arXiv:2305.04472v2 [math-ph] 7 Jun 2023

KP 层级、仿射 Yangian 与 $W_{1+\infty}$ 代数

Wang Na*中国河南省开封市河南大学数学与统计学院，邮编 475001

摘要

三维（维数）杨图是二维杨图的推广。我们希望构造与二维杨图上的结构相对应的三维杨图结构。我们已经得到了三维玻色子、三维费米子和 3-Jack 多项式，它们是定义在三维杨图上的对称函数。本文在 $W_{1+\infty}$ 代数中通过场 $V_j(z)$ 实现 KP 层级，其中 $V_j(z)$ 由 $J_j(z)$ 构造；后者是与三维杨图的切片 $z=j$ 上的二维杨图相关联的玻色场。我们还展示了以下情形中玻色子福克空间与费米子福克空间之间的对应关系：舒尔函数、Jack 多项式和 3-Jack 多项式。

关键词：三维杨图， $W_{1+\infty}$ 代数，KP 层级，Schur 函数，Jack 多项式。

1 引言

舒尔函数是一类著名的定义在二维杨图上的对称函数。设幂和 $p_n=\sum_i t_i^n = nx_n$ and $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots)$。算子 $S_n(\mathbf{x})$ 由以下生成函数确定：

$$e^{\xi(\mathbf{x},k)} := \sum_{n=0}^{\infty} S_n(\mathbf{x})k^n, \quad \text{where } \xi(\mathbf{x},k)=\sum_{n=1}^{\infty} x_n k^n \tag{1}$$

并令 $S_n(\mathbf{x})=0$，其中 $n<0$。注意， $S_n(\mathbf{t})$ 是完全齐次对称函数。

$$\sum_{i_1\le i_2\le\cdots\le i_n} t_{i_1}t_{i_2}\cdots t_{i_n}. \tag{2}$$

对于杨图 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l)$，Schur 函数 $S_\lambda=S_\lambda(\mathbf{x})$ 是一个关于 $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$ 的多项式，由 Jacobi-Trudi 公式 [1] 定义：

$$S_\lambda(\mathbf{x})=\det\left(h_{\lambda_i-i+j}(\mathbf{x})\right)_{1\le i,j\le l}. \tag{3}$$

长期以来，舒尔函数和二维杨图在数学领域（表示论、组合学，尤其是可积模型）中一直发挥着重要作用[2,3, 4]。

KP 层级 [5] 是最重要的可积层级之一，出现在数学和物理的许多不同领域，例如计数代数几何、拓扑场论和弦论。近年来，KP 层级[6, 7, 8]有许多推广形式。京都学派以一种卓越的方式运用舒尔函数来理解 KP 和 KdV 层级[4]。众所周知，KP 层级可以由 $W_{1+\infty}$ 代数中的场 $V_j(z)$ 实现，这些场由一个玻色

*通讯作者：wangna@henu.edu.cn

场 $J(z)$ [9]构造而成。本文将 KP 层级的这一实现推广到关于坐标轴对称的场 $V_j(z)$ 的情形。

这种对称性也出现在舒尔函数中，即舒尔函数 $S_\lambda(x)$ 和 $S_{\lambda'}(x)$ 的表达式相似，其中杨图 λ' 是 λ 的共轭图。例如，

$$S_{\ydiagram{3,1}} = \frac{1}{8}(p_1^4 + 2p_1^2p_2 - p_2^2 - 2p_4),$$
$$S_{\ydiagram{2,2}} = \frac{1}{8}(p_1^4 - 2p_1^2p_2 - p_2^2 + 2p_4).$$

因此，我们认为舒尔函数应当具有关于坐标轴 x-轴和 y-轴的某种对称性。我们分别将 h_1 和 h_2 与 y-轴和 x-轴联系起来。我们定义了关于 x-轴和y-轴对称的对称函数 Y_λ [10] （也就是说，它们关于 h_1 和 h_2对称）；当 $h_1 = \sqrt{\alpha}, h_2 = -1/\sqrt{\alpha}$ 时，它们变为 Jack 多项式。本文中，我们在 $W_{1+\infty}$代数中构造关于 x-轴和 y-轴对称的场 $V_j(z)$, 并利用场 $V_j(z)$ 实现 KP 层级。

三维杨图是二维杨图的一种推广，它自然地出现在晶体熔化模型[11, 12]中。三维杨图在数学和物理的许多领域也有诸多应用，例如统计模型、数论以及某些代数（ Ding-Iohara-Miki 代数、仿射 Yangian 等）的表示。三维杨图的每个切片都是一个二维杨图；或者，我们也可以将二维杨图视为只有一层的特殊三维杨图。我们考虑沿 z-轴方向至多有 N 层的三维杨图。由于我们已经构造了定义在三维杨图上的 3-Jack 多项式（即对称函数），本文中我们在 $W_{1+\infty}$ 代数中构造场 $V_4(z)$。我们发现，此处的算符乘积展开$V_j(z)V_k(w)$ 关于 x-轴、 y-轴和 z-轴对称；当 $N = 1$ 时，此处的场 $V_j(z)$ 变为关于 x- 轴和 y- 轴对称的 $V_j(z)$。我们还利用关于三个坐标轴对称的 $V_j(z)$ 实现了 KP 层级。

本文结构如下。第 2 节回顾 $\mathfrak{gl}(1)$ 仿射 Yangian 的定义及其在三维杨图上的表示。第 3 节回顾由 Miura变换构造 $W_{1+\infty}$ 代数的方法，并构造场 $V_4(z)$。第 4 节利用由 Miura变换构造的 $W_{1+\infty}$ 代数中的场的特殊情形 $N =1, h_1 = 1, h_2 = -1$ ，实现 KP 层级。第 5 节利用由 Miura变换构造的 $W_{1+\infty}$ 代数中的场的特殊情形 $N = 1$ ，实现 KP 层级。第 6 节利用由 Miura变换构造的 $W_{1+\infty}$ 代数中的一般场，实现 KP 层级。第 7 节给出三种情形下费米子福克空间与玻色子福克空间之间的对应关系：舒尔函数、Jack 多项式和 3-Jack 多项式。

2 $\mathfrak{gl}(1)$ 的仿射 Yangian

本节将回顾 $\mathfrak{gl}(1)$ 的仿射 Yangian 及其在三维杨图空间上的表示。设 h_1、 h_2 和 h_3 为满足 $h_1+h_2+h_3 =0$ 的三个复数。定义

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= h_1h_2 + h_1h_3 + h_2h_3, \\ \sigma_3 &= h_1h_2h_3. \end{aligned}$$

我们分别将 h_1、 h_2、 h_3 与 y、 x、 z轴相关联。

$\mathfrak{gl}(1)$ 的仿射 Yangian $\mathcal{Y}$ 是一个结合代数，其生成元为 e_j、f_j 和 ψ_j、$j=0$、1、....., 并满足以下关系[13, 14]

$$
\begin{aligned}
&[\psi_j,\psi_k]=0, && (4)\\
&[e_{j+3},e_k]-3\,[e_{j+2},e_{k+1}]+3\,[e_{j+1},e_{k+2}]-[e_j,e_{k+3}]\\
&\quad+\sigma_2\,[e_{j+1},e_k]-\sigma_2\,[e_j,e_{k+1}]-\sigma_3\,\{e_j,e_k\}=0, && (5)\\
&[f_{j+3},f_k]-3\,[f_{j+2},f_{k+1}]+3\,[f_{j+1},f_{k+2}]-[f_j,f_{k+3}]\\
&\quad+\sigma_2\,[f_{j+1},f_k]-\sigma_2\,[f_j,f_{k+1}]+\sigma_3\,\{f_j,f_k\}=0, && (6)\\
&[e_j,f_k]=\psi_{j+k}, && (7)\\
&[\psi_{j+3},e_k]-3\,[\psi_{j+2},e_{k+1}]+3\,[\psi_{j+1},e_{k+2}]-[\psi_j,e_{k+3}]\\
&\quad+\sigma_2\,[\psi_{j+1},e_k]-\sigma_2\,[\psi_j,e_{k+1}]-\sigma_3\,\{\psi_j,e_k\}=0, && (8)\\
&[\psi_{j+3},f_k]-3\,[\psi_{j+2},f_{k+1}]+3\,[\psi_{j+1},f_{k+2}]-[\psi_j,f_{k+3}]\\
&\quad+\sigma_2\,[\psi_{j+1},f_k]-\sigma_2\,[\psi_j,f_{k+1}]+\sigma_3\,\{\psi_j,f_k\}=0, && (9)
\end{aligned}
$$

以及边界条件

$$
\begin{aligned}
&[\psi_0,e_j]=0,[\psi_1,e_j]=0,[\psi_2,e_j]=2e_j, && (10)\\
&[\psi_0,f_j]=0,[\psi_1,f_j]=0,[\psi_2,f_j]=-2f_j, && (11)
\end{aligned}
$$

以及 Serre 关系的推广

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Sym}_{(j_1,j_2,j_3)}\,[e_{j_1},[e_{j_2},e_{j_3+1}]]=0, && (12)\\
&\mathrm{Sym}_{(j_1,j_2,j_3)}\,[f_{j_1},[f_{j_2},f_{j_3+1}]]=0, && (13)
\end{aligned}
$$

其中 Sym 表示对所有标出的指标进行完全对称化，共包含 6 项。

仿射 Yangian $\mathcal{Y}$ 在三维杨图上有一个表示。与我们的论文[16], 一样，我们使用以下记号。对于一个三维杨图 π，记号 $\square\in\pi^+$表示这个方块不在 π 中，且可以添加到 π中。这里“可以添加”是指添加这个方块后，它仍然是一个三维杨图。记号 $\square\in\pi^-$ 表示这个方块在 π 中，且可以从 π中移除。这里“可以移除”是指移除这个方块后，它仍然是一个三维杨图。对于一个方块 $\square$，我们定义

$$
h_\square=h_1y_\square+h_2x_\square+h_3z_\square, \tag{14}
$$

其中 $(x_\square,y_\square,z_\square)$ 是方块 $\square$ 在坐标系 $O-xyz$中的坐标。这里我们采用顺序 $y_\square,x_\square,z_\square$，以与论文 [13]中的顺序一致。

接下来 [13, 14], 我们引入生成函数:

$$
\begin{aligned}
e(u) &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{e_j}{u^{j+1}},\\
f(u) &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{f_j}{u^{j+1}}, && (15)\\
\psi(u) &= 1+\sigma_3\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\psi_j}{u^{j+1}},
\end{aligned}
$$

其中 u 是一个参数。引入

$$
\psi_0(u)=\frac{u+\sigma_3\psi_0}{u} \tag{16}
$$

and

$$\varphi(u)=\frac{(u+h_1)(u+h_2)(u+h_3)}{(u-h_1)(u-h_2)(u-h_3)}. \tag{17}$$

对于三维杨图 π，定义 $\psi_\pi(u)$如下:

$$\psi_\pi(u)=\psi_0(u)\prod_{\square\in\pi}\varphi(u-h_\square). \tag{18}$$

接下来，我们按照文献 [13] 中的方式回顾仿射 Yangian 在三维杨图上的表示，并做出一些细微的修改。仿射 Yangian 在三维杨图上的表示由以下方式给出。

$$\psi(u)|\pi\rangle = \psi_\pi(u)|\pi\rangle, \tag{19}$$

$$e(u)|\pi\rangle = \sum_{\square\in\pi^+}\frac{E(\pi\to\pi+\square)}{u-h_\square}|\pi+\square\rangle, \tag{20}$$

$$f(u)|\pi\rangle = \sum_{\square\in\pi^-}\frac{F(\pi\to\pi-\square)}{u-h_\square}|\pi-\square\rangle \tag{21}$$

wh其中， $|\pi\rangle$ 表示由三维杨图 π 刻画的态及其系数

$$E(\pi\to\pi+\square)=-F(\pi+\square\to\pi)=\sqrt{\frac{1}{\sigma_3}\operatorname{res}_{u\to h_\square}\psi_\pi(u)} \tag{22}$$

方程（20）和（21）表示生成元 e_j、 f_j 通过以下方式作用于三维杨图 π 。

$$e_j|\pi\rangle=\sum_{\square\in\pi^+}h_\square^j E(\pi\to\pi+\square)|\pi+\square\rangle, \tag{23}$$

$$f_j|\pi\rangle=\sum h_\square^j F(\pi\to\pi-\square)|\pi-\square\rangle. \tag{24}$$

在本文后续部分，我们将 $E(\pi\to\pi+\square)|\pi+\square\rangle$ 视为一个整体，并仍用 $|\pi+\square\rangle$表示，那么三维杨图就取决于方块生长过程。

3 Miura变换与 $W_{1+\infty}$ 代数

我们首先给出 $W_{1+\infty}$ 代数的定义。 $W_{1+\infty}$ 代数包含海森堡代数和 Virasoro 代数作为其子代数[13]。其生成元为 $V_{j,m}$，其中 $j\in\mathbb{Z}_+$, $m\in\mathbb{Z}$。其关系式为

$$[V_{1,m},V_{1,n}] = m\delta_{m+n,0}c_1, \tag{25}$$

$$[V_{2,m},V_{2,n}] = (m-n)V_{2,m+n}+\frac{m^3-m}{12}\delta_{m+n,0}c_2, \tag{26}$$

$$[V_{2,m},V_{1,n}] = -nV_{1,m+n}, \tag{27}$$

以及一般来说

$$[V_{j,m},V_{k,n}]=\sum_{\substack{0\le l\le j+k-2\\ j+k-l\text{even}}}C_{jk}^l N_{jk}^l(m,n)V_{l,m+n}, \tag{28}$$

其中系数 $N_{jk}^l(m,n)$ 为

$$
\begin{aligned}
N_{jk}^0(m,n) &= \left(\begin{array}{c} m+j-1 \\ j+k-1 \end{array} \right) \delta_{m+n,0}, \qquad (29)\\
N_{jk}^l(m,n) &= \sum_{s=0}^{j+k-l-1} \frac{(-1)^s}{(j+k-l-1)!(2l)_{j+k-l-1}} \left(\begin{array}{c} j+k-l-1 \\ s \end{array} \right) \times \\
&\quad [j+m-1]_{j+k-l-1-s}[j-m-1]_s[k+n-1]_s[k-n-1]_{j+k-l-1-s},
\end{aligned}
$$

以及结构常数 C_{jk}^l 是

$$
\begin{aligned}
C_{jk}^0 &= \frac{(j-1)!^2(2j-1)!}{4^{j-1}(2j-1)!!(2j-3)!!}\delta_{jk}c_j, \qquad (30)\\
C_{jk}^l &= \frac{1}{2\times 4^{j+k-l-2}}(2l)_{j+k-l-1} \times {}_4F_3\left(\begin{array}{c} \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}(j+k-l-2), -\frac{1}{2}(j+k-l-1) \\ \frac{3}{2}-j, \frac{3}{2}-k, \frac{1}{2}+l \end{array} ; 1 \right),
\end{aligned}
$$

with

$$
\begin{aligned}
(a)_n &= a(a+1)\cdots(a+n-1), \qquad (31)\\
[a]_n &= a(a-1)\cdots(a-n+1), \qquad (32)\\
{}_mF_n\left(\begin{array}{c} a_1,\cdots,a_m \\ b_1,\cdots,b_n \end{array} ; z \right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k\cdots(a_m)_k}{(b_1)_k\cdots(b_n)_k}\frac{z^k}{k!}. \qquad (33)
\end{aligned}
$$

注意，这里我们允许中心荷不同。

Let

$$B(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n z^{-n-1} \qquad (34)$$

为满足该关系的玻色场

$$[b_n, b_m] = n\delta_{n+m,0}. \qquad (35)$$

定义 $V_j(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} V_{j,\ n} z^{-j-n}$。已知场 $V_j(z)$ 可以表示为 $B(z)$

$$
\begin{aligned}
V_1(z) &= B(z),\\
V_2(z) &= \frac{1}{2} : B(z)^2 :,\\
V_3(z) &= \frac{1}{3} : B(z)^3 :, \qquad (36)\\
V_4(z) &= \frac{1}{4} : B(z)^4 : -\frac{3}{20} : B'(z)^2 : +\frac{1}{10} : B''(z)B(z) : .
\end{aligned}
$$

对于玻色子 b_n，玻色子福克空间是二维杨图构成的空间，或定义在二维杨图上的舒尔函数空间。然后， $W_{1+\infty}$代数的场 $V_j(z)$ 可以在二维杨图空间上表示。

我们考虑 $J_j(z)$

$$J_j(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{j,n} z^{-n-1} \qquad (37)$$

满足以下关系

$$[a_{j,n}, a_{k,m}] = -\frac{1}{h_1h_2}\delta_{j,k}n\delta_{n+m,0}. \qquad (38)$$

三维杨图可以被视为一系列二维杨图（这里我们考虑三维杨图在平面 $z = j$ 上的切片，那么每个切片都是一个二维杨图。

图）。设 $J_j(z)$ 为与三维杨图的 $z=j$ 切片上的二维杨图相关联的玻色场。如果我们希望代数 $W_{1+\infty}$ 的场 $V_j(z)$ 在三维杨图空间上具有表示，那么场 $V_j(z)$ 应表示为一系列玻色场 $J_j(z)$ $j=1,2,\cdots,N$，这对应于一个三维杨图可以表示为一系列二维杨图。在这里，我们允许 $W_{1+\infty}$ 代数中的系数与上述 $W_{1+\infty}$ 代数定义中的系数略有不同。

定义

$$J(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n z^{-n-1}=J_1(z)+J_2(z)+\cdots+J_N(z), \tag{39}$$

则玻色子 a_n 满足

$$[a_n,a_m]=-\frac{N}{h_1h_2}n\delta_{n+m,0}=\psi_0 n\delta_{n+m,0}. \tag{40}$$

令 α_0 为一个参数，按照 [15] 中的方式，通过 Miura 变换定义算子 $U_k(z)$

$$:(\alpha_0\partial+J_1(z))(\alpha_0\partial+J_2(z))\cdots(\alpha_0\partial+J_N(z)):=\sum_{k=0}^{N}U_k(z)(\alpha_0\partial)^{N-k}. \tag{41}$$

场 $U_k(z)$ 生成一个代数，即 W_{1+N}。场 $V_n(z)$ 可以由 $U_k(z)$ 实现。我们列出前几个 $U_k(z)$ 的具体表达式，如 [17] 所示

$$U_0 = 1, \tag{42}$$

$$U_1 = \sum_{j=1}^{N}J_j, \tag{43}$$

$$U_2 = \sum_{j<k}:J_jJ_k:+\alpha_0\sum_{j=1}^{N}(j-1)J_j', \tag{44}$$

$$\begin{aligned}U_3 = &\sum_{j<k<l}:J_jJ_kJ_l:+\alpha_0\sum_{j<k}(j-1):J_j'J_k:\\ &+\alpha_0\sum_{j<k}(k-2):J_jJ_k':+\frac{\alpha_0^2}{2}\sum_{j=1}^{N}(j-1)(j-2)J_j'',\end{aligned} \tag{45}$$

$$\begin{aligned}U_4 = &\sum_{j<k<l<m}:J_jJ_kJ_lJ_m:+\frac{\alpha_0^3}{6}\sum_{j}(j-1)(j-2)(j-3)J_j'''\\ &+\alpha_0\sum_{j<k<l}(j-1):J_j'J_kJ_l:+(k-2)J_jJ_k'J_l:+(l-3):J_jJ_kJ_l':\\ &+\frac{\alpha_0^2}{2}\sum_{j<k}(j-1)(j-2):J_j''J_k:+2(j-1)(k-3):J_j'J_k':+(k-2)(k-3):J_jJ_k'':.\end{aligned} \tag{46}$$

注意， $U_k(z)$ 的表达式与 [17], 中的相同，但玻色子场 $J_j(z)$ 的对易关系与 [17] 中的略有不同。因此，算符乘积展开也会略有不同。

令[18]

$$
\begin{aligned}
V_1(z) &= U_1(z) = J(z) = J_1(z) + J_2(z) + \cdots + J_N(z), && (47)\\
V_2(z) &= -h_1h_2\left(-U_2(z) + \frac{(N-1)\alpha_0}{2}U_1'(z) + \frac{1}{2}(U_1U_1)(z)\right), && (48)\\
V_3(z) &= h_1^2h_2^2\left(U_3(z) - U_1U_2(z) + \frac{1}{3}U_1U_1U_1(z) - \frac{(N-2)\alpha_0}{2}U_2'(z)\right.\\
&\quad \left. + \frac{\alpha_0^2(N-1)(N-2)}{12}U_1''(z) + \frac{(N-1)\alpha_0}{2}U_1'U_1(z)\right). && (49)
\end{aligned}
$$

算符乘积展开为

$$
\begin{aligned}
V_1(z)V_1(w) &\sim -\frac{N}{h_1h_2}\frac{1}{(z-w)^2}, && (50)\\
V_1(z)V_2(w) &\sim \frac{V_1(w)}{(z-w)^2}, && (51)\\
V_2(z)V_2(w) &\sim \frac{c_2/2}{(z-w)^4} + \frac{2V_2(w)}{(z-w)^2} + \frac{V_2'(w)}{z-w} && (52)
\end{aligned}
$$

其中 $c_2 = N + h_1h_2\alpha_0^2N(N+1)(N-1)$，且

$$
\begin{aligned}
V_1(z)V_3(w) &\sim \frac{2V_2(w)}{(z-w)^2}, && (53)\\
V_2(z)V_3(w) &\sim \frac{-h_1h_2(1+(N+1)(N-1)\alpha_0^2h_1h_2)V_1(w)}{(z-w)^4} + \frac{3V_3(w)}{(z-w)^2} + \frac{V_3'(w)}{(z-w)}, && (54)\\
V_3(z)V_3(w) &\sim \frac{c_3/6}{(z-w)^3} + \frac{-h_1h_2(4+(N+2)(N-2)\alpha_0^2h_1h_2)V_2(w) + \frac{3}{2}Nh_3\sigma_3U_1U_1(w)}{(z-w)^4}\\
&\quad + \frac{-h_1h_2(4+(N+2)(N-2)\alpha_0^2h_1h_2)V_2'(w) + 3Nh_3\sigma_3U_1'U_1(w)}{2(z-w)^3} + \cdots && (55)
\end{aligned}
$$

中心荷为 c_3

$$
\begin{aligned}
c_3 &= -\frac{h_1h_2}{N}(N+(N+1)N(N-1)\alpha_0^2h_1h_2)(4N+(N+2)N(N-2)\alpha_0^2h_1h_2)\\
&\quad -3N^2\alpha_0^2h_1^2h_2^2.
\end{aligned}
$$

场 $V_1(z)$ $V_2(z)$ 和 $V_3(w)$ 已在 [18] 中构造。本文需要场 $V_4(z)$，因此我们根据算符乘积展开 $V_1(z)V_4(w)$ 和 $V_2(z)V_4(w)$ 与式 (36) 类似这一事实来计算它，只是系数会有所不同。我们知道， $V_4(z)$ 是以下线性组合，其中系数有待确定，

$$
\begin{aligned}
V_4(z) &= -h_1^3h_2^3\left(a_1U_1'U_1U_1(z) + a_2U_1'U_1'(z) + a_3U_1U_1U_1U_1(z)\right.\\
&\quad + a_4U_1''U_1(z) + a_5U_1'''(z) + a_6U_1'U_2(z) + a_7U_1U_2'(z)\\
&\quad + a_8U_1U_1U_2(z) + a_9U_2U_2(z) + a_{10}U_2''(z) + a_{11}U_3'(z)\\
&\quad \left. + a_{12}U_1U_3(z) + a_{13}U_4(z)\right),
\end{aligned}
$$

由附录A中的计算可知，系数 a_n、 $n = 1$、$2\cdots$、13 满足以下方程。

$$
\begin{aligned}
&-\frac{24a_5N}{h_1h_2} + \frac{4a_9N(N-1)^2\alpha_0}{h_1^2h_2^2} - \frac{12a_{10}(N-1)N\alpha_0}{h_1h_2} - \frac{4a_{11}N(N-1)(N-2)\alpha_0^2}{h_1h_2}\\
&-\frac{a_{13}N(N-1)(N-2)(N-3)\alpha_0^3}{h_1h_2} = 0,
\end{aligned}
$$

$$-\frac{2a_6N}{h_1h_2}-\frac{2a_9N(N-1)\alpha_0}{h_1h_2}-\frac{2a_{11}(N-2)}{h_1h_2}-\frac{a_{13}(N-2)(N-3)\alpha_0}{h_1h_2}=0,$$

$$-\frac{2a_1N}{h_1h_2}-\frac{2a_7(N-1)}{h_1h_2}-\frac{a_8N\alpha_0(N-1)}{h_1h_2}-\frac{a_{12}(N-2)(N-1)\alpha_0}{h_1h_2}=0,$$

$$-\frac{2a_1N}{h_1h_2}-\frac{a_6(N-1)}{h_1h_2}-\frac{a_7(N-1)}{h_1h_2}-\frac{(N-1)\alpha_0(-\frac{a_{12}N}{h_1h_2}-\frac{a_{13}(N-3)}{h_1h_2})}{2}=0,$$

$$-\frac{4a_3N}{h_1h_2}-\frac{a_8(N-1)}{h_1h_2}+\frac{a_{12}N}{3h_1h_2}+\frac{a_{13}(N-3)}{3h_1h_2}=0,$$

$$-\frac{a_7N}{h_1h_2}-\frac{a_{11}(N-2)}{h_1h_2}+\frac{(N-2)\alpha_0(-\frac{a_{12}N}{h_1h_2}-\frac{a_{13}(N-3)}{h_1h_2})}{2}=0,$$

$$-\frac{2a_8N}{h_1h_2}-\frac{2a_9(N-1)}{h_1h_2}-\frac{a_{12}(N-2)}{h_1h_2}-\frac{a_{12}N}{h_1h_2}-\frac{a_{13}(N-3)}{h_1h_2}=0,$$

$$\begin{aligned}&-\frac{4a_2N}{h_1h_2}-\frac{6a_4N}{h_1h_2}-\frac{2a_6N(N-1)\alpha_0}{h_1h_2}-\frac{3a_7N(N-1)\alpha_0}{h_1h_2}\\&+a_9\left(\frac{3N(N-1)}{h_1^2h_2^2}+\frac{2\alpha_0^2N(N-1)(N+2)}{h_1h_2}\right)+10a_{10}(N^3-N)\alpha_0^2\\&+5a_{11}\alpha_0^3(N+1)N(N-1)(N-2)-\frac{a_{12}N(N-1)(N-2)\alpha_0^2}{h_1h_2}\\&+\frac{3a_{13}\alpha_0^4(N+1)N(N-1)(N-2)(N-3)}{2}=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&-\frac{4a_1N}{h_1h_2}+24a_5-\frac{2a_6(N-1)}{h_1h_2}+a_7\left(2(N^3-N)\alpha_0^2-\frac{2(N-1)}{h_1h_2}\right)-\frac{2a_8N\alpha_0(N-1)}{h_1h_2}\\&-\frac{6a_9\alpha_0(N-1)^2}{h_1h_2}+12\alpha_0a_{10}(N-1)+2a_{11}\alpha_0^2(N+3)(N-1)(N-2)\\&+a_{12}\left(\alpha_0^3(N+1)N(N-1)(N-2)-\frac{(N-1)(N-2)\alpha_0}{h_1h_2}\right)\\&+a_{13}(N-1)(N-2)(N-3)(N+2)\alpha_0^3=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&-\frac{a_1N}{h_1h_2}+24a_5+\frac{a_6(N^3-N)\alpha_0^2}{2}-\frac{a_7(N-1)}{h_1h_2}-\frac{4a_9(N-1)N\alpha_0}{h_1h_2}+6\alpha_0a_{10}(N-1)\\&+\frac{a_{11}\alpha_0^2(N+3)(N-1)(N-2)}{2}+\frac{(N-1)\alpha_0}{2}\left(-\frac{a_8N}{h_1h_2}+a_9\left((N^3-N)\alpha_0^2+\frac{8}{h_1h_2}\right)\right.\\&\left.+12a_{10}+6a_{11}(N-2)\alpha_0-\frac{a_{12}(N-2)}{h_1h_2}+\frac{a_{13}\alpha_0^2(N+5)(N-2)(N-3)}{2}\right)=0,\end{aligned}$$

$$-\frac{6a_3N}{h_1h_2}+6a_4+3a_7(N-1)\alpha_0+a_8\left(\frac{(N^3-N)\alpha_0^2}{2}-\frac{2(N-1)}{h_1h_2}\right)-\frac{4a_9(N-1)}{h_1h_2}$$
$$+\frac{a_{12}\alpha_0^2(N+3)(N-1)(N-2)}{2}-\frac{a_8N}{2h_1h_2}+\frac{a_9((N^3-N)\alpha_0^2+\frac{8}{h_1h_2})}{2}+6a_{10}$$
$$+3a_{11}(N-2)\alpha_0-\frac{a_{12}(N-2)}{2h_1h_2}+\frac{a_{13}\alpha_0^2(N+5)(N-2)(N-3)}{4}=0,$$

$$6a_{11}+3a_{13}(N-3)\alpha_0=0,$$

$$2a_6+4a_7+2a_9\alpha_0(N-1)+2a_{12}\alpha_0(N-2)=0,$$

$$\frac{3a_9}{h_1h_2}+10a_{10}+2a_{11}(N-2)\alpha_0=0,$$

$$2a_1+a_8(N-1)\alpha_0=0,$$

$$12a_5-\frac{a_9\alpha_0(N-1)(4N-1)}{2h_1h_2}+\alpha_0a_{10}(N-1)=0,$$

$$4a_2+6a_4+a_6\alpha_0(N-1)+a_7(N-1)\alpha_0-\frac{3a_9(N-1)}{h_1h_2}=0.$$

令 $a_{13}=-1$ 和 $a_3=\frac{1}{4}$，求解上述方程，得到

$$a_1=\frac{(N-1)\alpha_0}{2},\ a_2=\frac{3+\alpha_0^2h_1h_2(N-3)(2N+1)}{20h_1h_2},$$
$$a_4=\frac{2h_1h_2N^2\alpha_0^2-5h_1h_2N\alpha_0^2+7h_1h_2\alpha_0^2+5N-7}{20h_1h_2},$$
$$a_5=\frac{(\alpha_0^2h_1h_2(N-2)(N-3)+10N-1)a(N-1)}{120h_1h_2},\ a_6=-\frac{(N-1)\alpha_0}{2}$$
$$a_7=-\frac{(N-2)\alpha_0}{2},\ a_8=-1,\ a_9=\frac{1}{2},$$
$$a_{10}=-\frac{2h_1h_2N^2\alpha_0^2-10h_1h_2N\alpha_0^2+12h_1h_2\alpha_0^2+3}{20h_1h_2},$$
$$a_{11}=\frac{\alpha_0(N-3)}{2},\ a_{12}=1.$$

于是得到

$$
\begin{aligned}
V_4(z) &= -h_1^3h_2^3\Bigg(\frac{(N-1)\alpha_0}{2}U_1'U_1U_1(z)+\frac{3+\alpha_0^2h_1h_2(N-3)(2N+1)}{20h_1h_2}U_1'U_1'(z)\\
&+\frac{1}{4}U_1U_1U_1U_1(z)+\frac{2h_1h_2N^2\alpha_0^2-5h_1h_2N\alpha_0^2+7h_1h_2\alpha_0^2+5N-7}{20h_1h_2}U_1''U_1(z)\\
&+\frac{(\alpha_0^2h_1h_2(N-2)(N-3)+10N-1)a(N-1)}{120h_1h_2}U_1'''(z)-\frac{(N-1)\alpha_0}{2}U_1'U_2(z)\\
&-\frac{(N-2)\alpha_0}{2}U_1U_2'(z)-U_1U_1U_2(z)+\frac{1}{2}U_2U_2(z)\\
&-\frac{2h_1h_2N^2\alpha_0^2-10h_1h_2N\alpha_0^2+12h_1h_2\alpha_0^2+3}{20h_1h_2}U_2''(z)\\
&+\frac{\alpha_0(N-3)}{2}U_3'(z)+U_1U_3(z)-U_4(z)\Bigg). \qquad (56)
\end{aligned}
$$

场 $V_{n\geq 5}(z)$ 也可以通过这种方式得到。从场 $V_1(z)$ $V_2(z)$ $V_3(z)$ 和 $V_4(z)$ 的表达式中，我们可以看出一般场 $V_n(z)$ 的一些规律。例如，它的总系数为 $(-h_1h_2)^{n-1}$；在括号中，$U_n(z)$ 的系数为 $(-1)^{n-1}$，不含导数项的系数是与 N、 α_0 或 h_1 无关的常数，通常，含有 k 阶导数的项的系数是关于 N 的多项式，次数至多为 N^k。, 2, 3

场 $V_4(z)$ 等于

$$
\begin{aligned}
V_4(z) &= -h_1^3h_2^3\Bigg(\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{N}J_jJ_jJ_jJ_j(z)-\frac{\alpha_0}{2}\sum_{j<k}J_jJ_jJ_k'(z)-\alpha_0\sum_{j<k<l}(l-3)J_jJ_k'J_l(z)\\
&+\frac{\alpha_0}{2}\sum_{j<k}J_jJ_k'J_k(z)+\frac{\alpha_0}{2}\sum_{j<k}J_j'J_jJ_k(z)+\frac{\alpha_0}{2}\sum_{j<k}J_j'J_kJ_k(z)\\
&-\alpha_0\sum_{j<k<l}(l-3)J_j'J_kJ_l(z)+\frac{\alpha_0}{2}\sum_{j=1}^{N}(N+1-2j)J_j'J_jJ_j(z)\\
&-\frac{\alpha_0^2}{4}\sum_{j<k}(N+1-2k)J_jJ_k''(z)-\frac{\alpha_0^2}{4}\sum_{j<k}(N+1-2j)J_j''J_k(z)\\
&-\alpha_0^2\sum_{j<k}(k-j)J_j'J_k'(z)+\frac{3}{20h_1h_2}\sum_{j=1}^{N}J_j'J_j'(z)-\frac{1}{10h_1h_2}\sum_{j=1}^{N}J_j''J_j(z)+\cdots\Bigg).
\end{aligned}
$$

当 $N=1$、 $h_1=1$、 $h_2=-1$、 $V_4(z)$ 变为

$$\frac{1}{4}:J_1(z)^4:-\frac{3}{20}:J_1'(z)^2:+\frac{1}{10}:J_1''(z)J_1(z):,$$

这与公式（36）中的 $V_4(z)$ 相同。我们有

$$
\begin{aligned}
V_1(z)V_4(w) &\sim \frac{3h_1h_2(-1+{\alpha_0}^2h_1h_2\left(N^2+1\right))}{5}\frac{V_1(w)}{(z-w)^4}\\
&-\frac{3h_1h_2(-1+{\alpha_0}^2h_1h_2\left(N^2+1\right))}{5}\frac{V_1'(w)}{(z-w)^3}\\
&+\frac{3V_3(w)}{(z-w)^2}+\frac{h_1h_2(-1+{\alpha_0}^2h_1h_2\left(N^2+1\right))}{10}\frac{V_1''(w)}{(z-w)^2}, \qquad (57)\\
V_2(z)V_4(w) &\sim \frac{-h_1h_2(21+\alpha_0^2h_1h_2(9N^2-21))V_2(w)}{5(z-w)^4}+\frac{4V_4(w)}{(z-w)^2}+\frac{V_4'(w)}{(z-w)}. \qquad (58)
\end{aligned}
$$

4 Schur 函数、KP 层级和 $W_{1+\infty}$ 代数

在本节中，我们从上一节介绍的 $W_{1+\infty}$ 代数的特殊情形实现 KP 层级。我们看到，当 $\alpha_0 = -h_3/h_1h_2$ 和 $N = 1, h_1 = 1, h_2 = -1$ 时，由 Miura变换 构造的场 $V_j(z)$ 变为由玻色子场 $B(z)$ 表示的场，并且模 $V_{j,m}$ 满足关系式（28）。

我们知道，(36) 中的 $V_j(z)$ 满足

$$\begin{aligned}
V_2(z)V_1(w) &\sim \frac{V_1(w)}{(z-w)^2} + \frac{V_1'(w)}{z-w}, \\
V_2(z)V_2(w) &\sim \frac{1/2}{(z-w)^4} + \frac{2V_2(w)}{(z-w)^2} + \frac{V_2'(w)}{(z-w)}, \\
V_2(z)V_3(w) &\sim \frac{V_1(w)}{(z-w)^4} + \frac{3V_3(w)}{(z-w)^2} + \frac{V_3'(w)}{(z-w)}, \\
V_2(z)V_4(w) &\sim \frac{21}{5}\frac{V_2(w)}{(z-w)^4} + \frac{4V_4(w)}{(z-w)^2} + \frac{V_4'(w)}{(z-w)}.
\end{aligned}$$

让我们将 $V_2(z)$ 视为共形变换的生成元。考虑

$$z = e^{ix} \tag{59}$$

在$i = \sqrt{-1}$下，经过共形变换，场 $V_j(z)$变换为 $\tilde{V}_j(x)$，其形式为

$$\tilde{V_1}(x) = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right)^{-1} V_1(z) = i\sum_{m\in\mathbb{Z}} V_{1,m}e^{-imx}, \tag{60}$$

$$\tilde{V_2}(x) = -\sum_{m\in\mathbb{Z}} V_{2,m}e^{-imx} + \frac{1}{24}, \tag{61}$$

$$\tilde{V_3}(x) = -i\sum_{m\in\mathbb{Z}} V_{3,m}e^{-imx} + \frac{i}{12}\sum_{m\in\mathbb{Z}} V_{1,m}e^{-imx}, \tag{62}$$

$$\tilde{V_4}(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} V_{4,m}e^{-imx} - \frac{7}{20}\sum_{m\in\mathbb{Z}} V_{2,m}e^{-imx}. \tag{63}$$

其他内容也可以用这种方式计算。定义

$$v_n = (-i)^{n+1}\tilde{V}_{n+1}(x),\ n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{64}$$

设定 $\{,\} = -i[,]$，即可计算出泊松括号关系，

$$\begin{aligned}
&\{v_0(x), v_3(y)\} = -i[v_0(x), v_3(y)] \\
=\ & -i[\sum_{m\in\mathbb{Z}} V_{1,m}e^{-imx}, \sum_{n\in\mathbb{Z}} V_{4,n}e^{-iny} - \frac{7}{20}\sum_{n\in\mathbb{Z}} V_{2,n}e^{-iny}] \\
=\ & -i\sum_{m,n}\left(\frac{1}{2}(m+n)^3 - (m+n)^2n + \frac{3}{5}(m+n)n^2 - \frac{1}{10}n^3 - \frac{1}{4}(m+n) + \frac{1}{4}n\right) \\
& \cdot V_{1,m+n}e^{-i(m+n)x}e^{in(x-y)} \\
& -i\sum_{m,n} 3(m+n)V_{3,m+n}e^{-i(m+n)x}e^{in(x-y)} - i\sum_{m,n}(-3n)V_{3,m+n}e^{-i(m+n)x}e^{in(x-y)} \\
=\ & -\frac{1}{2}v_{0,xxx}\delta(x-y) - v_{0,xx}\partial_x\delta(x-y) - \frac{3}{5}v_{0,x}\partial_x^2\delta(x-y) - \frac{1}{10}v_0\partial_x^3\delta(x-y) \\
& +3v_{2,x}\delta(x-y) + 3v_2\partial_x\delta(x-y).
\end{aligned}$$

通过这种方式，我们还可以得到

$$\begin{aligned}
\{v_0(x), v_0(y)\} &= \partial_x \delta(x-y), \\
\{v_0(x), v_1(y)\} &= v_{0,x}\delta(x-y) + v_0\partial_x\delta(x-y), \\
\{v_0(x), v_2(y)\} &= 2v_{1,x}\delta(x-y) + 2v_1\partial_x\delta(x-y), \\
\{v_1(x), v_2(y)\} &= 2v_{2,x}\delta(x-y) + 3v_2\partial_x\delta(x-y) - \frac{1}{6}v_{0,xxx}\delta(x-y) \\
&\quad -\frac{1}{2}v_{0,xx}\partial_x\delta(x-y) - \frac{1}{2}v_{0,x}\partial_x^2\delta(x-y) - \frac{1}{6}v_0\partial_x^3\delta(x-y).
\end{aligned}$$

定义伪微分算子 L 如下:

$$L = \partial + \sum_{n=0}^{\infty} v_n \partial^{-n-1}. \tag{65}$$

哈密顿量由下式给出:

$$H_n = \frac{1}{n+1}\int \mathrm{Res} L^{n+1}\mathrm{d}x, \tag{66}$$

列出前几项:

$$\begin{aligned}
H_0 &= \int v_0 \mathrm{d}x, \\
H_1 &= \int v_1 \mathrm{d}x, \\
H_2 &= \int (v_2 + v_0^2)\mathrm{d}x, \\
H_3 &= \int (v_3 + 3v_0v_1)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

请注意，此处 L 和 H_n 的表达式与 [9], 中的相同，但场v_n 不同。

由泊松演化方程

$$\frac{\partial v_i(t,x)}{\partial t_n} = \{v_i, H_n\}, \tag{67}$$

可得 KP 层级。KP 层级的第一个方程称为 KP 方程。下面我们来计算 KP 方程:

$$\frac{\partial v_0}{\partial t_3} = -\frac{1}{2}v_{0,xxx} + 3v_{2,x} + 6v_0v_{0,x} + 3v_{1,x}, \tag{68}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t_2} = 2v_{2,x} - \frac{1}{6}v_{0,xxx} + 2v_0v_{0,x}, \tag{69}$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial t_2} = 2v_{1,x} + 2v_{0,x},, \tag{70}$$

其中，下标 x 表示对变量 x求导。由式（69）和（70），可得

$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{1}{2}\partial_x^{-1}v_{0,t_2} - v_0, \\
v_2 &= \frac{1}{4}\partial_x^{-2}v_{0,t_2t_2} - \frac{1}{2}\partial_x^{-1}v_{0,t_2} + \frac{1}{12}v_{0,xx} - \frac{1}{2}v_0^2,
\end{aligned}$$

将它们代入式（68），可得

$$v_{0,t_3} = -\frac{1}{4}v_{0,xxx} + \frac{3}{4}\partial_x^{-1}v_{0,t_2t_2} + 3v_0v_{0,x} - 3v_{0,x}. \tag{71}$$

Let

$$\frac{\partial}{\partial t} := \frac{\partial}{\partial t_3} + 3\frac{\partial}{\partial x}, \tag{72}$$

这对应于将哈密顿量 H_3 替换为 $H_3 + 3H_1$，于是上面的方程变为

$$v_{0,t} = -\frac{1}{4}v_{0,xxx} + \frac{3}{4}\partial_x^{-1}v_{0,t_2t_2} + 3v_0v_{0,x},$$

令 $y = t_2$，则我们有，

$$\frac{3}{4}v_{0,yy} = (v_{0,t} + \frac{1}{4}v_{0,xxx} - 3v_0v_{0,x})_x, \tag{73}$$

这就是 KP 方程。分别乘以常数 v_0、x、y、t 后，仍记作 v_0、x、y、t，KP 方程变为

$$\frac{3}{4}v_{0,yy} = (v_{0,t} - \frac{1}{4}v_{0,xxx} - \frac{3}{2}v_0v_{0,x})_x. \tag{74}$$

这个方程仍称为 KP 方程。令 $u = 2(\log\tau)_{xx}$，我们得到

$$3\tau_{yy}\tau - 3\tau_y\tau_y - 4\tau_{tx}\tau + 4\tau_t\tau_x + \tau_{xxxx}\tau - 4\tau_{xxx}\tau_x + 3\tau_{xx}\tau_{xx} = 0,$$

这也可以表示为

$$S^{\perp}_{\ydiagram{2,2}}\tau \cdot \tau - S^{\perp}_{\ydiagram{2,1}}\tau \cdot S^{\perp}_{\ydiagram{1}}\tau + S^{\perp}_{\ydiagram{2}}\tau \cdot S^{\perp}_{\ydiagram{1,1}}\tau = 0, \tag{75}$$

其中，S_λ 是舒尔函数，而 $S^{\perp}_{\lambda}$ 是将舒尔函数 S_λ 中的 x_n 替换为 $\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial x_n}$ 得到的，其中 $x_1 = x$、$x_2 = y$、$x_3 = t$。

将 KP 层级的 τ 函数写成如下形式

$$\tau = \sum_\lambda c_\lambda S_\lambda,$$

我们知道，系数 c_λ 满足 Pl¨ucker 关系。由 (75) 可知，第一个 Pl¨ucker 关系为

$$c_{\ydiagram{2,2}}c_\emptyset - c_{\ydiagram{2,1}}c_{\ydiagram{1}} + c_{\ydiagram{2}}c_{\ydiagram{1,1}} = 0.$$

5 Jack 多项式、KP 层级与 $W_{1+\infty}$ 代数

本节将利用第 3 节引入的 $W_{1+\infty}$ 代数构造变形 KP 层级。正如 KP 层级的 τ 函数可以表示为舒尔函数的线性组合一样，我们希望 KP 层级的 τ 函数也可以表示为 Jack 多项式的线性组合。

令 $\alpha_0 = -h_3/h_1h_2$ 和 $N = 1$为场

$$\begin{aligned}
V_1(z) &= J_1(z), \\
V_2(z) &= -h_1h_2\frac{1}{2} : J_1(z)^2 :, \\
V_3(z) &= h_1^2h_2^2\frac{1}{3} : J_1(z)^3 :, \\
V_4(z) &= -h_1^3h_2^3\left(\frac{1}{4} : J_1(z)^4 : + \frac{3 - 6\alpha_0^2h_1h_2}{20h_1h_2} : J_1'(z)^2 : + \frac{2\alpha_0^2h_1h_2 - 1}{10} : J_1''(z)J_1(z) :\right).
\end{aligned} \tag{76}$$

它们满足以下算符乘积展开

$$
\begin{aligned}
V_1(z)V_2(w) &\sim \frac{V_1(w)}{(z-w)^2},\\
V_1(z)V_3(w) &\sim \frac{2V_2(w)}{(z-w)^2},\\
V_1(z)V_4(w) &\sim \left(-\frac{3h_1h_2}{5}+\frac{6\alpha_0^2h_1^2h_2^2}{5}\right)\frac{V_1(w)}{(z-w)^4}+\left(\frac{3h_1h_2}{5}-\frac{6\alpha_0^2h_1^2h_2^2}{5}\right)\frac{V_1'(w)}{(z-w)^3}\\
&\quad+\left(3V_3(w)+\left(-\frac{h_1h_2}{10}+\frac{\alpha_0^2h_1^2h_2^2}{5}\right)V_1''(w)\right)\frac{1}{(z-w)^2},
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
V_2(z)V_1(w) &\sim \frac{V_1(w)}{(z-w)^2}+\frac{V_1'(w)}{(z-w)},\\
V_2(z)V_2(w) &\sim \frac{1/2}{(z-w)^4}+\frac{2V_2(w)}{(z-w)^2}+\frac{V_2'(w)}{(z-w)},\\
V_2(z)V_3(w) &\sim \frac{-h_1h_2V_1(w)}{(z-w)^4}+\frac{3V_3(w)}{(z-w)^3}+\frac{V_3'(w)}{(z-w)^3},\\
V_2(z)V_4(w) &\sim \left(-\frac{21h_1h_2}{5}+\frac{12\alpha_0^2h_1^2h_2^2}{5}\right)\frac{V_2(w)}{(z-w)^4}+\frac{4V_4(w)}{(z-w)^2}+\frac{V_4'(w)}{(z-w)},
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
V_3(z)V_3(w) &\sim -\frac{2}{3}h_1h_2\frac{1}{(z-w)^6}+\frac{-h_1h_2 4V_2(w)}{(z-w)^4}+\frac{-h_1h_2 2V_2'(w)}{(z-w)^3}\\
&+\left(4V_4(w)-h_1h_2\frac{3}{5}V_2''(w)+\frac{2}{5}\alpha_0^2h_1^3h_2^3(-3J_1'J_1'(w)+2J_1''J_1(w))\right)\frac{1}{(z-w)^2}\\
&+\left(2V_4'(w)-h_1h_2\frac{2}{15}V_2'''(w)+\frac{2}{5}\alpha_0^2h_1^3h_2^3(-2J_1''J_1'(w)+J_1'''J_1(w))\right)\frac{1}{(z-w)^2}.
\end{aligned}
$$

我们可以看出，当 $h_1=1$、$h_2=-1$ 时，我们有 $\alpha_0=0$，场 $V_j(z)$ 以及它们之间的算符乘积展开关系变为式 (36) 的形式。对易关系为

$$
[V_{1,n},V_{1,m}]=-\frac{N}{h_1h_2}n\delta_{n+m,0},\ [V_{1,n},V_{2,m}]=nV_{1,m+n},\ [V_{1,n},V_{3,m}]=2nV_{2,m+n},
$$

$$
[V_{1,m},V_{4,n}] = \left(-\frac{h_1h_2}{10}+\frac{\alpha_0^2h_1^2h_2^2}{5}\right)\left(5m^3+5m^2n+mn^2+m\right)V_{1,m+n}+3mV_{3,m+n},
$$

and

$$
[V_{2,m},V_{3,n}]=-h_1h_2\frac{1}{6}(m^3-m)V_{1,m+n}+(2m-n)V_{3,m+n}.
$$

我们将 $V_2(z)$ 视为共形变换的生成元。考虑

$$
z=e^{ix}, \tag{77}
$$

˜在共形变换下，场 $V_j(z)$ 变换为 $V_j(x)$，如下：

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_1(x) &= i\sum_{m\in\mathbb{Z}} V_{1,m}e^{-imx}, &(78)\\
\tilde{V}_2(x) &= -\sum_{m\in\mathbb{Z}} V_{2,m}e^{-imx}+\frac{1}{24}, &(79)\\
\tilde{V}_3(x) &= -i\sum_{m\in\mathbb{Z}} V_{3,m}e^{-imx}-\frac{ih_1h_2}{12}\sum_{m\in\mathbb{Z}} V_{1,m}e^{-imx}, &(80)\\
\tilde{V}_4(x) &= z^4V_4(z)-\left(-\frac{7h_1h_2}{20}+\frac{\alpha_0^2h_1^2h_2^2}{5}\right)z^2V_2(z)\\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} V_{4,m}e^{-imx}-\left(-\frac{7h_1h_2}{20}+\frac{\alpha_0^2h_1^2h_2^2}{5}\right)\sum_{m\in\mathbb{Z}} V_{2,m}e^{-imx}. &(81)
\end{aligned}$$

定义

$$v_n=(-i)^{n+1}\tilde{V}_{n+1}(x),\ n=0,1,2,\cdots. \tag{82}$$

令 $\{,\}=-i[,]$，泊松括号关系可以计算得到，

$$\begin{aligned}
\{v_0(x),v_3(y)\} &= \left(-\frac{h_1h_2}{10}+\frac{\alpha_0^2h_1^2h_2^2}{5}\right)(-5v_{0,xxx}\delta(x-y)-10v_{0,xx}\partial_x\delta(x-y)\\
&\quad -6v_{0,x}\partial_x^2\delta(x-y)-v_0\partial_x^3\delta(x-y))\\
&\quad +3v_{2,x}\delta(x-y)+3v_2\partial_x\delta(x-y),\\
\{v_0(x),v_0(y)\} &= -\frac{1}{h_1h_2}\partial_x\delta(x-y),\\
\{v_0(x),v_1(y)\} &= v_{0,x}\delta(x-y)+v_0\partial_x\delta(x-y),\\
\{v_0(x),v_2(y)\} &= 2v_{1,x}\delta(x-y)+2v_1\partial_x\delta(x-y),\\
\{v_1(x),v_2(y)\} &= 2v_{2,x}\delta(x-y)+3v_2\partial_x\delta(x-y)+\frac{h_1h_2}{6}v_{0,xxx}\delta(x-y)\\
&\quad +\frac{h_1h_2}{2}v_{0,xx}\partial_x\delta(x-y)+\frac{h_1h_2}{2}v_{0,x}\partial_x^2\delta(x-y)+\frac{h_1h_2}{6}v_0\partial_x^3\delta(x-y).
\end{aligned}$$

定义伪微分算子 L 为

$$L=\partial+\sum_{n=0}^{\infty}v_n\partial^{-n-1}, \tag{83}$$

以及哈密顿量，方法是

$$H_n=\frac{1}{n+1}\int \mathrm{Res}L^{n+1}\mathrm{d}x, \tag{84}$$

与上一节相同。KP 层级由泊松演化方程实现。

$$\frac{\partial v_i(t,x)}{\partial t_n}=\{v_i,H_n\}, \tag{85}$$

而 KP 方程由.....得到

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_0}{\partial t_3} &= \left(\frac{h_1h_2}{2}-\alpha_0^2h_1^2h_2^2\right)v_{0,xxx}+3v_{2,x}+6v_0v_{0,x}-\frac{1}{h_1h_2}3v_{1,x}, &(86)\\
\frac{\partial v_1}{\partial t_2} &= 2v_{2,x}+\frac{h_1h_2}{6}v_{0,xxx}+2v_0v_{0,x}, &(87)\\
\frac{\partial v_0}{\partial t_2} &= 2v_{1,x}-\frac{1}{h_1h_2}2v_{0,x}, &(88)
\end{aligned}$$

由式 (87) 和式 (88)，我们得到

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{2}\partial_x^{-1}v_{0,t_2} + \frac{1}{h_1h_2}v_0, \\ v_2 &= \frac{1}{4}\partial_x^{-2}v_{0,t_2t_2} + \frac{1}{2h_1h_2}\partial_x^{-1}v_{0,t_2} - \frac{h_1h_2}{12}v_{0,xx} - \frac{1}{2}v_0^2, \end{aligned}$$

将它们代入 (86)，得到

$$v_{0,t_3} = \left(\frac{h_1h_2}{4} - \alpha_0^2h_1^2h_2^2\right)v_{0,xxx} + \frac{3}{4}\partial_x^{-1}v_{0,t_2t_2} + 3v_0v_{0,x} - \frac{1}{h_1^2h_2^2}3v_{0,x}. \tag{89}$$

Let

$$\frac{\partial}{\partial t} := \frac{\partial}{\partial t_3} + \frac{1}{h_1^2h_2^2}3\frac{\partial}{\partial x}, \tag{90}$$

这对应于将哈密顿量 H_3 替换为 $H_3 + \frac{1}{h_1^2h_2^2}3H_1$，于是上式变为

$$v_{0,t} = \left(\frac{h_1h_2}{4} - \alpha_0^2h_1^2h_2^2\right)v_{0,xxx} + \frac{3}{4}\partial_x^{-1}v_{0,t_2t_2} + 3v_0v_{0,x},$$

令 $y = t_2$，则有，

$$\frac{3}{4}v_{0,yy} = \left(v_{0,t} - \left(\frac{h_1h_2}{4} - \alpha_0^2h_1^2h_2^2\right)v_{0,xxx} - 3v_0v_{0,x}\right)_x, \tag{91}$$

这就是 KP 方程。显然，当$h_1 = 1$、$h_2 = -1$时，它便成为上一节中的 KP 层级。将 v_0、x、y、t 分别乘以一个常数，并仍记为v_0、x、y、t，则 KP 方程变为

$$\frac{3}{4}v_{0,yy} = \left(v_{0,t} + \left(\frac{h_1h_2}{4} - \alpha_0^2h_1^2h_2^2\right)v_{0,xxx} - \frac{3}{2}v_0v_{0,x}\right)_x. \tag{92}$$

Let

$$u = -(h_1h_2 - 4h_3^2)2(\log\tau)_{xx},$$

得到

$$\begin{aligned} &3\tau_{yy}\tau - 3\tau_y\tau_y - 4\tau_{tx}\tau + 4\tau_t\tau_x \\ &- \left(h_1h_2 - 4h_3^2\right)\left(\tau_{xxxx}\tau - 4\tau_{xxx}\tau_x + 3\tau_{xx}\tau_{xx}\right) = 0. \end{aligned}$$

附录 B 中回顾了 Jack 多项式 Y_λ，我们用 $Y_\lambda^\perp$表示将 Y_λ 中的 x_n 替换为 $\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial x_n}$后得到的算子，这与舒尔函数的情形类似。

于是，变形 KP 方程可以写成

$$
\begin{aligned}
&(3h_1+4h_2)(h_1+h_2)\left(Y^{\perp}_{\square\square\square\square}\tau\right)\cdot\tau+(3h_2+4h_1)(h_1+h_2)\left(Y^{\perp}_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}}\tau\right)\cdot\tau\\
&+\frac{2(3h_1+4h_2)(h_1+h_2)(2h_1-h_2)}{h_1-h_2}\left(Y^{\perp}_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}\,h_1,2h_1,h_2}\tau\right)\cdot\tau\\
&+\frac{2(3h_2+4h_1)(h_1+h_2)(2h_2-h_1)}{h_2-h_1}\left(Y^{\perp}_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}\,h_2,2h_2,h_1}\tau\right)\cdot\tau\\
&+\frac{3(5h_1^2+4h_1h_2+5h_2^2)(h_1-h_2)}{h_1-2h_2}\left(Y^{\perp}_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\square\end{smallmatrix}\,h_1,h_2,h_1+h_2}\tau\right)\cdot\tau\\
&-4(3h_1+4h_2)(h_1+h_2)\left(Y^{\perp}_{\square\square\square}\tau\right)\cdot\left(Y^{\perp}_{\square}\tau\right)\\
&-\frac{6(8h_1^2+13h_1h_2+8h_2^2)(h_1-h_2)}{h_1-2h_2}\left(Y^{\perp}_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}\,h_1,h_2}\tau\right)\cdot\left(Y^{\perp}_{\square}\tau\right)\\
&-4(3h_2+4h_1)(h_1+h_2)\left(Y^{\perp}_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}}\tau\right)\cdot\left(Y^{\perp}_{\square}\tau\right)\\
&+3(3h_1+4h_2)(h_1+h_2)\left(Y^{\perp}_{\square\square}\tau\right)\cdot\left(Y^{\perp}_{\square\square}\tau\right)\\
&+12(h_1^2+h_1h_2+h_2^2)\left(Y^{\perp}_{\square\square}\tau\right)\cdot\left(Y^{\perp}_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}}\tau\right)\\
&+3(3h_2+4h_1)(h_1+h_2)\left(Y^{\perp}_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}}\tau\right)\cdot\left(Y^{\perp}_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}}\tau\right)=0.
\end{aligned}
\tag{93}
$$

将变形 KP 层级的 τ 函数写成如下形式

$$\tau=\sum_{\lambda}c_\lambda Y_\lambda,$$

我们看到，系数 c_λ 满足 Pl¨ucker 关系。由 (75) 可知，第一个 Pl¨ucker 关系为

$$
\begin{aligned}
&(3h_1+4h_2)(h_1+h_2)c_{\square\square\square\square}c_\emptyset+(3h_2+4h_1)(h_1+h_2)c_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}}c_\emptyset\\
&+\frac{2(3h_1+4h_2)(h_1+h_2)(2h_1-h_2)}{h_1-h_2}c_{\begin{smallmatrix}\square\square\square\\\square\end{smallmatrix}\,h_1,2h_1,h_2}c_\emptyset\\
&+\frac{2(3h_2+4h_1)(h_1+h_2)(2h_2-h_1)}{h_2-h_1}c_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\square\\\square\end{smallmatrix}\,h_2,2h_2,h_1}c_\emptyset\\
&+\frac{3(5h_1^2+4h_1h_2+5h_2^2)(h_1-h_2)}{h_1-2h_2}c_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\square\end{smallmatrix}\,h_1,h_2,h_1+h_2}c_\emptyset\\
&-4(3h_1+4h_2)(h_1+h_2)c_{\square\square\square}c_{\square}\\
&-\frac{6(8h_1^2+13h_1h_2+8h_2^2)(h_1-h_2)}{h_1-2h_2}c_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}\,h_1,h_2}c_{\square}\\
&-4(3h_2+4h_1)(h_1+h_2)c_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}}c_{\square}+3(3h_1+4h_2)(h_1+h_2)c_{\square\square}c_{\square\square}\\
&+12(h_1^2+h_1h_2+h_2^2)c_{\square\square}c_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}}+3(3h_2+4h_1)(h_1+h_2)c_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}}c_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}}=0.
\end{aligned}
\tag{94}
$$

显然，当 $h_1=1$、$h_2=-1$时，KP 方程 (93) 变为 KP 方程 (75)，Pl¨ucker 关系 (94) 变为 KP 层级的第一个 Pl¨ucker 关系。

注意到，本节中的结果都关于 x-轴和 y-轴对称，也就是说，它们关于 h_1 和 h_2对称。若取 $h_1=\sqrt{\alpha}$、$h_2=-1/\sqrt{\alpha}$，结果就变为通常的 Jack 多项式情形。

6 3-Jack 多项式、KP 层级和 $W_{1+\infty}$ 代数

我们考虑沿 z-轴方向至多具有 N 层的三维杨图。场 $J_j(z)$ 是当 $j=1$=2,$\cdots$,N时，三维杨图在切片$z=j$上的二维杨图所对应的玻色场。这些场[18]

$$
\begin{aligned}
V_1(z) &= J_1(z)+J_2(z)+\cdots+J_N(z), && (95)\\
V_2(z) &= -\frac{h_1h_2}{2}\sum_{j=1}^{N}:J_j(z)J_j(z):+\frac{h_3}{2}\sum_{j=1}^{N}(N+1-2j)J_j'(z), && (96)\\
V_3(z) &= -\frac{1}{3}h_1^2h_2^2\sum_{j=1}^{N}:J_1(z)^3:+\frac{1}{2}\alpha_0h_1^2h_2^2\sum_{j<k}J_jJ_k'(z)-\frac{1}{2}\alpha_0h_1^2h_2^2\sum_{j<k}J_j'J_k(z)\\
&\quad -\frac{1}{2}\alpha_0h_1^2h_2^2\sum_{j=1}^{N}(N+1-2j)J_j'J_j(z)\\
&\quad +\alpha_0^2h_1^2h_2^2\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{(j-1)(N-j)}{2}-\frac{(N-1)(N-j)}{12}\right)J_j''(z), && (97)
\end{aligned}
$$

它们分别等于式（47-49）中的 $V_j(z)$，而 $V_4(z)$ 则在（56）中引入。它们之间的算符乘积展开已在第 3 节给出。对易关系为

$$
[V_{1,n},V_{1,m}]=-\frac{N}{h_1h_2}n\delta_{n+m,0},\ [V_{1,n},V_{2,m}]=nV_{1,m+n},\ [V_{1,n},V_{3,m}]=2nV_{2,m+n},
$$

$$
\begin{aligned}
[V_{1,m},V_{4,n}] &= \frac{h_1h_2(-1+{\alpha_0}^2h_1h_2\left(N^2+1\right))}{10}\left(5m^3+5m^2n+mn^2+m\right)V_{1,m+n}\\
&\quad +3mV_{3,m+n},
\end{aligned}
$$

and

$$
[V_{2,m},V_{3,n}]=-h_1h_2(1+(N+1)(N-1)\alpha_0^2h_1h_2)\frac{1}{6}(m^3-m)V_{1,m+n}+(2m-n)V_{3,m+n}.
$$

类似地，我们将 $V_2(z)$ 视为共形变换的生成元。考虑

$$
z=e^{ix}, \qquad (98)
$$

˜在共形变换下，场 $V_j(z)$ 变换为 $V_j(x)$，其形式为

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_1(x) &= i\sum_{m\in\mathbb{Z}} V_{1,m}e^{-imx},\\
\tilde{V}_2(x) &= -\sum_{m\in\mathbb{Z}} V_{2,m}e^{-imx} + \frac{N+h_1h_2\alpha_0^2N(N+1)(N-1)}{24},\\
\tilde{V}_3(x) &= -i\sum_{m\in\mathbb{Z}} V_{3,m}e^{-imx} - \frac{ih_1h_2(1+(N+1)(N-1)\alpha_0^2h_1h_2)}{12}\sum_{m\in\mathbb{Z}} V_{1,m}e^{-imx},\\
\tilde{V}_4(x) &= z^4V_4(z) + \frac{h_1h_2(7+\alpha_0^2h_1h_2(3N^2-7))}{20}z^2V_2(z)\\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} V_{4,m}e^{-imx} + \frac{h_1h_2(7+\alpha_0^2h_1h_2(3N^2-7))}{20}\sum_{m\in\mathbb{Z}} V_{2,m}e^{-imx}. \qquad (99)
\end{aligned}$$

定义

$$v_n = (-i)^{n+1}\tilde{V}_{n+1}(x),\ n=0,1,2,\cdots. \qquad (100)$$

令 $\{,\} = -i[,]$，即可计算泊松括号关系，

$$\begin{aligned}
\{v_0(x), v_3(y)\} &= \frac{h_1h_2(-1+\alpha_0{}^2h_1h_2\left(N^2+1\right))}{10}\left(-5v_{0,xxx}\delta(x-y) - 10v_{0,xx}\partial_x\delta(x-y)\right.\\
&\quad \left. -6v_{0,x}\partial_x^2\delta(x-y) - v_0\partial_x^3\delta(x-y)\right) + 3v_{2,x}\delta(x-y) + 3v_2\partial_x\delta(x-y),\\
\{v_0(x)\ v_0(y)\} &= -\frac{N}{h_1h_2}\partial_x\delta(x-y),\\
\{v_0(x)\ v_1(y)\} &= v_{0,x}\delta(x-y) + v_0\partial_x\delta(x-y),\\
\{v_0(x)\ v_2(y)\} &= 2v_{1,\ x}\delta(x-y)\ + 2v_1\partial_x\delta(x-y),\\
\{v_1(x)\ v_2(y)\} &= 2v_{2,x}\delta(x-y) + 3v_2\partial_x\delta(x-y)\ + h_1h_2(1+(N+1)(N-1)\alpha_0^2h_1h_2)\\
&\quad \cdot\left(\frac{1}{6}v_{0,xxx}\delta(x-y) + \frac{1}{2}v_{0,xx}\partial_x\delta(x-y) + \frac{1}{2}v_{0,x}\partial_x^2\delta(x-y) + \frac{1}{6}v_0\partial_x^3\delta(x-y)\right).
\end{aligned}$$

像之前一样定义伪微分算子 L 和哈密顿量。KP 层级可以描述为泊松演化方程

$$\frac{\partial v_i(t,x)}{\partial t_n} = \{v_i, H_n\}. \qquad (101)$$

为得到 KP 方程，我们计算

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_0}{\partial t_3} &= \frac{h_1h_2(1-\alpha_0{}^2h_1h_2\left(N^2+1\right))}{2}v_{0,xxx} + 3v_{2,x} + 6v_0v_{0,x} - \frac{N}{h_1h_2}3v_{1,x}, \qquad (102)\\
\frac{\partial v_1}{\partial t_2} &= 2v_{2,x} + \frac{h_1h_2(1+(N+1)(N-1)\alpha_0^2h_1h_2)}{6}v_{0,xxx} + 2v_0v_{0,x}, \qquad (103)\\
\frac{\partial v_0}{\partial t_2} &= 2v_{1,x} - \frac{N}{h_1h_2}2v_{0,x}, \qquad (104)
\end{aligned}$$

由 (103) 和 (104)，我们得到

$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{1}{2}\partial_x^{-1}v_{0,t_2} + \frac{N}{h_1h_2}v_0,\\
v_2 &= \frac{1}{4}\partial_x^{-2}v_{0,t_2t_2} + \frac{N}{2h_1h_2}\partial_x^{-1}v_{0,t_2} - \frac{h_1h_2(1+(N+1)(N-1)\alpha_0^2h_1h_2)}{12}v_{0,xx} - \frac{1}{2}v_0^2,
\end{aligned}$$

将它们代入（102），得到

$$v_{0,t_3}=\frac{h_1h_2-\alpha_0^2h_1^2h_2^2(3N^2+1)}{4}v_{0,xxx}+\frac{3}{4}\partial_x^{-1}v_{0,t_2t_2}+3v_0v_{0,x}-\frac{N^2}{h_1^2h_2^2}3v_{0,x}. \tag{105}$$

Let

$$\frac{\partial}{\partial t}:=\frac{\partial}{\partial t_3}+\frac{N^2}{h_1^2h_2^2}3\frac{\partial}{\partial x}, \tag{106}$$

这对应于将哈密顿量 H_3 替换为 $H_3+\frac{N^2}{h_1^2h_2^2}3H_1$，那么上面的方程变为

$$v_{0,t}=\frac{h_1h_2-\alpha_0^2h_1^2h_2^2(3N^2+1)}{4}v_{0,xxx}+\frac{3}{4}\partial_x^{-1}v_{0,t_2t_2}+3v_0v_{0,x},$$

令 $y=t_2$，则我们有

$$\frac{3}{4}v_{0,yy}=\left(v_{0,t}-\frac{h_1h_2-\alpha_0^2h_1^2h_2^2(3N^2+1)}{4}v_{0,xxx}-3v_0v_{0,x}\right)_x, \tag{107}$$

这是 KP 方程。显然，当$N=1$时，它在上一节中变为 KP 层级。由（99）可知,

$$v_0(x)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}(a_{1,m}+a_{2,m}+\cdots+a_{N,m})e^{-imx}.$$

Let

$$v_{j,0}(x)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}a_{j,m}e^{-imx},$$

它与三维杨图在平面 $z=j$ 上的切片相关联，因此

$$v_0=v_{1,0}+v_{2,0}+\cdots+v_{N,0}.$$

分别乘以常数后，仍记为 v_0、 x、 y、 t，3-KP方程变为

$$\frac{3}{4}v_{0,yy}=\left(v_{0,t}+\frac{h_1h_2-\alpha_0^2h_1^2h_2^2(3N^2+1)}{4}v_{0,xxx}-\frac{3}{2}v_0v_{0,x}\right)_x. \tag{108}$$

这个方程仍然称为 KP 方程。设

$$u=-(h_1h_2-(3N^2+1)h_3^2)2(\log\tau)_{xx},$$

我们得到

$$\begin{aligned}&3\tau_{yy}\tau-3\tau_y\tau_y-4\tau_{tx}\tau+4\tau_t\tau_x\\&-\left(h_1h_2-(3N^2+1)h_3^2\right)(\tau_{xxxx}\tau-4\tau_{xxx}\tau_x+3\tau_{xx}\tau_{xx})=0.\end{aligned}$$

这个双线性形式的方程也可以用 3-Jack 多项式表示，类似于（75）和（93）。

请注意，本节中的 KP 方程关于 x轴和 y轴对称，也就是说，它关于 h_1 和 h_2对称，但 z轴是特殊的，这是因为我们沿着 z轴将三维杨图切分成一系列二维杨图。如果沿着 y轴进行切分，结果将关于 x轴和 z轴对称，反之亦然。实际上，本节中的 KP 方程关于 x轴、 y轴和 z轴对称。

下面，我们展示 KP 方程的形式，以及$W_{1+\infty}$ 代数中关于 x、 y、 z轴对称的场的算符乘积展开，也就是说，它们具有对称性。

关于 h_1、 h_2 和 h_3。从仿射 Yangian 在三维杨图上的 $\mathfrak{gl}(1)$ 表示中，我们看到生成元 ψ_j、 e_j、 f_j 以及系数 σ_2、 σ_3 关于 h_1、 h_2 和 h_3 对称。

Let

$$\psi_0 = -\frac{N}{h_1 h_2},$$

我们有

$$\begin{aligned} & k^2 N + h_1 h_2 \alpha_0^2 N(N+k)(N-k) \\ = \; & k^3 - (k+\psi_0 h_1 h_2)(k+\psi_0 h_1 h_3)(k+\psi_0 h_2 h_3) \\ = \; & -(k^2 \psi_0 \sigma_2 + \psi_0^3 \sigma_3^2) \end{aligned}$$

对于任意数值 k。公式 (50) 中的算符乘积展开变为

$$V_1(z)V_1(w) \sim \frac{\psi_0}{(z-w)^2}. \tag{109}$$

式（52）中的算符乘积展开变为

$$V_2(z)V_2(w) \sim \frac{-(\psi_0\sigma_2 + \psi_0^3\sigma_3^2)}{2(z-w)^4} + \frac{2V_2(w)}{(z-w)^2} + \frac{V_2'(w)}{z-w}. \tag{110}$$

式（54）中的算符乘积展开（OPE）变为

$$V_2(z)V_3(w) \sim \frac{-(\sigma_2 + \psi_0^2\sigma_3^2)V_1(w)}{(z-w)^4} + \frac{3V_3(w)}{(z-w)^2} + \frac{V_3'(w)}{(z-w)}. \tag{111}$$

（57）中的算符乘积展开变为

$$\begin{aligned} V_1(z)V_4(w) \quad \sim \quad & \frac{-3\sigma_2 + 3\psi_0^2\sigma_3^2}{5}\frac{V_1(w)}{(z-w)^4} + \frac{3\sigma_2 - 3\psi_0^2\sigma_3^2}{5}\frac{V_1'(w)}{(z-w)^3} \\ & + \frac{3V_3(w)}{(z-w)^2} + \frac{-\sigma_2 + \psi_0^2\sigma_3^2}{10}\frac{V_1''(w)}{(z-w)^2}. \end{aligned} \tag{112}$$

式 (58) 中的算符乘积展开变为

$$V_2(z)V_4(w) \quad \sim \quad \frac{(21\sigma_2 - 9\psi_0^2\sigma_3^2)V_2(w)}{5(z-w)^4} + \frac{4V_4(w)}{(z-w)^2} + \frac{V_4'(w)}{(z-w)}. \tag{113}$$

然后，通过类似的计算，KP 方程（108）变为

$$\frac{3}{4}v_{0,yy} = \left(v_{0,t} + \frac{\sigma_2 - 3\psi_0^2\sigma_3^2}{4}v_{0,xxx} - \frac{3}{2}v_0 v_{0,x}\right)_x. \tag{114}$$

这个方程仍称为 KP 方程。设

$$u = -(\sigma_2 - 3\psi_0^2\sigma_3^2)2(\log\tau)_{xx},$$

我们得到

$$\begin{aligned} & 3\tau_{yy}\tau - 3\tau_y\tau_y - 4\tau_{tx}\tau + 4\tau_t\tau_x \\ & - \left(\sigma_2 - 3\psi_0^2\sigma_3^2\right)\left(\tau_{xxxx}\tau - 4\tau_{xxx}\tau_x + 3\tau_{xx}\tau_{xx}\right) = 0. \end{aligned} \tag{115}$$

我们可以发现，形式为 (114) 和 (115) 的 KP 方程关于h_1、 h_2 和 h_3对称。

7 玻色子福克空间与费米子福克空间之间的对应关系

本节将展示三种情形下玻色子福克空间与费米子福克空间之间的对应关系：舒尔函数、Jack 多项式和 3-Jack 多项式。

7.1 关于 Schur 函数

费米子福克表示空间 $\mathcal{F}$ 是玛雅图的空间。玛雅图由沿实直线排列的黑白石子组成，约定在远离右侧的位置所有石子都是黑色，而在远离左侧的位置所有石子都是白色。例如，下面就是一幅玛雅图[4]

$$\begin{array}{cccccccccccc} \cdots & \circ & \circ & \bullet & \bullet & \circ & \bullet & \circ & \bullet & \bullet & \cdots \\ & -\frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} & \frac{9}{2} & \end{array} \tag{116}$$

将半整数 $k_1, k_2, \cdots$ 记作黑色石子的位置，则玛雅图可描述为一个递增的半整数序列

$$\mathbf{k} = \{k_n\}_{n\geq 1} \quad \text{with} \quad k_1 < k_2 < k_3 < \cdots .$$

(116) 中的玛雅图记作

$$-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \cdots$$

将玛雅图的荷 p定义为右半直线上白色石子的数量减去左半直线上黑色石子的数量。例如，(116) 中玛雅图的荷为零。基向量写作 $|\mathbf{k}\rangle$。特别地，

$$|0\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \cdots\rangle. \tag{117}$$

费米子在 $\mathcal{F}$ 上的左作用定义如下：

$$\psi_j|\mathbf{k}\rangle = \begin{cases} (-1)^{n-1}|\cdots, k_{n-1}, k_{n+1}, \cdots\rangle & \text{if } k_n = -j; \\ 0 & \text{otherwise;} \end{cases} \tag{118}$$

$$\psi_j^*|\mathbf{k}\rangle = \begin{cases} (-1)^{n}|\cdots, k_{n}, j, k_{n+1}, \cdots\rangle & \text{if } k_n < j < k_{n+1}; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{119}$$

那么，费米子 ψ_j^*、 ψ_j、 $j \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ 满足反对易关系

$$\psi_j\psi_k + \psi_k\psi_j = 0, \quad \psi_j^*\psi_k^* + \psi_k^*\psi_j^* = 0, \quad \psi_j^*\psi_k + \psi_k\psi_j^* = \delta_{j+k,0}. \tag{120}$$

定义[16, 19]

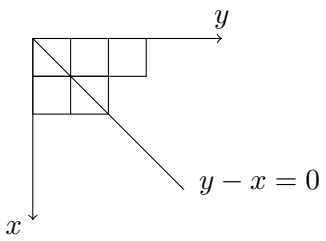
$$\gamma_m =: \psi_{-(m+\frac{1}{2})}\psi^*_{m-\frac{1}{2}} :, \quad \gamma_m^* =: \psi_{-m+\frac{1}{2}}\psi^*_{m+\frac{1}{2}} : . \tag{121}$$

那么它们满足

$$\gamma_i^2 = 0, \ \gamma_i^{*2} = 0, \ \text{and } \gamma_i\gamma_j = \gamma_j\gamma_i, \ \gamma_i^*\gamma_j^* = \gamma_j^*\gamma_i^*, \quad \text{if } |i-j| > 1. \tag{122}$$

众所周知，带电零玛雅图空间与二维杨图空间[4]同构。设带电零玛雅图 $|\mathbf{k}\rangle$ 对应于

二维杨图 λ。算子 γ_m （分别为 γ_m^*）作用于 $|\mathbf{k}\rangle$，对应于算子作用于 λ，在第 $y-x=m$ 行添加（分别移除）一个方格，仍记作 γ_m （分别为 γ_m^*）。



定义

$$H_n = \sum_j [[[\gamma_j^*, \gamma_{j+1}^*], \cdots, \gamma_{j+n-1}^*], \gamma_{j+n}^*] \tag{123}$$

and

$$H(\{p_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n H_n}{n}. \tag{124}$$

玻色子福克空间 $\mathbb{C}[p_1, p_2, \cdots]$ 是舒尔函数的空间。我们定义费米子福克空间与玻色子福克空间之间的映射σ 为

$$\sigma(|\mathbf{k}\rangle) = \langle 0|e^{H(\{p_n\})}|\mathbf{k}\rangle. \tag{125}$$

该映射与书籍 [4]中的 Φ （5.15）相同。因此，该映射给出了费米子福克空间与玻色子福克空间之间的同构。由于

$$e^{H(p)} = \sum_{\lambda} S_\lambda(\{p_n\}) S_\lambda^{\perp}(\{H_n\}),$$

其中 $\perp$ 表示 $S_\lambda^{\perp}(\{H_n\})$是一个湮灭算符。令 $|\mathbf{k}\rangle = |\lambda\rangle$ （该等式表示带电零玛雅图空间与二维杨图空间之间的同构），

$$\sigma(|\lambda\rangle) = \langle 0|e^{H(\{p_n\})}|\lambda\rangle = S_\lambda(\{p_n\}),$$

and

$$\sigma(\gamma_m|\lambda\rangle) = \sigma(|\lambda + \square_m\rangle) = S_{\lambda+\square_m}(\{p_n\}),$$

其中，若在第 $y-x=m$ 行添加一个方格后得到的杨图为 $\lambda+\square_m$，且该方格可以添加，则取该值；若该方格不可添加，则取零。

7.2 关于杰克多项式

我们令 $\psi_0 = -\frac{1}{h_1 h_2}$，其中 ψ_0 是 $\mathfrak{gl}(1)$ 的仿射 Yangian 中的一个生成元。因此，在 $\mathfrak{gl}(1)$ 的仿射 Yangian 的表示空间中，沿 z 轴方向具有多层的三维杨图会变为零，因此，在这种特殊情况下， $\mathfrak{gl}(1)$ 的仿射 Yangian 的表示空间变为二维杨图空间。

令费米子福克空间为玛雅图空间，玻色空间为 Jack 多项式 Y_λ 的空间。我们知道 [16, 19]

$$f_0 = -\sum_m \gamma_m^*, \ f_1 = -\sum_m m\gamma_m^*.$$

定义

$$\mathcal{H}_n = -\frac{1}{(n-1)!} \mathrm{ad}_{f_1}^{n-1} f_0, \tag{126}$$

and

$$\mathcal{H}(\{p_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n H_n}{n\psi_0}. \tag{127}$$

定义算子 $Y_\lambda^\perp$通过

$$\langle Y_\lambda Y_\mu, Y_\nu\rangle = \langle Y_\mu, Y_\lambda^\perp Y_\mu\rangle \tag{128}$$

与舒尔函数的情形相同。例如，我们有

$$\begin{aligned} Y_\square^\perp Y_{\square\square} &= \psi_0 \frac{\partial}{\partial p_n}\left(\frac{1}{h_1-h_2}p_2 - \frac{h_2}{h_1-h_2}p_1^2\right) \\ &= \frac{2}{h_1(h_1-h_2)}p_1 = \frac{\langle Y_{\square\square}, Y_{\square\square}\rangle}{\langle Y_\square, Y_\square\rangle} Y_\square, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_\square^\perp Y_{\substack{\square\square \\ h_1h_2}} &= \psi_0 \frac{\partial}{\partial p_n}\frac{1}{h_2-2h_1}\frac{1}{h_1-h_2}(2p_3 - 2(h_1+h_2)p_1p_2 + 2h_1h_2p_1^3) \\ &= -\frac{1}{h_1h_2}\frac{1}{(h_2-2h_1)(h_1-h_2)}(6h_1h_2p_1^2 - 2(h_1+h_2)p_2) \\ &= \frac{2(2h_2-h_1)}{h_2(h_2-2h_1)(h_2-h_1)}Y_{\square\square} + \frac{2}{h_1(h_1-h_2)}Y_{\square} \\ &= \frac{\langle Y_{\substack{\square\square \\ h_1h_2}}, Y_{\substack{\square\square \\ h_1h_2}}\rangle}{\langle Y_{\square\square}, Y_{\square\square}\rangle}Y_{\square\square} + \frac{\varphi(h_2-h_1)\langle Y_{\substack{\square\square \\ h_2h_1}}, Y_{\substack{\square\square \\ h_2h_1}}\rangle}{\langle Y_{\square}, Y_{\square}\rangle}Y_{\square}, \end{aligned}$$

and

$$Y_\square^\perp Y_{\substack{\square\square \\ h_2h_1}} = \frac{\varphi(h_1-h_2)\langle Y_{\substack{\square\square \\ h_1h_2}}, Y_{\substack{\square\square \\ h_1h_2}}\rangle}{\langle Y_{\square\square}, Y_{\square\square}\rangle}Y_{\square\square} + \frac{\langle Y_{\substack{\square\square \\ h_2h_1}}, Y_{\substack{\square\square \\ h_2h_1}}\rangle}{\langle Y_{\square}, Y_{\square}\rangle}Y_{\square}.$$

一般而言，

$$Y_\lambda^\perp Y_\mu = \frac{\langle Y_\mu, Y_\mu\rangle}{\langle Y_{\mu/\lambda}, Y_{\mu/\lambda}\rangle}Y_{\mu/\lambda}.$$

我们定义映射 σ，将费米子福克空间（玛雅图的空间）映到玻色子福克空间（Jack 多项式 Y_λ 的空间）：

$$\sigma(|\mathbf{k}\rangle) = \langle 0|e^{\mathcal{H}(\{p_n\})}|\mathbf{k}\rangle. \tag{129}$$

该映射将费米子福克空间的基映到玻色子福克空间的基。由于

$$e^{\mathcal{H}(p)} = \sum_\lambda \frac{1}{\langle Y_\lambda, Y_\lambda\rangle}Y_\lambda(\{p_n\})Y_\lambda^\perp(\{\mathcal{H}_n\}).$$

设 $|\mathbf{k}\rangle = |\lambda\rangle$ （该等式在带电零玛雅图空间与二维杨图空间之间的同构下成立），

$$\sigma(|\lambda\rangle) = \langle 0|e^{\mathcal{H}(\{p_n\})}|\lambda\rangle = Y_\lambda(\{p_n\}),$$

and

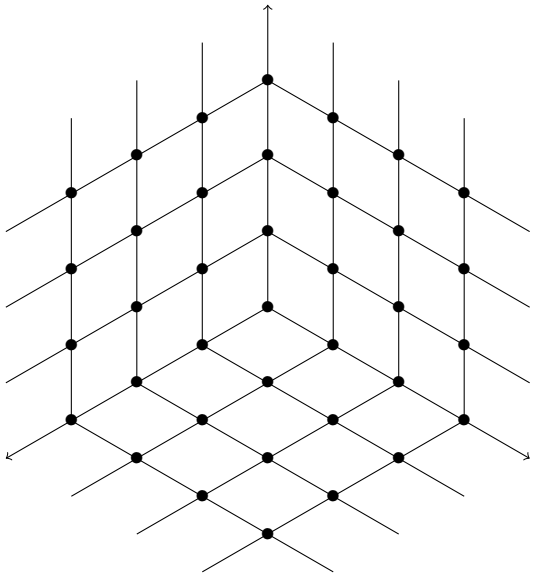
$$\sigma(\gamma_m|\lambda\rangle) = \sigma(|\lambda+\square_m\rangle) = Y_{\lambda+\square_m}(\{p_n\}).$$

注意，这里的 $\langle\mathbf{k}'|\mathbf{k}\rangle$ 不等于 $\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$，而是等于 $\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$ 乘以 $\langle Y_\lambda, Y_\lambda\rangle$，其中$|\mathbf{k}\rangle = |\lambda\rangle$ 是在带电零玛雅图空间与二维杨图空间的同构下。

我们可以看到，当 $h_1 = 1, h_2 = -1$ 时，本小节中的结果与上一小节中的结果一致。

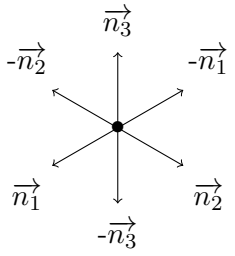
7.3 关于 3-Jack 多项式

我们回顾三维费米子 Fock 空间和三维玻色子 Fock 空间。三维玻色子 Fock 空间 $\mathbb{C}[\{P_{n,j\leq n}|n,j=1,2,\cdots\}]$ 是 3-Jack 多项式[20]的空间。三维费米子 Fock 空间中的元素是平面上具有以下形式的图形[21]



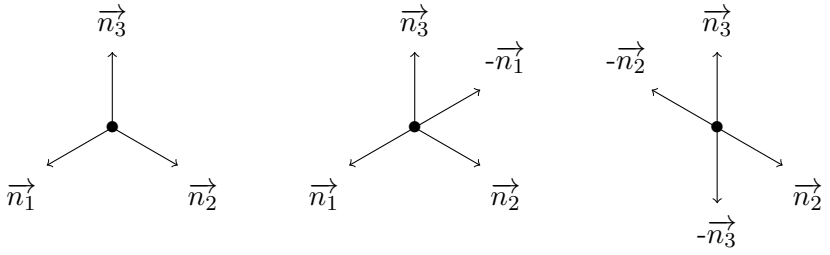
(130)

这个态是真空态，记作 $|0\rangle$。黑点称为顶点。在每个顶点 $\vec{m}$ 处，有六条半直线将它与相邻顶点连接起来：



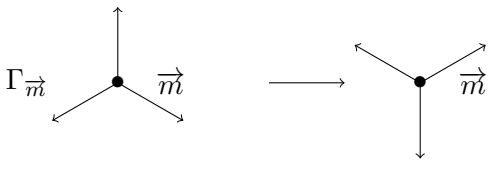
(131)

其中 $\vec{n_1}=(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2})$、$\vec{n_2}=(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2})$、$\vec{n_3}=(0,1)$。$\vec{m}$ 处的态由上方的一些箭头表征。例如，$\vec{m}$ 处的态可以是



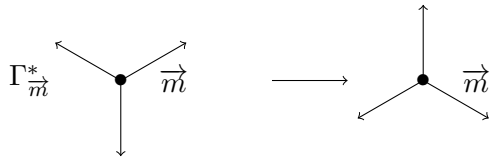
(132)

等等。三维费米子 Fock 空间中的其他元素可以通过三维费米子作用于真空态得到。三维费米子 $\Gamma_{\vec{m}}$ 和 $\Gamma^*_{\vec{m}}$（分别对应二维杨图的 γ_m 和 γ^*_m）对态的作用为



(133)

and



(134)

它们将其他态映为零。由此可知，三维费米子 Fock 空间与三维杨图空间同构。我们也用 π 表示三维费米子 Fock 空间中的元素。

由 [16], 可知，生成元 e_j、 f_j、 ψ_j 可以由 $\Gamma_{\vec{m}}$ 和 $\Gamma^*_{\vec{m}}$ 表示:

$$e_j = \sum_{\vec{m}} m^j \Gamma_{\vec{m}}, \quad f_j = -\sum_{\vec{m}} m^j \Gamma^*_{\vec{m}}, \quad \psi_j = \sum_{\vec{m}} m^j [\Gamma^*_{\vec{m}}, \Gamma_{\vec{m}}].$$

在 [18], 中，我们构造了三维玻色子 $b_{n,\ j}$ 并展示了$b_{n,\ j}$ 与$V_{j,\ n}$ 代数的生成元之间的关系，并发现变量$P_{n,\ j} = b_{n,\ j}|0\rangle$. 。 $\mathfrak{gl}(1)$ 的仿射 Yangian 与 $W_{1+\infty}$[22]的泛包络代数同构。因此，三维玻色子 $b_{n,\ j}$ 可以由$\Gamma_{\vec{m}}$ 和 $\Gamma^*_{\vec{m}}$表示，例如，

$$\begin{aligned} b_{-n,1} &= \frac{1}{(n-1)!} \mathrm{ad}^{n-1}_{(\sum_{\vec{m}} m\Gamma_{\vec{m}})} \left(\sum_{\vec{m}} \Gamma_{\vec{m}} \right), \\ b_{n,1} &= -\frac{1}{(n-1)!} \mathrm{ad}^{n-1}_{(-\sum_{\vec{m}} m\Gamma^*_{\vec{m}})} \left(-\sum_{\vec{m}} m^j \Gamma^*_{\vec{m}} \right) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} b_{-(n+1),2} &= \frac{1}{(n-1)!} \mathrm{ad}^{n-1}_{(\sum_{\vec{m}} m\Gamma_{\vec{m}})} \left([\left(\sum_{\vec{m}} m^2 \Gamma_{\vec{m}} \right), \left(\sum_{\vec{m}} \Gamma_{\vec{m}} \right)] \right. \\ &\quad \left. -\sigma_3 [\left(\sum_{\vec{m}} m\Gamma_{\vec{m}} \right), \left(\sum_{\vec{m}} \Gamma_{\vec{m}} \right)] \right) - \sum_{i+j=-(n+1)} :b_{i,1} b_{j,1}:, \\ b_{n+1,2} &= -\frac{1}{(n-1)!} \mathrm{ad}^{n-1}_{(-\sum_{\vec{m}} m\Gamma^*_{\vec{m}})} \left([\left(\sum_{\vec{m}} m^2 \Gamma^*_{\vec{m}} \right), \left(-\sum_{\vec{m}} \Gamma^*_{\vec{m}} \right)] \right. \\ &\quad \left. -\sigma_3 [\left(-\sum_{\vec{m}} m\Gamma^*_{\vec{m}} \right), \left(-\sum_{\vec{m}} \Gamma^*_{\vec{m}} \right)] \right) - \sum_{i+j=(n+1)} :b_{i,1} b_{j,1}: \end{aligned}$$

对于 $n \geq 1$。这就是用三维费米子实现三维玻色子。当 $\psi_0 = -\frac{1}{h_1 h_2}$时，这种实现就成为对应于三维杨图空间转变为二维杨图空间的变形 KP 层级的实现。当 $h_1 = 1, h_2 = -1$, $\psi_0 = 1$ 时，这种实现就成为 $H_n = \sum_{j \in \mathbb{Z}+1/2} :\ \psi_{-j}\psi^*_{j+n}:$ KP 层级的实现。定义

$$\mathcal{H}^{3D}(\{P_{n,j\leq n}\}) = \sum_{n\geq 1,j} \frac{P_{n,j} b_{n,j}}{\langle P_{n,j}, P_{n,j} \rangle}. \tag{135}$$

对于任意三维杨图 π，3-Jack 多项式记为 J_π，我们定义湮灭算符 $J^\perp_\pi$ 为

$$\langle J_{\pi_1} J_{\pi_2}, J_{\pi_3} \rangle = \langle J_{\pi_2}, J^\perp_{\pi_1} J_{\pi_3} \rangle.$$

Then

$$e^{\mathcal{H}^{3D}(\{P_{n,j\leq n}\})} = \sum_{\pi} \frac{1}{\langle J_\pi, J_\pi \rangle} J_\pi(\{P_{n,j\leq n}\}) J^\perp_\pi(\{b_{n,j\leq n}\}). \tag{136}$$

De定义从三维费米子 Fock 空间到三维玻色子 Fock 空间的映射 σ ，通过

$$\sigma(|\pi\rangle) = \langle 0|e^{\mathcal{H}^{3D}(\{P_{n,j\leq n}\})}|\pi\rangle. \tag{137}$$

由（136）可得

$$\sigma(|\pi\rangle) = J_\pi.$$

附录A：算符乘积展开 $V_j(z)V_4(w)$ 的计算

这里列出我们推导算符乘积展开 $V_j(z)V_4(w)$ $j=1$、2 的计算过程。由

$$U_1(z)U_1(w) \sim -\frac{N}{h_1h_2}\frac{1}{(z-w)^2},$$

我们得到

$$\begin{aligned}
V_1(z)U_1'U_1U_1(w) &\sim -\frac{2N}{h_1h_2}\frac{U_1U_1(w)}{(z-w)^3} - \frac{2N}{h_1h_2}\frac{U_1'U_1(w)}{(z-w)^2},\\
V_1(z)U_1'U_1'(w) &\sim -\frac{4N}{h_1h_2}\frac{U_1'(w)}{(z-w)^3},\\
V_1(z)U_1U_1U_1U_1(w) &\sim -\frac{4N}{h_1h_2}\frac{U_1U_1U_1(w)}{(z-w)^2},\\
V_1(z)U_1''U_1(w) &\sim -\frac{6N}{h_1h_2}\frac{U_1(w)}{(z-w)^4} - \frac{N}{h_1h_2}\frac{U_1''(w)}{(z-w)^2},\\
V_1(z)U_1'''(w) &\sim -\frac{24N}{h_1h_2}\frac{1}{(z-w)^5}.
\end{aligned}$$

From

$$\begin{aligned}
U_1(z)U_2(w) &\sim -\frac{N(N-1)\alpha_0}{h_1h_2}\frac{1}{(z-w)^3} - \frac{(N-1)}{h_1h_2}\frac{U_1(w)}{(z-w)^2},\\
U_2(z)U_2(w) &\sim \frac{N(N-1)(1+2(2N-1)\alpha_0h_1h_2)}{2h_1^2h_2^2(z-w)^4} + \frac{2U_2(w)}{h_1h_2(z-w)^2}\\
&\quad -\frac{(N-1)U_1U_1(w)}{h_1h_2(z-w)^2} - \frac{N(N-1)\alpha_0U_1'(w)}{h_1h_2(z-w)^2}\\
&\quad +\frac{U_2'(w)}{h_1h_2(z-w)} - \frac{(N-1)U_1'U_1(w)}{h_1h_2(z-w)} - \frac{N(N-1)\alpha_0U_1''(w)}{2h_1h_2(z-w)},
\end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned}
V_1(z)U_1'U_2(w) &\sim -\frac{2NU_2(w)}{h_1h_2(z-w)^3} - \frac{(N-1)N\alpha_0U_1'(w)}{h_1h_2(z-w)^3} - \frac{(N-1)U_1'U_1(w)}{h_1h_2(z-w)^2},\\
V_1(z)U_1U_2'(w) &\sim -\frac{3(N-1)N\alpha_0U_1(w)}{h_1h_2(z-w)^4} - \frac{2(N-1)U_1U_1(w)}{h_1h_2(z-w)^3}\\
&\quad -\frac{(N-1)U_1'(w)U_1(w)}{h_1h_2(z-w)^2} - \frac{NU_2'(w)}{h_1h_2(z-w)^2},\\
V_1(z)U_1U_1U_2(w) &\sim -\frac{N(N-1)\alpha_0U_1U_1(w)}{h_1h_2(z-w)^3} - 2\frac{NU_1U_2(w)}{h_1h_2(z-w)^2} - \frac{(N-1)U_1U_1U_1(w)}{h_1h_2(z-w)^2},\\
V_1(z)U_2U_2(w) &\sim 4\frac{N(N-1)^2\alpha_0}{h_1{}^2h_2{}^2(z-w)^5} + 3\frac{(N-1)^2U_1(w)}{h_1{}^2h_2{}^2(z-w)^4} - 2\frac{(N-1)N\alpha_0U_2(w)}{h_1h_2(z-w)^3}\\
&\quad -2\frac{(N-1)U_1U_2(w)}{h_1h_2(z-w)^2} + \frac{(N-1)^2U_1''(w)}{2h_1{}^2h_2{}^2(z-w)^2},\\
V_1(z)U_2''(w) &\sim -12\frac{(N-1)N\alpha_0}{h_1h_2(z-w)^5} - 6\frac{(N-1)U_1(w)}{h_1h_2(z-w)^4} - 4\frac{(N-1)U_1'(w)}{h_1h_2(z-w)^3} - \frac{(N-1)U_1''(w)}{h_1h_2(z-w)^2}.
\end{aligned}$$

From

$$U_1(z)U_3(w) \sim -\frac{N(N-1)(N-2)\alpha_0^2}{h_1h_2(z-w)^4} - \frac{(N-1)(N-2)\alpha_0 U_1(w)}{h_1h_2(z-w)^3} - \frac{(N-2)U_2(w)}{h_1h_2(z-w)^2},$$

我们得到

$$\begin{aligned}
V_1(z)U_3'(w) &\sim -4\frac{N\left(N-1\right)\left(N-2\right){\alpha_0}^2}{h_1h_2\left(z-w\right)^5} - 3\frac{\left(N-1\right)\left(N-2\right)\alpha_0 U_1(w)}{h_1h_2\left(z-w\right)^4} \\
&\quad -2\frac{\left(N-2\right)U_2(w)}{h_1h_2\left(z-w\right)^3} - \frac{\left(N-1\right)\left(N-2\right)\alpha_0 U_1'(w)}{h_1h_2\left(z-w\right)^3} - \frac{\left(N-2\right)U_2'(w)}{h_1h_2\left(z-w\right)^2}, \\
V_1(z)U_1U_3(w) &\sim -\frac{N\left(N-1\right)\left(N-2\right)\alpha_0{}^2U_1(w)}{h_1h_2\left(z-w\right)^4} - \frac{\left(N-1\right)\left(N-2\right)\alpha_0 U_1(w)^2}{h_1h_2\left(z-w\right)^3} \\
&\quad -\frac{NU_3(w)}{h_1h_2\left(z-w\right)^2} - \frac{\left(N-2\right)U_1U_2(w)}{h_1h_2\left(z-w\right)^2}.
\end{aligned}$$

我们还有

$$\begin{aligned}
V_1(z)U_4(w) &\sim -\frac{N(N-1)(N-2)(N-3)\alpha_0^3}{h_1h_2(z-w)^5} - \frac{(N-1)(N-2)(N-3)\alpha_0^2U_1(w)}{h_1h_2(z-w)^4} \\
&\quad -\frac{(N-2)(N-3)\alpha_0U_2(w)}{h_1h_2(z-w)^3} - \frac{(N-3)U_3(w)}{h_1h_2(z-w)^2}.
\end{aligned}$$

From

$$V_2(z)U_1(w) \sim \frac{U_1(w)}{(z-w)^2} + \frac{U_1'(w)}{(z-w)},$$

我们有

$$\begin{aligned}
V_2(z)U_1'U_1U_1(w) &\sim -\frac{4NU_1(w)}{h_1h_2(z-w)^5} - \frac{NU_1'(w)}{h_1h_2\left(z-w\right)^4} + \frac{2U_1U_1U_1(w)}{\left(z-w\right)^3} \\
&\quad +\frac{4U_1'U_1U_1(w)}{(z-w)^2} + \frac{2U_1'U_1'U_1(w)+U_1''U_1U_1(w)}{z-w}, \\
V_2(z)U_1'U_1'(w) &\sim -\frac{4N}{h_1h_2(z-w)^6} + \frac{4U_1'U_1(w)}{(z-w)^3} + \frac{4U_1'U_1'(w)}{(z-w)^2} + \frac{2U_1''U_1'(w)}{z-w}, \\
V_2(z)U_1U_1U_1U_1(w) &\sim -\frac{6NU_1U_1(w)}{h_1h_2(z-w)^4} + \frac{4U_1U_1U_1U_1(w)}{(z-w)^2} + \frac{4U_1'U_1U_1U_1(w)}{z-w}, \\
V_2(z)U_1''U_1(w) &\sim -\frac{6N}{h_1h_2(z-w)^6} + \frac{6U_1U_1(w)}{(z-w)^4} + \frac{6U_1'U_1(w)}{(z-w)^3} + \frac{4U_1''U_1(w)}{(z-w)^2} \\
&\quad +\frac{U_1'''U_1(w)+U_1''U_1'(w)}{z-w}, \\
V_2(z)U_1'''(w) &\sim \frac{24U_1(w)}{(z-w)^5} + \frac{24U_1'(w)}{(z-w)^4} + \frac{12U_1''(w)}{(z-w)^3} + \frac{4U_1'''(w)}{(z-w)^2} + \frac{U_1^{(4)}(w)}{z-w}.
\end{aligned}$$

From

$$V_2(z)U_2(w) \sim \frac{(N^3-N)\alpha_0^2}{2(z-w)^4} + \frac{(N-1)\alpha_0U_1(w)}{(z-w)^3} + \frac{2U_2(w)}{(z-w)^2} + \frac{U_2'(w)}{(z-w)},$$

我们得到

$$
\begin{aligned}
V_2(z)U_1'U_2(w) &\sim -\frac{2N(N-1)\alpha_0}{h_1h_2(z-w)^6}-\frac{2(N-1)U_1(w)}{h_1h_2(z-w)^5}+\frac{\left(N^3-N\right)\alpha_0^2U_1'(w)}{2(z-w)^4}\\
&+\frac{2U_1U_2(w)+\alpha_0(N-1)U_1'U_1(w)}{(z-w)^3}\\
&+\frac{4U_1'U_2(w)}{(z-w)^2}+\frac{U_1'U_2'(w)+U_1''U_2(w)}{z-w},\\
V_2(z)U_1U_2'(w) &\sim -\frac{3N(N-1)\alpha_0}{h_1h_2(z-w)^6}+\frac{\left(2\left(N^3-N\right)\alpha_0^2-\frac{2(N-1)}{h_1h_2}\right)U_1(w)}{(z-w)^5}\\
&+\frac{3\alpha_0(N-1)U_1U_1(w)-\frac{(N-1)U_1'(w)}{h_1h_2}}{(z-w)^4}\\
&+\frac{4U_1U_2(w)+\alpha_0(N-1)U_1'U_1(w)}{(z-w)^3}+\frac{4U_1U_2'(w)}{(z-w)^2}+\frac{U_1U_2''(w)+U_1'U_2'(w)}{z-w},\\
V_2(z)U_1U_1U_2(w) &\sim -\frac{2\alpha_0N(N-1)U_1(w)}{h_1h_2(z-w)^5}+\frac{\left(\left(N^3-N\right)\alpha_0^2-\frac{4(N-1)}{h_1h_2}\right)U_1U_1(w)-\frac{2NU_2(w)}{h_1h_2}}{2(z-w)^4}\\
&+\frac{\alpha_0(N-1)U_1U_1U_1(w)}{(z-w)^3}+\frac{4U_1U_1U_2(w)}{(z-w)^2}+\frac{U_1U_1U_2(w)+2U_1'U_1U_2(w)}{z-w},\\
V_2(z)U_2U_2(w) &\sim \frac{\frac{3N(N-1)}{h_1^2h_2^2}+\frac{2\alpha_0^2N(N-1)(N+2)}{h_1h_2}}{(z-w)^6}-\frac{6\alpha_0(N-1)^2U_1(w)}{h_1h_2(z-w)^5}\\
&+\frac{\left(\left(N^3-N\right)\alpha_0^2+\frac{8}{h_1h_2}\right)U_2(w)-\frac{4\alpha_0N(N-1)U_1'(w)}{h_1h_2}-\frac{4(N-1)U_1U_1(w)}{h_1h_2}}{(z-w)^4}\\
&+\frac{2\alpha_0(N-1)U_1U_2(w)-\frac{3(N-1)U_1'U_1(w)}{h_1h_2}+\frac{3U_2'(w)}{h_1h_2}-\frac{\alpha_0(N-1)(4N-1)U_1''}{2h_1h_2}}{(z-w)^3}+\frac{4U_2U_2(w)}{(z-w)^2}\\
&+\frac{2U_2'U_2(w)-\frac{(N-1)U_1''U_1'(w)}{2h_1h_2}-\frac{(N-1)U_1'''U_1(w)}{6h_1h_2}+\frac{U_2'''(w)}{6h_1h_2}-\frac{\alpha_0N(N-1)U_1^{(4)}(w)}{12h_1h_2}}{z-w},\\
V_2(z)U_2''(w) &\sim \frac{10\alpha_0^2\left(N^3-N\right)}{(z-w)^6}+\frac{12\alpha_0(N-1)U_1(w)}{(z-w)^5}+\frac{12U_2(w)+6\alpha_0(N-1)U_1'(w)}{(z-w)^4}\\
&+\frac{10U_2'(w)+\alpha_0(N-1)U_1''(w)}{(z-w)^3}+\frac{4U_2''(w)}{(z-w)^2}+\frac{U_2'''(w)}{z-w}.
\end{aligned}
$$

From

$$
\begin{aligned}
V_2(z)U_3(w) &\sim \frac{(N+1)N(N-1)(N-2)\alpha_0^3}{(z-w)^5}+\frac{(N+3)(N-1)(N-2)\alpha_0^2U_1(w)}{2(z-w)^4}\\
&+\frac{2(N-2)\alpha_0U_2(w)}{(z-w)^3}+\frac{3U_3(w)}{(z-w)^2}+\frac{U_3'(w)}{(z-w)},
\end{aligned}
$$

我们得到

$$
\begin{aligned}
V_2(z)U_3'(w) \sim\ & \frac{5\alpha_0^3(N+1)N(N-1)(N-2)}{(z-w)^6}+\frac{2\alpha_0^2(N+3)(N-1)(N-2)U_1(w)}{(z-w)^5}\\
&+\frac{6(N-2)\alpha_0U_2(w)+\frac{\alpha_0^2(N+3)(N-1)(N-2)U_1'(w)}{2}}{(z-w)^4}+\frac{6U_3(w)+2a(N-2)U_2'(w)}{(z-w)^3}\\
&+\frac{4U_3'(w)}{(z-w)^2}+\frac{U_3''(w)}{z-w},\\
V_2(z)U_1U_3(w) \sim\ & -\frac{N(N-1)(N-2)\alpha_0^2}{h_1h_2(z-w)^6}+\frac{\left(\alpha_0^3(N+1)N(N-1)(N-2)-\frac{(N-1)(N-2)\alpha_0}{h_1h_2}\right)U_1(w)}{(z-w)^5}\\
&+\frac{\frac{\alpha_0^2(N+3)(N-1)(N-2)U_1U_1(w)}{2}-\frac{(N-2)U_2(w)}{h_1h_2}}{(z-w)^4}+\frac{2\alpha_0(N-2)U_1U_2(w)}{(z-w)^3}\\
&+\frac{4U_1U_3(w)}{(z-w)^2}+\frac{U_1U_3'(w)+U_1'U_3(w)}{z-w}.
\end{aligned}
$$

我们还有

$$
\begin{aligned}
V_2(z)U_4(w) \sim\ & \frac{3\alpha_0^4(N+1)N(N-1)(N-2)(N-3)}{2(z-w)^6}+\frac{\alpha_0^3(N+2)(N-1)(N-2)(N-3)U_1(w)}{(z-w)^5}\\
&+\frac{\alpha_0^2(N+5)(N-2)(N-3)U_2(w)}{2(z-w)^4}+\frac{3\alpha_0(N-3)U_3(w)}{(z-w)^3}+\frac{4U_4(w)}{(z-w)^2}+\frac{U_4'(w)}{z-w}.
\end{aligned}
$$

请注意，我们并非通过直接计算得到算符乘积展开 $V_1(z)U_4(w)$ 和 $V_2(z)U_4(w)$，而是根据 [17] 中的结果得到了它们。这里的其他算符乘积展开均由直接计算得到。

附录 B：舒尔函数和 Jack 多项式

舒尔函数定义见（1）和（3）。下面列出其中最前面的几个：

$$
\begin{aligned}
&S_{\square}=p_1,\ S_{\square\square}=\frac{1}{2}p_1^2+\frac{1}{2}p_2,\ S_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}}=\frac{1}{2}p_1^2-\frac{1}{2}p_2,\\
&S_{\square\square\square}=\frac{1}{12}\left(2p_1^3+6p_1p_2+4p_3\right),\ S_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}}=\frac{1}{6}\left(2p_1^3-2p_3\right),\\
&S_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}}=\frac{1}{12}\left(2p_1^3-6p_1p_2+4p_3\right),\\
&S_{\square\square\square\square}=\frac{1}{24}(p_1^4+6p_1^2p_2+3p_2^2+8p_1p_3+6p_4),\\
&S_{\begin{smallmatrix}\square\square\square\\\square\end{smallmatrix}}=\frac{1}{8}(p_1^4+2p_1^2p_2-p_2^2-2p_4),\\
&S_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\square\end{smallmatrix}}=\frac{1}{12}(p_1^4+3p_2^2-4p_1p_3),\\
&S_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}}=\frac{1}{8}(p_1^4-2p_1^2p_2-p_2^2+2p_4),\\
&S_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}}=\frac{1}{24}(p_1^4-6p_1^2p_2+3p_2^2+8p_1p_3-6p_4).
\end{aligned}
$$

通常的 Jack 多项式 P_λ^α, Q_λ^α 定义于 [1]。为了匹配仿射 Yangian $\mathfrak{gl}(1)$ 在三维杨图上的表示，我们定义了对称函数

Y_λ [10]。我们列出其中的前几个：

$$
\begin{aligned}
Y_{\square} &= p_1, \\
Y_{\square\square} &= \frac{1}{h_1-h_2}p_2 - \frac{h_2}{h_1-h_2}p_1^2, \\
Y_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}} &= \frac{1}{h_2-h_1}p_2 - \frac{h_1}{h_2-h_1}p_1^2, \\
Y_{\square\square\square} &= \frac{1}{2h_1-h_2}\frac{1}{h_1-h_2}(2p_3 - 3h_2p_1p_2 + h_2^2p_1^3), \\
Y_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}_{h_1h_2}} &= \frac{1}{h_2-2h_1}\frac{1}{h_1-h_2}(2p_3 - 2(h_1+h_2)p_1p_2 + 2h_1h_2p_1^3), \\
Y_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}_{h_2h_1}} &= \frac{1}{h_1-2h_2}\frac{1}{h_2-h_1}(2p_3 - 2(h_1+h_2)p_1p_2 + 2h_1h_2p_1^3), \\
Y_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}} &= \frac{1}{2h_2-h_1}\frac{1}{h_2-h_1}(2p_3 - 3h_1p_1p_2 + h_1^2p_1^3), \\
Y_{\square\square\square\square} &= \frac{1}{3h_1-h_2}\frac{1}{2h_1-h_2}\frac{1}{h_1-h_2}(6p_4 - 3h_2p_2^2 - 8h_2p_1p_3 + 6h_2^2p_1^2p_2 - h_2^3p_1^4), \\
Y_{\begin{smallmatrix}\square\square\square\\\square\end{smallmatrix}_{h_1,2h_1,h_2}} &= \frac{1}{3h_1-h_2}\frac{1}{2h_1-h_2}\frac{1}{h_1-h_2}(-6p_4 + 3h_2p_2^2 + 6(h_1+h_2)p_1p_3 \\
&\quad -(9h_1h_2+3h_2^2)p_1^2p_2 + 3h_1h_2^2p_1^4), \\
Y_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}_{h_2,2h_2,h_1}} &= \frac{1}{3h_2-h_1}\frac{1}{2h_2-h_1}\frac{1}{h_2-h_1}(-6p_4 + 3h_1p_2^2 + 6(h_1+h_2)p_1p_3 \\
&\quad -(9h_1h_2+3h_1^2)p_1^2p_2 + 3h_2h_1^2p_1^4), \\
Y_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\square\end{smallmatrix}_{h_1,h_2,h_1+h_2}} &= \frac{1}{h_2-2h_1}\frac{1}{(h_2-h_1)^3}(-2(h_1+h_2)p_4 + 2(h_1^2-h_1h_2+h_2^2)p_2^2 + 8h_1h_2p_1p_3 \\
&\quad -4h_1h_2(h_1+h_2)p_1^2p_2 + 2h_1^2h_2^2p_1^4), \\
Y_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}} &= \frac{1}{3h_2-h_1}\frac{1}{2h_2-h_1}\frac{1}{h_2-h_1}(6p_4 - 3h_1p_2^2 - 8h_1p_1p_3 + 6h_1^2p_1^2p_2 - h_1^3p_1^4).
\end{aligned}
$$

我们仍称 Y_λ 为 Jack 多项式，因为当 $h_1 = \sqrt{\alpha}, h_2 = -1/\sqrt{\alpha}$时，它们会成为 Jack 多项式。请注意，二维杨图的下标展示了 Y_λ 的表达式依赖于方块生长过程。将二维杨图视为只有一层、沿 z轴延伸的特殊三维杨图。下标中的记号 $h_\square = (x_\square - 1)h_2 + (y_\square - 1)h_1$ 表示在位置 $(x_\square, y_\square)$ 添入一个方块。因此，例如，h_1h_2 表示此状态由 $\square$经过$\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}$...得到

$$\square \to \square\square \to \begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}.$$

数据可用性声明

支持本研究结论的数据，可在提出合理请求后向通讯作者获取。

利益声明

作者声明，我们没有任何已知的竞争性经济利益或个人关系可能会影响本文所报告的研究工作。

致谢

本研究得到国家自然科学基金委员会（批准号：12101184）和河南省高校重点科研项目（项目编号：22B110003）的资助。我们感谢 T. Proc- hazka 就算符乘积展开的计算提供了有益的讨论。我们也感谢 P. Agarwal 和 S. Krivonos 就如何使用 Mathematica 提供了有益的讨论。

参考文献

[1] I. G. Macdonald，《对称函数与霍尔多项式》。牛津数学专著，克拉伦登出版社，牛津，1979年。[2]R. P. Stanley，《枚举组合学》第二卷。剑桥大学出版社，剑桥，1999年。[3] W. Fulton 和 J. Harris，《表示论：初级课程》。施普林格出版社，纽约，1991年。[4] T. Miwa、M. Jimbo 和 E. Date，《孤子：微分方程、对称性与无穷维代数》。剑桥大学出版社，剑桥，2000年。[5] E. Date、M. Kashiwara、M. Jimbo 和 T. Miwa，孤子方程的变换群。《非线性可积系统——经典理论与量子理论》（京都，1981年），世界科学出版社，新加坡，1983年，39–119页。[6] N. Jing 和 N. Rozhkovskaya，源自 Jacobi-Trudi 恒等式的顶点算子。《数学物理通讯》346（2016年）679–701。[7] T. Tsuda，泛特征与 KP 层级的扩展。《数学物理通讯》248（2004年）501–526。[8] T. Tsuda，从 KP/UC 层级到 Painlev´é 方程。arXiv:1004.1347。[9] M. Chen、S. Wang、X. Wang、K. Wu、W. Zhao，关于 $W_{1+\infty}$ $\mathcal{3}$-代数与可积系统，《核物理 B》891（2015年）655–675。[10] N. Wang、B. Yang、Z. N. Cui 和 K. Wu，对称函数与 $W_{1+\infty}$ 代数的三维费米子表示。《Clifford 代数应用进展》33，3（2023年）。[11] A. Okounkov、N. Reshetikhin、C. Vafa。量子 Calabi-Yau 与经典晶体，arXiv:hep-th/0309208。[12] T. Nakatsu、K. Takasaki。具有外势的熔化晶体模型的可积结构，《纯数学进展研究》26(2)，59（2010年）201–223。[13] T. Proch´azka，$\mathcal{W}$-对称性、拓扑顶点与仿射 Yangian，《高能物理学杂志》10（2016年）077。[14] A. Tsymbaliuk，重新探讨 gl_1 的仿射 Yangian，《数学进展》304（2017年）583–645，arXiv:1404.5240。[15] T. Proch´azka，瞬子 R-矩阵与 W-对称性，《高能物理学杂志》12（2019年）099。[16] N. Wang、K. Wu，仿射 Yangian 的三维费米子表示，《核物理 B》974（2022年）115642。

[17] T. Proch´azka，《二次基底中的探索》，arXiv：1411.7697。[18] N. Wang、K. Wu，三维玻色子与 $W_{1+\infty}$ 代数，已被《高能物理学杂志》接收。[19] Z. Cui、Y. Bai、N. Wang、K. Wu，Jack 多项式与仿射 Yangian，《核物理 B》984（2022年）115986。[20] N. Wang、K. Wu，三维玻色子、3-Jack 多项式与 $\mathfrak{gl}(1)$ 的仿射 Yangian，《高能物理学杂志》03（2023年）232。[21] N. Wang，三维费米子与仿射 Yangian，《核物理 B》969（2021）115461。[22] M. R. Gaberdiel、R. Gopakumar、W. Li、C. Peng，高自旋与 Yangian 对称性，《高能物理学杂志》04（2017年）152。