\#\mathrm{Sym}(\mathfrak{t}^*[-2]\langle -2\rangle)\text{-perf}^{\mathrm{gr}} & \xrightarrow{\mathbb{L}_{\mathfrak{b}\subset\mathfrak{g},\mathrm{prin}}} & \mathrm{Ch}_{\mathrm{gr},c}(\mathfrak{g}/G)_{\mathrm{prin}} \end{array}$$

并且它与底部的 $\beta_{B,\,B'}$ 以及右侧的 $\alpha_{R,\,R'}$ 复合相容。

3.3. 一般块的典范诱导/限制。本节及下一节中，我们将介绍广义 Springer 理论中的类似结果，参考资料见 [Lusa] 。证明类似，故略去。首先，固定 $\kappa = (M, O, \mathcal{L})$ 作为 G 的一组尖点数据，即， M 是 G 的一个 Levi 子群， O是 M中的一个幂零轨道，而 $\mathcal{L}$是 O上的一个尖点局部系统。令 $\mathfrak{z}_\kappa = \mathfrak{z}_{\mathfrak{m}}$为 $\mathfrak{m}$的中心，并令 $W_G^\kappa = N_G(M)/M$为相对韦伊群。记 $\mathrm{Ch}_{\mathrm{gr},c}(\mathfrak{m}/M)_\kappa \subset \mathrm{Ch}_{\mathrm{gr},c}(\mathfrak{m}/M)$ 为由$\overline{\mathcal{L}} := \mathrm{IC}(\mathfrak{m}/M, \mathbb{C}_{\mathfrak{z}_\kappa} \boxtimes \mathcal{L})$生成的子范畴，并将由 $\mathrm{Ind}_{L\subset Q}^G(\overline{\mathcal{L}})$生成的全子范畴记为 $\mathrm{Ch}_{\mathrm{gr},c}(\mathfrak{g}/G)_\kappa \subset \mathrm{Ch}_{\mathrm{gr},c}(\mathfrak{g}/G)$（其中 Q 是 G的某个抛物子群，其莱维因子为 L）。现在令 $\mathfrak{z}_\kappa^{\mathrm{reg}} = \{x \in \mathfrak{z}_{\mathfrak{m}} : C_G(x) = M\}$，令 $\mathfrak{m}_\kappa^{\mathrm{reg}} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{m}}^{\mathrm{reg}} \times O$，并令 $\mathfrak{g}_\kappa^{\mathrm{reg}}/G$ 为 $\mathfrak{m}_\kappa^{\mathrm{reg}}/M$ 在映射 $\mathfrak{m}/M \to \mathfrak{g}/G$下的像。我们有如下交换图：

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{m}_\kappa^{\mathrm{reg}}/M & & \xrightarrow{f} & & \mathfrak{g}_\kappa^{\mathrm{reg}}/G \\ \downarrow{\scriptstyle j_L} & & & & \downarrow{\scriptstyle j_G} \\ \mathfrak{m}/M & \xleftarrow{q} & \mathfrak{q}/Q & \xrightarrow{p} & \mathfrak{g}/G \end{array}$$

存在一个函子的典范同构：

$$\alpha^0_{Q,\kappa} : \mathrm{Ind}_Q^{\heartsuit_t} := \mathrm{Ind}_{M\subset Q}^{G,\heartsuit_t} := p_! q^* \simeq j_{G!*} f_* j_M^* : \mathrm{Ch}_c(\mathfrak{m}/M)_\kappa^{\heartsuit_t} \to \mathrm{Ch}_c(\mathfrak{g}/G)_\kappa^{\heartsuit_t}$$

$$\alpha'^0_{Q,\kappa}:\mathrm{Res}_Q^{\heartsuit_t}:=\mathrm{Res}_{M\subset Q}^{G,\heartsuit_t}:=q_*p^!\simeq j_{M!*}f^*j_G^*:\mathrm{Ch}_c(\mathfrak{g}/G)_\kappa^{\heartsuit_t}\to\mathrm{Ch}_c(\mathfrak{m}/M)_\kappa^{\heartsuit_t}$$

现在令 Q_1,Q_2 包含 M 的两个 Borel 子群。于是我们有一个函子的典范同构：

$$\alpha^0_{Q_1,Q_2,\kappa}:=(\alpha^0_{Q_2,\kappa})^{-1}\circ\alpha^0_{Q_1,\kappa}:\mathrm{Ind}_{M\subset Q_1}^{G,\heartsuit_t}\to\mathrm{Ind}_{M\subset Q_2}^{G,\heartsuit_t}$$

$$\alpha'^0_{Q_1,Q_2,\kappa}:=(\alpha'^0_{Q_2,\kappa})^{-1}\circ\alpha'^0_{Q_1,\kappa}:\mathrm{Res}_{M\subset Q_1}^{G,\heartsuit_t}\to\mathrm{Res}_{M\subset Q_2}^{G,\heartsuit_t}$$

命题 3.3.1. (1) $\mathcal{C}$中 $_1$ 处的 2-胞 $\alpha^0_{Q_1,Q_2,\kappa}$ 属于自然映射的像：

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}\mathcal{C}\mathrm{at}}(\mathrm{Ind}_{M,Q_1,\mathrm{gr}}^G,\mathrm{Ind}_{M,Q_2,\mathrm{gr}}^G)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\mathrm{at}_1}(\mathrm{Ind}_{M,Q_1}^{G,\heartsuit_t},\mathrm{Ind}_{M,Q_2}^{G,\heartsuit_t})$$

(2) $\mathcal{C}$ 中 $_1$ 处的 2-胞 $\alpha'^0_{Q_1,Q_2,\kappa}$ 属于自然映射的像：

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}\mathcal{C}\mathrm{at}}(\mathrm{Res}_{M,Q_1,\mathrm{gr}}^G,\mathrm{Res}_{M,Q_2,\mathrm{gr}}^G)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\mathrm{at}_1}(\mathrm{Res}_{M,Q_1}^{G,\heartsuit_t},\mathrm{Res}_{M,Q_2}^{G,\heartsuit_t})$$

类似于（3.1.5），我们记规范函子为：

$$\mathrm{Ind}_{M,\kappa}^G:\mathrm{Ch}_{\mathrm{gr},c}(\mathfrak{m}/M)_\kappa\rightleftarrows\mathrm{Ch}_{\mathrm{gr},c}(\mathfrak{g}/G)_\kappa:\mathrm{Res}_{M,\kappa}^G.$$

现在令 L 为 G的一个 Levi 子群，并记 $\mathfrak{K}_L$ 为 L 的尖点数据集合（模共轭）。我们有一个自然包含 $\mathfrak{K}_L\subset\mathfrak{K}_G$。令 $\kappa=(M,O,\mathcal{L})\in\mathfrak{K}_L$ 为 L的一个尖点数据，我们也可以将 κ视为 G的一个尖点数据。类似的论证将给出一个典范定义的函子：

$$\mathrm{Ind}_{L,\kappa}^G:\mathrm{Ch}_{\mathrm{gr},c}(\mathfrak{l}/L)_\kappa\rightleftarrows\mathrm{Ch}_{\mathrm{gr},c}(\mathfrak{g}/G)_\kappa:\mathrm{Res}_{L,\kappa}^G.$$

对所有尖点数据取直和，我们得到函子：

$$\mathrm{Ind}_L^G:\mathrm{Ch}_{\mathrm{gr},c}(\mathfrak{l}/L)\simeq\oplus_{\kappa\in\mathfrak{K}_L}\mathrm{Ch}_{\mathrm{gr},c}(\mathfrak{l}/L)_\kappa\rightleftarrows\mathrm{Ch}_{\mathrm{gr},c}(\mathfrak{g}/G)\simeq\oplus_{\kappa\in\mathfrak{K}_G}\mathrm{Ch}_{\mathrm{gr},c}(\mathfrak{g}/G)_\kappa:\mathrm{Res}_L^G,$$

其中 Res_L^G 将所有直和项 $\kappa\in\mathfrak{K}_G\backslash\mathfrak{K}_L$ 映为 0。

注记 3.3.2. 以上命题3.3.1 中的类似论证表明，对于任意抛物子群 P，其属于 L，函子 $\mathrm{Ind}_L^G\simeq\mathrm{Ind}_{L\subset P}^G$ 和 $\mathrm{Res}_L^G\simeq\mathrm{Res}_{L\subset P}^G$ 之间存在典范同构。从这个意义上说，函子 Ind_L^G 和 Res_L^G 与抛物子群的选择无关，因此我们称 Ind_L^G、Res_L^G为典范诱导与限制函子。

3.4. 通过广义 Springer 理论进行谱识别。我们继续给出与第 3.2 节类似的谱描述。令 $\kappa=(M,O,\mathcal{L})$ 为 G 的一个尖点数据，且 Q 为一个莱维因子为 L 的抛物子群。我们有一个自然映射：

$$\mathrm{End}^{0,*}(\mathrm{Ind}_Q^{\mathrm{gr}}(\overline{\mathcal{L}}))\otimes\mathrm{End}^{*,\mathrm{gr}}(\overline{\mathcal{L}})\to\mathrm{End}^{*,\mathrm{gr}}(\mathrm{Ind}_Q^{\mathrm{gr}}(\overline{\mathcal{L}})) \tag{3.4.1}$$

根据 [Lusa 命题 3.2], (3.4.1)，这是一个同构，并且可识别为分次向量空间之间的映射：

$$\mathbb{C}[W_G^\kappa]\otimes\mathrm{Sym}(\mathfrak{z}_\kappa^*[-2]\langle-2\rangle)\simeq\mathrm{End}^{*,\mathrm{gr}}(\mathrm{Ind}_Q^{\mathrm{gr}}(\overline{\mathcal{L}}))$$

此外，$\mathrm{REnd}^{\mathrm{gr}}(\mathrm{Ind}_Q^{\mathrm{gr}}(\overline{\mathcal{L}}))$ 上的代数结构可识别为左侧的 smash 积，因此我们有一个分次微分分次代数的同构：

$$\mathbb{C}[W_G^\kappa]\#\mathrm{Sym}(\mathfrak{z}_\kappa^*[-2]\langle-2\rangle)\simeq\mathrm{End}^{*,\mathrm{gr}}(\mathrm{Ind}_Q^{\mathrm{gr}}(\overline{\mathcal{L}}))\simeq\mathrm{REnd}^{\mathrm{gr}}(\mathrm{Ind}_Q^{\mathrm{gr}}(\overline{\mathcal{L}}))$$

这进一步给出了横截范畴之间的等价：

$$\mathbb{L}_{\mathfrak{q}\subset\mathfrak{g},\kappa}:\mathbb{C}[W_G^\kappa]\#\mathrm{Sym}(\mathfrak{z}_\kappa^*[-2]\langle-2\rangle)\text{-perf}^{\mathrm{gr}}\simeq\mathrm{Ch}_{\mathrm{gr},c}(\mathfrak{g}/G)_\kappa$$

其中，$\text{-mod}^{\mathrm{gr}}$ $_{\text{-perf}}$ 表示分次完美模的范畴。现在，对于包含 M 的两个抛物子群 Q_1、Q_2，存在一个以类似方式定义的 2-胞 $\beta_{Q_1,Q_2}:\mathbb{L}_{Q_1\subset G,\kappa}\to\mathbb{L}_{Q_2\subset G,\kappa}$。因此，我们有一个典范函子：

$$\mathbb{L}_{\mathfrak{g},\kappa}:\mathbb{C}[W_G^\kappa]\#\mathrm{Sym}(\mathfrak{z}_\kappa^*[-2])\text{-perf}^{\mathrm{gr}}\simeq\mathrm{Ch}_{\mathrm{gr},c}(\mathfrak{g}/G)_\kappa \tag{3.4.2}$$

此外，该图表自然满足交换性：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sym}(\mathfrak{z}_\kappa^*[-2]\langle -2\rangle)\text{-perf}^{\mathrm{gr}} & \xrightarrow{\mathbb{L}_{M,\kappa}} & \mathrm{Ch}_{\mathrm{gr},c}(\mathfrak{m}/M)_\kappa \\ \mathrm{Ind}\downarrow\uparrow\mathrm{Res} & & \mathrm{Ind}_{M,\kappa}^G\downarrow\uparrow\mathrm{Res}_{M,\kappa}^G \\ \mathbb{C}[W_G^\kappa]\#\mathrm{Sym}(\mathfrak{z}_\kappa^*[-2]\langle -2\rangle)\text{-perf}^{\mathrm{gr}} & \xrightarrow{\mathbb{L}_{G,\kappa}} & \mathrm{Ch}_{\mathrm{gr},c}(\mathfrak{g}/G)_\kappa \end{array}$$

对所有尖点数据取直和 $\kappa\in\mathfrak{K}_G$ （3.4.2），我们有

命题 3.4.3。存在一个典范等价：

$$\mathbb{L}_{\mathfrak{g}}:\oplus_{\kappa\in\mathfrak{K}}\mathbb{C}[W_G^\kappa]\#\mathrm{Sym}(\mathfrak{z}_\kappa^*[-2]\langle -2\rangle)\text{-perf}^{\mathrm{gr}}\simeq\mathrm{Ch}_{\mathrm{gr},c}(\mathfrak{g}/G).$$

此外，设 L 是包含 T 的 G 的 Levi 子群，则下图自然交换：

$$\begin{array}{ccc} \oplus_{\kappa\in\mathfrak{K}_L}\mathbb{C}[W_L^\kappa]\#\mathrm{Sym}(\mathfrak{z}_\kappa^*[-2]\langle -2\rangle)\text{-perf}^{\mathrm{gr}} & \xrightarrow{\mathbb{L}_{\mathfrak{l}}} & \mathrm{Ch}_{\mathrm{gr},c}(\mathfrak{l}/L) \\ \mathrm{Ind}\downarrow\uparrow\mathrm{Res} & & \mathrm{Ind}_L^G\downarrow\uparrow\mathrm{Res}_L^G \\ \oplus_{\kappa\in\mathfrak{K}_G}\mathbb{C}[W_G^\kappa]\#\mathrm{Sym}(\mathfrak{z}_\kappa^*[-2]\langle -2\rangle)\text{-perf}^{\mathrm{gr}} & \xrightarrow{\mathbb{L}_{\mathfrak{g}}} & \mathrm{Ch}_{\mathrm{gr},c}(\mathfrak{g}/G) \end{array}$$

其中 Ind 和 Res 分别是沿着 $W_L^\kappa\subset W_G^\kappa$ 的诱导函子和限制函子。

3.5. 在公寓上局部化 $\mathrm{Ch}(\mathfrak{g}/G)$。本节中，我们将李代数上的特征层范畴描述为仿射空间 $X_*(T)\otimes\mathbb{C}$ 上某些组合定义的层的整体截面。

3.5.1. 仿射空间上的范畴层。我们在附录 B 中汇集了关于范畴层的一些事实。设 $\mathbb{E}$ 是有限维复仿射空间，$\mathfrak{F}$ 是 $\mathbb{E}$ 的仿射子空间的局部有限集。对于任意 $\epsilon\in\mathfrak{F}$，我们令 $\mathcal{QC}\mathrm{oh}_\epsilon$ 为 ϵ 上取值于 $\mathrm{QCoh}(\mathfrak{z}_\epsilon[1])$ 的范畴常值层，其中 $\mathfrak{z}_\epsilon$ 是 ϵ 的切空间。设 $f:\mathfrak{G}\to\mathfrak{F}$ 是集合之间的映射，记 $\mathcal{QC}\mathrm{oh}_{\mathfrak{G}}=\prod_{c\in\mathfrak{G}}\mathcal{QC}\mathrm{oh}^{f(c)\cdot}$。设 K 是一个仿射线性变换离散群，在 $\mathbb{E}$ 上恰当地不连续作用，且 $\mathfrak{F}$ 在 W 的作用下稳定。再假设 K 作用于 $\mathfrak{G}$，使得 f 是 K-等变的，那么 $\mathcal{QC}\mathrm{oh}_{\mathfrak{G}}$ 自然是 $\mathbb{E}$ 上的一个 K-等变层。因此，对于任意 K-不变开子集 U，我们在 $\Gamma(U,\mathcal{QC}\mathrm{oh}_{\mathfrak{G}})$ 上有自然的 K 作用。将不变范畴记为 $\Gamma(U,\mathcal{QC}\mathrm{oh}_{\mathfrak{G}})^K$。我们类似地定义 $\mathcal{C}\mathrm{oh}_{\mathfrak{G}},\mathcal{P}\mathrm{erf}_{\mathfrak{G}},\mathcal{C}\mathrm{oh}^{\mathrm{gr}}_{\mathfrak{G}}$，只需在上述定义中分别以 $\mathrm{Coh}(\mathfrak{z}_\epsilon[1])$、$\mathrm{Perf}(\mathfrak{z}_\epsilon[1])$、$\mathrm{Coh}(\mathfrak{z}_\epsilon[1]\langle 2\rangle)$ 替换 $\mathrm{QCoh}(\mathfrak{z}_\epsilon[1])$。

注记 3.5.1。我们可以将 $\Gamma(\mathbb{E},\mathcal{QC}\mathrm{oh}_{\mathfrak{G}})^W$ 更具体地写成如下形式：选取 $[\mathfrak{G}//K]$ 一组 $\mathfrak{G}//K$ 的代表元，并将 K_c 在 $c\in\mathfrak{C}$ 处的 K 的稳定子记为 K_c。那么我们有范畴等价：

$$\Gamma(\mathbb{E},\mathcal{QC}\mathrm{oh}_{\mathfrak{G}})^W\simeq(\prod_{c\in\mathfrak{G}}\mathrm{Sym}(\mathfrak{z}_{f(c)}[1])\text{-mod})^W\simeq\prod_{c\in[\mathfrak{G}//K]}\mathbb{C}[K_c]\#\mathrm{Sym}(\mathfrak{z}_{f(c)}[1])\text{-mod}.$$

设 $K'\subset K$，且 $\mathfrak{G}'\subset\mathfrak{G}$ 是一个 K'-稳定子集。我们有一对自然的伴随函子：

$$\mathrm{Ind}_{\mathfrak{G}'/K'}^{\mathfrak{G}/K}:\Gamma(\mathbb{E},\mathcal{QC}\mathrm{oh}_{\mathfrak{G}'})^{K'}\rightleftarrows\Gamma(\mathbb{E},\mathcal{QC}\mathrm{oh}_{\mathfrak{G}})^K:\mathrm{Res}_{\mathfrak{G}'/K'}^{\mathfrak{G}/K}$$

当上下文明确时，我们将直接用归纳、限制表示它们。

记号 3.5.2。我们汇总一些李论记号：

(1) $\Phi(G,T)$ 的根集。(2) 每个 $\alpha\in\Phi$ 在 $\mathfrak{t}$ 上定义一个线性函数。令 $H_\alpha=\{x\in\mathfrak{t}:\alpha(x)=0\}$，并令 s_α 为关于H_α 的反射，由 $s_\alpha(x)=x-\alpha(x)\alpha^\vee$ 定义。(3) 对于 $\alpha\in\Phi$，令 $\mathfrak{g}_\alpha\subset\mathfrak{g}$ 为根空间。(4) 对于 I （超平面排列 $H_\alpha,\alpha\in\Phi$ 给出的） $\mathfrak{t}$ 的一个面，令 $\epsilon_I=\cap_{\{\alpha\in\Phi:\alpha(I)=0\}}H_\alpha$ 为 $\mathfrak{t}$ 的线性子空间。(5) 定义集合 $\mathfrak{S}=\{\epsilon_I:I$ 为 (4) 中的一个面$\}$，由 $\mathfrak{t}$ 的线性子空间构成。(6) 对于 $\epsilon\in\mathfrak{S}$，令 $\Phi_\epsilon:=\{\alpha\in\Phi:\alpha(\epsilon)=0\}$, $W_\epsilon=\langle s_\alpha:\alpha\in\Phi_\epsilon\rangle\subset W$，且 $W^\epsilon=N_W(W_\epsilon)/W_\epsilon$。(7) 令 G_ϵ 为包含 T 且具有根 Φ_ϵ 的 G 的连通约化子群，使其魏尔群为W_ϵ。(8) 令 C_G 为 $\mathcal{N}_G/G$ 上尖点层的同构类集合，其中 $\mathcal{N}_G\subset\mathfrak{g}$ 是 G的幂零锥。

(9) $\mathfrak{C}=\{(\epsilon,B,F)\colon\ \epsilon\in\mathfrak{S},F\in C_{G_\epsilon},B\supset T$ 是 $G_\epsilon\}$ 的一个 Borel 子群。(10) 我们也使用记号 W_G, $\mathfrak{S}_G,\mathfrak{C}_G$ 等，以强调其对 G 的依赖。(11) 对于 I 这个面，令 $G_I=G_{\epsilon_I},W_I=W_{\epsilon_I},W^I=W^{\epsilon_I}$, $\mathfrak{z}_I=\mathfrak{z}_{\epsilon_I}=\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}_I}$ 为 $\mathfrak{l}_I,C_I=C_{G_I},\sim\quad\sim\mathfrak{C}_I=\mathfrak{C}_{G_I}$ 等的中心。

现在沿用第 3.5.1 节的记号，取 $\mathbb{E}=\mathfrak{t}$，并取 $f\colon\ \mathfrak{C}_G\to\mathfrak{S}_G$，通过 $(\epsilon,\ B,\ F)\mapsto\epsilon$。注意到 f 自然地是 W-等变的，因此 $\mathcal{QC}$哦$\mathfrak{e}_G$，$\Gamma(\mathfrak{t},\ \mathcal{QC}$哦$\mathfrak{e}_G)^W$等均有定义。

我们将命题 3.4.3 重述如下：

命题 3.5.3. 存在一个典范等价：

$$\mathbb{L}_{\mathfrak{g}}:\Gamma(\mathfrak{t},\mathcal{C}\mathrm{oh}^{\mathrm{gr}}_{\mathfrak{C}_G})^{W_G}\simeq\mathrm{Ch}_{\mathrm{gr},c}(\mathfrak{g}/G).\tag{3.5.4}$$

此外，设 $L\subset G$ 是一个包含 T 的 Levi 子群，则该图表自然交换：

$$\begin{array}{ccc}\Gamma(\mathfrak{t},\mathcal{C}\mathrm{oh}^{\mathrm{gr}}_{\mathfrak{C}_L})^{W_L} & \xrightarrow{\mathbb{L}_{\mathfrak{l}}} & \mathrm{Ch}_{\mathrm{gr},c}(\mathfrak{l}/L)\\ \mathrm{Ind}\big\downarrow\big\uparrow\mathrm{Res} & & \mathrm{Ind}_L^G\big\downarrow\big\uparrow\mathrm{Res}_L^G\\ \Gamma(\mathfrak{t},\mathcal{C}\mathrm{oh}^{\mathrm{gr}}_{\mathfrak{C}_G})^{W_G} & \xrightarrow{\mathbb{L}_{\mathfrak{g}}} & \mathrm{Ch}_{\mathrm{gr},c}(\mathfrak{g}/G)\end{array}\tag{3.5.5}$$

证明。我们断言 $\mathfrak{K}_G$ 与 $\mathfrak{C}_G//W_G$ 之间存在双射。事实上，固定一个与 B 相对应的 Weyl 室，其中 B 是 G 的一个 Borel 子群，记 $\mathfrak{D}_G:=\{(J,F)\colon\ J$ 为 $A,F\in C_J\}$ 的一个面。根据 Li 的定理 1.2], 的证明（参见 [），存在一个双射 $\mathfrak{K}_G\simeq\mathfrak{D}_G$。现在断言自然映射 $h\colon\mathfrak{D}_G\to\mathfrak{C}_G//W_G,(J,F)\mapsto(\epsilon_J,B\cap G_J,F)$ 是双射。满射性：根据定义，$(\epsilon_J,B\cap G_J,F)$ 属于 h 的像；群 W_J 的作用固定 ϵ_J 和 F，但在 G_J 的所有 Borel 子群 R 上传递，因此所有形如 (ϵ_J,R,F) 的元素都属于 h 的像。现在，根据 W_G-作用，h 是满射。单射性：现在假设 $h(J,F)=h(J',F')$，即存在 $w\in W_G$，使得 $w(\epsilon_J,B\cap G_J,F)=(\epsilon_{J'},B\cap G_{J'},F')$ 属于 $\mathfrak{C}_G$。记 P_J 为 G 中以 G_J 为莱维因子的抛物子群。那么 $Ad_w(P_J)$ 和 $P_{J'}$ 都是 G 中以 $G_{J'}$ 为莱维子群的抛物子群，且其上支持一个尖点层。因此，由 Li 的引理 3.1]（参见 [），$Ad_w(P_J)$ 与 $P_{J'}$ 在 G 中共轭。于是 $P_J=P'_J$ 与 $J=J'$。现在必有 $w\in N_{W_G}(W_J)$, 因此 $F'=w(F)=F$，单射性得证。最后，对于 $c=(\epsilon,R,F)\in\mathfrak{C}_G$，复合映射 $W_c\hookrightarrow N_{W_G}(W_\epsilon)\to N_{W_G}(W_\epsilon)/W_\epsilon=W^\epsilon$ 是一个同构。因此，根据注记 3.5.1 和命题 3.4.3（连同 Koszul 对偶），(3.5.4) 成立。容易验证，双射 $\mathfrak{K}_G\simeq\mathfrak{C}_G//W_G$ 与两侧从 L 到 G 的自然映射相容，由此得到 (3.5.5)。□

4. Spectral description of character sheaves on reductive groups

在本章中，我们通过粘合（即取极限）命题 G/G中李代数上的同一性映射，来计算 Ch(3.5.3)。内容组织如下：

- 节 4.1：定义我们取极限的图表。
- 第 4.2节：定义自守侧的粘合函子，并将其极限识别为 Ch(G/G)。
- 节 4.3：在谱侧定义粘合函子，并显式计算其极限。
- 节4.4：将两侧的函子对应起来，并推导出我们的主定理。

4.1. 组织图表。设 $LG=G(z,z^{-1})$ 和 $L\mathfrak{g}=\mathfrak{g}(z,z^{-1})$ 分别为环群和环李代数。我们首先引入与仿射情形的记号 3.5.2 类似的记号：

~ ~记号 4.1.1. (1) $\Phi=\mathbb{Z}\times\Phi$ 仿射根集。 $W=X_*(T)\rtimes W$ 扩张仿射魏尔群。

~(2) 每个 $\alpha=(n,\overline{\alpha})\in\Phi$ 定义一个仿射线性函数 $\alpha:=\overline{\alpha}+n$。令 $H_\alpha=\{x\in\mathfrak{t}\colon\ \alpha(x)=0\}$，并令 s_α 为关于 H_α 的反射，其定义为 $s_\alpha(x)=x-\alpha(x)\overline{\alpha}^\vee$。~(3) 对于 $\alpha=(n,\overline{\alpha})\in\Phi$，令 $\mathfrak{g}_\alpha=\mathfrak{g}_{\overline{\alpha}}z^n\subset L\mathfrak{g}$ 为根空间。(4) 对于 I，一个 $\mathfrak{t}$ 的仿射面（即由仿射超平面$\sim H_\alpha,\alpha\in\Phi$给出的超平面排列的一个面），令 $\epsilon_I=\cap_{\{\alpha\in\Phi:\alpha(I)=0\}}H_\alpha$ 为 $\mathfrak{t}$的线性子空间。~(5) 定义集合 $\mathfrak{S}=\{\epsilon_I:I$ 如(4)所述的一个面$\}$ 所对应的 $\mathfrak{t}$ 的线性子空间。(6) 对于 $\epsilon\in\mathfrak{S}$，令 $\Phi_\epsilon:=\{\alpha\in\Phi\colon\ \alpha(\epsilon)=0\}$，$W_\epsilon=\langle s_\alpha\colon\ \alpha\in\Phi_\epsilon\rangle\subset W$，以及 $W^\epsilon=N_{\widetilde{W}}(W_\epsilon)/W_\epsilon$。

(7) 令 G_ϵ 为 LG 的连通约化子群，它包含 T，且根为 Φ_ϵ，因此其魏尔群为 W_ϵ。

(8) $\mathfrak{C} = \{(\epsilon, B, F) : \epsilon \in \mathfrak{S}, F \in C_{G_\epsilon}, B \supset T$为 $G_\epsilon\}$的一个 Borel 子群。注意，$\mathfrak{C}$ 与引言中的 $\mathfrak{C}_G$ 之间存在自然双射。为简便起见，我们用同一符号表示它们。(9) 我们还使用记号 $W_G, \mathfrak{S}_G, \mathfrak{C}_G$ 等，以强调对 G的依赖。(10) 对于 I，一个仿射面，令 $G_I = G_{\epsilon_I}, W_I = W_{\epsilon_I}$，$W^I = W^{\epsilon_I}, \mathfrak{z}_I = \mathfrak{z}_{\epsilon_I} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}_I}$为 $\mathfrak{l}_I, C_I = C_{G_I}$等的中心。

定义 4.1.2。(1) 记 $\mathfrak{F}_G$ 为具有

- 对象：$\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$中的仿射面 $I \backsim$
- 态射：$w : I \to J$，对于 $w \in W$，以及 $I \subset \overline{w(J)}$;
- 2-态射：$u : w \to wu : I \to J$，对于 $u \in W_I$

(2) 设 $L \subset G$ 为一个包含 T 的 Levi 子群。对于 $I \in \mathfrak{F}_G$，用 $I_L \in \mathfrak{F}_L$ 表示包含 I 的面。设 $\mathfrak{F}_{L\subset G}$ 为具有

- 对象：$I \in \mathfrak{F}_G;\backsim$
- 态射：$w : I \to J$，对于所有 $w \in W_L$，以及 $I \subset \overline{w(J)}$。
- 2-态射：$u : w \Rightarrow wu : I \to J$，对于所有 $u \in W_{I_L}$.

我们有自然函子

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{F}_G & \xleftarrow{\beta} & \mathfrak{F}_{L\subset G} & \xrightarrow{\alpha} & \mathfrak{F}_L \\ (I,w,u) & \longleftarrow\!\shortmid & (I,w,u) & \longmapsto & (I_L,w,u) \end{array}$$

注 4.1.3. (1) 对于 $\mathfrak{F}_G$ 或 $\mathfrak{F}_{L\subset G}$ 中任意两个 w_1、w_2，w_1 与 w_2 之间的两个态射的集合要么是 $\emptyset$，要么是单元素集。因此，$\mathfrak{F}_G$ 和 $\mathfrak{F}_{L\subset G}$ 都等价于 1-范畴。

(2) 当 G 是单且单连通，并固定一个阿尔科夫 A时，记 $\mathfrak{F}_A$ 为 A的（非空）面的偏序集，若 $I \subset \overline{J}$则 $I \to J$。那么自然映射 $\mathfrak{F}_A \to \mathfrak{F}_G$ 是一个等价。

引理 4.1.4。α 的纤维具有可缩几何实现。

证明。$|\alpha^{-1}(J)| = |\{I \in \mathfrak{F}_G : I \subset J\}| \simeq J$ 是可缩的。 □

4.2. 自守侧。我们定义了自守侧的粘合函子：第 4.2.1 节中的非分次版本，以及第 4.2.2 节中的分次版本。

4.2.1. 函子 Ch^{open}。本节的结果是 [LN定理 5 的一个变体，该定理将 $\mathrm{Ch}(G/G)$ 描述为各种李代数（开子集上）的特征层极限。定义和记号请参见 [LN第5] 节。对于 $I \in \mathfrak{F}_G$，记相应的 Levi 子群为 $G_I \subset LG$。G_I 在其李代数 $\mathfrak{g}_I$ 上有一个扭曲共轭作用（通过规范作用），我们将商叠记为 $\mathfrak{g}_I/'G_I$。前几节中关于通常的伴随商叠 $\mathfrak{g}/G$的陈述，对扭曲商叠仍然成立。我们有扭曲特征多项式映射 $\chi'_I : \mathfrak{g}_I \to \mathfrak{t}//W_I$，令 $St_I \subset \mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ 为 I的星集，$V_I = St_I \times i\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} \subset \mathfrak{t}$，以及$U_{G,\ I} = \chi'^{-1}(V_I//W_I) \subset \mathfrak{g}_I$。固定 $\dot{w}$的一个提升 $w \in W$，使其进入 $N_G(T)$，这给出了集合 $\widetilde{W} \to LG$ 的一个提升。我们有一个函子 $\mathrm{U}_G : \mathfrak{F}_G \to$Stack [2]，通过

- 在对象上：$I \mapsto U_{G,\ I}/'G_I$;
- 在 1-态射上：$\{w : I \to w(I)\} \mapsto Ad'_{\dot{w}} : U_{G,\ I}/'G_I \to U_{G,\ w(I)}/'G_{w(I)}$;
- 在 2-态射上：$\{u : w_1 \to w_2\} \mapsto$ 对 $\dot{w}_2\dot{w}_1^{-1}$ 进行共轭所得到的内自同构。

拉回函子 $Ad'^*_{\dot{w}}$ 保持特征层范畴，并诱导出一个函子：

$$\mathrm{Ch}^{\mathrm{open}}_G : \mathfrak{F}_G \to \mathcal{C}\mathrm{at}, \qquad I \mapsto \mathrm{Ch}(U_{G,I}/'G_I).$$

对于 $I \in \mathfrak{F}_G$，令 $L_I = L_{I_L}, U_{L,\ I} = U_{L,\ I_L}$，则有 $U_{G,\ I} \cap L_I \subset U_{L,\ I}$。类似地定义函子：

$$\mathrm{Ch}^{\mathrm{open}}_{L\subset G} : \mathfrak{F}_{L\subset G} \to \mathcal{C}\mathrm{at}, \qquad I \mapsto \mathrm{Ch}(U_{G,I} \cap \mathfrak{l}_I/'L_I).$$

令 $P \subset G$ 为 Levi 子群 L 的抛物子群。对于 $I \in \mathfrak{F}_G$，令 $P_I = G_I \cap P$。我们有如下对应关系：$U_{G,\ I} \cap \mathfrak{l}_I/'L_I \xleftarrow{q} U_{G,\ I} \cap \mathfrak{p}_I/'P_I \xrightarrow{p} U_{G,\ I}/'G_I$。令 $\mathrm{Res}_{P_I} = p_*q^!$: $\mathrm{Ch}(U_{G,\ I}/'G_I) \to \mathrm{Ch}(U_{G,\ I} \cap \mathfrak{l}_I/'L_I)$。定义自然变换：

[2]如同 [LN]，，可以通过选取一个满群同态来统一选择提升 $\dot{W} \to W$，并引入 2-态射以消去额外的 1-态射。不过，为求简便，我们不沿此方向继续。

- $\mathrm{Res}_P\colon \mathsf{Ch}^{\mathrm{开}}_G \circ \beta \Rightarrow \mathsf{Ch}^{\mathrm{开}}_{L\subset G}$，经由 $I \mapsto \mathrm{Res}_{P_I}\colon \mathsf{Ch}(U_{G,\ I}/'G_I) \to \mathsf{Ch}(U_{G,\ I}\cap \mathfrak{l}_I/'L_I)$;
- 参考：$\mathsf{Ch}^{\mathrm{开}}_L \circ \alpha \Rightarrow \mathsf{Ch}^{\mathrm{开}}_{L\subset G}$，经由 $I \mapsto j_I^*\colon \mathsf{Ch}(U_{L,\ I}/'L_I) \to \mathsf{Ch}(U_{G,\ I}\cap \mathfrak{l}_I/'L_I)$，其中 $j_I\colon U_{G,\ I}\cap \mathfrak{l}_I/'L_I \to U_{L,\ I}/'L_I$ 表示开嵌入。

我们得到归纳函子：

$$\lim_{\mathfrak{F}_G} \mathsf{Ch}^{\mathrm{open}}_G \xrightarrow{\beta^*} \lim_{\mathfrak{F}_{L\subset G}} \mathsf{Ch}^{\mathrm{open}}_G \circ \beta \xrightarrow{\lim \mathrm{Res}_P} \lim_{\mathfrak{F}_{L\subset G}} \mathsf{Ch}^{\mathrm{open}}_{L\subset G}$$

$$\lim_{\mathfrak{F}_L} \mathsf{Ch}^{\mathrm{open}}_L \xrightarrow{\alpha^*} \lim_{\mathfrak{F}_{L\subset G}} \mathsf{Ch}^{\mathrm{open}}_L \circ \alpha \xrightarrow{\lim \mathsf{Ref}} \lim_{\mathfrak{F}_{L\subset G}} \mathsf{Ch}^{\mathrm{open}}_{L\subset G}$$

定理 4.2.1. 在上述设定下，

(1) 存在一个自然等价：

$$\lim_{I\in\mathfrak{F}_G} \mathsf{Ch}^{\mathrm{open}}_G \simeq \mathrm{Ch}(G/G)$$

(2) 函子

$$\alpha^* \circ \lim \mathsf{Ref} : \lim_{I\in\mathfrak{F}_{L\subset G}} \mathsf{Ch}^{\mathrm{open}}_{L\subset G} \longrightarrow \lim_{I\in\mathfrak{F}_L} \mathsf{Ch}^{\mathrm{open}}_L$$

是一个等价。

此外，在上述等价下，该图表自然交换：

$$\begin{array}{ccc} \lim_{I\in\mathfrak{F}_G} \mathsf{Ch}^{\mathrm{open}}_G & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Ch}(G/G) \\ \downarrow{\scriptstyle \lim \mathrm{Res}_P\circ\beta^*} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}_P} \\ \lim_{I\in\mathfrak{F}_{L\subset G}} \mathsf{Ch}^{\mathrm{open}}_{L\subset G} & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Ch}(L/L) \end{array} \tag{4.2.2}$$

证明。(1) 是 [LN 定理 5.40]，的一种变体，可以用类似的方法证明：每个映射 $U_{G,\ I} \to G/G$ 都是 ´étale（在经典拓扑中），因此该结论可由下文的命题 4.2.3 得出。(2) 第二个等价性已在 (1) 中得到证明。对于第一个等价性：α^* 根据引理 4.1.4 是等价的。此外，$U_{G,\ I}\cap \mathfrak{l}_I$ 和 U_{L_I} 都是 $\mathfrak{l}_I$ 中以 I 中某个/任意一点为中心的星集尖化开子集。因此，根据 [LN，命题 4.8、定义 4.5]，j_I^* 是一个等价，因此 lim Ref 也是一个等价。最后，该方块是交换的，因为在 L/L 的局部图表 $U_{G,\ I}\cap \mathfrak{l}_I/'L_I$ 和 G/G 的局部图表 $U_{G,\ I}$ 上，栈 P/P 可以识别为 $U_{G,\ I}\cap \mathfrak{p}_I/P_I$，更准确地说，该图表是交换的：

$$\begin{array}{ccccc} U_{G,I}\cap \mathfrak{l}_I/'L_I & \xleftarrow{q} & U_{G,I}\cap \mathfrak{p}_I/'P_I & \xrightarrow{p} & U_{G,I}/'G_I \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ L/L & \xleftarrow{q} & P/P & \xrightarrow{p} & G/G \end{array}$$

且两个方块都是笛卡尔的。 □

引理 4。 2.3. 自然映射 $\mathrm{colim}_{\mathfrak{F}_G} U_{G,\ I}/'G_I(\mathbb{C}) \to G/G(\mathbb{C})$ 是一个 ∞-群胚的等价 *d.*

证明。显然，若该命题对 G_1 和 G_2成立，则对 $G_1\times G_2$也成立。现在设 $Z\subset G$ 是一个有限中心子群，令 $H = G/Z$，并假设该命题对 G成立。于是有 $U_{G,I} = U_{H,I}$, andH/H $=(G/G)/(Z/Z)$ $=(\mathrm{colim}_{\mathfrak{F}_G} U_{G,I}/G_I)/(Z/Z)$ $\simeq(\mathrm{colim}_{\mathfrak{F}_G} U_{H,I}/H_I)/Z$ $=\mathrm{colim}_{\mathfrak{F}_H} U_{H,I}/H_I$，因此该命题对 H成立。现在只需证明该命题对 $\mathbb{G}_m$ 和单连通群成立。当 $G=\mathbb{G}_m$, $\mathfrak{F}_G = B\mathbb{Z}$，且 $U_{G,\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}} = \mathbb{C}$，因此 $\mathbb{C}^*/\mathbb{C}^* = (\mathbb{C}/\mathbb{C}^*)/\mathbb{Z} = \mathrm{colim}_{\mathfrak{F}_{\mathbb{G}_m}} U_{\mathbb{G}_m,\ \mathfrak{t}_{\mathbb{R}}}/\mathbb{G}_m$。当 G是单连通的，这由 LN，定理 5.40 (6)] 和注 4.1.3 (2) 得出。□

4.2.2. 自守侧上的粘合函子。

引理 4.2.4. 存在选择 $s_I\in I$，对于每个 I，使得

- 子集的集合 $\{S_I := s_I + \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}} :\ I\in\mathfrak{F}_G\}$ 在 W_G-作用下稳定；
- 对所有 $I\subset J$, $S_I\subset S_J + J^{\perp}$。

证明。只需考虑 G 为单且为伴随型的情形。在此情形下，对于阿尔科夫 A （它是一个单纯形），取 s_A 为 A的二元中心；对于任意 $I \subset \overline{A}$，取 s_I 为s_A在 I中的正交投影。容易看出这一定义良好：若 $I \subset \overline{A} \cap \overline{A'}$，则可找到阿尔科夫 $A = A_0, A_1, ..., A_n = A'$，使得 $\overline{A_i} \cap \overline{A_{i+1}}$ 的余维为 1 且包含 I。令 r 为将 A_i 映到 A_{i+1} 的反射。于是， s_{A_i} 和$s_{A_{i+1}}$ 在 $\overline{A_i} \cap \overline{A_{i+1}}$ 上的投影相同，因此在 I 上的投影也相同。□

现在，对于任意面 I在 $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$中，令 $\overline{\mathfrak{g}}_I = S_I \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} + [\mathfrak{g}_I, \mathfrak{g}_I] \subset \mathfrak{g}_I$ [3]。则 $\overline{\mathfrak{g}}_I$在扭曲 G_I-共轭作用下保持不变。对 $I \subset \overline{J}$而言。此外， $*$-限制函子是等价：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ch}(\mathfrak{g}_I/'G_I) & \longrightarrow & \mathrm{Ch}(U_{G,I}/'G_I) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Ch}(\overline{\mathfrak{g}}_I/'G_I) & \longrightarrow & \mathrm{Ch}(\overline{\mathfrak{g}}_I \cap U_{G,I}/'G_I) \end{array} \tag{4.2.5}$$

对于 $I \subset \overline{J}$，命题 4.2.4蕴含 $\overline{\mathfrak{g}}_J \subset \overline{\mathfrak{g}}_I$、 $\overline{\mathfrak{g}}_J \subset \overline{\mathfrak{g}}_I$和 $\overline{\mathfrak{g}}_{w(I)} = Ad_w(\overline{\mathfrak{g}}_I)$。层叠 $\overline{\mathfrak{g}}_J/'G_I$也满足附录 A 中的假设（因为 $*$-限制函子 $\mathsf{Ch}_c(\mathfrak{g}_I/'G_I) \to \mathsf{Ch}_c(\overline{\mathfrak{g}}_J/'G_I)$ 是一个等价）。因此，我们有它的分次提升 $\mathsf{Ch}_{\mathrm{gr},c}(\overline{\mathfrak{g}}_I/'G_I)$。我们对 $\mathsf{Ch}_{\mathrm{gr},c}(\overline{\mathfrak{g}}_I/'G_I)$ 和 $\mathsf{Ch}_c(\overline{\mathfrak{g}}_I/'G_I)$ 上的反常 t-结构作平移，使得 0 次的常值层属于 t-心（因此函子 $\mathsf{Ch}_c(\mathfrak{g}_I/'G_I) \to \mathsf{Ch}_c(\overline{\mathfrak{g}}_J/'G_I)$ 是 t-正合的）。

定义 4.2.6. (1) 定义函子 $\mathfrak{F}_G \to \mathcal{C}\mathrm{at}$:
(a) Ch_G: $I \mapsto \mathsf{Ch}(\overline{\mathfrak{g}}_I/'G_I)$; (b) $\mathsf{Ch}_{c,G}$: $I \mapsto \mathsf{Ch}_c(\overline{\mathfrak{g}}_I/'G_I)$; (c) Ch_G^c: $I \mapsto \mathsf{Ch}(\overline{\mathfrak{g}}_I/'G_I)^c$; (d) $\mathsf{Ch}_{\mathrm{gr},c,G}$: $I \mapsto \mathsf{Ch}_{\mathrm{gr},c}(\overline{\mathfrak{g}}_I/'G_I)$; (2) 定义函子 $\mathfrak{F}_{L\subset G} \to \mathcal{C}\mathrm{at}$: (a) $\mathsf{Ch}_{L\subset G}$: $I \mapsto \mathsf{Ch}(\overline{\mathfrak{g}}_I \cap \mathfrak{l}_I/'L_I)$; (b) $\mathsf{Ch}_{c,L\subset G}$: $I \mapsto \mathsf{Ch}_c(\overline{\mathfrak{g}}_I \cap \mathfrak{l}_I/'L_I)$; (c) $\mathsf{Ch}^c_{L\subset G}$: $I \mapsto \mathsf{Ch}(\overline{\mathfrak{g}}_I \cap \mathfrak{l}_I/'L_I)^c$; (d) $\mathsf{Ch}_{\mathrm{gr},c,L\subset G}$: $I \mapsto \mathsf{Ch}_{\mathrm{gr},c,G}(\overline{\mathfrak{g}}_I \cap \mathfrak{l}_I/'L_I)$;

注意，根据 (4.2.5)（以及针对 $\mathsf{Ch}_{L\subset G}$ 的类似论证），我们有一个函子交换方块：

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Ch}_G^{\mathrm{open}} \circ \beta & \xrightarrow{\simeq} & \mathsf{Ch}_G \circ \beta \\ \downarrow{\scriptstyle \mathsf{Res}_P} & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{Res}_P} \\ \mathsf{Ch}_{L\subset G}^{\mathrm{open}} & \xrightarrow{\simeq} & \mathsf{Ch}_{L\subset G} \end{array}$$

它在极限之间诱导函子：

$$\begin{array}{ccc} \lim \mathsf{Ch}_G^{\mathrm{open}} & \xrightarrow{\simeq} & \lim \mathsf{Ch}_G \\ \downarrow{\scriptstyle \lim \mathsf{Res}_P \circ \beta} & & \downarrow{\scriptstyle \lim \mathsf{Res}_P \circ \beta} \\ \lim \mathsf{Ch}_{L\subset G}^{\mathrm{open}} & \xrightarrow{\simeq} & \lim \mathsf{Ch}_{L\subset G} \end{array} \tag{4.2.7}$$

4.3. 谱侧。本节中，我们定义谱侧上的函子并计算它们的极限。

定义 4.3.1。(1) 引入以下定义在 $\mathfrak{F}_G$上的函子。
(a) $\mathsf{QCoh}^{W_G}_{\widetilde{\mathfrak{C}}_G} : I \mapsto (\prod_{c\in\mathfrak{C}_I} \mathrm{Sym}(\mathfrak{z}_c[1])\text{-mod})^{W_I}$;
(b) $\mathsf{Coh}^{\widetilde{W}_G}_{\widetilde{\mathfrak{C}}_G} : I \mapsto (\prod_{c\in\mathfrak{C}_I} \mathrm{Sym}(\mathfrak{z}_c[1])\text{-mod}_{\mathrm{fd}})^{W_I}$;
(c) $\mathsf{Perf}^{\widetilde{W}_G}_{\widetilde{\mathfrak{C}}_G} : I \mapsto (\prod_{c\in\mathfrak{C}_I} \mathrm{Sym}(\mathfrak{z}_c[1])\text{-perf})^{W_I}$;
(d) $\mathsf{Coh}^{\widetilde{W}_G}_{\mathrm{gr},\widetilde{\mathfrak{C}}_G} : I \mapsto (\prod_{c\in\mathfrak{C}_I} \mathrm{Sym}(\mathfrak{z}_c[1]\langle 2\rangle)\text{-mod}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{fd}})^{W_I}$;
(2) 引入以下函子，定义为 $_{L\subset G}$:

[3]对于实向量空间 V 中的仿射子空间 A，我们令 $A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ 为包含 A 的唯一复仿射子空间。

(a) $\mathsf{QCoh}^{\widetilde{W}_L}_{\widetilde{\mathfrak{C}}_{L\subset G}} : I \mapsto (\prod_{c\in\mathfrak{C}_{I_L}} \mathrm{Sym}(\mathfrak{z}_c[1])\text{-mod})^{W_{I_L}}$;

(b) $\mathsf{Coh}^{\widetilde{W}_L}_{\widetilde{\mathfrak{C}}_{L\subset G}} : I \mapsto (\prod_{c\in\mathfrak{C}_{I_L}} \mathrm{Sym}(\mathfrak{z}_c[1])\text{-mod}_{\mathrm{fd}})^{W_{I_L}}$;

(c) $\mathsf{Perf}^{\widetilde{W}_L}_{\widetilde{\mathfrak{C}}_{L\subset G}} : I \mapsto (\prod_{c\in\mathfrak{C}_{I_L}} \mathrm{Sym}(\mathfrak{z}_c[1])\text{-perf})^{W_{I_L}}$;

(d) $\mathsf{Coh}^{\widetilde{W}_L}_{\mathrm{gr},\widetilde{\mathfrak{C}}_{L\subset G}} : I \mapsto (\prod_{c\in\mathfrak{C}_{I_L}} \mathrm{Sym}(\mathfrak{z}_c[1]\langle 2\rangle)\text{-mod}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{fd}})^{W_{I_L}}$;

命题 4.3.2。存在如下 dg 范畴的等价：

(1) $\lim_{I\in\mathfrak{F}_G} \mathsf{QCoh}^{\widetilde{W}_G}_{\widetilde{\mathfrak{C}}_G} \simeq \Gamma(\mathfrak{t}, \mathcal{QC}\mathrm{oh}_{\widetilde{\mathfrak{C}}_G})^{\widetilde{W}_G}$;

(2) $\lim_{I\in\mathfrak{F}_{L\subset G}} \mathsf{QCoh}^{\widetilde{W}_L}_{\widetilde{\mathfrak{C}}_{L\subset G}} \simeq \lim_{I\in\mathfrak{F}_L} \mathsf{QCoh}^{\widetilde{W}_L}_{\widetilde{\mathfrak{C}}_L} \simeq \Gamma(\mathfrak{t}, \mathcal{QC}\mathrm{oh}_{\widetilde{\mathfrak{C}}_L})^{\widetilde{W}_L}$.

此外，该图表自然交换：

(4.3.3)
$$\begin{array}{ccc} \lim_{I\in\mathfrak{F}_G} \mathsf{QCoh}^{\widetilde{W}_G}_{\widetilde{\mathfrak{C}}_G} & \xrightarrow{\simeq} & \Gamma(\mathfrak{t}, \mathcal{QC}\mathrm{oh}_{\widetilde{\mathfrak{C}}_G})^{\widetilde{W}_G} \\ \downarrow{\scriptstyle (\lim \mathrm{Res})\circ\beta^*} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}} \\ \lim_{I\in\mathfrak{F}_{L\subset G}} \mathsf{QCoh}^{\widetilde{W}_L}_{\widetilde{\mathfrak{C}}_{L\subset G}} & \longrightarrow & \Gamma(\mathfrak{t}, \mathcal{QC}\mathrm{oh}_{\widetilde{\mathfrak{C}}_L})^{\widetilde{W}_L} \end{array}$$

证明。（1）注意，根据定义，我们有 $\mathcal{QC}\mathrm{oh}_{\widetilde{\mathfrak{C}}_G}|_{V_I} = \mathcal{QC}\mathrm{oh}_{\mathfrak{C}_I}|_{V_I}$，因此

$$\lim_{I\in\mathfrak{F}_G} \mathsf{QCoh}^{\widetilde{W}_G}_{\widetilde{\mathfrak{C}}_G} \simeq \lim_{I\in\mathfrak{F}_G} \Gamma(V_I, \mathcal{QC}\mathrm{oh}_{\mathfrak{C}_I})^{\widetilde{W}_G} \simeq \lim_{I\in\mathfrak{F}_G} \Gamma(V_I, \mathcal{QC}\mathrm{oh}_{\widetilde{\mathfrak{C}}_G})^{\widetilde{W}_G} \simeq \Gamma(\mathfrak{t}, \mathcal{QC}\mathrm{oh}_{\widetilde{\mathfrak{C}}_G})^{\widetilde{W}_G}$$

其中，最后一个等价由下文的引理 4.3.4 和命题 B.0.4得出。对于（2），第二个等价即为（1），而第一个等价由引理 4.1.4得出。图表的交换性显然。□

定义函子 $\mathsf{V}: \mathfrak{F}_G \to \mathsf{Grpd}_\infty$，由 $I \mapsto V_I/W_I$ 给出，其中 V_I 配备离散拓扑。

~引理 4.3.4。自然映射 $\mathrm{colim}_{\mathfrak{F}_G} V_I/W_I \to \mathfrak{t}/W$ 是 ∞-群胚的一个同构。

证明。与命题 4.2.3的证明类似，我们将问题归结为 G 是单连通的单群，或者$G = \mathbb{G}_m$的情形。前一种情形是反射群的一个众所周知的性质，参见例如 [LN，命题 3。3], 后一种情形则可通过简单计算得出。□

4.4. 函子的匹配。本节中，我们将自守侧和谱侧上的函子对应起来。我们首先从局部识别开始，它是扭曲作用下命题3.5.3 的一个类似结果：

命题 4.4.1. 存在一个典范等价：

$$\mathbb{L}_I : \Gamma(\mathfrak{t}, \mathcal{QC}\mathrm{oh}_{\mathfrak{C}_I})^{W_I} \simeq \mathrm{Ch}(\overline{\mathfrak{g}}_I/'G_I).$$

此外，该图表自然交换：

(4.4.2)
$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\mathfrak{t}, \mathcal{QC}\mathrm{oh}_{\mathfrak{C}_J})^{W_J} & \xrightarrow{\mathbb{L}_J} & \mathrm{Ch}_{\mathrm{gr},c}(\overline{\mathfrak{g}}_J/'G) \\ \uparrow{\scriptstyle \mathrm{Res}} & & \uparrow{\scriptstyle j^*} \\ \Gamma(\mathfrak{t}, \mathcal{QC}\mathrm{oh}_{\mathfrak{C}_I})^{W_I} & \xrightarrow{\mathbb{L}_I} & \mathrm{Ch}_{\mathrm{gr},c}(\overline{\mathfrak{g}}_I/'G) \end{array}$$

定理 4.4.3。对于 $\bullet \in \{1,2\}$，和 $\star \in \{a,b,c,d,e\}$，分别以 $\mathsf{A}_{\bullet,\star}$ 和 $\mathsf{B}_{\bullet,\star}$ 表示定义*4.2.6* 和 *4.3.1*中相应的函子。

(1) 对于任意 $\bullet$ 和 $\star$，存在函子的自然同构：$\mathbb{L}_{\bullet,\star}: \mathsf{A}_{\bullet,\star} \to \mathsf{B}_{\bullet,\star}$.(2) 对于任意 $\star$，函子图表自然交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{A}_{1,\star}\circ\beta & \xrightarrow{\mathbb{L}_{1,\star}\circ\beta} & \mathsf{B}_{1,\star}\circ\beta \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}_P} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}} \\ \mathsf{A}_{2,\star} & \xrightarrow{\mathbb{L}_{2,\star}} & \mathsf{B}_{2,\star} \end{array}$$

证明。 我们先证明 $\bullet = 1$ 的情形，其他结论可类似证明。我们先证明$\star = d$的情形。对于 $I \to J$ 中的 $\mathfrak{F}_G$，式（4.4.2）给出交换方块：

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{A}_{1,d}(I) = \mathrm{Ch}_{c,\mathrm{gr}}(\overline{\mathfrak{g}}_I/'G_I) & \xrightarrow{\simeq} & (\prod_{c\in\mathfrak{C}_I} \mathrm{Sym}(\mathfrak{z}_c[1]\langle 2\rangle)\text{-mod}_{\mathrm{fd}}^{\mathrm{gr}})^{W_I} = \mathsf{B}_{1,d}(I) \\ \downarrow & & \downarrow \mathrm{Res} \\ \mathsf{A}_{1,d}(J) = \mathrm{Ch}_{c,\mathrm{gr}}(\overline{\mathfrak{g}}_J/'G_J) & \xrightarrow{\simeq} & (\prod_{c\in\mathfrak{C}_J} \mathrm{Sym}(\mathfrak{z}_c[1]\langle 2\rangle)\text{-mod}_{\mathrm{fd}}^{\mathrm{gr}})^{W_J} = \mathsf{B}_{1,d}(J) \end{array}$$

这些识别也与 $\mathfrak{F}_G$ 中的复合相容，并给出 $\mathbb{L}_{1,d}$: $\mathsf{A}1,_d \simeq \mathsf{B}1,_{d_\circ}$ 这诱导出 $\mathbb{L}_{1,b} = \mathbb{L}_{1,d} \otimes_{\mathrm{Vect}^{\mathrm{gr}},c} \mathsf{Vect}^c$，且由于 $\mathbb{L}_{1,b}(I)$ 将全子范畴 $\mathsf{A}1,_c(I) \subset \mathsf{A}1,_b(I)$ 识别为 $\mathsf{B}1,_c(I) \subset \mathsf{B}1,_b(I)$，对所有 $I \in \mathfrak{F}_G$ 成立，因而给出 $\mathbb{L}_{1,c_\circ}$ 最后，取 $\mathbb{L}_{1,a} =$ 归纳$(\mathbb{L}_{1,c})_\circ$ □

我们得到本文的主定理：

定理 4.4.4. 存在 dg 范畴等价：

$$\mathbb{L}_G : \mathrm{Ch}(G/G) \simeq (\prod_{c\in\widetilde{\mathfrak{C}}_G} \mathrm{Sym}(\mathfrak{z}_c[1])\text{-mod})^{\widetilde{W}_G}.$$

此外，在上述同一化之下，存在自然的交换方块：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ch}(L/L) & \xrightarrow{\mathbb{L}_L} & (\prod_{c\in\widetilde{\mathfrak{C}}_L} \mathrm{Sym}(\mathfrak{z}_c[1])\text{-mod})^{\widetilde{W}_L} \\ {\scriptstyle \mathrm{Ind}_{L\subset P}^G}\uparrow\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}_{L\subset P}^G} & & {\scriptstyle \mathrm{Ind}}\uparrow\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}} \\ \mathrm{Ch}(G/G) & \xrightarrow{\mathbb{L}_G} & (\prod_{c\in\widetilde{\mathfrak{C}}_G} \mathrm{Sym}(\mathfrak{z}_c[1])\text{-mod})^{\widetilde{W}_G} \end{array}$$

证明。 我们证明关于限制的陈述，而关于归纳的陈述可由伴随性推出。取定理 4.4.3 中同构的极限，其中 $\star = a_\circ$ 我们有

$$\begin{array}{ccc} \lim \mathsf{Ch}_G & \xrightarrow{\simeq} & \lim \mathsf{QCoh}_{\widetilde{\mathfrak{C}}_G}^{\widetilde{W}_G} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \lim \mathsf{Ch}_G \circ \beta & \xrightarrow{\simeq} & \lim \mathsf{QCoh}_{\widetilde{\mathfrak{C}}_G}^{\widetilde{W}_G} \circ \beta \\ \downarrow & & \downarrow \\ \lim \mathsf{Ch}_{L\subset G} & \xrightarrow{\simeq} & \lim \mathsf{QCoh}_{\widetilde{\mathfrak{C}}_{L\subset G}}^{\widetilde{W}_L} \end{array}$$

因此我们得到以下交换图：

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Ch}(G/G) & \xrightarrow{\simeq} & \lim \mathsf{Ch}_G & \longrightarrow & \lim \mathsf{QCoh}_{\widetilde{\mathfrak{C}}_G}^{\widetilde{W}_G} & \longrightarrow & \Gamma(\mathfrak{t}, \mathcal{QC}\mathrm{oh}_{\widetilde{\mathfrak{C}}_G})^{\widetilde{W}_G} \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}_P} & & \downarrow{\scriptstyle \lim \mathrm{Res}_P \circ \beta^*} & & \downarrow{\scriptstyle \lim \mathrm{Res} \circ \beta^*} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}} \\ \mathrm{Ch}(L/L) & \xrightarrow{\simeq} & \lim \mathsf{Ch}_{L\subset G} & \longrightarrow & \lim \mathsf{QCoh}_{\widetilde{\mathfrak{C}}_{L\subset G}}^{\widetilde{W}_G} & \longrightarrow & \Gamma(\mathfrak{t}, \mathcal{QC}\mathrm{oh}_{\widetilde{\mathfrak{C}}_L})^{\widetilde{W}_L} \end{array}$$

其中左侧的方形是 (4.2.2) 与 (4.2.7) 的复合，而右侧的方形是 (4.3.3)。

□

定义主特征层范畴 $\mathsf{Ch}(G/G)_{\mathrm{prin}} \subset \mathsf{Ch}(G/G)$ 为由 $\mathsf{Ind}_{T\subset B}^G$ 的本质像的余极限生成的全子范畴。

推论 4.4.5。函子 $\mathrm{Ind}_{L\subset P}^{G}$ 和 $\mathrm{Res}_{L\subset P}^{G}$ 保持主特征层的子范畴不变，并导出交换图：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ch}(L/L)^{\mathrm{prin}} & \xrightarrow{\simeq} & \mathbb{C}[W_L]\#(\mathbb{C}[X_*(T)]\otimes \mathrm{Sym}(\mathfrak{t}[1]))\text{-mod} \\ {\scriptstyle \mathrm{Ind}_{L\subset P}^{G}}\downarrow\uparrow{\scriptstyle \mathrm{Res}_{L\subset P}^{G}} & & {\scriptstyle \mathrm{Ind}}\downarrow\uparrow{\scriptstyle \mathrm{Res}} \\ \mathrm{Ch}(G/G)^{\mathrm{prin}} & \xrightarrow{\simeq} & \mathbb{C}[W_G]\#(\mathbb{C}[X_*(T)]\otimes \mathrm{Sym}(\mathfrak{t}[1]))\text{-mod} \end{array}$$

~证明。 由 $\mathrm{Ch}(G/G)^{\mathrm{prin}}$ 与 $c=(T,T,\mathbb{C}_{0/T})\in\mathfrak{C}_G$ 下的一个直和项相对应这一事实可知，此结论由定理4.4.4得出。 □

回顾一下，微分分次代数 A 称为形式的，如果 A 同构于 $H^*(A)$，其中同构是微分分次代数之间的同构；若映射 $f\colon A\to B$ 称为形式的，如果 f 同构于 $H^*(f)$，其中同构是微分分次代数之间的映射同构（特别地，这要求 A 和 B 都形式）。利用推论4.4.5中的显式对应，我们得到：

Co推论 4.4.6. 记 $\mathrm{Spr}_G=\mathrm{Ind}_{T\subset B}^{G}\in\mathrm{Ch}(G/G)$ 为 Grothendieck–Springer 层。

(1) 存在一个微分分次代数等价

$$\mathrm{End}(\mathrm{Spr}_G)\simeq\mathbb{C}[W]\#(H^*(BT)\otimes H^*(T)).$$

特别地，$\mathrm{End}(\mathrm{Spr}_G)$ 是一个形式的微分分次代数。

(2) 存在一个 dg 代数的自然交换图。

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{End}(\mathbb{C}_{T/T}) & \xrightarrow{\mathrm{ind}} & \mathrm{End}(\mathrm{Spr}_G) \\ \downarrow\simeq & & \downarrow\simeq \\ H^*(BT)\otimes H^*(T) & \longrightarrow & \mathbb{C}[W]\#(H^*(BT)\otimes H^*(T)) \end{array}$$

其中底部的映射是自然包含。特别地，归纳是一个形式映射。

(3) 存在自然等价 $\mathrm{Res}_{T\subset B}^{G}(\mathrm{Spr}_G)\simeq\mathbb{C}_{T/T}^{\oplus W}$。此外，自然的 dg 代数同态 $\mathrm{End}(\mathrm{Spr}_G)\to\mathrm{End}(\mathrm{Res}_{T\subset B}^{G}(\mathrm{Spr}_G))\simeq\mathrm{End}(\mathbb{C}_{T/T}^{\oplus W})$ 可以通过交换图表明确表示。

$$\begin{array}{ccc} \text{端omorphism 代数}(\mathrm{Spr}_G) & \xrightarrow{\mathrm{res}} & \text{端omorphism 代数}_{(\text{限制}^{G}_{T\subset B}(\mathrm{Spr}_G))} \\ \downarrow\simeq & & \downarrow\simeq \\ \mathbb{C}[W]\#(H^*(BT)\otimes H^*(T)) & \longrightarrow & \text{端omorphism 代数}_{\mathbb{C}[W]}(\mathbb{C}[W])\otimes(H^*(BT)\otimes H^*(T)) \\ \downarrow\simeq & & \downarrow\simeq \\ \text{端omorphism 代数}_{\mathbb{C}[W]\#(H^*(BT)\otimes H^*(T))}(\mathbb{C}[W]\#(H^*(BT)\otimes H^*(T))) & \to & \text{端omorphism 代数}_{H^*(BT)\otimes H^*(T)}(\mathbb{C}[W]\#(H^*(BT)\otimes H^*(T))) \end{array}$$

其中，底部的箭头由沿着……的模结构限制所诱导

$$H^*(BT)\otimes H^*(T)\to\mathbb{C}[W]\#(H^*(BT)\otimes H^*(T)).$$

特别地，res 是一个形式映射。

注 4.4.7。 对于 G 单连通的情形，推论4.4.6(1) 是 [Li，推论 19]的推论。

推论 4.4.8. 记 $\mathrm{Ch}_c^u(G/G)^{\mathrm{prin}}\subset\mathrm{Ch}(G/G)$ 为由 Spr_G 的有限余极限生成的小子范畴，则我们有如下交换图：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ch}_c^u(L/L)^{\mathrm{prin}} & \xrightarrow{\simeq} & \mathbb{C}[W_L]\#(H^*(BT)\otimes H^*(T))\text{-perf} \\ {\scriptstyle \mathrm{Ind}_{L\subset P}^{G}}\downarrow\uparrow{\scriptstyle \mathrm{Res}_{L\subset P}^{G}} & & {\scriptstyle \mathrm{Ind}}\downarrow\uparrow{\scriptstyle \mathrm{Res}} \\ \mathrm{Ch}_c^u(G/G)^{\mathrm{prin}} & \xrightarrow{\simeq} & \mathbb{C}[W_G]\#(H^*(BT)\otimes H^*(T))\text{-perf} \end{array}$$

例 4.4.9。 在推论4.4.8中的等价下，常值层 $\mathbb{C}_{G/G}$ 对应于完美模 $H^*(BT)\otimes H^*(T)$。这是因为在局部识别（3.5.4）中， $\mathfrak{g}/G$ 上的常值层对应于 $\mathbb{C}[W]\#\mathrm{Sym}(\mathfrak{t}[1])$ 的一维符号模。

Appendix A. Graded lift of categories

我们将[HL、第 5] 节作为分次提升/混合版本的概念。

A.1. $\overline{\mathbb{F}}_q$上的分次提升。设 X 是 $\overline{\mathbb{F}}_q$上的代数堆。记 $\mathrm{Sh}_c(X)$ 为 X上的可构造$\overline{\mathbb{Q}}_\ell$层所成的 dg 范畴。设 X上不可约反常层的集合为 $S=\{A_i, i\in I\}$，并假定每个 A_i 都来自 X_n上的某个混合层，其中 X_n 是 X的一个 $\mathbb{F}_{q^n}$-形式。那么，通过考虑 Frobenius 权重，$\mathrm{RHom}^{\mathrm{Sh}(X)}(A_i, A_j)$自然构成一个向量空间的分次复形。假设以下条件成立：

$$\mathrm{RHom}_{\mathrm{Sh}(X)}(A_i, A_j) \text{ is pure.} \qquad \forall A_i, A_j \in S \tag{A.1.1}$$

记 $\mathrm{Sh}_{c,S}(X)\subset \mathrm{Sh}_c(X)$ 为由 S生成的全 dg 子范畴。令 $\mathrm{Pur}_{c,S}(X)\subset \mathrm{Sh}_{c,S}(X)$ 为（移位的）半单复形所成的加性 1-范畴。定义 $\mathrm{Sh}_{\mathrm{gr},c,S}(X)=K^b(\mathrm{Pur}_{c,S}(X))$，其中 $K^b(-)$表示加性范畴中的链复形所成的 dg 范畴。注意，$\mathrm{Pur}_{c,S}(X)$继承了来自 $\mathrm{Sh}_{c,S}(X)$的移位函子。这可以视为 $\mathrm{Vect}^{\mathrm{gr}}$,$^{\heartsuit_w}$ 对 $\mathrm{Pur}_{c,S}(X)$的作用，而这又诱导出 $\mathrm{Vect}^{\mathrm{gr}}$,$^{c}\simeq K^b(\mathrm{Vect}^{\mathrm{gr}}$,$^{\heartsuit_w})$对 $\mathrm{Sh}_{\mathrm{gr},c,S}(X)$的作用。由 [HL，命题 5.6.12]，可得：

命题 A.1.2。存在一个规范的 dg 范畴等价：

$$\mathrm{Sh}_{\mathrm{gr},c,S}(X)\otimes_{\mathrm{Vect}^{\mathrm{gr},c}} \mathrm{Vect}^c \simeq \mathrm{Sh}_{c,S}(X).$$

设 $F\colon \mathrm{Sh}_c(X)\to \mathrm{Sh}_c(Y)$ 是一个具有几何来源的函子，即由沿代数堆之间的映射进行推前与拉回的复合给出。假设 that.

$$F:\mathrm{Sh}_c(X)\to \mathrm{Sh}_c(Y) \text{ send } S \text{ into } T. \tag{A.1.3}$$

$$F_n:\ \mathrm{Sh}_{m,\ c}(X_n)\to \mathrm{Sh}_{m,\ c}(Y_n) \text{ 保持大 } n. \text{ 的权重 0 纯对象} \tag{A.1.4}$$

其中，$\mathrm{Sh}_{m,c}(X_n)$ 表示 X_n 上的混合可构造层的 dg 范畴。令 $F_{\mathrm{Pur}}=F|_{\mathrm{Pur}_{c,S}(X)}:\mathrm{Pur}_{c,S}(X)\to \mathrm{Pur}_{c,T}(Y)$。并且 $F_{\mathrm{gr}}:=K^b(F_{\mathrm{Pur}}):\mathrm{Sh}_{\mathrm{gr},c,S}(X)\to \mathrm{Sh}_{\mathrm{gr},c,T}(Y)$。

命题 A.1.5. 在命题 *A.1.2*中的等价关系下，存在一个典范同构 $F_{\mathrm{gr}}\otimes Id\simeq F$。

A.2. 在 $\mathbb{C}$ 上的分次提升。现在我们假设 K 是一个数域，其整数环为 O。设 X 是 $\mathrm{Spec}(O)$ 上的一个代数堆。设 $S=\{A_i, i\in I\}$ 是一个有限集，由几何来源的层组成（它们是沿代数映射对常值层进行推拉所得的直和项）。假设对于除有限多个素数 $\mathfrak{p}$ 外的所有素数，$A_i\otimes_O \overline{O/\mathfrak{p}}$ 都是不可约反常层。

然后，在去掉有限多个素数 $\mathfrak{p}_1,\ldots\mathfrak{p}_r$之后，每个 A_i 沿 $\mathrm{Spec}(O_{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\ldots\mathfrak{p}_r})$ 局部常值。这给出一个自然同一化 $\mathrm{Sh}_{c,S_{\mathbb{C}}}(X_{\mathbb{C}})\simeq \mathrm{Sh}_{c,S_{\mathfrak{p}}}(X_{\mathfrak{p}})$，以及 $\mathrm{Pur}_{c,S_{\mathbb{C}}}(X_{\mathbb{C}})\simeq \mathrm{Pur}_{c,S_{\mathfrak{p}}}(X_{\mathfrak{p}})$，记号显然。与之前类似，我们记 $\mathrm{Sh}_{\mathrm{gr},c,S_{\mathbb{C}}}(X_{\mathbb{C}})=K^b(\mathrm{Pur}_{c,S_{\mathbb{C}}}(X_{\mathbb{C}}))$。

假设 $S_{\mathfrak{p}}$ 满足 (A.1.1)，则有：

$$\mathrm{Sh}_{\mathrm{gr},c,S_{\mathbb{C}}}(X_{\mathbb{C}})\otimes_{\mathrm{Vect}^{\mathrm{gr},c}} \mathrm{Vect}^c \simeq \mathrm{Sh}_{c,S_{\mathbb{C}}}(X_{\mathbb{C}}).$$

此外，设 $F_{\mathbb{C}}:\mathrm{Sh}_c(X_{\mathbb{C}})\to \mathrm{Sh}_c(Y_{\mathbb{C}})$ 为一个几何来源的函子，即由沿着 O 上的代数堆之间的映射进行推前与拉回的复合所给出。假设对于 $F_{\mathfrak{p}}$，条件（A.1.3）和（A.1.4）成立。那么存在一个函子的典范同构：

$$F_{\mathbb{C},\mathrm{gr}}\otimes Id := K^b(F_{\mathbb{C},\mathrm{Pur}})\otimes Id\simeq F_{\mathbb{C}}.$$

Appendix B. Sheaves and descent

设 X 为一个拓扑空间，$\mathcal{C}$ 为一个具有任意极限的 ∞-范畴。

定义 B.0.1. 取值于 $\mathcal{C}$ 的 X 上的层是一个函子 $F:\mathrm{Open}(X)^{op}\to\mathcal{C}$，满足对于任意 $U\in\mathrm{Open}(X)$，以及 $U=\cup_{i\in I}U_i$ 为 U 的一个开覆盖。自然函子：

$$F(U)\to \lim_{n\in\Delta}\prod_{i_1,i_2,\ldots i_n\in I} F(U_{i_1}\cap\ldots\cap U_{i_n})$$

是 $\mathcal{C}$ 中的一个同构。

记 $X,\mathcal{C}$ 为 X 上取值于 $\mathcal{C}$ 的层范畴 ∞。

例 B.0.2（常值层）。设 $c \in \mathcal{C}$ 是一个对象，则我们有 X 上的常值层 $\underline{c}_X$，定义为 $\underline{c}_X(U) = \lim_U c$。右侧表示我们将 U 视为一个 ∞-群胚，然后取从 U 映至单个对象 c 的常值函子的极限。

定义 B.0.3. 设 K 是一个在 X上作用且作用适当不连续的离散群。X 上的 K-等变层是一个不变范畴 $\mathrm{Sh}(X,\mathcal{C})^K$中的对象。具体而言，一个 K-等变层由以下数据组成：

- 一个 X上的层 F，
- 对每个 $w \in W$，一个同构 $\varphi_w : w^*F \xrightarrow{\sim} F$，
- 一个同伦等价 $\varphi_{u,\ v} : v^*(\varphi_u) \circ \varphi_v \xrightarrow{\sim} \varphi_{uv}$，
- 以及更高阶相容性.....

定义 (2, 1)-范畴 $\mathrm{Sub}(X,K)$ 如下：

- 对象：(U,W)，其中 U 是 X 的开子集，且 $W \subset K$ 是一个子群，使得 U 在 W 作用下保持稳定。
- 1-态射：$w : (U_1,W_1) \to (U_2,W_2)$，其中 $w \in K$，使得 $w(U_1) \subset U_2$ 且 $Ad_w(W_1) \subset W_2$。
- 2-态射是内同态：$u : w_1 \Rightarrow uw_1 : (U_1,W_1) \to (U_2,W_2)$，对任意 $u \in W_1$。

命题 B.0.4. 设 (U, W) : $\mathcal{I} \to \mathrm{Sub}(X,K)$ 是一个函子，将 $i \to (U_i,W_i)$ 发送到相应对象。假设诱导映射在 ∞-群胚的 ∞-范畴中是一个等价：

$$\mathrm{colim}_{\mathcal{I}} U_i/W_i \longrightarrow X/\Gamma$$

其中 U_i 和 X 赋予离散拓扑。则对于 X 上任意的 K-等变层 F，它是常值层的乘积。存在一个等价：

$$\Gamma(X,F)^K \xrightarrow{\simeq} \lim_{\mathcal{I}} \Gamma(U_i,F)^{W_i}$$

证明。设 $F = \prod_{i\in I} \underline{c_i}_{Z_i}$，对于某个 $c_i \in \mathcal{C}$，且子空间 $Z_i \subset X$。令函子 $\mathrm{F} : \coprod \Pi(Z_i) \to \mathcal{C}^{op}$，将 $\Pi(Z_i)$ 恒定映至 c_i，其中 $\Pi(Z_i)$ 是 Z_i 的底层 ∞-群胚。根据定义，$\mathrm{colim F} \simeq \lim \mathrm{F} \simeq \Gamma(X,F)$。现在，$K$-等变结构将该函子提升为函子 $\mathrm{F}/K : (\coprod \Pi(Z_i))/K \to \mathcal{C}^{op}$，满足 $\mathrm{colim F}/K \simeq \Gamma(X,F)^K$。现在，根据 ∞-范畴 Van Kampen 定理，存在一个 ∞- 群胚等价 $\mathrm{colim}_{\mathcal{I}} \Pi(U_i)/W_i \simeq \Pi(X)/K$。这在 $\mathcal{C}^{op}$ 中诱导出一个同构：$\Gamma(X,F)^K \simeq \mathrm{colim}^{\Pi(X)/K} \mathrm{F}/K \simeq \mathrm{colim}_{\mathcal{I}} \mathrm{colim}_{\Pi(U_i)/W_i} \mathrm{F}/K \simeq \mathrm{colim}_{\mathcal{I}} \Gamma(U_i,F)^{W_i}$. □

References

[Bona] Mikhail V. Bondarko。权结构与 t-结构心上的“权”。14(1):239–261。[Bonb] M.V. Bondarko。权结构与 t -结构；权滤子、谱序列和复形（关于动机及一般情形）。6(3):387–504。[ES] Elden Elmanto 和 Vladimir Sosnilo。关于 ∞-范畴的幂零扩张与圆分迹。[Gin] Victor Ginzburg。特征层的诱导与限制。16:149–167。[HL] Quoc P. Ho 和 Penghui Li。重新审视混合几何。[JY] Niles Johnson 和 Donald Yau。二维范畴。[Li] Penghui Li。特征层的导出范畴。[LL] G´erard Laumon 和 Emmanuel Letellier。关于导出的 Lusztig 对应。11:e15。[LN] Penghui Li 和 David Nadler。椭圆曲线上半稳定丛的一致化。380:107572。[Lura] Jacob Lurie。 *Higher Algebra*。[Lurb] Jacob Lurie。 *Higher Topos Theory*。数学研究年刊第 170 卷。普林斯顿大学出版社。[Lusa] George Lusztig。尖点局部系统与分次 Hecke 代数，I。67(1):145–202。[Lusb] George Lusztig。在 $\mathbb{F}_q$ 上的半单李代数上的傅里叶变换。载于 Arjeh M. Cohen、Wim H. Hesselink、prefix

= = = = *Algebraic Groups* van *Utrecht 1986* 1271, 177 188

der useprefix true family Kallen、given Wilberd L. J. 和 Jan R. Strooker 编，页码 –，第 卷。Springer Berlin Heidelberg。[Pau] David Pauksztello。关于紧生成余 t-结构的一则注记。[RR] Laura Rider 和 Amber Russell。形式性与 Lusztig 的广义 Springer 对应。24(3):699–714。

Yau Mathematical Science Center, Tsinghua University
Email address: lipenghui@mail.tsinghua.edu.cn