arXiv:2305.04488v2 [math.CA] 8 May 2024

与 Weyl变换 及 $\mathbb{R}^{2n}$ 上扭曲平移系相关的 Zak变换

RADHA RAMAKRISHNAN 和 RABEETHA VELSAMY

ABSTRACT. 我们在 $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ 上引入与 Weyl变换 相关的 Zak变换。利用这一变换，我们定义了一种括号映射，并证明扭曲平移系$\{T^t_{(k,l)}\phi\colon k,l\in\mathbb{Z}^n\}$是框架序列，当且仅当 $0<A\le[\phi,\phi](\xi,\xi')\le B<\infty$，对几乎处处的 $(\xi,\xi')\in\Omega_\phi$ 均成立，其中 $\Omega_\phi=\{(\xi,\xi')\in\mathbb{T}^n\times\mathbb{T}^n\colon [\phi,\phi](\xi,\xi')\neq 0\}$。我们还证明了关于系统 $\{T^t_{(k,l)}\phi : k,l\in\mathbb{Z}^n\}$ 为 Riesz序列的类似结果。对于属于主扭曲平移不变空间 $V^t(\phi)$ 的给定函数，我们找到了典范双正交函数存在的充要条件。此外，我们还用 Muckenhoupt $\mathcal{A}_2$ 权函数刻画了系统 $\{T^t_{(k,l)}\phi\colon k,l\in\mathbb{Z}\}$ 成为 $V^t(\phi)$ 的 Schauder基的条件。

1. INTRODUCTION

如果闭子空间 $V\subset L^2(\mathbb{R})$ 满足 $f\in V\implies T_kf\in V$ 对任意$k\in\mathbb{Z}$ 均成立，其中 T_k 表示平移算子 $T_kf(y)=f(y-k)$，则称其为移位不变空间。多分辨率分析定义中为构造小波而引入的空间，是移位不变空间的典型例子。更多细节请参阅 [22], [23] 。

Bownik在 [5], 中利用值域函数刻画了 $\mathbb{R}^n$ 上的平移不变空间，并得到了平移系统构成框架序列和Riesz序列的刻画。随后，研究者在 [6, 7, 21] 中研究了局部紧阿贝尔群上的平移不变空间，并在 [27]中研究了非阿贝尔紧群上的平移不变空间。Currey等人在 [10] 中利用值域函数刻画了SI/Z型群上的移位不变系统。关于各种类型的海森堡群上的平移不变空间，已有若干有趣的框架和Riesz序列刻画定理，例如极化海森堡群、标准海森堡群以及A.Weil的抽象海森堡群。关于这一方面的研究，可参阅 [1, 2, 26, 12] 。

当 V取为主平移不变空间 $V(\phi)=\text{span}\{T_k\phi\colon k\in\mathbb{Z}\}$时，对于 $\phi\in L^2(\mathbb{R})$，可以用权函数 $w_\phi(\xi)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{\phi}(\xi+k)|^2$，$\xi\in[0,1]$来刻画平移系统构成框架序列或 Riesz序列的条件。更准确地说，系统 span$\{T_k\phi\colon k\in\mathbb{Z}\}$ 是具有界 $m,M>0$ 的框架序列，当且仅当 $m\le w_\phi(\xi)\le M$，几乎处处成立，其中 $N=\{\xi\in[0,1]\colon w_\phi(\xi)=0\}$；它是 Riesz序列，当且仅当 $m\le w_\phi(\xi)\le M$，几乎处处成立。详情请参见 [8] 。另一方面，众所周知，Gabor系统$\{T_kM_lg\colon k,l\in\mathbb{Z}\}$ 构成 $L^2(\mathbb{R})$的框架，当且仅当存在 $A,B>0$ 使得 $A\le|Zg(x,\xi)|^2\le B$几乎处处成立，其中 $g\in L^2(\mathbb{R})$。这里， Zg 表示 g 的 Zak变换， M_l 表示调制算子 $M_lg(y)=e^{2\pi ily}g(y)$。（参见 [14]。）

此外，众所周知，系统 $\{T_k\phi : k\in\mathbb{Z}\}$ 是 span$\{T_k\phi\colon k\in\mathbb{Z}\}$ 的 Schauder基，当且仅当 w_ϕ 满足 Muckenhoupt $\mathcal{A}_2$ 条件，其中 $w_\phi(\xi)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{\phi}(\xi+k)|^2$，$\xi\in[0,1]$。

2020年数学主题分类。主要分类：42C15；次要分类：43A30。关键词和短语：框架、Riesz 基、Schauder基、Weyl变换、Zak变换。

关于这一联系，请参阅 [19, 24] 。

移位不变空间中的另一个有趣问题是对偶可积性的概念。该概念由 [17]在局部紧阿贝尔群这一更一般的框架下引入。^设 G 为局部紧阿贝尔群， $d\alpha$ 表示对偶群 G. 上的哈尔测度。若存在一个称为括号的函数，则称 G 在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的酉表示 Π 是对偶可积的，

$$[\cdot,\cdot]_{\Pi} : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to L^1(\widehat{G}, d\alpha)$$

使得

$$\langle \phi, \Pi(g)\psi \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\widehat{G}} [\phi,\psi]_{\Pi}(\alpha)\overline{\alpha(g)}\, d\alpha, \tag{1.1}$$

对所有 ϕ、$\psi \in \mathcal{H}$ 和所有 $g \in G$均成立。设 Π 为可分希尔伯特空间$\mathcal{H}$上的酉表示。若存在一个 $\sigma-$ 有限测度空间 $(\mathcal{M}, \nu)$ 以及一个线性等距映射，我们称 Π 具有 Helson映射

$$\mathcal{J} : \mathcal{H} \to L^2((\mathcal{M},\nu), L^2(\widehat{G}))$$

满足

$$\mathcal{J}[\Pi(g)\phi](x)(\alpha) = \alpha(g)\mathcal{J}[\phi](x)(\alpha) \tag{1.2}$$

^对所有 $g \in G$、 $\phi \in \mathcal{H}$以及几乎处处的 $x \in \mathcal{M}$, $\alpha \in G$. 均成立。以下结果众所周知。

定理1.1。设 G 是一个局部紧阿贝尔群， Π 是 G 在可分希尔伯特空间 $\mathcal{H}$上的酉表示。

(a) 如果表示 Π 具有一个 Helson映射 $\mathcal{J}$，那么 Π 是对偶可积的，并且给出了一个括号映射 միջոցով

$$[\phi,\psi]_{\Pi}(\alpha) = \int_{\mathcal{M}} \mathcal{J}[\phi](x)(\alpha)\overline{\mathcal{J}[\psi](x)(\alpha)}\, dx, \quad \text{for all } \phi,\psi \in \mathcal{H}.$$

(b) 如果表示 Π 是对偶可积的，则存在一个 Helson映射。

关于上述结果，以及其他一些有趣的结果（包括与局部紧阿贝尔群上的括号映射、移位不变系统，更一般地说，酉表示的轨道相关的历史发展），请参阅近期的综述文章 [16] 。

在 [20], Iverson利用算子值Zak变换研究了如下形式的框架 $\{\rho(\xi)f_i\}_{\xi\in K,\ i\in I}$，其中 ρ 是非阿贝尔紧群 K 在希尔伯特空间 H_ρ 上的一个表示。在 [3, 4]Barbieri等人研究了希尔伯特空间中在离散群的酉表示作用下保持不变的子空间的结构。在此，他们推广了括号映射、纤维化映射、对偶可积性和非交换Zak变换等概念，并利用冯·诺伊曼代数理论，在更一般的框架下获得了关于框架和Riesz 基的刻画。

本文研究了扭曲平移系统 $\{T^t_{(k,l)}\phi : k,l \in \mathbb{Z}^n\}$ 在 $\mathbb{R}^{2n}$上的上述问题。在 [25], Radha和Saswata于 L^2中引入了 $V^t(\phi)$中的扭曲移位不变空间，并研究了刻画扭曲平移系统使其构成框架序列或Riesz序列的问题。这些刻画借助某个“条件C”得到。更准确地说，已经证明：若 $\phi \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$满足 ϕ “条件C”，则 $\{T^t_{(k,l)}\phi : k,l \in \mathbb{Z}^n\}$ 是框界为 $A, B > 0$ 的框架序列，当且仅当 $A \le \omega_\phi(\xi) \le B$几乎处处成立于 $\xi \in \Omega\phi$上，其中$\Omega_\phi = \{\xi \in \mathbb{T}^n : \omega_\phi \neq 0\}$，且 $\omega_\phi(\xi) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |K_\phi(\xi + m, \eta)|^2\, d\eta$, $\xi \in \mathbb{T}^n$。这里， K_ϕ 表示 ϕ的Weyl变换的核。对于Riesz序列，也得到了类似的结果。最近，在 [11], 中引入了扭曲 $B-$ 样条，并研究了各种基本性质

。研究表明，除一阶扭曲 $B-$ 样条外，其他所有样条都不满足“条件C”。在论文 [11], 中，对于二阶扭曲 $B-$ 样条，通过数值计算证明了相应的扭曲平移系统构成Riesz序列。这类繁重的计算无法推广到更高阶的扭曲$B-$ 样条。因此，本文试图在不对生成元 ϕ作“条件C”这一假设的情况下，获得扭曲平移系统 $\{T^t_{(k,l)}\phi\colon k,l\in\mathbb{Z}^n\}$ 构成框架序列和Riesz序列的刻画。

首先，我们利用核引入与 Weyl 变换相关的 Zak 变换，并将这一变换称为 Weyl-Zak 变换。借助这一变换，我们定义了一个括号映射，并证明，对于几乎处处的 $(\xi,\xi')\in\Omega_\phi$，扭曲平移系统 $\{T^t_{(k,l)}\phi\colon k,l\in\mathbb{Z}^n\}$ 是框架序列，当且仅当 $0<A\le[\phi,\phi](\xi,\xi')\le B<\infty$，其中 $\Omega_\phi=\{(\xi,\xi')\in\mathbb{T}^n\times\mathbb{T}^n\colon [\phi,\phi](\xi,\xi')\neq 0\}$。我们还证明了系统 $\{T^t_{(k,l)}\phi\colon k,l\in\mathbb{Z}^n\}$ 成为 Riesz序列的类似结果，并通过一个例子说明这一结果。对于给定的 $\phi\in V^t(\phi)$，我们找到了其典范双正交函数 $\tilde{\ }\ \phi$ 存在的充要条件，其中 $V^t(\phi)$ 表示主扭曲平移不变空间。我们还证明，如果 $\phi\in L^2(\mathbb{R}^{2n})$ 且系统 $\{T^t_{(k,l)}\phi\colon k,l\in\mathbb{Z}^n\}$ 构成 Riesz 序列，那么存在一个 $\phi\in V^t(\phi)$，使得 $\{T^t_{(k,l)}\phi\colon k,l\in\mathbb{Z}^n\}$ 是 $V^t(\phi)$ 的正交规范系统。在这种情况下， $V^t(\phi)$ 与 $V^t(\phi)$ 相同。此外，我们还利用 Muckenhoupt 权函数刻画了系统 $\{T^t_{(k,l)}\phi\colon k,l\in\mathbb{Z}\}$ 成为 $V^t(\phi)$ 的 Schauder基的条件。

本文的最后一部分，我们将探讨对偶可积性与扭曲平移之间的联系。首先，我们注意到，由 $\Pi(k,l)=T^{t_{(k,l)}}k,l\in\mathbb{Z}^n$ 定义的函数 $\Pi\colon\mathbb{Z}^n\times\mathbb{Z}^n\to\mathcal{U}(L^2(\mathbb{R}^{2n}))$ 仅构成一个射影表示。因此，我们取群 $H=2\mathbb{Z}^n\times\mathbb{Z}^n$，并定义映射 $\Pi_H\colon 2\mathbb{Z}^n\times\mathbb{Z}^n\to\mathcal{U}(L^2(\mathbb{R}^{2n}))$，其定义为 $\Pi_H(2k,l)=T^{t_{(2k,l)}}$，$k,l\in\mathbb{Z}^n$。事实证明，该映射是 H 在 $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ 上的一个酉表示。当我们尝试研究映射 Π_H 是否具有对偶可积性时，我们注意到，得到的可积形式与式 (1.1) 类似，但被积函数中多出了一个附加项（见式 (7.2)）。类似地，当我们试图考察 Π_H 是否存在 Helson映射时，我们发现，与式 (1.2) 相比，其中也多出了一个附加项（见式 (7.3)）。我们认为，这两项观察为未来的进一步研究开辟了道路。

2. Notation and Background

设 $\mathcal{H}\neq 0$ 为可分希尔伯特空间。

定义 2.1. 如果存在两个常数A、$B>0$，使得序列 $\{f_k\colon k\in\mathbb{Z}\}$ 属于 $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个框架。

$$A\|f\|^2\le\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\langle f,f_k\rangle|^2\le B\|f\|^2,\qquad\forall\ f\in\mathcal{H}. \tag{2.1}$$

如果 $\{f_k\colon k\in\mathbb{Z}\}$ 是 $\overline{\text{span}\{f_k\colon k\in\mathbb{Z}\}}$ 的一个框架，则称其为框架序列 e.

定义 2.2. 若存在定义在 $\mathcal{H}$ 上的有界可逆算子 U，以及 $\mathcal{H}$ 的标准正交基 $\{e_k\colon k\in\mathbb{Z}\}$，使得$U(e_k)=f_k$, $\forall\ k\in\mathbb{Z}$, 则称序列 $\{f_k\colon k\in\mathbb{Z}\}$ 是 $\mathcal{H}$ 的 Riesz 基。若 $\{f_k\colon k\in\mathbb{Z}\}$ 是 $\text{span}\{f_k\colon k\in\mathbb{Z}\}$ 的 Riesz 基，则称其为 Riesz序列。

定理 2.3. 设 $\{f_k\colon k\in\mathbb{Z}\}$ in $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{H}$ 中的一个序列。则以下条件等价。

(i) $\{f_k\}$ 是 $\mathcal{H}$的 Riesz 基。

(ii) $\{f_k\}$ 在 $\mathcal{H}$中完备，并且存在常数 A、$B>0$，使得

$$A\sum_k |c_k|^2 \le \Big\|\sum_k c_k f_k\Big\|^2 \le B\sum_k |c_k|^2,$$

对于每个有限标量序列 $\{c_k\}$。

关于框架和 Riesz基的进一步研究，请参阅 [9]。

定义 2.4。 [18] 设 $\mathcal{B}=\{\psi_k:\ k\in\mathbb{Z}\}$ 是 $\mathcal{H}$ 中的一个可数函数集，使得 ˜ ˜张成$\{\psi_k:\ k\in\mathbb{Z}\}=\mathcal{H}$. 若集合 $\mathcal{B}=\{\psi_k:\ k\in\mathbb{Z}\}$ 与 $\mathcal{B}$ 双正交，则

$$\langle \psi_j, \tilde{\psi}_k\rangle = \delta_{jk} \quad \text{for all} \quad j,k\in\mathbb{Z}.$$

定义 2.5。 [18] 设 $\psi\in\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{B}=\{T_k\psi:\ k\in\mathbb{Z}\}$，其中 $T_k\psi$ 是 ψ.的整数平移。

˜ ˜ ˜若存在 $\psi\in$ 张成($\mathcal{B}$)，满足性质 $\langle T_k\psi$、$\psi\rangle=\delta_{k0}$，则系统 $\{T_j\psi:\ j\in\mathbb{Z}\}$ 与 $\mathcal{B}$ 是˜双正交的。函数 ψ 将被称为 ψ.的典范双正交函数

定义 2.6。在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 中的有序集合 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{H}$ 的 Schauder基，当且仅当对于每个 $f\in\mathcal{H}$，存在唯一的标量 c_n(f)，使得

$$f=\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n(f) f_n, \tag{2.2}$$

其中，该级数在 $\mathcal{H}$.的范数下收敛。

˜给定一个具有双正交序列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的序列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，我们定义部分和算子 $S_N:\ \mathcal{H}\to\mathcal{H}$，其定义为

$$S_N(f):=\sum_{n=1}^{N}\langle f,\tilde{f}_n\rangle f_n.$$

定理 2.7。给定希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 中的集合 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，下列陈述等价。

(i) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个 Schauder基。˜(ii) 存在一个双正交序列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得部分和算子 S_N 在强算子拓扑下收敛于恒等映射，即，

$$f=\sum_{n\in\mathbb{N}}\langle f,\tilde{f}_n\rangle f_n \ \forall\ f\in\mathcal{H}.$$

˜(iii) 存在一个双正交序列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得部分和算子在算子范数下是一致有界的，即 sup $\|S_N\|<\infty$.$_N$

定义 2.8. [15] 若存在 $C>0$，使得对于所有区间 $I,J\subset\mathbb{R}$，均有 $w\in L^1(\mathbb{T}\times\mathbb{T})$ 是一个非负函数，并且属于 Muckenhoupt $\mathcal{A}_2(\mathbb{T}\times\mathbb{T})$ 权重。

$$\left(\frac{1}{|I||J|}\int_J\int_I w(x,y)\,dxdy\right)\left(\frac{1}{|I||J|}\int_J\int_I \frac{1}{w(x,y)}\,dxdy\right)\le C.$$

上述关于乘积 $\mathcal{A}_2$ 权重的定义，等价于要求 w 在每个变量上都满足一致的$\mathcal{A}_2$ 条件。更准确地说，当且仅当对几乎处处的 $x\in\mathbb{T}$以及每个区间 $J\subset\mathbb{R}$，$w\in\mathcal{A}_2(\mathbb{T}\times\mathbb{T})$ 均成立，

$$\left(\frac{1}{|J|}\int_J w(x,y)\,dy\right)\left(\frac{1}{|J|}\int_J \frac{1}{w(x,y)}\,dy\right)\le C$$

对于 y 变量也是如此。

现在我们为研究 Heisenberg群 提供必要的背景知识。

Heisenberg群 $\mathbb{H}^n$ 是一个幂零李群，其底流形为 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$，群运算定义为 $(x,y,t)(u,v,s)=(x+u,y+v,t+s+\frac{1}{2}(u\cdot y-v\cdot x))$，其哈尔测度是 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ 上的勒贝格测度 $dx\,dy\,dt$。利用 Schr¨odinger 表示π_λ, $\lambda\in\mathbb{R}^*$，其定义为

$$\pi_\lambda(x,y,t)\phi(\xi)=e^{2\pi i\lambda t}e^{2\pi i\lambda(x\cdot\xi+\frac{1}{2}x\cdot y)}\phi(\xi+y),\ \phi\in L^2(\mathbb{R}^n),$$

我们将 $f\in L^1(\mathbb{H}^n)$ 的群傅里叶变换定义为

$$\widehat{f}(\lambda)=\int_{\mathbb{H}^n}f(z,t)\pi_\lambda(z,t)\,dzdt,\ \text{where }\lambda\in\mathbb{R}^*,$$

其中 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的有界算子。换句话说，对于 $\phi\in L^2(\mathbb{R}^n)$，我们有

$$\widehat{f}(\lambda)\phi=\int_{\mathbb{H}^n}f(z,t)\pi_\lambda(z,t)\phi\,dzdt,$$

其中该积分是一个取值于 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的 Bochner 积分。如果 f 也属于 $L^2(\mathbb{H}^n)$，那么 $\widehat{f}(\lambda)$ 是一个 Hilbert–Schmidt 算子。定义

$$f^\lambda(z)=\int_{\mathbb{R}}e^{2\pi i\lambda t}f(z,t)\,dt,$$

它 是 f 关于变量 t 的逆傅里叶变换。因此，我们可以写成

$$\widehat{f}(\lambda)=\int_{\mathbb{C}^n}f^\lambda(z)\pi_\lambda(z,0)dz.$$

设 $g\in L^1(\mathbb{C}^n)$。定义

$$W_\lambda(g)=\int_{\mathbb{C}^n}g(z)\pi_\lambda(z,0)\,dz.$$

当 $\lambda=1$ 时，称其为 g 的 Weyl变换，记作 $W(g)$。它可以显式写为

$$W(g)\phi(\xi)=\int_{\mathbb{R}^{2n}}g(x,y)e^{2\pi i(x\cdot\xi+\frac{1}{2}x\cdot y)}\phi(\xi+y)\,dxdy,\ \phi\in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Weyl变换是一个积分算子，其核为 $K_g(\xi,\eta)=\int_{\mathbb{R}^n}g(x,\eta-\xi)e^{\pi ix\cdot(\xi+\eta)}dx$。若 $g\in L^1\cap L^2(\mathbb{C}^n)$，则 $K_g\in L^2(\mathbb{R}^{2n})$，这意味着 $W(g)$ 是一个希尔伯特-施密特算子，其范数为 $\|W(g)\|^2_{\mathcal{B}_2}=\|K_g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{2n})}$，其中 $\mathcal{B}_2$ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上希尔伯特-施密特算子构成的希尔伯特空间，内积为 $(T,S)=\text{tr}(TS^*)$。Weyl变换的 Plancherel 公式和反演公式分别为 $\|W(g)\|^2_{\mathcal{B}_2}=\|g\|^2_{L^2(\mathbb{C}^n)}$ 和 $g(w)=\text{tr}(\pi(w)^*W(g))$，$w\in\mathbb{C}^n$。关于 Heisenberg群上的调和分析，详见 [13, 28]。

定义 2.9. [25] 设 $\phi\in L^2(\mathbb{R}^{2n})$。对于 $(k,l)\in\mathbb{Z}^{2n}$， ϕ的扭曲平移 $T^t_{(k,l)}\phi$ 定义为

$$T^t_{(k,l)}\phi(x,y)=e^{\pi i(x\cdot l-y\cdot k)}\phi(x-k,y-l),\quad (x,y)\in\mathbb{R}^{2n}.$$

根据扭曲平移的定义，我们有

$$T^t_{(k_1,l_1)}T^t_{(k_2,l_2)}=e^{-\pi i(k_1\cdot l_2-l_1\cdot k_2)}T^t_{(k_1+k_2,l_1+l_2)},\qquad\forall\ (k_1,l_1),(k_2,l_2)\in\mathbb{Z}^{2n}. \tag{2.3}$$

引理 2.10. [25] 设 $\phi\in L^2(\mathbb{R}^{2n})$。则 $T^t_{(k,l)}\phi$ 的 Weyl变换的核满足

$$K_{T^t_{(k,l)}\phi}(\xi,\eta)=e^{\pi i(2\xi+l)\cdot k}K_\phi(\xi+l,\eta).$$

3. Weyl-Zak transform and the bracket map

我们利用核定义与 Weyl 变换相关联的 Zak 变换 Z_W，如下所示。映射 Z_W: $L^2(\mathbb{R}^{2n}) \to L^2(\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n)$ 定义为

$$Z_W\phi(\xi,\xi',\eta) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} K_\phi(m+\xi,\eta)e^{-2\pi i m\cdot\xi'}.$$

事实上，对于 $\phi \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$，我们有

$$\begin{aligned}
\|Z_W\phi\|^2_{L^2(\mathbb{T}^n\times\mathbb{T}^n\times\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |Z_W\phi(\xi,\xi',\eta)|^2\, d\eta d\xi' d\xi \\
&= \int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{T}^n} \left|\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} K_\phi(\xi+m,\eta)e^{-2\pi i m\cdot\xi'}\right|^2 d\xi' d\eta d\xi \\
&= \int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{T}^n} \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} K_\phi(\xi+m,\eta)e^{-2\pi i m\cdot\xi'} \overline{\sum_{m'\in\mathbb{Z}^n} K_\phi(\xi+m',\eta)e^{-2\pi i m'\cdot\xi'}}\, d\xi' d\eta d\xi \\
&= \int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{m,m'\in\mathbb{Z}^n} K_\phi(\xi+m,\eta)\overline{K_\phi(\xi+m',\eta)} \int_{\mathbb{T}^n} e^{-2\pi i(m-m')\cdot\xi'}\, d\xi' d\eta d\xi \\
&= \int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} K_\phi(\xi+m,\eta)\overline{K_\phi(\xi+m,\eta)}\, d\eta d\xi \\
&= \int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} |K_\phi(\xi+m,\eta)|^2\, d\eta d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |K_\phi(\xi,\eta)|^2\, d\eta d\xi \\
&= \|K_\phi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} \\
&= \|\phi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{2n})},
\end{aligned}$$

利用富比尼定理。设 $F \in L^2(\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n)$。对于几乎处处的 $\xi \in \mathbb{T}^n, \eta \in \mathbb{R}^n$，我们有 $F(\xi,\cdot,\eta) \in L^2(\mathbb{T}^n)$。于是，$F(\xi,\cdot,\eta)$ 的傅里叶级数展开为

$$F(\xi,\xi',\eta) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} a_m^{\xi,\eta} e^{2\pi i m\cdot\xi'}, \text{ for some } \{a_m^{\xi,\eta}\}_{m\in\mathbb{Z}^n} \in \ell^2(\mathbb{Z}^n).$$

对于每个 $\xi \in \mathbb{R}^n$，都存在唯一的元素 $m \in \mathbb{Z}^n$ 和 $\gamma \in \mathbb{T}^n$ 使得 $\xi = \gamma + m.$。定义函数 K，它在 $\mathbb{R}^{2n}$ 上满足 $K(\xi,\eta) = a^{\gamma,\eta}_m$. 现在,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |K(\xi,\eta)|^2\, d\xi\, d\eta &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{T}^n} \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} |K(\gamma+m,\eta)|^2\, d\gamma\, d\eta \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{T}^n} \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} |a_m^{\gamma,\eta}|^2\, d\gamma\, d\eta \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{T}^n} |F(\gamma,\xi',\eta)|^2\, d\xi'\, d\gamma\, d\eta < \infty,
\end{aligned}$$

这可由傅里叶级数的帕塞瓦尔定理推出。由 Weyl 变换的满射性，存在 $f \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$，使得 $W(f)$ 是一个核为 $K \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$ 的希尔伯特-施密特算子。因此，Z_W 是 $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ 与 $L^2(\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n)$ 之间的等距同构。

从现在起，我们将 Z_W 称为 Weyl-Zak变换。

例3.1. 设 $\phi(x,y)=\chi_{[0,1)}(x)\chi_{[0,1)}(y)$。那么， ϕ 的 Weyl变换的核为

$$K_\phi(\xi,\eta)=e^{\frac{\pi i}{2}(\xi+\eta)}\operatorname{sinc}\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)\chi_{[0,1)}(\eta-\xi)$$

（见 [25]）。于是我们有

$$\begin{aligned}
Z_W\phi(\xi,\xi',\eta)&=\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}K_\phi(m+\xi,\eta)e^{-2\pi im\cdot\xi'}\\
&=\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}e^{\frac{\pi i}{2}(\xi+m+\eta)}\operatorname{sinc}\left(\frac{\xi+m+\eta}{2}\right)\chi_{[0,1)}(\eta-\xi-m)e^{-2\pi im\cdot\xi'}\\
&=\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}e^{\frac{\pi i}{2}(\xi+m+\eta)}\operatorname{sinc}\left(\frac{\xi+m+\eta}{2}\right)\chi_{[m,m+1)}(\eta-\xi)e^{-2\pi im\cdot\xi'}\\
&=e^{\frac{\pi i}{2}(\xi+\lfloor\eta-\xi\rfloor+\eta)}\operatorname{sinc}\left(\frac{\xi+\lfloor\eta-\xi\rfloor+\eta}{2}\right)e^{-2\pi i\lfloor\eta-\xi\rfloor\cdot\xi'}.
\end{aligned}$$

因此 $Z_W\phi(\xi,\xi',\eta)=e^{\frac{\pi i}{2}(\xi+\lfloor\eta-\xi\rfloor+\eta)}\operatorname{sinc}\left(\frac{\xi+\lfloor\eta-\xi\rfloor+\eta}{2}\right)e^{-2\pi i\lfloor\eta-\xi\rfloor\cdot\xi'}$.

下述命题给出了 ϕ 在Weyl-Zak变换下的扭曲平移像。

命题3.2. 设 $\phi\in L^2(\mathbb{R}^{2n})$。 ϕ 的扭曲平移的Weyl-Zak变换为

$$Z_WT^t_{(k,l)}\phi(\xi,\xi',\eta)=e^{2\pi i(k\cdot\xi+l\cdot\xi')}e^{\pi ik\cdot l}Z_W\phi(\xi,\xi',\eta),\quad k,l\in\mathbb{Z}^n,\ \xi,\xi'\in\mathbb{T}^n,\ \eta\in\mathbb{R}^n. \tag{3.1}$$

证明。利用引理 2.10，我们有

$$\begin{aligned}
Z_WT^t_{(k,l)}\phi(\xi,\xi',\eta)&=\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}K_{T^t_{(k,l)}\phi}(\xi+m,\eta)e^{-2\pi im\cdot\xi'}\\
&=\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}e^{\pi i(2(\xi+m)+l)\cdot k}K_\phi(\xi+m+l,\eta)e^{-2\pi im\cdot\xi'}\\
&=e^{2\pi ik\cdot\xi}e^{\pi ik\cdot l}\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}K_\phi(\xi+m+l,\eta)e^{-2\pi im\cdot\xi'}\\
&=e^{2\pi ik\cdot\xi}e^{\pi ik\cdot l}\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}K_\phi(\xi+m,\eta)e^{-2\pi i(m-l)\cdot\xi'}\\
&=e^{2\pi i(k\cdot\xi+l\cdot\xi')}e^{\pi ik\cdot l}\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}K_\phi(\xi+m,\eta)e^{-2\pi im\cdot\xi'}\\
&=e^{2\pi i(k\cdot\xi+l\cdot\xi')}e^{\pi ik\cdot l}Z_W\phi(\xi,\xi',\eta).
\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

注 3.3. 本文大多数地方，我们采用标准正交基 $\{e^{2\pi i(k\cdot\xi+l\cdot\xi')}e^{\pi ik\cdot l}:k,l\in\mathbb{Z}^n\}$，而不是 $L^2(\mathbb{T}^n\times\mathbb{T}^n)$ 中的经典傅里叶级数。这导出了帕塞瓦尔定理

$$\int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{T}^n}|f(x,y)|^2\,dxdy=\sum_{k,l\in\mathbb{Z}^n}|\langle f,E_{k,l}\rangle|^2,$$

其中 $E_{k,l}(\xi,\xi')=e^{2\pi i(k\cdot\xi+l\cdot\xi')}e^{\pi ik\cdot l}$。

给定两个函数 $\phi,\psi\in L^2(\mathbb{R}^{2n})$，我们使用它们的 Weyl-Zak变换定义括号 $[\phi,\psi]$ 如下。

$$[\phi,\psi]\,(\xi,\xi')=\int_{\mathbb{R}^n} Z_W\phi(\xi,\xi',\eta)\overline{Z_W\psi(\xi,\xi',\eta)}\,d\eta.$$

右侧的积分是有意义的，因为

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^n} Z_W\phi(\xi,\xi',\eta)\overline{Z_W\psi(\xi,\xi',\eta)}\,d\eta\right| &\le \int_{\mathbb{R}^n}|Z_W\phi(\xi,\xi',\eta)||Z_W\psi(\xi,\xi',\eta)\,|d\eta\\ &\le \left(\int_{\mathbb{R}^n}|Z_W\phi(\xi,\xi',\eta)|^2d\eta\right)^{\frac12}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|Z_W\psi(\xi,\xi',\eta)|^2d\eta\right)^{\frac12}<\infty,\end{aligned}\tag{3.2}$$

通过对 $Z_W\phi(\xi,\xi',\cdot)$ $Z_W\psi(\xi,\xi',\cdot)\in L^2(\mathbb{R}^n)$ 应用柯西-施瓦茨不等式，对于几乎处处的 $\xi,\xi'\in\mathbb{T}^n$。显然，$[\cdot,\cdot]$ 是一个半双线性型和厄米对称映射。此外，

$$[\phi,\phi]\,(\xi,\xi')=\int_{\mathbb{R}^n}|Z_W\phi(\xi,\xi',\eta)|^2d\eta\ge 0,$$

对于几乎处处的 ξ、$\xi'\in\mathbb{T}^n$，以及所有 $\phi\in L^2$（$\mathbb{R}^{2n}$）。此外，

$$\left|\,[\phi,\psi]\,(\xi,\xi')\right|\le\left(\left|\,[\phi,\phi]\,(\xi,\xi')\right|\right)^{\frac12}\left(\left|\,[\psi,\psi]\,(\xi,\xi')\right|\right)^{\frac12},\tag{3.3}$$

对几乎处处的 $\xi,\xi'\in\mathbb{T}^n$，对所有 $\phi,\psi\in L^2(\mathbb{R}^{2n})$，利用 (3.2)。现在，考虑

$$\begin{aligned}\|\,[\phi,\psi]\,\|_{L^1(\mathbb{T}^n\times\mathbb{T}^n)} &= \int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{T}^n}|\,[\phi,\psi]\,(\xi,\xi')|\,d\xi'd\xi\\ &\le \int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{T}^n}([\phi,\phi]\,(\xi,\xi'))^{\frac12}([\psi,\psi]\,(\xi,\xi'))^{\frac12}\,d\xi'd\xi\\ &\le \left(\int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{T}^n}[\phi,\phi]\,(\xi,\xi')\,d\xi'\,d\xi\right)^{\frac12}\left(\int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{T}^n}[\psi,\psi]\,(\xi,\xi')\,d\xi'd\xi\right)^{\frac12}\\ &= \left(\int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{R}^n}|Z_W\phi(\xi,\xi',\eta)|^2\,d\eta d\xi'd\xi\right)^{\frac12}\left(\int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{R}^n}|Z_W\psi(\xi,\xi',\eta)|^2\,d\eta d\xi'd\xi\right)^{\frac12}\\ &= \|Z_W\phi\|_{L^2(\mathbb{T}^n\times\mathbb{T}^n\times\mathbb{R}^n)}\|Z_W\psi\|_{L^2(\mathbb{T}^n\times\mathbb{T}^n\times\mathbb{R}^n)}\\ &= \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^{2n})}\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^{2n})},\end{aligned}$$

通过应用柯西-施瓦茨不等式并利用（3.3）。

在下述命题中，我们借助括号映射观察函数的扭曲平移的一些有趣性质。令 $V^t(\phi)=\mathrm{span}\{T^t_{(k,l)}\phi:\ k,l\in\mathbb{Z}^n\}$ 表示主扭曲平移不变空间，其中 $\phi\in L^2(\mathbb{R}^{2n})$。

命题 3.4. 对于 $k,l\in\mathbb{Z}^n$, $\phi,\psi\in L^2(\mathbb{R}^{2n})$，我们有以下性质。

(i) $\langle\phi,T^t_{(k,l)}\psi\rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2n})}=\int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{T}^n}[\phi,\psi]\,(\xi,\xi')e^{-2\pi i(k\cdot\xi+l\cdot\xi')}e^{-\pi ik\cdot l}d\xi'd\xi.$

(ii) $\left[T^t_{(k,l)}\phi,\psi\right](\xi,\xi')=e^{2\pi i(k\cdot\xi+l\cdot\xi')}e^{-\pi ik\cdot l}\,[\phi,\psi]\,(\xi,\xi')$ *for a.e* $\xi,\xi'\in\mathbb{T}^n$.

(iii) $\left[\phi,T^t_{(k,l)}\psi\right](\xi,\xi')=e^{-2\pi i(k\cdot\xi+l\cdot\xi')}e^{-\pi ik\cdot l}\,[\phi,\psi]\,(\xi,\xi')$ *for a.e* $\xi,\xi'\in\mathbb{T}^n$.

(iv) $\phi\perp V^t(\psi)$ *if and only if* $[\phi,\psi]\,(\xi,\xi')=0$ *a.e* $\xi,\xi'\in\mathbb{T}^n$.

证明。（i）考虑

$$\begin{aligned}\langle \phi, T^t_{(k,l)}\psi\rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} &= \langle Z_W\phi, Z_W T^t_{(k,l)}\psi\rangle_{L^2(\mathbb{T}^n\times\mathbb{T}^n\times\mathbb{R}^n)}\\ &= \int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{R}^n} Z_W\phi(\xi,\xi',\eta)\overline{Z_W\psi(\xi,\xi',\eta)e^{2\pi i(k\cdot\xi+l\cdot\xi')}e^{\pi ik\cdot l}}\,d\eta d\xi' d\xi\\ &= \int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{T}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} Z_W\phi(\xi,\xi',\eta)\overline{Z_W\psi(\xi,\xi',\eta)}\,d\eta\right)e^{-2\pi i(k\cdot\xi+l\cdot\xi')}e^{-\pi ik\cdot l}\,d\xi' d\xi\\ &= \int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{T}^n}[\phi,\psi]\,(\xi,\xi')e^{-2\pi i(k\cdot\xi+l\cdot\xi')}e^{-\pi ik\cdot l}\,d\xi' d\xi, \qquad (3.4)\end{aligned}$$

由于 Z_W 是酉的，并利用（3.1）。

(ii) 现在，利用 (2.3) 和 (3.4)，我们得到

$$\begin{aligned}\langle T^t_{(k,l)}\phi, T^t_{(k',l')}\psi\rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} &= \langle \phi, T^t_{(-k,-l)}T^t_{(k',l')}\psi\rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2n})}\\ &= e^{\pi i(k\cdot l'-l\cdot k')}\langle \phi, T^t_{(k'-k,l'-l)}\psi\rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2n})}\\ &= e^{\pi i(k\cdot l'-l\cdot k')}\\ &\quad\times\int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{T}^n}[\phi,\psi]\,(\xi,\xi')e^{-2\pi i((k'-k)\cdot\xi+(l'-l)\cdot\xi')}e^{-\pi i(k'-k)\cdot(l'-l)}\,d\xi' d\xi\\ &= \int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{T}^n}e^{2\pi i(k\cdot\xi+l\cdot\xi')}e^{-\pi ik\cdot l}[\phi,\psi]\,(\xi,\xi')e^{-2\pi i(k'\cdot\xi+l'\cdot\xi')}e^{-\pi ik'\cdot l'}\,d\xi' d\xi.\end{aligned}$$

另一方面，

$$\langle T^t_{(k,l)}\phi, T^t_{(k',l')}\psi\rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} = \int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{T}^n}\left[T^t_{(k,l)}\phi,\psi\right](\xi,\xi')e^{-2\pi i(k'\cdot\xi+l'\cdot\xi')}e^{-\pi ik'\cdot l'}\,d\xi' d\xi,$$

利用（3.4）。因此

$$\left[T^t_{(k,l)}\phi,\psi\right](\xi,\xi') = e^{2\pi i(k\cdot\xi+l\cdot\xi')}e^{-\pi ik\cdot l}[\phi,\psi]\,(\xi,\xi'),\ \text{a.e}\ \xi,\xi'\in\mathbb{T}^n, \qquad (3.5)$$

利用注 3.3，证明 (*ii*)。

(iii) 考虑

$$\begin{aligned}\left[\phi,T^t_{(k,l)}\psi\right](\xi,\xi') &= \int_{\mathbb{R}^n} Z_W\phi(\xi,\xi',\eta)\overline{Z_W T^t_{(k,l)}\psi(\xi,\xi',\eta)}\,d\eta\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} Z_W\phi(\xi,\xi',\eta)e^{-2\pi i(k\cdot\xi+l\cdot\xi')}e^{-\pi ik\cdot l}\overline{Z_W\psi(\xi,\xi',\eta)}\,d\eta\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} Z_W\phi(\xi,\xi',\eta)e^{-2\pi i(k\cdot\xi+l\cdot\xi')}e^{\pi ik\cdot l}e^{-2\pi ik\cdot l}\overline{Z_W\psi(\xi,\xi',\eta)}\,d\eta\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} Z_W\phi(\xi,\xi',\eta)e^{-2\pi i(k\cdot\xi+l\cdot\xi')}e^{\pi ik\cdot l}\overline{Z_W\psi(\xi,\xi',\eta)}\,d\eta\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} Z_W T^t_{(-k,-l)}\phi(\xi,\xi',\eta)\overline{Z_W\psi(\xi,\xi',\eta)}\,d\eta\\ &= \left[T^t_{(-k,-l)}\phi,\psi\right](\xi,\xi'). \qquad (3.6)\end{aligned}$$

然后将（3.5）代入（3.6），即可得到结论。

(iv) 假设 $\phi\perp V^t(\psi)$。那么

$$\langle \phi, T^t_{(k,l)}\psi\rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} = 0 \text{ for all } k,l\in\mathbb{Z}^n.$$

由（3.4）可知，这等价于

$$\int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{T}^n}[\phi,\psi]\,(\xi,\xi^{'})e^{-2\pi i(k\cdot\xi+l\cdot\xi^{'})}e^{-\pi ik\cdot l}d\xi^{'}d\xi=0 \text{ for all } k,l\in\mathbb{Z}^n,$$

这等价于

$$[\phi,\psi]\,(\xi,\xi^{'})=0 \text{ a.e } \xi,\xi^{'}\in\mathbb{T}^n,$$

利用注 3.3，即可证明 (iv)。

□

4. A frame sequence and a Riesz sequence of the system of twisted translates

设 $\phi\in L^2(\mathbb{R}^{2n})$、$E^t(\phi):=\{T^t{}_{(k,\ l)}\ \phi:\ k,\ l\in\mathbb{Z}^n\}$ 以及 $U^t(\phi)$ =张成$(E^t(\phi))$。下述命题给出了 $V^t(\phi)$ 在 Weyl-Zak变换下像中元素的结构，其中某个$\phi\in L^2(\mathbb{R}^{2n})$。

命题4.1. 设 $\phi\in L^2(\mathbb{R}^{2n})$。则 $f\in V^t(\phi)$ 当且仅当

$$Z_Wf(\xi,\xi^{'},\eta)=r(\xi,\xi^{'})Z_W\phi(\xi,\xi^{'},\eta),\ for\ a.e\ \xi,\xi^{'}\in\mathbb{T}^n,\eta\in\mathbb{R}^n,$$

对于某些 $r\in L^2(\mathbb{T}^n\times\mathbb{T}^n;\ [\phi,\phi])$。

证明。设 $f\in U^t(\phi)$。则 $f=\sum_{(k,l)\in\mathcal{F}}a_{k,l}T^t{}_{(k,l)}\phi$，其中 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{Z}^{2n}$. 的有限子集。利用 (3.1)，得到

$$\begin{aligned}Z_Wf(\xi,\xi^{'},\eta)&=\sum_{(k,l)\in\mathcal{F}}a_{k,l}Z_WT^t_{(k,l)}\phi(\xi,\xi^{'},\eta)\\&=\sum_{(k,l)\in\mathcal{F}}a_{k,l}e^{2\pi i(k\cdot\xi+l\cdot\xi^{'})}e^{\pi ik\cdot l}Z_W\phi(\xi,\xi^{'},\eta)\\&=\left(\sum_{(k,l)\in\mathcal{F}}a_{k,l}e^{2\pi i(k\cdot\xi+l\cdot\xi^{'})}e^{\pi ik\cdot l}\right)Z_W\phi(\xi,\xi^{'},\eta)\\&=:r_f(\xi,\xi^{'})Z_W\phi(\xi,\xi^{'},\eta).\end{aligned}$$

此外，

$$\begin{aligned}\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{2n})}&=\|Z_Wf\|^2_{L^2(\mathbb{T}^n\times\mathbb{T}^n\times\mathbb{R}^n)}\\&=\int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{T}^n}|r_f(\xi,\xi^{'})|^2\int_{\mathbb{R}^n}|Z_W\phi(\xi,\xi^{'},\eta)|^2\,d\eta\,d\xi^{'}\,d\xi\\&=\int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{T}^n}|r_f(\xi,\xi^{'})|^2\,[\phi,\phi]\,(\xi,\xi^{'})\,d\xi^{'}\,d\xi\\&=\|r_f\|^2_{L^2(\mathbb{T}^n\times\mathbb{T}^n;[\phi,\phi])}.\end{aligned}\tag{4.1}$$

那么，映射 $f\mapsto r_f$ 是从 $U^t(\phi)$ 到 $L^2(\mathbb{T}^n\times\mathbb{T}^n;\ [\phi,\phi])$ 中所有三角多项式构成的集合上的等距同构，并且可以扩展为 $V^t(\phi)$ 与 $L^2(\mathbb{T}^n\times\mathbb{T}^n;\ [\phi,\phi])$. □之间的等距同构。

定理4.2。设 $\phi\in L^2(\mathbb{R}^{2n})$。那么$\{T^t_{(k,l)}\phi:\ k,l\in\mathbb{Z}^n\}$是一个框架序列，其框界为$A,B>0$，当且仅当

$$0<A\le[\phi,\phi]\,(\xi,\xi^{'})\le B<\infty,\quad for\ a.e\ (\xi,\xi^{'})\in\Omega_\phi,\tag{4.2}$$

其中 $\Omega_\phi:=\{(\xi,\xi^{'})\in\mathbb{T}^n\times\mathbb{T}^n:\ [\phi,\phi](\xi,\xi^{'})\neq0\}$.

证明。假设 $\{T^t_{(k,l)}\phi\colon\ k,l\in\mathbb{Z}^n\}$ 是一个框架序列。那么

$$A\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{2n})}\le\sum_{k,l\in\mathbb{Z}^n}|\langle f,T^t_{(k,l)}\phi\rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2n})}|^2\le B\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{2n})},\quad\forall\ f\in V^t(\phi). \tag{4.3}$$

考虑,

$$\begin{aligned}\langle f,T^t_{(k,l)}\phi\rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2n})}&=\langle Z_Wf,Z_WT^t_{(k,l)}\phi\rangle_{L^2(\mathbb{T}^n\times\mathbb{T}^n\times\mathbb{R}^n)}\\&=\int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{R}^n}r(\xi,\xi')Z_W\phi(\xi,\xi',\eta)e^{-2\pi i(k\cdot\xi+l\cdot\xi')}e^{-\pi ik\cdot l}\overline{Z_W\phi(\xi,\xi',\eta)}\,d\eta d\xi' d\xi,\end{aligned}$$

利用命题3.2和命题4.1，可得。因此

$$\langle f,T^t_{(k,l)}\phi\rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2n})}=\int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{T}^n}r(\xi,\xi')\,[\phi,\phi]\,(\xi,\xi')e^{-2\pi i(k\cdot\xi+l\cdot\xi')}e^{-\pi ik\cdot l}\,d\xi' d\xi.$$

现在，利用注 3.3，可得

$$\begin{aligned}\sum_{k,l\in\mathbb{Z}^n}|\langle f,T^t_{(k,l)}\phi\rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2n})}|^2&=\sum_{k,l\in\mathbb{Z}^n}\left|\int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{T}^n}r(\xi,\xi')\,[\phi,\phi]\,(\xi,\xi')e^{-2\pi i(k\cdot\xi+l\cdot\xi')}e^{-\pi k\cdot l}\,d\xi' d\xi\right|^2\\&=\|r\,[\phi,\phi]\,\|^2_{L^2(\mathbb{T}^n\times\mathbb{T}^n)}\\&=\int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{T}^n}|r(\xi,\xi')\,[\phi,\phi]\,(\xi,\xi')|^2\,d\xi' d\xi.\end{aligned}\tag{4.4}$$

将(4.1)和(4.4)代入(4.3)，得到

$$A\|r\|^2_{L^2(\mathbb{T}^n\times\mathbb{T}^n;[\phi,\phi])}\le\int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{T}^n}|r(\xi,\xi')\,[\phi,\phi]\,(\xi,\xi')|^2\,d\xi' d\xi \tag{4.5}$$

and

$$\int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{T}^n}|r(\xi,\xi')\,[\phi,\phi]\,(\xi,\xi')|^2\,d\xi' d\xi\le B\|r\|^2_{L^2(\mathbb{T}^n\times\mathbb{T}^n;[\phi,\phi])}. \tag{4.6}$$

令 $N:=\{(\xi,\xi')\in\Omega_\phi\colon\ [\phi,\phi](\xi,\xi')-B>0\}$ 为 $\mathbb{T}^n\times\mathbb{T}^n$的一个可测子集。将$r=\chi_N$ 代入(4.6)，得到

$$\begin{aligned}&\iint_N[\phi,\phi]\,(\xi,\xi')([\phi,\phi]\,(\xi,\xi')-B)\,d\xi' d\xi\\&\qquad=\iint_{\Omega_\phi}|r(\xi,\xi')|^2\,[\phi,\phi]\,(\xi,\xi')([\phi,\phi]\,(\xi,\xi')-B)\,d\xi' d\xi\\&\qquad\le 0,\end{aligned}$$

这意味着 $\mu(N)=0$，其中 μ 是 $\mathbb{T}^n\times\mathbb{T}^n$.上的勒贝格测度 $d\xi\,d\xi'$。类似地，我们可以证明，对于几乎处处的（ξ，ξ'）$\in\Omega_\phi$，$A\le[\phi,\phi](\xi,\xi')$，从而证明了我们的断言。反之，假设（4.2）成立。那么我们有

$$\iint_{\Omega_\phi}|r(\xi,\xi')|^2\,[\phi,\phi]\,(\xi,\xi')(A-[\phi,\phi]\,(\xi,\xi'))\,d\xi'\,d\xi\le 0$$

and

$$\iint_{\Omega_\phi}|r(\xi,\xi')|^2\,[\phi,\phi]\,(\xi,\xi')([\phi,\phi]\,(\xi,\xi')-B)\,d\xi'\,d\xi\le 0.$$

现在反向回溯这些步骤，我们得到 $\{T^t_{(k,l)}\phi\colon\ k,l\in\mathbb{Z}^n\}$ 是一个框架序列，其框界为 A和 B。□

定理 4.3. 设 $\phi \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$。那么 $\{T^t_{(k,l)}\phi : \ k,l \in \mathbb{Z}^n\}$ 是 $V^t(\phi)$的一个 Riesz序列，当且仅当

$$0 < A \leq [\phi,\phi](\xi,\xi') \leq B < \infty \ a.e \ \xi,\xi' \in \mathbb{T}^n. \tag{4.7}$$

证明。令 $\{a_{k,l}\} \in \ell^2(\mathbb{Z}^{2n})$。利用 (3.1)，我们得到

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k,l\in\mathbb{Z}^n} a_{k,l} T^t_{(k,l)}\phi \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} &= \left\| Z_W\left(\sum_{k,l\in\mathbb{Z}^n} a_{k,l} T^t_{(k,l)}\phi \right) \right\|^2_{L^2(\mathbb{T}^n\times\mathbb{T}^n\times\mathbb{R}^n)} \\
&= \left\| \sum_{k,l\in\mathbb{Z}^n} a_{k,l} Z_W T^t_{(k,l)}\phi \right\|^2_{L^2(\mathbb{T}^n\times\mathbb{T}^n\times\mathbb{R}^n)} \\
&= \int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \left| \sum_{k,l\in\mathbb{Z}^n} a_{k,l} Z_W T^t_{(k,l)}\phi(\xi,\xi',\eta) \right|^2 d\eta d\xi' d\xi \\
&= \int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \left| \sum_{k,l\in\mathbb{Z}^n} a_{k,l} e^{2\pi i(k\cdot\xi + l\cdot\xi')} e^{\pi i k\cdot l} Z_W \phi(\xi,\xi',\eta) \right|^2 d\eta d\xi' d\xi \\
&= \int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{T}^n} \left| \sum_{k,l\in\mathbb{Z}^n} a_{k,l} e^{2\pi i(k\cdot\xi + l\cdot\xi')} e^{\pi i k\cdot l} \right|^2 \int_{\mathbb{R}^n} \left| Z_W \phi(\xi,\xi',\eta) \right|^2 d\eta d\xi' d\xi \\
&= \int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{T}^n} \left| \sum_{k,l\in\mathbb{Z}^n} a_{k,l} e^{2\pi i(k\cdot\xi + l\cdot\xi')} e^{\pi i k\cdot l} \right|^2 [\phi,\phi](\xi,\xi') d\xi' d\xi. \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

设 $p \in L^2(\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n)$，则

$$p(\xi,\xi') = \sum_{k,l\in\mathbb{Z}^n} a_{k,l} e^{2\pi i(k\cdot\xi + l\cdot\xi')} e^{\pi i k\cdot l} \quad \text{and} \tag{4.9}$$

$$\|p\|^2_{L^2(\mathbb{T}^n\times\mathbb{T}^n)} = \sum_{k,l\in\mathbb{Z}^n} |a_{k,l}|^2, \tag{4.10}$$

由注 3.3 可知。于是由 (4.8) 得出

$$\left\| \sum_{k,l\in\mathbb{Z}^n} a_{k,l} T^t_{(k,l)}\phi \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} = \int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{T}^n} |p(\xi,\xi')|^2 [\phi,\phi](\xi,\xi') d\xi' d\xi.$$

假设 $\{T^t_{(k,l)}\phi : \ k,l \in \mathbb{Z}^n\}$ 是一个 Riesz序列。则存在 $A, B > 0$ 使得

$$A \sum_{k,l\in\mathbb{Z}^n} |a_{k,l}|^2 \leq \left\| \sum_{k,l\in\mathbb{Z}^n} a_{k,l} T^t_{(k,l)}\phi \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} \leq B \sum_{k,l\in\mathbb{Z}^n} |a_{k,l}|^2, \ \forall \ \{a_{k,l}\} \in \ell^2(\mathbb{Z}^{2n}). \tag{4.11}$$

Thus

$$A \int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{T}^n} |p(\xi,\xi')|^2 d\xi' d\xi \leq \int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{T}^n} |p(\xi,\xi')|^2 [\phi,\phi](\xi,\xi') d\xi' d\xi \leq B \int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{T}^n} |p(\xi,\xi')|^2 d\xi' d\xi, \tag{4.12}$$

对于任意 $p \in L^2(\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n)$。令 $M := \{(\xi,\xi') \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n : \ [\phi,\phi](\xi,\xi') > B\}$ 为 $\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n$. 的可测子集。将 $p = \chi_M$ 代入 (4.12) 右端，得到

$$\iint_M ([\phi,\phi](\xi,\xi') - B) d\xi' d\xi \leq 0,$$

这意味着 $\mu(M) = 0$，其中 μ 是 $\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n$. 上的勒贝格测度 $d\xi\, d\xi'$。类似地，我们可以证明 $\mu\{(\xi, \xi') \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n : [\phi, \phi](\xi, \xi') < A\} = 0$。因此

$$0 < A \leq [\phi, \phi]\,(\xi, \xi') \leq B < \infty \text{ a.e } \xi, \xi' \in \mathbb{T}^n.$$

反过来，假设 (4.7) 成立。令 $\{a_{k,l}\} \in C_{00}(\mathbb{Z}^{2n})$。于是利用 (4.8)，可得

$$\begin{aligned} A \int_{\mathbb{T}^n} \int_{\mathbb{T}^n} \left| \sum_{k,l \in \mathbb{Z}^n} a_{k,l} e^{2\pi i (k\cdot\xi + l\cdot\xi')} e^{\pi i k\cdot l} \right|^2 d\xi' d\xi &\leq \left\| \sum_{k,l \in \mathbb{Z}^n} a_{k,l} T^t_{(k,l)} \phi \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} \\ &\leq B \int_{\mathbb{T}^n} \int_{\mathbb{T}^n} \left| \sum_{k,l \in \mathbb{Z}^n} a_{k,l} e^{2\pi i (k\cdot\xi + l\cdot\xi')} e^{\pi i k\cdot l} \right|^2 d\xi' d\xi. \end{aligned} \tag{4.13}$$

再利用 (4.10)，即可得到结论。 □

我们通过一个例子来说明该定理。

例 4.4. 定义 $\phi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ 如下：

$$K_\phi(\xi, \eta) = e^{\xi\eta} \chi_{[0,1)}(\xi) \chi_{[0,1)}(\eta), \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}.$$

设 $\phi_2 = \phi \times \phi$，其中 $\times$ 是一个扭积。现在，我们利用定理 4.3，旨在证明 $\{T^t_{(k,l)} \phi_2 : k, l \in \mathbb{Z}\}$ 是一个 Riesz序列。我们知道， ϕ_2 的 Weyl变换的核为 $K_{\phi_2}(\xi, \eta) = \int_{\mathbb{R}} K_\phi(\xi, y) K_\phi(y, \eta)\, dy$. 现在，对于 $\xi, \xi' \in \mathbb{T}$ 和 $\eta \in \mathbb{R}$，可得

$$\begin{aligned} Z_W \phi(\xi, \xi', \eta) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} K_\phi(\xi + m, \eta) e^{-2\pi i m \xi'} \\ &= K_\phi(\xi, \eta) \\ &= e^{\xi\eta} \chi_{[0,1)}(\eta) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} Z_W \phi_2(\xi, \xi', \eta) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} K_{\phi_2}(\xi + m, \eta) e^{-2\pi i m \xi'} \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\int_{\mathbb{R}} K_\phi(\xi + m, y) K_\phi(y, \eta)\, dy \right) e^{-2\pi i m \xi} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} K_\phi(\xi + m, y) e^{-2\pi i m \xi} \right) K_\phi(y, \eta)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} Z_W \phi(\xi, \xi', y) K_\phi(y, \eta)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{\xi y} \chi_{[0,1)}(y) e^{y\eta} \chi_{[0,1)}(y) \chi_{[0,1)}(\eta)\, dy \\ &= \chi_{[0,1)}(\eta) \int_0^1 e^{(\xi+\eta)y}\, dy. \end{aligned}$$

此外，

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |Z_W \phi_2(\xi, \xi', \eta)|^2\, d\eta &= \int_{\mathbb{R}} \left| \chi_{[0,1)}(\eta) \int_0^1 e^{(\xi+\eta)y}\, dy \right|^2 d\eta \\ &= \int_0^1 \int_0^1 e^{(\xi+\eta)y}\, dy d\eta. \end{aligned}$$

由于 $1 \leq e^{(\xi+\eta)y} < e^2$，对于所有 $\xi, \eta, y \in [0,1)$，我们有

$$1 \leq \int_{\mathbb{R}} |Z_W \phi_2(\xi, \xi', \eta)|^2 \, d\eta \leq e^2,$$

对于所有 ξ、$\xi' \in \mathbb{T}$。因此，集合 $\{T^t_{(k,l)}\phi_2 : \ k$、$l \in \mathbb{Z}\}$ 构成 $V^t(\phi \times \phi)$ 的 Riesz 基。

5. Canonical biorthogonal function and orthogonalization

下面的定理给出了系统 $\{T^t_{(k,l)}\phi : k, l \in \mathbb{Z}^n\}$ 构成正交归一系的一个等价条件。

定理 5.1. 设 $\phi \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$。则 $\{T^t_{(k,l)}\phi : k, l \in \mathbb{Z}^n\}$ 是一个正交归一系，当且仅当$[\phi, \phi](\xi, \xi') = 1$几乎处处 $\xi, \xi' \in \mathbb{T}^n$.

证明。由 (2.3) 和 (3.4)，我们观察到

$$\langle T^t_{(k,l)}\phi, T^t_{(k',l')}\phi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} = \delta_{(k,l),(k',l')} \quad \text{for } k, k', l, l' \in \mathbb{Z}^n,$$

当且仅当

$$\langle \phi, T^t_{(k,l)}\phi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} = \delta_{(k,l),(0,0)} \quad \text{for } k, l \in \mathbb{Z}^n,$$

当且仅当

$$\langle \phi, T^t_{(k,l)}\phi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} = \int_{\mathbb{T}^n} \int_{\mathbb{T}^n} [\phi, \phi](\xi, \xi') e^{-2\pi i(k\cdot\xi + l\cdot\xi')} e^{-\pi i k\cdot l} d\xi' d\xi.$$

因此，若 $\{T^t_{(k,l)}\phi : k, l \in \mathbb{Z}^n\}$ 是一个正交归一系，那么由注 3.3 可得 at

$$[\phi, \phi](\xi, \xi') = 1, \text{ for a.e } \xi, \xi' \in \mathbb{T}^n.$$

反向结论可通过逆向推导得到。 □

定理 5.2. 设 $\phi \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$。那么，存在一个与 ϕ 对应的典范双正交函数 $\tilde{\phi}$，使得 $\tilde{\phi} \in V^t(\phi)$，当且仅当 $\frac{1}{[\phi,\phi]} \in L^1(\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n)$。

˜证明。假设 ϕ 是 ϕ 的典范双正交函数（双正交性是相对于扭曲平移系统而言的）。那么，我们有

$$\langle T^t_{(k,l)}\tilde{\phi}, \phi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} = \delta_{(k,l),(0,0)}, \quad k, l \in \mathbb{Z}^n.$$

由命题3.2和命题4.1可得。

$$\begin{aligned}
\delta_{(k,l),(0,0)} &= \langle T^t_{(k,l)}\tilde{\phi}, \phi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} \\
&= \int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(k\cdot\xi + l\cdot\xi')} e^{\pi i k\cdot l} Z_W\tilde{\phi}(\xi, \xi', \eta)\overline{Z_W\phi(\xi, \xi', \eta)}\, d\eta\, d\xi'\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(k\cdot\xi + l\cdot\xi')} e^{\pi i k\cdot l} r(\xi, \xi') Z_W\phi(\xi, \xi', \eta)\overline{Z_W\phi(\xi, \xi', \eta)}\, d\eta\, d\xi'\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{T}^n} e^{2\pi i(k\cdot\xi + l\cdot\xi')} e^{\pi i k\cdot l} r(\xi, \xi') \int_{\mathbb{R}^n} Z_W\phi(\xi, \xi', \eta)\overline{Z_W\phi(\xi, \xi', \eta)}\, d\eta\, d\xi'\, d\xi. \qquad (5.1)
\end{aligned}$$

Then

$$\delta_{(k,l),(0,0)} = \int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{T}^n} r(\xi, \xi')\,[\phi, \phi](\xi, \xi') e^{2\pi i(k\cdot\xi + l\cdot\xi')} e^{\pi i k\cdot l} d\xi'\, d\xi,$$

利用括号 $[\phi, \phi]$ 的定义，可得:

$$r(\xi, \xi')\,[\phi, \phi](\xi, \xi') = 1, \quad \text{for a.e } \xi, \xi' \in \mathbb{T}^n,$$

使用标准正交基 $\{e^{2\pi i(k\cdot\xi+l\cdot\xi')}e^{\pi ik\cdot l}: k,l\in\mathbb{Z}^n\}$。因此,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{T}^n}\frac{1}{[\phi,\phi](\xi,\xi')}\,d\xi' d\xi &= \int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{T}^n}\frac{|r(\xi,\xi')[\phi,\phi](\xi,\xi')|^2}{[\phi,\phi](\xi,\xi')}\,d\xi' d\xi\\ &= \int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{T}^n}|r(\xi,\xi')|^2[\phi,\phi](\xi,\xi')\,d\xi' d\xi\\ &= \|r\|^2_{L^2(\mathbb{T}^n\times\mathbb{T}^n;[\phi,\phi](\xi,\xi'))}<\infty,\end{aligned}$$

这就证明了我们的断言。反过来,假设 $\frac{1}{[\phi,\phi]}\in L^1(\mathbb{T}^n\times\mathbb{T}^n)$。那么 $\frac{1}{[\phi,\phi]}\in L^2(\mathbb{T}^n\times\mathbb{T}^n;[\phi,\phi])$。定义函数 $\tilde{\phi}$,使得 $Z_W\tilde{\phi}(\xi,\xi',\eta)=\frac{1}{[\phi,\phi](\xi,\xi')}Z_W\phi(\xi,\xi',\eta)$。由命题4.1可得, $\tilde{\phi}\in V^t(\phi)$。根据(5.1),并用 $\frac{1}{[\phi,\phi](\xi,\xi')}$ 替代 $r(\xi,\xi')$,我们得到

$$\langle T^t_{(k,l)}\tilde{\phi},\phi\rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2n})}=\int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{T}^n}e^{2\pi i(k\cdot\xi+l\cdot\xi')}e^{\pi ik\cdot l}d\xi'\,d\xi,$$

由此我们得出, ϕ 是 ϕ的典范双正交函数。 □

在接下来的结果中,我们证明:给定一个扭曲平移 $\{T^t_{(k,l)}\phi: k,l\in\mathbb{Z}^n\}$的Riesz序列,可以找到一个适当的函数 $\phi\in V^t(\phi)$,使所得序列构成 $V^t(\phi)$的标准正交序列。

定理5.3. 设 $\phi\in L^2(\mathbb{R}^{2n})$,使得系统 $\{T^t_{(k,l)}\phi: k,l\in\mathbb{Z}^n\}$ 构成一个Riesz序列。

那么存在 $\phi\in V^t(\phi)$,使得 $\{T^t_{(k,l)}\phi: k,l\in\mathbb{Z}^n\}$ 是 $V^t(\phi)$ 的一个正交归一系,其中$V^t(\phi)=V^t(\tilde{\phi})$。更明确地说, $\tilde{\phi}$ 由 $Z_W\tilde{\phi}(\xi,\xi',\eta)=\frac{1}{\sqrt{[\phi,\phi](\xi,\xi')}}Z_W\phi(\xi,\xi',\eta)$ 给出。

证明. 由于 $\{T^t_{(k,l)}\phi: k,l\in\mathbb{Z}^n\}$ 是一个Riesz序列,根据定理 4.3,存在 $A,B>0$ 使得$A\le[\phi,\phi](\xi,\xi')\le B$,对于 $a.e.\ \xi,\xi'\in\mathbb{T}^n$。我们定义 $\tilde{\phi}\in L^2(\mathbb{R}^{2n})$ 如下:

$$Z_W\tilde{\phi}(\xi,\xi',\eta):=\frac{Z_W\phi(\xi,\xi',\eta)}{\sqrt{[\phi,\phi](\xi,\xi')}},$$

对于 $\eta\in\mathbb{R}^n$,以及对于 $a.e.\ \xi,\ \xi'\in\mathbb{T}^n$。此外,

$$\begin{aligned}\left[\tilde{\phi},\tilde{\phi}\right](\xi,\xi') &= \int_{\mathbb{R}^n}|Z_W\tilde{\phi}(\xi,\xi',\eta)|^2\,d\eta\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{Z_W\phi(\xi,\xi',\eta)}{\sqrt{[\phi,\phi](\xi,\xi')}}\right|^2 d\eta\\ &= \frac{1}{[\phi,\phi](\xi,\xi')}\int_{\mathbb{R}^n}|Z_W\phi(\xi,\xi',\eta)|^2\,d\eta\\ &= \frac{1}{[\phi,\phi](\xi,\xi')}[\phi,\phi](\xi,\xi')\\ &= 1,\end{aligned}$$

对于 $a.e.\ \xi,\xi'\in\mathbb{T}^n$。因此,根据定理 5.1,系统 $\{T^t_{(k,l)}\tilde{\phi}: k,l\in\mathbb{Z}^n\}$ 是正交归一系。现在,只需证明 $V^t(\phi)=V^t(\tilde{\phi})$。设 $r(\xi,\xi')=\sqrt{[\phi,\phi](\xi,\xi')}$。则 $r\in L^2(\mathbb{T}^n\times\mathbb{T}^n,[\phi,\phi])$,且我们有

$$Z_W\tilde{\phi}(\xi,\eta,\eta)=r(\xi,\xi')Z_W\phi(\xi,\xi',\eta).$$

~ ~利用命题4.1，得到 $\phi \in V^t(\phi)$，这意味着 $V^t(\phi) \subset V^t(\phi)$。为证明反向包含，定义 $r_1(\xi,\xi') = \sqrt{[\phi,\phi](\xi,\xi')}$。于是 $r_1 \in L^2(\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n;\ [\phi,\phi])$，因为$[\phi,\phi](\xi,\xi') \leq B$几乎处处 $\xi,\xi' \in \mathbb{T}^n$并且

$$Z_W\phi(\xi,\eta,\eta) = r_1(\xi,\xi')Z_W\tilde{\phi}(\xi,\xi',\eta).$$

~然后，按照之前的方法，我们得到 $V^t(\phi) \subset V^t(\phi)$。 □

6. The system of twisted translates as a Schauder basis

在本节中，我们取 $n=1$，并给出系统 $\{T^t_{(k,l)}\phi:\ k、\ l \in \mathbb{Z}\}$ 成为 $V^t(\phi)$ 上的 Schauder基（其中 $\phi \in L^2(\mathbb{R}^2)$）的刻画，这一刻画用 Muckenhoupt $\mathcal{A}_2$ 权表示。在这一联系下，我们参考 [19]。现在，我们陈述以下引理以证明主要定理。

引理 6.1. 设 $w \in L^1(\mathbb{T} \underset{M}{\times} \mathbb{T})$ 是一个非负函数。对于 $M、\ N \geq 0$，定义算子 $T_{M,N}$ 于 $L^1(\mathbb{T}\times\mathbb{T};\ w)$ 上，使得 $T_{M,N}f = \sum\limits_{m=-M}^{N}\sum\limits_{n=-N} \langle f、\ e_{m,n}\rangle e_{m,n}$，其中 $e_{m,n}(\xi,\xi') = e^{-2\pi i(m\xi+n\xi')}$。则 以下陈述等价。

(i) 上确界 $\|T_{M,N}\| < \infty$.M,N(ii) $w \in \mathcal{A}_2(\mathbb{T}\times\mathbb{T})$。

证明。证明过程与 [15] 中定理 5.6 的证明步骤相同。 □

定理 6.2. 设 $\phi \in L^2(\mathbb{R}^2)$。那么系统 $\{T^t_{(k,l)}\phi:\ k,l \in \mathbb{Z}\}$ 是 $V^t(\phi)$ 的 Schauder基，当且仅当 $[\phi,\phi] \in \mathcal{A}_2(\mathbb{T}\times\mathbb{T})$。

证明。利用命题4.1中的等距同构，我们可以证明，$\{T^t_{(k,l)}\phi:\ k,l \in\mathbb{Z}\}$ 是 $V^t(\phi)$的一个Schauder基，当且仅当 $\{e_{m,n}e^{-\pi imn}:\ m,n \in \mathbb{Z}\}$ 是$L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{T};\ [\phi,\phi])$的一个Schauder基。假设 $\{e_{m,n}e^{-\pi imn}:\ m,n \in \mathbb{Z}\}$ 是 $L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{T};\ [\phi,\phi])$的一个Schauder基。那么，对于每个 $f \in L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{T};\ [\phi,\phi])$，存在唯一的标量序列 $\{c_{m,n}(f):\ m,n \in \mathbb{Z}\}$，使得

$$f = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} c_{m,n}(f)e_{m,n}e^{-\pi imn}.$$

此外，对于每个 $m,n \in \mathbb{Z}.$，$f \to c_{m,n}(f)$ 是一个有界线性泛函。根据里斯表示定理，存在一组 $\{F_{m,n}:\ m,n \in \mathbb{Z}\} \subset L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{T};\ [\phi,\phi])$，使得

$$c_{m,n}(f) = \langle f, F_{m,n}\rangle_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{T};[\phi,\phi])}.$$

注意

$$\langle e_{m',n'}e^{-\pi im'n'}, F_{m,n}\rangle_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{T};[\phi,\phi])} = \delta_{(m,n),(m',n')}. \tag{6.1}$$

因此，$\{F_{m,n}:\ m,n \in \mathbb{Z}\}$ 与 $\{e_{m,n}e^{-\pi imn}:\ m,n \in \mathbb{Z}\}.$ 是双正交的。现在，对于 $M,N \geq 0$，定义在 $L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{T};\ [\phi,\phi])$ 上的部分和算子 $S_{M,N}$ 定义为

$$S_{M,N}F = \sum_{m=-M}^{M}\sum_{n=-N}^{N} \langle F, F_{m,n}\rangle_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{T};[\phi,\phi])}e_{m,n}e^{-\pi imn} \tag{6.2}$$

利用定理 2.7 可知，它是一致有界的。也就是说，

$$\sup_{M,N\geq 0} \|S_{M,N}\| < \infty. \tag{6.3}$$

因此，通过使用柯西-施瓦茨不等式，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}}|F_{m,n}(\xi,\xi')\,[\phi,\phi]\,(\xi,\xi')|\,d\xi' d\xi \\
&\quad\leq\left(\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}}|F_{m,n}(\xi,\xi')\sqrt{[\phi,\phi]\,(\xi,\xi')}|^2\,d\xi' d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}}|\sqrt{[\phi,\phi]\,(\xi,\xi')}|^2\,d\xi' d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad=\|F_{m,n}\|_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{T};[\phi,\phi])}\|\,[\phi,\phi]\,\|_{L^1(\mathbb{T}\times\mathbb{T})} \\
&\quad<\infty.
\end{aligned}$$

因此，对于每个 m，$F_{m,n}\,[\phi,\phi]\in L^1(\mathbb{T}\times\mathbb{T})\,n\in\mathbb{Z}.$。进一步，利用 (6.1)，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}}\overline{F_{m,n}(\xi,\xi')}\,[\phi,\phi]\,(\xi,\xi')e^{-2\pi i(m'\xi+n'\xi')}e^{-\pi im'n'}\,d\xi'\,d\xi \\
&\qquad\qquad=\langle e_{m',n'}e^{-\pi im'n'},F_{m,n}\rangle_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{T};[\phi,\phi])} \\
&\qquad\qquad=\delta_{(m,n),(m',n')}.
\end{aligned}$$

因此，根据注 3.3，$F_{m,n}\,[\phi,\phi]=e_{m,n}e^{-\pi imn}$ 几乎处处成立。令 $T_{M,N}$ 为定义在$L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{T};\,[\phi,\phi])$上的算子，其定义如下：

$$T_{M,N}F=\sum_{m=-M}^{M}\sum_{n=-N}^{N}\langle F,e_{m,n}\rangle_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{T})}e_{m,n}.$$

现在，对于任意 $F\in L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{T};\,[\phi,\phi])$ 以及 m、$n\in\mathbb{Z}$，我们有

$$\begin{aligned}
\langle F,F_{m,n}\rangle_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{T};[\phi,\phi])}&=\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}}F(\xi,\xi')\overline{F_{m,n}(\xi,\xi')}\,[\phi,\phi]\,(\xi,\xi')\,d\xi' d\xi \\
&=\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}}F(\xi,\xi')\overline{e_{m,n}e^{-\pi imn}}\,d\xi' d\xi \\
&=\langle F,e_{m,n}e^{-\pi imn}\rangle_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{T})}. \qquad (6.4)
\end{aligned}$$

将 (6.4) 代入 (6.2)，得到

$$\begin{aligned}
S_{M,N}F&=\sum_{m=-M}^{M}\sum_{n=-N}^{N}\langle F,F_{m,n}\rangle_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{T})}e_{m,n}e^{-2\pi imn} \\
&=\sum_{m=-M}^{M}\sum_{n=-N}^{N}\langle F,e_{m,n}e^{-\pi imn}\rangle_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{T})}e_{m,n}e^{-\pi imn} \\
&=\sum_{m=-M}^{M}\sum_{n=-N}^{N}\langle F,e_{m,n}\rangle_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{T};[\phi,\phi])}e_{m,n} \\
&=T_{M,N}F. \qquad (6.5)
\end{aligned}$$

结合 (6.3) 和 (6.5)，我们得到 $\sup\|T_{M,N}\|<\infty$。于是，利用引理$_{M,N\geq 0}$6.1 即可得到所需结果。反之，假设 $[\phi,\phi]\in\mathcal{A}_2(\mathbb{T}\times\mathbb{T})$。那么存在 $C>0$，使得对于所有区间$I,J\subset\mathbb{R}$，我们都有

$$\left(\frac{1}{|I||J|}\int_J\int_I[\phi,\phi]\,(x,y)\,dxdy\right)\left(\frac{1}{|I||J|}\int_J\int_I\frac{1}{[\phi,\phi]\,(x,y)}\,dxdy\right)\leq C,$$

这意味着 $\frac{1}{[\phi,\phi]} \in L^1(\mathbb{T}\times\mathbb{T})$。此外，根据引理 6.1，我们有 $\sup_{M,N\geq 0} \|T_{M,N}\| < \infty$. 定义 $F_{m,n} \in L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{T};\,[\phi,\phi])$ 为 $F_{m,n}[\phi,\phi] = e_{m,n}e^{-\pi imn}$. 由于 $\{e_{m,n}e^{-\pi imn}:\ m,n\in\mathbb{Z}\}$ 是 $L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{T})$ 中的一个标准正交系，因此很容易证明：

$$\langle F_{m',n'}, e_{m,n}e^{-\pi imn}\rangle_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{T};[\phi,\phi])} = \delta_{(m',n'),(m,n)}.$$

因此，$\{F_{m,n}:\ m,n\in\mathbb{Z}\}$ 与 $\{e_{m,n}e^{-\pi imn}:\ m,n\in\mathbb{Z}\}$. 是双正交的。根据给定假设，$\sup\|T_{M,N}\| < \infty$。由此可由 (6.5) 得到 $\sup\|S_{M,N}\| < \infty$，据此我们得出$_{M,N\geq 0}$ $_{M,N\geq 0}$，即 $\{T^t_{(k,l)}\phi:\ k,l\in\mathbb{Z}\}$ 是 $V^t(\phi)$的 Schauder基。 □

7. Some comments on dual integrability and Helson map

令 H 表示局部紧阿贝尔群 $2\mathbb{Z}^n\times\mathbb{Z}^n$，并令 $\mathcal{U}(L^2(\mathbb{R}^{2n}))$ 表示 $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ 上所有酉算子的集合。现在，定义一个函数

$$\Pi_H : 2\mathbb{Z}^n\times\mathbb{Z}^n \to \mathcal{U}(L^2(\mathbb{R}^{2n})) \text{ by } \Pi((2k,l)) = T^t_{(2k,l)}.$$

那么，Π_H 是 $2\mathbb{Z}^n\times\mathbb{Z}^n$ 在 $L^2(\mathbb{R}^{2n})$上的一个酉表示。现在，我们可以如下定义与表示 Π_H 相关联的 Weyl-Zak变换。

$$Z_{\Pi_H}(f)(\xi,\xi',\eta) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} K_f(\xi+\frac{m}{2},\eta)e^{-2\pi im\cdot\xi'}, \quad \xi\in[0,\frac{1}{2})^n, \xi'\in\mathbb{T}^n, \eta\in\mathbb{R}^n.$$

那么很容易证明，Z_{Π_H} 是从 $L^2(\mathbb{R}^{2n})$到 $L^2([0,\frac{1}{2})^n\times\mathbb{T}^n\times\mathbb{R}^n)$的等距同构。

定义 7.1. 与表示 Π_H 对应的括号映射是一个函数$[\cdot,\cdot]_{\Pi_H}$: $L^2(\mathbb{R}^{2n})\times L^2(\mathbb{R}^{2n}) \to L^1([0,\frac{1}{2})^n\times\mathbb{T}^n)$，其定义如下：

$$[\phi,\psi]_{\Pi_H}(\xi,\xi') = \int_{\mathbb{R}^n} Z_{\Pi_H}\phi(\xi,\xi',\eta)\overline{Z_{\Pi_H}\psi(\xi,\xi',\eta)}\,d\eta.$$

L令 $\phi\in L^2(\mathbb{R}^{2n})$。现在，我们考察 $T^t_{(2k,l)}\phi$ 在映射 Z_{Π_H}下的像 .

$$\begin{aligned} Z_{\Pi_H}T^t_{(2k,l)}\phi(\xi,\xi',\eta) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} K_{T^t_{(2k,l)}\phi}(\xi+\frac{m}{2},\eta)e^{-2\pi im\cdot\xi'} \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} e^{4\pi i(\xi+\frac{m}{2})\cdot k}K_\phi(\xi+\frac{m}{2}+l,\eta)e^{-2\pi im\cdot\xi'} \\ &= e^{4\pi i\xi\cdot k}\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} K_\phi(\xi+\frac{m}{2},\eta)e^{-2\pi i(m-2l)\cdot\xi'} \\ &= e^{2\pi i\xi\cdot 2k}(e^{2\pi il\cdot\xi'})^2 Z_{\Pi_H}\phi(\xi,\xi',\eta). \end{aligned} \tag{7.1}$$

对于任意的 k、$l\in\mathbb{Z}^n$,

$$\begin{aligned} \langle\phi,\Pi_H(2k,l)\psi\rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} &= \langle\phi,T^t_{(2k,l)}\psi\rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} \\ &= \langle Z_{\Pi_H}\phi, Z_{\Pi_H}T^t_{(2k,l)}\psi\rangle_{L^2([0,\frac{1}{2})^n\times\mathbb{T}^n\times\mathbb{R}^n)} \\ &= \int_{[0,\frac{1}{2})^n}\int_{\mathbb{T}^n} e^{-2\pi i\xi\cdot 2k}e^{-4\pi il\cdot\xi'}\left(\int_{\mathbb{R}^n} Z_{\Pi_H}\phi(\xi,\xi',\eta)\overline{Z_{\Pi_H}\psi(\xi,\xi',\eta)}d\eta\right)d\xi'\,d\xi \\ &= \int_{[0,\frac{1}{2})^n}\int_{\mathbb{T}^n} [\phi,\psi]_\Pi(\xi,\xi')e^{-2\pi i\xi\cdot 2k}e^{-2\pi il\cdot\xi'}e^{-2\pi il\cdot\xi'}\,d\xi'\,d\xi, \end{aligned} \tag{7.2}$$

利用 (7.1)。

定义映射 $\mathcal{J}$: $L^2(\mathbb{R}^{2n}) \to L^2(\mathbb{R}^n, L^2([0,\frac{1}{2})^n \times \mathbb{T}^n))$ 如下:

$$\mathcal{J}f(\eta)(\xi,\xi') = Z_{\Pi_H} f(\xi,\xi',\eta).$$

于是，（7.1）可写为

$$\mathcal{J}[\Pi_H(2k,l)f](\eta)(\xi,\xi') = e^{2\pi i\xi\cdot 2k} e^{2\pi il\cdot\xi'} e^{2\pi il\cdot\xi'} \mathcal{J}[f](\eta)(\xi,\eta). \tag{7.3}$$

注意到，与(1.1)和(1.2)相比，(7.2)和(7.3)中的被积函数分别多出了一个项。我们将尝试解释其背后的原因。若考虑 $G = \mathbb{Z}$、整数平移（ $\mathbb{Z}$ 在 $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))$上的酉表示）以及表示 Π: $\mathbb{Z} \mapsto \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))$，其由 $\Pi(k) = T_k$ 以及Helson映射 $\mathcal{J}$： $L^2(\mathbb{R}) \mapsto \ell^2(\mathbb{Z}, L^2(\mathbb{T}))$所定义，后者由 $\mathcal{J}f(m)(\xi) = \widehat{f}(\xi+m)$、 $f \in L^2(\mathbb{R})$ $\xi \in \mathbb{T}$、 $m \in \mathbb{Z}$定义，那么

$$\langle \phi, \Pi(k)\psi\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{T}} \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{\phi}(\xi+m)\overline{\widehat{\psi}(\xi+m)} \right) e^{-2\pi ik\xi}\, d\xi \text{ and } \mathcal{J}(\Pi(k)\phi)(m)(\xi) = e^{2\pi ik\xi}\widehat{\phi}(\xi+m).$$

因此， Π 满足 (1.1) 和 (1.2)。这是由于 $\widehat{T_k f}(\xi) = e^{-2\pi ik\xi}\widehat{f}(\xi)$。然而，在当前的扭曲平移情形下，我们有

$$K_{T^t_{(k,l)}\phi}(\xi,\eta) = e^{\pi i(2\xi+l)k} K_\phi(\xi+l,\eta), \text{ for } \phi \in L^2(\mathbb{R}^{2n}), \tag{7.4}$$

根据引理 2.10。我们注意到，在右端，“$\xi + l$”作为 K_ϕ 的第一个变量出现，而不是简单地作为“ξ”。与 (1.1) 和 (1.2) 相比，这导致了 (7.2) 和 (7.3) 中的附加项。回想一下，如第 2 节所述，函数 K_ϕ 是 ϕ 的 Weyl变换的核。因此，(7.4) 等价于 $W(T^t_{(k,l)}\phi)\chi(\xi) = e^{\pi i(2\xi+l)k} W(\phi)\chi(\xi+l)$，其中 $\chi \in L^2(\mathbb{R}^n)$。此外，Weyl变换由 $W_\lambda(f^\lambda) = \widehat{f}(\lambda)$ 得到（取 $\lambda = 1$），它是 f 在 $\mathbb{H}^n$ 上的群傅里叶$\widehat{}$变换，满足 $L_{(2k,l,m)}f(\lambda) = \pi_\lambda(2k,l,m)f(\lambda)$；其中， $L_{(2k,l,m)}f$ 表示 f 在 Heisenberg 群 $\mathbb{H}^n$ 上经 $(2k,l,m)$ 左平移后的函数。因此，(7.1) 和 (7.2) 中的附加项源于非阿贝尔群 $\mathbb{H}^n$ 上的薛定谔表示的性质。我们相信，这些观察为未来进一步研究非阿贝尔局部紧群上的 Helson映射和对偶可积性铺平了道路。

Acknowledgement

感谢 C. Heil 教授对引理 6.1 提出的宝贵意见。感谢审稿人认真细致地阅读稿件，并提出了宝贵的意见和建议，帮助我们将稿件早期版本的表述改进为当前版本。

References

1. S. Arati 和 R. Radha, 《抽象Heisenberg群上平移不变空间的框架与Riesz基》, Indag. Math. (N.S.) 30 (2019), no. 1, 106–127. MR 3906124 2. D. Barbieri、E. Hern´andez 和 A. Mayeli, 《Heisenberg群的括号映射及循环子空间的刻画》, Appl. Comput. Harmon. Anal. 37 (2014), no. 2, 218–234. MR 3223463 3. D. Barbieri、E. Hern´andez 和 J. Parcet, 《由离散群酉作用生成的Riesz框架系统》, Appl. Comput. Harmon. Anal. 39 (2015), no. 3, 369–399. MR 3398942 4. D. Barbieri、E. Hern´andez 和 V. Paternostro, 《在离散群酉表示下不变的空间》, J. Math. Anal. Appl. 492 (2020), no. 1, 124357, 32. MR 4126765 5. M. Bownik, 《 $L^2(\mathbb{R}^n)$中平移不变子空间的结构》, J. Funct. Anal. 177 (2000), no. 2, 282–309. MR 1795633 6. M. Bownik 和 K. A. Ross, 《局部紧阿贝尔群上平移不变空间的结构》, J. Fourier Anal. Appl. 21 (2015), no. 4, 849–884. MR 3370013 7. C. Cabrelli 和 V. Paternostro, 《局部紧阿贝尔群上的平移不变空间》, J. Funct. Anal. 258 (2010), no. 6, 2034–2059. MR 2578463

8. O. Christensen, 《框架与基》, 应用与数值调和分析, Birkh¨auser Boston, Inc., Boston, MA, 2008, 入门课程。MR 2428338 9. O. Christensen, 《框架与Riesz基导论》, 第二版, 应用与数值调和分析, Birkh¨auser/Springer, [Cham], 2016。MR 3495345 10. B. Currey、A. Mayeli 和 V. Oussa, 《一类幂零李群上平移不变空间的刻画及其应用》, J. Fourier Anal. Appl. 20 (2014), no. 2, 384–400. MR 3200927 11. S. R. Das、P. Massopust 和 R. Radha, 《复平面上的扭曲B样条》, Appl. Comput. Harmon. Anal. 56 (2022), 250–282. MR 4310941 12. S. R. Das 和 R. Radha, 《Heisenberg群上的平移不变系统》, Adv. Oper. Theory 6 (2021), no. 1, Paper No. 21, 27. MR 4181682 13. G. B. Folland, 《相空间中的调和分析》, 数学研究年刊, 第122卷, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989. MR 983366 14. C. Heil, 《基理论入门》, 扩充版, 应用与数值调和分析, Birkh¨auser/Springer, New York, 2011. MR 2744776 15. C. Heil 和 A. M. Powell, 《Gabor Schauder基与Balian-Low定理》, J. Math. Phys. 47 (2006), no. 11, 113506, 21. MR 2278667 ˇ 16. E. Hern´andez、P. M. Luthy、H. Siki´c、F. Soria 和 E. N. Wilson, 《由酉表示的轨道生成的空间：致敬Guido Weiss》, J. Geom. Anal. 31 (2021), no. 9, 8735–8761. MR 4302196 ˇ 17. E. Hern´andez、H. Siki´c、G. Weiss 和 E. Wilson, 《局部紧阿贝尔群酉表示的循环子空间；广义Zak变换》, Colloq. Math. 118 (2010), no. 1, 313–332. MR 2600532 ˇ 18. E. Hern´andez、H. Siki´c、G Weiss 和 E Wilson, 《平方可积函数的整数平移的性质》, 《调和分析与偏微分方程》, Contemp. Math., vol. 505, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010, pp. 233–249. MR 2664571 19. R Hunt、B Muckenhoupt 和 R Wheeden, 《共轭函数与Hilbert变换的加权范数不等式》, Trans. Amer. Math. Soc. 176 (1973), 227–251. MR 312139 20. J. W. Iverson, 《由紧群作用生成的框架》, Trans. Amer. Math. Soc. 370 (2018), no. 1, 509–551. MR 3717988 21. R. A. Kamyabi Gol 和 R. R. Tousi, 《局部紧阿贝尔群上平移不变空间的结构》, J. Math. Anal. Appl. 340 (2008), no. 1, 219–225. MR 2376149 22. S. G. Mallat, 《 $L^2(\mathbb{R})$的多分辨率逼近与小波正交基》, Trans. Amer. Math. Soc. 315 (1989), no. 1, 69–87. MR 1008470´23. Y. Meyer, 《小波与样条函数》, S´eminaire sur les ´equations aux d´eriv´ees partielles 1986–1987, Ecole Polytech., Palaiseau, 1987, pp. Exp. No. VI, 18. MR 920024 24. M. Nielsen 和 H. ˇSiki´c, 《整数平移的Schauder基》, Appl. Comput. Harmon. Anal. 23 (2007), no. 2, 259–262. MR 2344615 25. R. Radha 和 S. Adhikari, 《 $L^2(\mathbb{R}^{2n})$中扭曲平移不变空间的框架与Riesz基》, J. Math. Anal. Appl. 434 (2016), no. 2, 1442–1461. MR 3415732 26. R. Radha 和 S. Adhikari, 《Heisenberg群上具有可数多个两两正交生成元的平移不变空间》, Houston J. Math. 46 (2020), no. 2, 435–463. MR 4195268 27. R. Radha 和 N. S. Kumar, 《紧群上的平移不变空间》, Bull. Sci. Math. 137 (2013), no. 4, 485–497. MR 3054272 28. S. Thangavelu, 《Heisenberg群上的调和分析》, 数学进展, 第159卷, Birkh¨auser Boston, Inc., Boston, MA, 1998. MR 1633042

Department of Mathematics

, Indian Institute of Technology, Madras, India
电子邮箱：radharam@iitm.ac.in

Department of Mathematics, Indian Institute of Technology, Madras, India电子邮箱：rabeethavelsamy@gmail.com