arXiv:2305.04458v1 [physics.optics] 8 May 2023

# 薄壁微泡腔的结构表征

MOHAMMED ZIA JALALUDEEN,[1] SHILONG LI,[1,*] KE TIAN,[1,2] TOSHIO SASAKI,[3] 和 SÍLENIC CHORMAIC[1]

[1]量子技术光物质相互作用研究组，冲绳科学技术大学院大学，日本冲绳县恩纳村，邮编*904-0495*[2]哈尔滨工程大学物理与光电工程学院，中国哈尔滨，邮编*150001*[3]冲绳科学技术大学院大学科学成像部，日本冲绳县恩纳村，邮编*904-0495*[*]*shilong.li@oist.jp*

**摘要：**回音壁模式（WGM）微气泡腔凭借其中空核心几何结构，构成了一种用途广泛的光流体传感平台。为增强光与物质的相互作用，从而实现更高灵敏度，薄壁微泡备受青睐。然而，由于缺乏对中空微泡精确几何结构的了解，我们无法建立准确的理论模型来描述回音壁模式及其对外部刺激的响应。在本研究中，我们全面表征了微气泡的壁结构，并基于光波导方法提出了适用于该薄壁微腔回音壁模式的理论模型。通过聚焦离子束铣削和扫描电子显微镜成像，实现了对波长尺度壁结构的表征。有限元方法仿真验证了所提出的理论模型。我们的方法还可直接推广至其他低维微纳光子结构。

## 1. 引言

过去二十年来，支持回音壁模式（WGMs）的光学微腔因其超高品质因数（$Q$ 因数）而受到广泛研究 [1, 2] ，这使其适用于多种光学应用，涵盖腔量子电动力学 [3–7] 到无标记光学检测 [8–12]。与广泛使用的回音壁模式微腔几何结构（如微球 [13, 14], 、微环面 [15], 和微环 [16], ）相比，微气泡空腔或微气泡 [17, 18] 具有中空内芯的优势，可作为全光纤式光流控器件使用 [19–21]。此外，微气泡的薄壁结构为我们提供了新的自由度，例如壁厚及其沿腔轴的变化。这些自由度使我们能够调控与回音壁模式相关的特性，例如模式场分布、模式色散和模式谱。这种经过调控的回音壁模式对于多种非线性光学过程尤为有用，例如四波参量振荡和频率梳产生 [22–25]。因此，准确确定微气泡的几何形状，以精确表征其回音壁模式，是此类空腔实际应用的重要前提。

目前已有多种以非破坏性方式确定微气泡空腔薄壁结构的方法报道。明场显微镜可能是测量微气泡直径最简单的方法 [26], ，但在合理的视场范围内，其图像对比度较低，因此无法有效测量壁厚。共聚焦显微镜已被用于测量微气泡空腔的壁厚 [27]；然而，图像分辨率限制了测量精度，厚度测量的误差可达半个波长。通过推断微气泡对特定刺激的响应来获取其结构信息，似乎是一种测定壁厚的非破坏性方法。例如，研究人员曾基于内部静空气压测量微气泡壁厚

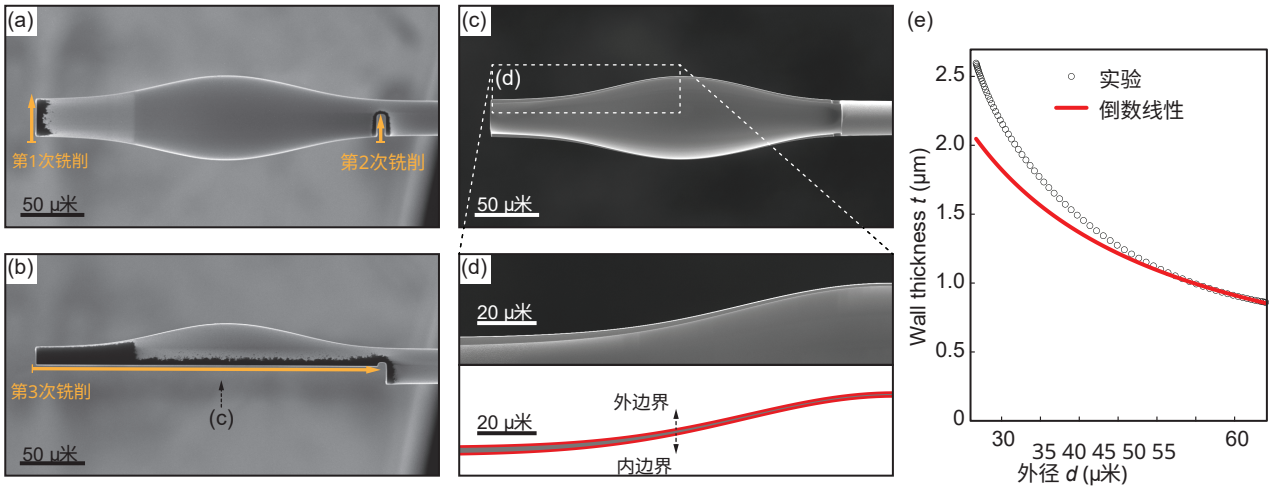



图 1. **通过聚焦离子束铣削和扫描电子显微镜成像对薄壁微泡进行结构表征**。首先通过聚焦离子束铣削去除微泡左侧的支撑杆，同时切断右侧支撑杆的一半，从而形成一个间隙 (a)。随后，从左侧中心向右侧间隙中心进行第三次聚焦离子束铣削，去除微泡的一半 (b)。在扫描电子显微镜成像下，微泡的壁结构清晰可见 (c)。由于扫描电子显微镜成像分辨率高，因此能够以纳米尺度的精度确定沿腔轴的壁厚变化（上图，d）。为描述这种壁结构，采用高斯轮廓拟合微泡的外边界和内边界（下图，d）。薄壁微泡的壁厚 $t$ 与外径 $d$ 之间的关系如 (e) 所示。在微泡中心附近，外径较大时满足倒数线性关系。

传感方法的测量不确定度处于亚微米量级 [28]。不过，这种方法并不理想，因为它要求事先精确了解结构信息，并且还假设沿腔轴的壁厚恒定。目前，研究微气泡壁结构唯一可靠的方法是破坏性方法，即破坏微气泡，然后使用例如扫描电子显微镜测量其横截面 [22, 29, 30]。然而，通常会假设沿腔轴的壁厚恒定。迄今尚未对微泡壁结构开展全面系统的研究。

在本研究中，我们采用聚焦离子束（FIB）铣削和扫描电子显微镜（SEM）成像技术，对微泡腔的壁结构进行了全面表征。获得了壁厚及其沿腔轴方向的变化情况，从而能够精确地建立微泡几何结构模型。考虑到壁厚处于波长尺度，本文提出了一种基于光波导理论的理论模型，用于描述微泡腔中的回音壁模式（WGMs）。通过有限元法仿真验证了所提出理论模型的有效性。我们的研究成果不仅有助于微气泡空腔的发展，也将推动对其他低维微纳光子结构的探索。

## 2. 实验结果

如前所述，使用熔融石英毛细管（外径为 360-$\mu$m，内径为 250-$\mu$m）和 $CO_2$ 激光器制备二氧化硅微气泡 [29] 。微气泡（表面镀有一层薄金层）的壁结构通过聚焦离子束铣削和扫描电子显微镜成像（FEI Helios G3 UC）进行测定，见图 1。由于扫描电子显微镜和聚焦离子束均具有较高的成像分辨率，因此可以清晰地观察到微气泡的壁结构。在气泡中心处，直径最大，约为 64 $\mu$m，此处的壁厚最薄（~0.85 $\mu$m）。气泡直径沿高斯分布逐渐减小，在支撑杆处降至约 28 $\mu$m，而此处的壁厚最大，为 ~2.60 $\mu$m。借助这些结构信息，可以通过理论模型或数值模拟，完整确定薄壁微泡的模式结构，如下文所示。

壁厚是衡量基于微气泡的光学传感器性能的关键参数 [29]。然而，由于缺乏能够全面表征壁结构的有效方法，人们广泛采用几何方法 [26, 27, 31, 32] 来估算壁厚。这些模型基于两个假设，即恒定壁厚和质量守恒。第一个假设适用于数量级估算。第二个假设可分为以下两种情况：面积守恒或体积守恒。在第一种情况下，微气泡被视为毛细管发生圆柱膨胀的结果。毛细管的横截面为环形，面积为$\pi(d/2)^2 - \pi(d/2 - t)^2 \approx \pi dt$，其中 $d$ 为气泡的外径，$t$ 为其壁厚（$t \ll d$）。面积守恒意味着 $d$ 与 $t$之间呈倒数线性关系，即$t = c_1/d$，系数为 $c_1$。类似地，在第二种情况下，微气泡可视为一个球形气泡发生球形膨胀的结果，该球形气泡的直径与毛细管相同。由于球形气泡的体积为$(4/3)\pi(d/2)^3 - (4/3)\pi(d/2-t)^3 \approx \pi d^2 t$，可得 $t = c_2/d^2$ 呈倒数二次关系，系数为 $c_2$ 。通常认为，圆柱膨胀会高估壁厚，因此给出所测壁厚的上限；而下限则由球形膨胀得到 [27]。

图1(e)显示了薄壁微泡中 $t$ 与 $d$ 的关系。微气泡的壁厚沿气泡轴线变化，清楚表明其并不具有恒定壁厚，从而否定了上述第一个假设。第二个假设同样无效，因为 $t$ 与 $d$ 之间的关系既不是倒数线性关系，也不是倒数二次关系。然而，在薄壁微泡中心附近（距微气泡中心±40$\mu$m处），$t$ 与 $d$ 之间满足倒数线性关系。我们认为，这些看似异常的结果是由于只有微气泡中心部分发生熔融并充分膨胀，而靠近支撑柄的部分经历的温度较低，无法充分膨胀所致。这些发现证明了开发一种高效方法来表征微气泡壁结构的重要性。

## 3. 理论模型

作为光学瓶形微谐振器（BMR）的一种，微气泡中的光被限制在横截面平面内，围绕气泡轴线循环，同时在轴向受到约束，在两个被称为焦散的转向点之间来回反射；这类似于带电粒子被限制在磁瓶中的方式 [33]。这种对三维（3D）空间中光的约束，使光场量子化为一系列光学模式。利用通过实验测量获得的结构信息（图2(a)），可以通过简化麦克斯韦方程组，对薄壁微泡的模式结构进行理论建模。

对于由各向同性、均匀的非磁性介电材料制成且具有方位角和轴向对称性的微气泡，不存在光学自旋—轨道耦合 [34, 35]。此外，这些微气泡大多沿轴向的直径变化较小

（见图2(a)）。因此，两组偏振模式可以很好地区分：具有非零轴向电场的横电（TE）模式，以及具有非零轴向磁场的对应横磁（TM）模式。由于横电（TE）模式优先存在于薄壁微泡中，后续分析将仅考虑这类模式。横电（TE）模式的非零轴向电场 $E_z$ 所满足的亥姆霍兹方程为：

$$\nabla^2 E_z(\mathbf{r}) + k^2 \varepsilon_{\mathrm{r}}(\mathbf{r}) E_z(\mathbf{r}) = 0. \tag{1}$$

这里，$k = \omega/c$ 是波矢，$\omega$ 是角频率，$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ 是光速，$\varepsilon_0$ ($\mu_0$)是真空中的介电常数（磁导率）。相对介电常数为 $\varepsilon_{\mathrm{r}} = \varepsilon/\varepsilon_0$，其中 $\varepsilon$ 是材料的介电常数。可见光和红外光谱范围内非磁性材料的相对磁导率 $\mu_{\mathrm{r}}$ 接近于 1，因此可将材料的磁导率设为$\mu = \mu_0$。

$E_z$ 的标量亥姆霍兹方程是一个三维偏微分方程。通过在柱坐标（$\rho$，$\varphi$，$z$）中采用分离变量法，可以进一步简化该方程，这些坐标定义于图2(a)中。为此，$E_z$ 可以表示为以下可分离形式：

$$E_z(\rho, \varphi, z) = P(\rho)\Phi(\varphi)\Psi(z), \tag{2}$$

其中，$P(\rho)$、$\Phi(\varphi)$ 和 $\Psi(z)$ 分别为径向、方位角向和轴向场分量。将式 2 代入式 1，可得到关于各场分量的三个常微分方程：

$$\left[\rho^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2} + \rho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} + \varepsilon_{\mathrm{r},z}(\rho)\rho^2\right] P(\rho) = \quad \varepsilon_{\mathrm{eff},z} P(\rho), \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2}\Phi(\varphi) = \quad -k_{\mathrm{circ},z}^2 \varepsilon_{\mathrm{eff},z}\Phi(\varphi), \tag{4}$$

$$\left[-\frac{1}{\varepsilon_{\mathrm{eff},z}} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} + k_{\mathrm{circ},z}^2\right] \Psi(z) = \quad k^2 \Psi(z), \tag{5}$$

它们通过两个耦合常数 $\varepsilon_{\mathrm{eff}}$ 和 $k_{\mathrm{circ}}$相互耦合。这里，$\varepsilon_{\mathrm{eff}}$ 耦合了光传播中径向分量与圆周分量的动态，而 $k_{\mathrm{circ}}$ 耦合了光传播中横向分量与轴向分量的动态。最后，通过求解这三个常微分方程（方程3–5），即可得到离散谱$\omega = kc$ 。

方程3的通解由第一类和第二类贝塞尔函数的线性组合构成。其系数通过匹配壁面边界条件确定（图2(b)）。贝塞尔函数，因此还有 $P(\rho)$，表现为振荡的正弦或余弦函数，其振幅按 $1/\sqrt{\rho}$ 的比例衰减。不同的径向模式可根据 $P(\rho)$ 中“峰”的数量加以区分，每种模式均由唯一的径向模式指标 $n = 1,2,\ldots$ 标记。方程3通过采用有效介电常数 $\varepsilon_{\mathrm{eff}}$（即第一个耦合常数）来量化壁厚对这些径向模式的影响；该常数衡量壁对光的限制程度（见图2(b)中的插图）。由于微气泡的直径通常为几十微米，满足弱曲率条件，因此可将微气泡壁视为平板波导。随后，可根据成熟的光波导理论 [36]，通过超越方程轻松求得 $\varepsilon_{\mathrm{eff}}$：

$$\tan(\kappa t) = \frac{\kappa\gamma_{\mathrm{air}} + \kappa\gamma_{\mathrm{core}}}{\kappa^2 - \gamma_{\mathrm{air}}\gamma_{\mathrm{core}}}, \tag{6}$$

其中，$\gamma_{\mathrm{air}}^2 = k^2\varepsilon_{\mathrm{eff}} - k^2\varepsilon_{\mathrm{air}}$、$\gamma_{\mathrm{core}}^2 = k^2\varepsilon_{\mathrm{eff}} - k^2\varepsilon_{\mathrm{core}}$、$\kappa^2 = k^2\varepsilon_{\mathrm{r}} - k^2\varepsilon_{\mathrm{eff}}$ 分别为周围空气和微气泡芯材的相对介电常数，$\varepsilon_{\mathrm{air}}$ 和 $\varepsilon_{\mathrm{core}}$。图2(e)显示了在几个波长下，$\varepsilon_{\mathrm{eff}}$ 随壁厚的变化情况，嗯...

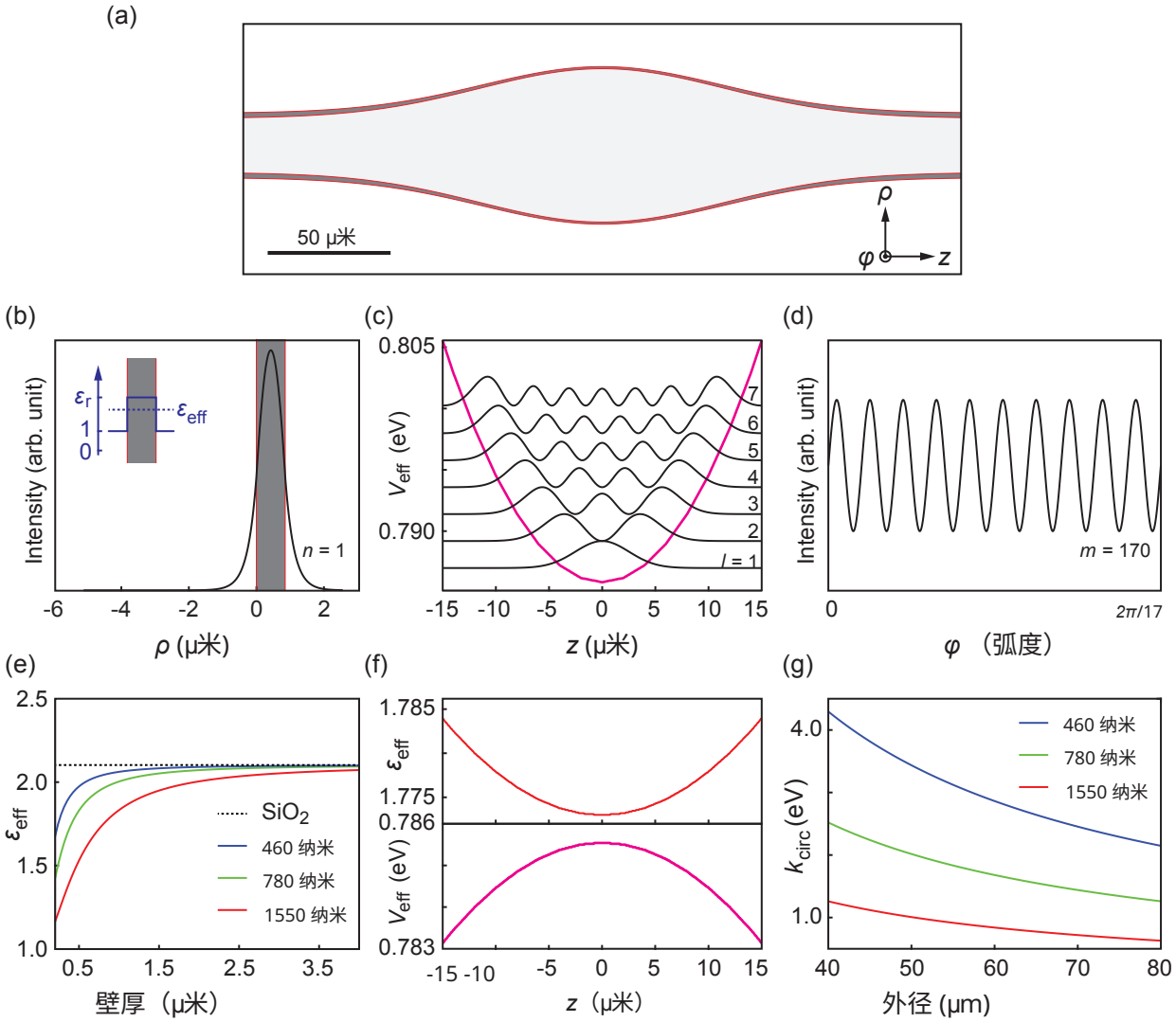



图2. **薄壁微泡的理论模型**。(a) 根据图1所示的扫描电子显微镜图像重建的微泡三维几何结构。由于几何对称性，可以通过求解三个耦合微分方程（方程3–5）来计算微泡中回音壁模式的电场分布。最终解析出三个模式指标，即 $n$、$m$ 和 $l$，以识别回音壁模式，同时确定其偏振态（横磁或横电）。(b) 径向场分布。由于壁厚达到波长尺度，因此仅考虑具有 $n = 1$ 的基径向模式。插图展示了有效介电常数 $\varepsilon_{\mathrm{eff}}$ 的物理含义。(c) 轴向场分布。微泡的准势形成一个量子阱——这主要是由直径变化引起的——它限制了轴向运动，从而产生不同的轴向模式。(d) 方位角场分布。为便于观察，仅显示部分方位角场。(e) $\varepsilon_{\mathrm{eff}}$ 随壁厚的变化关系。(f) 一个示意性示例，展示了仅由壁厚变化（上图）形成的类量子势垒准势（下图），其中外径保持恒定。(g) $k_{\mathrm{circ}}$ 随外径的变化关系。

很明显，当微气泡壁厚度接近传播波长时，微气泡壁会发挥关键作用，而大多数微气泡空腔正是如此。

方程4的通解为 $\Phi(\varphi) = A\exp[\pm i(\beta\varphi + \varphi_0)]$，其中振幅为 $A$，初始相位为 $\varphi_0$，$\beta = k_{\mathrm{circ}}\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{eff}}}$ 可称为传播常数。请注意，“±”对应于顺时针（CW）和逆时针（CCW）模式 [9]。为获得稳定的光场分布，该解必须满足周期性边界条件（图2(d)）：

$$\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{eff},z}}\pi d = m\lambda_{\mathrm{circ,z}}, \tag{7}$$

其中 $\lambda_{\mathrm{circ}} = 2\pi/k_{\mathrm{circ}}$ 是横截面平面内的波长。一方面，它产生了由方位角模式索引 $m = 0$、1、2.....标识的回音壁模式。另一方面，它决定了该横截面中的 $k_{\mathrm{circ}}$，即第二个耦合常数。图2(g)显示了 $k_{\mathrm{circ}}$ 随外径的变化关系。一般而言，外径越小，方位角方向的光学约束越强。

最后一个方程，即式5，描述了回音壁模式的轴向动力学。它是一个带有如下准势的准薛定谔方程：

$$V_{\mathrm{eff}}(z) = \frac{\hbar c}{e}k_{\mathrm{circ},z}, \tag{8}$$

其中，基本电荷 $e$ 用于将准势标度化为 eV。尽管文献中没有明确提及，但大多数微气泡空腔中的准势都形成了一个量子阱，用于限制回音壁模式的轴向运动（图2(c)）。量子阱中轴向运动的量子化产生了不同的轴向模式，这些模式由轴向模式指标 $l = 1$、2.....表示。然而，由于大多数量子阱准势缺乏解析解，有限差分法被广泛用作一种可靠的数值近似技术，以求解准薛定谔方程 [36]。

轴向模式的可定制性使微瓶空腔区别于微球空腔和微环面空腔 [37]。作为微瓶空腔的一种，微气泡为空间向轴向模式的调控提供了新的自由度，即壁结构。本文提出的理论模型进一步清晰地展示了这一点：壁厚及其变化会通过式6确定 $\varepsilon_{\mathrm{eff}}$，进而影响式7所述的 $k_{\mathrm{circ}}$，从而共同作用于式8中的轴向准势。图2(f)展示了一个示例：如果准势完全由壁结构形成，微气泡可以为轴向光学运动提供量子势垒。这与卷曲式微瓶空腔中的轴向模式工程类似 [36, 38–41]。

## 4. 仿真验证

薄壁微泡的实测三维结构（图2(a)）使我们能够非常精确地表征其形状。因此，我们基于有限元法开展了一系列仿真，结果汇总于图3中。这些仿真结果用于验证所提出理论模型的有效性。

图 3(a) 展示了 $m$ 从 165 到 175（$l = 1$和 $n = 1$）范围内的回音壁模式共振波长。在宽广的光谱范围内，使用上述理论模型计算的数值与仿真结果吻合良好。这种良好的吻合证实了基于光波导近似提出的理论模型的有效性。这加深了我们对其内在物理机制的理解，并有助于设计采用薄壁微泡腔的器件应用。

图 3(b) 对比了具有 $m = 170$ and$n = 1$ 的回音壁模式的轴向模式。理论模型与仿真结果也高度吻合。这证实了以量子阱中粒子的动力学同样的方式处理回音壁模式的轴向动力学是有效的。如此一来，薄壁微泡腔便成为一种

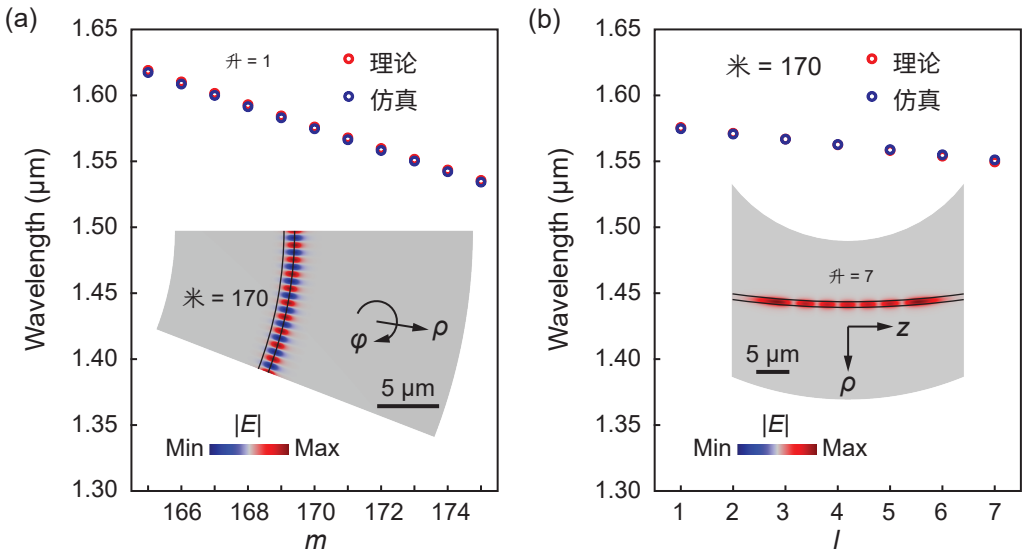



图 3. **通过有限元方法仿真验证薄壁微泡的理论模型**。(a) 不同方位模式下的共振波长。插图显示了横截面中的仿真场分布。(b) 不同轴向模式下的共振波长。插图显示了轴向场分布。 $n = 1$ 适用于所有情况。

可靠的实验平台，可用于检验量子力学。另一方面，成熟的量子理论可用于设计轴向模式。

## 5. 结论

我们展示了一种能够全面表征微泡腔壁结构的高效方法。基于聚焦离子束铣削和扫描电子显微镜成像，重构了微气泡的三维几何结构。鉴于其壁厚达到波长尺度，我们提出了一种基于光波导近似的理论模型，用于描述薄壁微泡腔中的回音壁模式。此外，我们还利用制备的微气泡结构进行了仿真。所提出的理论模型与仿真结果高度吻合，验证了所提理论的有效性。本文展示的表征与建模方法可轻松推广应用于其他波长尺度的光子器件。

**资助**。 本研究获得冲绳科学技术大学院大学（OIST）以及日本学术振兴会（JSPS）科研费的资助，其中包括科研费补助金（C类），项目编号为23K04617，以及青年研究人员科研费补助金，项目编号为22K14621。

**致谢**。 作者谨此感谢冲绳科学技术大学院大学（OIST）的工程部、科学计算与数据分析部以及科学成像部提供的技术支持。

**披露**。 作者声明不存在利益冲突。

**数据可用性**。本文结果所依据的数据目前尚未公开，但可在提出合理请求后向作者获取。

## 参考文献


1. L. Cai、J. Pan、Y. Zhao、J. Wang 和 S. Xiao，《回音壁模光学微谐振器：结构与传感应用》，Phys. Status Solidi A **217**, 1900825（2020年）。2. D. Yu、M. Humar、K. Meserve、R. C. Bailey、S. Nic Chormaic 和 F. Vollmer，《用于生物与物理传感的回音壁模传感器》，Nat. Rev. Methods Primers **1**, 82（2021）。3. K. J. Vahala，《光学微腔》，Nat. (London) **424**, 839–846（2003）。4. S. M. Spillane、T. J. Kippenberg、K. J. Vahala、K. W. Goh、E. Wilcut 和 H. J. Kimble，《用于腔量子电动力学的超高 Q 值环形微谐振器》，Phys. Rev. A **71**, 013817（2005）。5. T. Aoki、B. Dayan、E. Wilcut、W. P. Bowen、A. S. Parkins、T. J. Kippenberg、K. J. Vahala 和 H. J. Kimble，《观测到单个原子与单体微谐振器之间的强耦合》，Nat. (London) **443**, 671–674（2006）。6. D. J. Alton、N. P. Stern、T. Aoki、H. Lee、E. Ostby、K. J. Vahala 和 H. J. Kimble，《介电边界附近单个原子与光子的强相互作用》，Nat. Phys. **7**, 159–165（2011）。7. E. Will、L. Masters、A. Rauschenbeutel、M. Scheucher 和 J. Volz，《将单个囚禁原子耦合至回音壁模微谐振器》，Phys. Rev. Lett. **126**, 233602（2021）。8. A. M. Armani、R. P. Kulkarni、S. E. Fraser、R. C. Flagan 和 K. J. Vahala，《利用光学微腔进行无标记单分子检测》，Science **317**, 783–787（2007）。9. J. Zhu、S. K. Ozdemir、Y.-F. Xiao、L. Li、L. He、D.-R. Chen 和 L. Yang，《利用超高 Q 值微谐振器中的模式分裂实现片上单个纳米颗粒检测与尺寸测量》，Nat. Photonics **4**, 46–49（2010）。10. L. Shao、X.-F. Jiang、X.-C. Yu、B.-B. Li、W. R. Clements、F. Vollmer、W. Wang、Y.-F. Xiao 和 Q. Gong，《利用微腔共振展宽检测单个纳米颗粒和慢病毒》，Adv. Mater. **25**, 5616–5620（2013）。11. M. D. Baaske、M. R. Foreman 和 F. Vollmer，《在无标记微腔生物传感器平台上监测单分子核酸相互作用》，Nat. Nanotechnol. **9**, 933–939（2014）。12. Y. Kim 和 H. Lee，《基于发光二极管泵浦的有源回音壁模谐振器的片上无标记生物传感》，Opt. Express **27**, 34405–34415（2019）。13. J. M. Ward、D. G. O'Shea、B. J. Shortt 和 S. Nic Chormaic，《室温下 Er-Yb 共掺磷酸盐玻璃微球中的光学双稳态》，J. Appl. Phys. **102**, 023104（2007）。14. A. Chiasera、Y. Dumeige、P. Féron、M. Ferrari、Y. Jestin、G. Nunzi Conti、S. Pelli、S. Soria 和 G. C. Righini，《球形回音壁模微谐振器》，Laser Photonics Rev. **4**, 457–482（2010）。15. D. K. Armani、T. J. Kippenberg、S. M. Spillane 和 K. J. Vahala，《芯片上的超高 Q 值环形微腔》，Nat. (London) **421**, 925–928（2003）。16. P. Rabiei、W. H. Steier、C. Zhang 和 L. R. Dalton，《聚合物微环滤波器与调制器》，J. Light. Technol. **20**, 1968–1975（2002）。17. M. Sumetsky、Y. Dulashko 和 R. S. Windeler，《光学微气泡谐振器》，Opt. Lett. **35**, 898–900（2010）。18. A. Watkins、J. Ward、Y. Wu 和 S. Nic Chormaic，《单输入球形微气泡谐振器》，Opt. Lett. **36**, 2113 2115 2011– ( )。19. G. S. Murugan、M. N. Petrovich、Y. Jung、J. S. Wilkinson 和 M. N. Zervas，《中空瓶形光学微谐振器》，Opt. Express **19**, 20773–20784（2011）。20. J. M. Ward、Y. Yang、F. Lei、X. C. Yu、Y. F. Xiao 和 S. Nic Chormaic，《利用准液滴微腔实现超越倏逝场相互作用的纳米颗粒传感》，Optica **5**, 674–677（2018）。21. F. Pan、K. Karlsson、A. G. Nixon、L. T. Hogan、J. M. Ward、K. C. Smith、D. J. Masiello、S. Nic Chormaic 和 R. H. Goldsmith，《微泡腔中等离激元—光子相互作用的主动控制》，J. Phys. Chem. C **126**, 20470 20479 2022– ( )。22. Y. Yang、X. Jiang、S. Kasumie、G. Zhao、L. Xu、J. M. Ward、L. Yang 和 S. Nic Chormaic，《二氧化硅微气泡谐振器中可见波长下的四波混频参量振荡与频率梳产生》，Opt. Lett. **41**, 5266–5269（2016）。23. Y. Yang、Y. Ooka、R. M. Thompson、J. M. Ward 和 S. Nic Chormaic，《二氧化硅中空瓶状微谐振器中的简并四波混频》，Opt. Lett. **41**, 575–578（2016）。24. S. Kasumie、Y. Yang、J. M. Ward 和 S. Nic Chormaic，《利用中空 WGM 谐振器产生可见光频率梳的探索》，Rev. Laser Engin. **46**, 92–96（2018）。25. Y. Yin、Y. Niu、H. Qin 和 M. Ding，《具有可调零色散波长的微瓶谐振器中的克尔频率梳产生》，J. Light. Technol. **37**, 5571–5575（2019）。26. R. Henze、T. Seifert、J. Ward 和 O. Benson，《利用内部静空气压调谐回音壁模》，Opt. Lett. **36**, 4536–4538（2011）。27. A. Cosci、F. Quercioli、D. Farnesi、S. Berneschi、A. Giannetti、F. Cosi、A. Barucci、G. Nunzi Conti、G. Righini 和 S. Pelli，《用于测定微气泡谐振器厚度的共焦反射显微术》，Opt. Express **23**, 16693 16701 2015– ( )。28. Q. Lu、J. Liao、S. Liu、X. Wu、L. Liu 和 L. Xu，《利用内部静空气压传感精确测量微气泡谐振器厚度》，Opt. Express **24**, 20855–20861（2016）。29. Y. Yang、S. Saurabh、J. M. Ward 和 S. Nic Chormaic，《用于静空气压传感的高 Q 值超薄壁微气泡谐振器》，Opt. Express **24**, 294–299（2016）。30. F. Lei、J. M. Ward、P. Romagnoli 和 S. Nic Chormaic，《偏振控制的腔输入输出关系》，Phys. Rev. Lett. **124**, 103902（2020）。

31. J. Yu, J. Zhang, R. Wang, A. Li, M. Zhang, S. Wang, P. Wang, J. M. Ward, 和 S. Nic Chormaic, “一种碲酸盐玻璃光学微气泡谐振器”, Opt. Express **28**, 32858–32868（2020年）。32. J. Jiang, Y. Liu, K. Liu, S. Wang, Z. Ma, Y. Zhang, P. Niu, L. Shen, 和 T. Liu, “用于基于WGM的应用的壁厚控制微气泡制备”, Appl. Opt. **59**, 5052–5057（2020年）。33. M. Sumetsky, “回音壁瓶形微腔：三维标准具”, Opt. Lett. **29**, 8–10（2004）。34. L. Ma, S. Li, V. M. Fomin, M. Hentschel, J. B. Götte, Y. Yin, M. R. Jorgensen, 和 O. G. Schmidt, “非对称微腔中的光的自旋轨道耦合”, Nat. Commun. **7**, 10983（2016）。35. J. Wang, S. Valligatla, Y. Yin, L. Schwarz, M. Medina-Sánchez, S. Baunack, C. H. Lee, R. Thomale, S. Li, V. M. Fomin, L. Ma, 和 O. G. Schmidt, “在光学莫比乌斯带微腔中对贝里相的实验观测”, Nat. Photonics **17**, 120–125（2023）。36. C. Strelow, C. M. Schultz, H. Rehberg, M. Sauer, H. Welsch, A. Stemmann, C. Heyn, D. Heitmann, 和 T. Kipp, “卷曲半导体微管瓶形谐振器中的光限制和模式分裂”, Phys. Rev. B **85**, 155329（2012）。37. M. Sumetsky, “光学瓶形微谐振器”, Prog. Quantum Electron. **64**, 1–30（2019）。38. C. Strelow, H. Rehberg, C. M. Schultz, H. Welsch, C. Heyn, D. Heitmann, 和 T. Kipp, “利用瓶形几何结构由半导体微管形成的光学微腔”, Phys. Rev. Lett. **101**, 127403（2008）。39. S. Li, L. Ma, S. Böttner, Y. Mei, M. R. Jorgensen, S. Kiravittaya, 和 O. G. Schmidt, “在简并抬升的卷曲光学微腔上对单个纳米颗粒进行角位置检测”, Phys. Rev. A **88**, 033833（2013）。40. Y. Fang, S. Li, 和 Y. Mei, “卷曲微腔中高品质因数的调制”, Phys. Rev. A **94**, 033804（2016）。41. Z. Tian, S. Li, S. Kiravittaya, B. Xu, S. Tang, H. Zhen, W. Lu, 和 Y. Mei, “介观结构纳米膜微腔中选择性增强的单一回音壁模式发射”, Nano Lett. **18**, 8035–8040（2018）。