arXiv:2305.04485v1 [math.MG] 8 May 2023

关于照亮等宽体的注记

ALEXEY GLAZYRIN♠

Abstract. 最近，Arman、Bondarenko 和 Prymak 构造了一个 $\mathbb{R}^n$ 中的等宽体，其照明数关于 n呈指数增长。在本文中，我们通过推广这一构造改进了他们的界。特别地，我们在 $\mathbb{R}^n$ 中构造了一个等宽体，其照明数至少为$(\tau + o(1))^n$，其中 $\tau \approx 1.047$。

1. 引言 Introduction

凸体的一个边界点 x n维凸体 B 的边界点若满足以下条件，则称其被一个方向（单位向量） ℓ 照亮：从 x 沿 ℓ 方向发出的射线与 B的内部相交。方向集 $\mathcal{L}$ 照亮 B，是指 B 的每个边界点都被 $\mathcal{L}$中的某个方向照亮。一个自然的问题是，确定照明集的最小大小；对给定的，这也称为照明数 [2], ；或者对给定的一类 B 凸n维凸体，确定其照明数。

在 [6], Schramm 中证明，任意 n 维等宽体的照明数不超过 $(\sqrt{3/2} + o(1))^n$。关于是否存在照明数呈指数增长的等宽体这一问题（见 [5, 问题 3.3]），近期由 Arman、Bondarenko 和 Prymak [1]给出了肯定答案。他们构造了一个等宽体，其照明数至少为 $(\cos \pi/14 + o(1))^{-n}$。

Arman、Bondarenko 和 Prymak 的构造基于内接于单位球面的全等直球面圆锥之并集。圆锥的选取方式保证其并集的直径等于每个圆锥的直径。于是存在一个直径相同的等宽体包含这一圆锥并集 [4,定理 54，第 126] 页。按照 B¨or¨oczky 和 Wintsche [3] 构造的球面经济覆盖来选取圆锥的顶点，并估算可由同一方向照亮的顶点数后，Arman、Bondarenko 和 Prymak 证明，存在一个照明数随维数呈指数增长的等宽体。他们的构造使指数底数可以达到 $(\cos(\pi/14))^{-1} \approx 1.026$。

本说明的主要思路是推广他们的构造方法，从而在选择圆锥顶点时获得更大的自由度。对于我们的构造，我们考虑顶点位于单位球面上、但底面属于半径可能不同的同心球面的直圆锥 R。我们固定半径 R、顶点到底面的距离d、角 α （即圆锥轴与母线之间的夹角），以及底面球的球面半径 β，参见图1。

这些参数并非相互独立，但分别为它们采用不同的记号对我们来说会更加方便。我们始终只考虑直径为 d 的圆锥，也就是说，条件 $2R \sin \beta \le d$ 始终成立。

对于每个 $x \in \mathbb{S}^{n-1}$，我们用 $Q(x)$ 表示参数固定为 R，d，α，β且顶点为 x 的圆锥。对于子集 $X \subset \mathbb{S}^{n-1}$，我们将并集记为 $\bigcup_{x \in X} Q(x)$，作者： $\mathcal{W}(X)$。

♠ 部分由美国国家科学基金会（NSF）资助项目 DMS-2054536 提供支持。

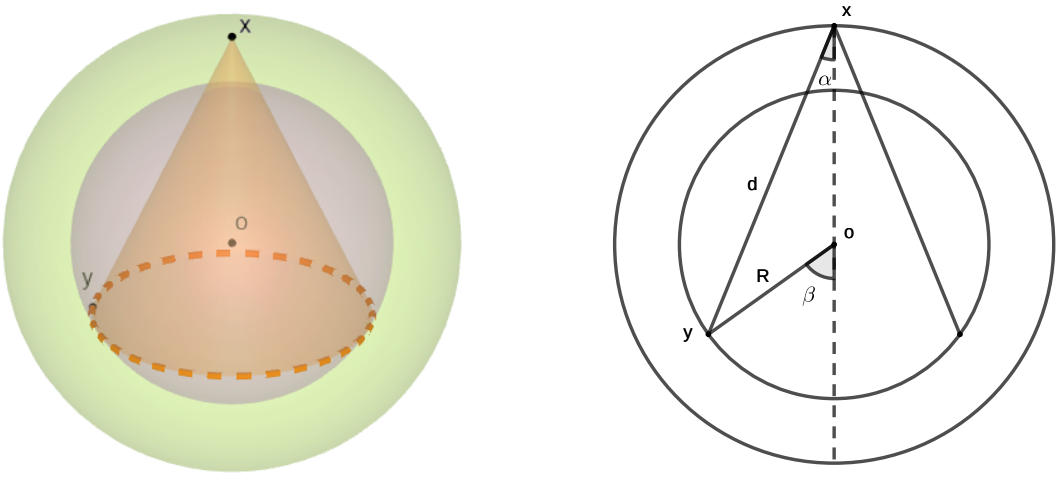

FIGURE 1. 圆锥及其轴截面

对于 x, $y \in \mathbb{S}^{n-1}$ x与 y之间的球面距离记为 $\theta(x, y)$。对于$0 < \alpha < \pi/2$, 中心为 x 且球面半径为 α 的球冠记为$C(x, \alpha)$。

下述引理描述了使 $\mathcal{W}(X)$ 的直径达到 d的充分条件，从而扩展了 [1]中的引理3。

引理 1.1。 $\mathcal{W}(X)$ 的直径为 d，如果以下条件对每一对点 x、$y \in X$ 均满足：

(1) $2\sin(\theta(x, y)/2) \leq d$; (2) $\theta(x, y) \geq 2\beta$;
(3) $2R \leq d$ 或 $\theta(x, y) \leq 2\arcsin \frac{d}{2R} - 2\beta$。

对于本文的主要结果，我们还使用了来自 [1]的两个引理。

引理1.2。 [1, 引理 1] 设 $0 < \alpha \leq \pi/6$。 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个凸体，其直径为 d。对于某个 $x \in \mathbb{S}^{n-1}$, $Q(x) \subset K$ 且 x 位于 K的边界上。那么， x 被 ℓ 照亮，当且仅当 $\ell \in C(-x, \pi/2 - \alpha)$。

引理 1.2 是在 [1]中针对内接于单位球面的圆锥表述的，但证明对我们的情况同样适用。

引理 1.3。 [1, 引理 2] 设 $0 < \psi < \varphi < \pi/2$为固定值。那么，对于每个正整数 n, 存在 $X \subset \mathbb{S}^{n-1}$，使得 $|X| = \left(^{1+o(1)}_{\text{正弦 }\varphi}\right)^n$，并且对每一对 $x, y \in X$ 以及每个 $\mathbb{S}^{n-1}$ 中的点，该点至多包含在 $O(n$对数 $n)$ 个球冠 $C(x, \varphi)$中，对所有 $x \in X$均成立。

本文的主要结果是以下定理。

定理 1.4。 对于每个正整数 n，都存在一个 n 维等宽体 K，其照明数至少为 $(\tau + o(1))^n$，其中 $\tau = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{6}(111 - \sqrt{33})} \approx 1.047$。

2. PROOFS

引理的证明 *1.1*。 根据条件（1）， x与 $y \in X$ 之间的距离不大于 d。

球面圆锥的底面在半径为 β 的同心球上形成球冠，其球面半径为 R。对于 $x \in \mathbb{S}^{n-1}$，由 Q（x的底面形成的相应球冠，其内部恰好由球面上所有满足以下条件的点组成：这些点到 R 的距离大于 x，且这些点位于半径为 d的球面上。为了确保 X 中的点到所有圆锥底面的距离不大于 d，球冠必须彼此不相交。这意味着它们中心之间的球面距离，即 θ（x，y），至少为 2β，这恰好就是条件（2）。

最后，我们需要检查两个不同圆锥底面中的点之间的距离至少为 d。如果 $d \geq 2R$，则该条件自动满足，因为 $2R$ 是半径为 R的球面的直径。如果条件（3）的第二部分成立，那么球冠 $\theta(x, y) + 2\beta$ 中相距最远的两点之间的球面距离不超过 $2 \arcsin \frac{d}{2R}$ 因此它们之间的欧几里得距离不超过 d。□

定理1.4 的证明遵循 [1]中主要结果的证明步骤。我们只需为圆锥选择合适的参数。

我们设定 $d = 2R$，使条件（3）自动成立。我们还施加条件 $2\beta + \alpha = \pi/2$，使角 α 达到最大可能值。根据余弦定理，$\cos\alpha = \frac{3R^2+1}{4R}$ 且 $\cos\beta = \frac{3R^2-1}{2R}$。利用这些值，我们求解方程 $\sin(2\beta) = \cos\alpha$，求得 R，并找到唯一可行根 $R_0 = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}(9+\sqrt{33})} \approx 0.905$。于是 $d_0 = 2R_0, \beta_0 = \arccos\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}(15+\sqrt{33})}\right)$, $\alpha_0 = \frac{\pi}{2} - 2\beta_0$。

定理的证明 *1.4*。我们设定 $\psi = 2\beta_0$ 并且 $\varphi = \psi + \varepsilon$，其中 $\varepsilon > 0$为一个较小的 X 中的点集 $\mathbb{S}^{n-1}$，该点集由引理 1.3构造得到。对于这个点集，我们取相应圆锥的并集 $\mathcal{W}(X)$，其参数分别为 α_0、β_0、R_0、d_0。

我们首先验证，对每一对点 $\psi \leq \theta(x, y) \leq \pi - \psi$，条件 x，$y \in X$蕴含引理1.1的所有条件。事实上，条件 $2R\sin\beta \leq d$ 以及条件（2）和（3）自动满足。条件 $\theta(x, y)/2 \leq \pi/2 - \beta_0$ 蕴含

$$2\sin(\theta(x,y)/2) - d_0 \leq 2\cos\beta_0 - d_0 = 2\frac{3R_0^2-1}{2R_0} - 2R_0 = \frac{R_0^2-1}{R_0} \leq 0,$$

因为 $R_0 < 1$。因此，条件（1）也成立，并且根据引理 1.1，$\mathcal{W}$（X）的直径为 d_0。

根据 [4, 定理 54，p. 126]，，存在 K，这是一个等宽 d_0 体，包含$\mathcal{W}$（X）。对于每个 $x \in X$，x 都位于 K 的边界上，并且根据引理1.2，照亮它的方向集合属于 C（$-x$，$\pi/2 - \alpha_0$）。由于通过引理 1.3 构造集合X的方式，每个方向向量 ℓ 至多属于 O（$n\log n$）个球冠C（$-x$，φ）。由于 $\varphi = \pi/2 - \alpha_0 + \varepsilon$，每个方向至多只能照亮 O（$n\log n$）个来自 X的顶点。因此，K 的照明数至少为

$$\frac{|X|}{O(n\log n)} = \left(\frac{1+o(1)}{\sin\varphi}\right)^n = (\cos(\alpha_0 - \varepsilon) + o(1))^{-n}.$$

于是针对 $\tau = (\cos\alpha_0)^{-1} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{6}(111-\sqrt{33})} \approx 1.047$ 证明了该定理 □

References

[1] A. Arman, A. Bondarenko, and A. Prymak.具有指数照明数的等宽凸体，https://arxiv.org/abs/2304.10418。[2] V.G. Boltyanski。凸体边界的照明问题（俄文），《苏联摩尔达维亚科学院学报》，第10期（1960年）：79–86页。

[3] K.J. Böröczky and G. Wintsche. 用相等的球面球覆盖球面。载于《离散与计算几何：古德曼–波拉克纪念文集》（2003）：235-251。[4] H. G. Eggleston. 凸性，《剑桥数学与数学物理论丛》第47号，剑桥大学出版社，纽约，1958。[5] G. Kalai.组合几何中的新旧问题之一：围绕博尔苏克问题，《2015年组合学综述》，伦敦数学学会讲义丛书第424卷，剑桥大学出版社，剑桥，2015，147-174。[6] O. Schramm. 等宽体的照明集，《Mathematika》第35卷（1988），第2期，180-189。

Alexey Glazyrin, School of Mathematical & Statistical Sciences, The University of Texas Rio Grande Valley, Brownsville, TX 78520, USA电子邮件地址：alexey.glazyrin@utrgv.edu