arXiv:2305.04494v1 [math.FA] 8 May 2023

扇形矩阵的算子均值不等式

MARYAM KHOSRAVI[1], ALEMEHSHEIKHHOSSEINI[2],和
SOMAYEH MALEKINEJAD[3*]

[1] 纯数学系 数学与计算机学院 沙希德·巴霍纳尔大学，克尔曼，伊朗 khosravi_m @uk.ac.ir

[2] 纯数学系 数学与计算机学院 沙希德·巴霍纳尔大学，克尔曼，伊朗
sheikhhosseini@uk.ac.ir;hosseini8560@gmail.com

[3] 数学系 رون مایپ大学，邮政信箱 19395-3697，德黑兰，伊朗。
maleki60313@gmail.com

Abstract. 本文证明了若干涉及扇形矩阵的算子均值的不等式，这些不等式是已有相关结果的推广和改进。其中，设 A 和 B 为两个增生矩阵，满足 A、$B \in \mathcal{S}_\theta$、$0 < mI \leqslant A$、$B \leqslant MI$，其中 M、m 为正实数，σ 为一个算子均值，σ^* 为 σ. 的伴随均值。若 $\sigma^* \leqslant \sigma_1$、$\sigma_2 \leqslant \sigma$ 且 Φ 为一个正幺线性映射，则

$$\Phi^p \Re(A\sigma_1 B) \leqslant \sec^{2p}\theta \alpha^p \Phi^p \Re(A\sigma_2 B),$$

其中

$$\alpha = \max\left\{K, 4^{1-\frac{2}{p}}K\right\},$$

以及 $K = \frac{(M+m)^2}{4mM}$)是 Kantorovich常数。

关键词：扇形矩阵，算子均值，单位正线性映射。MSC[2010]：47A64, 47A63。

1. INTRODUCTION AND PRELIMINARY

令 $\mathbb{M}_n$ 表示 $n \times n$ 复矩阵的集合，并令 A^* 表示 A 的共轭转置，其中 $A \in \mathbb{M}_n$。

*通讯作者。

若厄米矩阵 $A \in \mathbb{M}_n$ 满足 $\langle Ax$，则称其为半正定矩阵（记作$A \geqslant 0$），其中$x\rangle \geqslant 0$ 对所有向量 $x \in \mathbb{C}^n$均成立。若此外 A 可逆，则称 A 为正定矩阵（记作 $A > 0$）。

如果矩阵 $A \in M_n$ 的实部 $\Re A = \frac{A+A^*}{2}$ 是正定的，则称其为增生矩阵。

若 A 是增生矩阵，且 $W(A)$ 是 A 的数值域，则

$$W(A) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0, |\Im z| \leqslant (\Re z)\tan\theta\}.$$

对于某个$0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$。在这种情况下，我们将记作 $A \in \mathcal{S}_\theta$。

根据定义，很容易看出 $A \in \mathcal{S}_\theta$ 可逆，且我们有以下众所周知的不等式 [13, 14]:

$$\Re(A^{-1}) \leqslant \Re^{-1}(A) \leqslant \sec^2\theta\ \Re(A^{-1}). \tag{1.1}$$

库博-安藤（Kubo-Ando）意义下的一个算子均值 σ 由一个算子单调函数 $f: (0,\infty) \to (0,\infty)$ 定义，其中 $f(1) = 1$（简记为 $f \in \mathfrak{m}$），其定义为

$$A\sigma B = A^{1/2} f(A^{-1/2} B A^{-1/2}) A^{1/2},$$

对于正定可逆矩阵 A 和 B。函数 f 称为 σ 的表示函数。最近，Bedrani、Kittaneh 和 Sababheh 在 [3] 中证明，该定义也适用于增生矩阵。

对于 $0 \leqslant v \leqslant 1$， v 加权算术平均、几何平均和调和平均分别定义为

$$\begin{aligned} A\nabla_v B &= vA + (1-v)B, \\ A\sharp_v B &= A^{1/2}(A^{-1/2} B A^{-1/2})^v A^{1/2}, \\ A!_v B &= (vA^{-1} + (1-v)B^{-1})^{-1}. \end{aligned}$$

设 σ 是一个表示函数为 f. 的算子均值。表示函数为 $f(t^{-1})^{-1}$ 的算子均值称为 σ 的伴随，记作 σ^*. 。由定义可知，

$$A\sigma^* B = (A^{-1}\sigma B^{-1})^{-1}.$$

对于由表示函数 f 和 g 表示的两个算子均值 σ_f 和 σ_g，若对于任意两个正矩阵 A 和 B，均有 $A\sigma B \leqslant A\tau B$，则记作 $\sigma \leqslant \tau$；等价地，若对于所有正数 $t \in \mathbb{R}$，均有 $f(t) \leqslant g(t)$，亦可如此表示。

线性映射 $\Phi: M_n \to M_n$ 称为正映射，如果对于任意 $A \geq 0$，都有 $\Phi(A) \geq 0$。如果 $\Phi(I) = I$，其中 I 表示单位矩阵，则称 Φ 为幺正映射。

Khosravi 等人在 [11] 中证明，若 $0 < mI \leqslant A$、$B \leqslant MI$，则对于任意正幺线性映射 Φ 以及某些 σ与 σ^*之间的算子均值 σ_1 和 σ_2，

$$\Phi^p(A\sigma B) \leqslant \alpha^p \Phi^p(A\sigma^* B), \tag{1.2}$$

其中，$p > 0$、$\alpha = \max\{K, 4^{1-\frac{2}{p}}K\}$ 以及 $K = \frac{(M+m)^2}{4mM}$ 是Kantorovich常数。

此外，他们证明了，如果 σ_1 和 σ_2 介于 ∇_ν 和!$_\nu$之间，那么

$$f\left(\Phi(A)\right)\sigma_1 f(\Phi(B)) \leqslant Kf\left(\Phi(A\sigma_2 B)\right), \tag{1.3}$$

对于每个非零的算子单调函数 f 在 $[0,\infty$ 上）。

本文的主要目的是给出这些不等式的扇形版本。

在全文中， K 被视为 Kantorovich常数 $\frac{(M+m)^2}{4mM}$）。

2. MAIN RESULTS

本节首先介绍一些用于证明主要结果的引理。

引理 2.1. *[3]* 设 A、 $B \in \mathcal{S}_\theta$。则 $A\sigma B \in \mathcal{S}_\theta$ 且

$$\Re A\sigma\Re B \leqslant \Re(A\sigma B) \leqslant \sec^2\theta(\Re A\sigma\Re B).$$

此外，我们还有著名的 Choi 不等式：

引理 2.2. *[19]* 设 $A \in B(H)$ 为正的。则对于任意正幺线性映射 Φ,

$$\Phi^{-1}(A) \leqslant \Phi(A^{-1}).$$

利用这些引理，我们可以证明下面的命题。

命题 2.3. 设 A、 $B \in \mathcal{S}_\theta$，其中存在某个 $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ 使得 $0 < mI \leqslant \Re A$、 $\Re B \leqslant MI$。若 σ 是任意均值，且 σ_1、 σ_2 是介于 σ 与 σ^* 之间的两个算子均值，则

$$\cos^2\theta\Phi\Re(A\sigma_1 B) + mM\Phi^{-1}\Re(A\sigma_2 B) \leqslant (M+m)I \tag{2.1}$$

对于任意正幺线性映射 Φ。

证明。由 $0 < mI \leqslant \Re A \leqslant MI$ 可得

$$(MI - \Re A)(\frac{1}{m}I - \Re^{-1}A) \geq 0,$$

这等价于

$$\Re A + Mm\Re^{-1}(A) \leqslant (M+m)I.$$

类似地

$$\Re B + Mm\Re^{-1}(B) \leqslant (M+m)I.$$

由于每个算子均值都是次可加且单调的，因此我们有

$$\begin{aligned}\Re A\sigma\Re B + mM(\Re^{-1}(A)\sigma\Re^{-1}(B)) &\leqslant (\Re A + Mm\Re^{-1}(A))\sigma(\Re B + Mm\Re^{-1}(B)) \\ &\leqslant (M+m)I\sigma(M+m)I \\ &= (M+m)I\end{aligned}$$

因此，对于正幺线性映射 Φ，我们得到

$$\Phi(\Re A\sigma\Re B)+mM\Phi(\Re^{-1}(A)\sigma\Re^{-1}(B))\leqslant(M+m)I.$$

设 $\sigma^*\leqslant\sigma_1,\sigma_2\leqslant\sigma$。利用引理 2.1 和 Choi 不等式，可得

$$\begin{aligned}\cos^2\theta\Phi\Re(A\sigma_1B)+mM\Phi^{-1}\Re(A\sigma_2B)&\leqslant\Phi(\Re A\sigma_1\Re B)+mM\Phi^{-1}(\Re A\sigma_2\Re B)\\&\leqslant\Phi(\Re A\sigma\Re B)+mM\Phi^{-1}(\Re A\sigma^*\Re B)\\&\leqslant\Phi(\Re A\sigma\Re B)+mM\Phi((\Re A\sigma^*\Re B)^{-1})\\&=\Phi(\Re A\sigma\Re B)+mM\Phi(\Re^{-1}A\sigma\Re^{-1}B)\\&\leqslant(M+m)I,\end{aligned}$$

由此完成证明。 □

引理 2.4。 *[6]* 设 $A,B\geq0$。则

$$\|AB\|\leqslant\frac{1}{4}\|A+B\|^2.$$

引理 2.5。 *[12]* 对于每个 $A,B>0$ 和 $p>1$,

$$\|A^p+B^p\|\leqslant\|(A+B)^p\|.$$

现在我们可以证明主要结果，它是将 (1.2) 推广到增生矩阵的情形。

定理 2.6. 设 $A,B\in\mathcal{S}_\theta$ 满足 $0<mI\leqslant\Re A,\Re B\leqslant MI$，且 Φ 是一个正幺线性映射。若 σ 是一个算子均值，且 σ_1,σ_2 是 σ 与 σ^* 之间的两个算子均值，则

$$\begin{aligned}&\Re^p\Phi(A\sigma_1B)\leqslant\sec^{2p}\theta\ K^p\Re^p\Phi(A\sigma_2B), && (p\leqslant2)\\&\Re^p\Phi(A\sigma_1B)\leqslant\sec^{2p}\theta4^{p-2}K^p\Re^p\Phi(A\sigma_2B). && (p\geq2)\end{aligned}$$

证明. 对于第一个不等式，根据 Löwner–Heinz 不等式，只需证明 $p=2$ 的不等式。

应用引理 2.4 和不等式 (2.1)，可得

$$\begin{aligned}&\|\cos^2\theta\Phi\Re(A\sigma_1B)\Phi^{-1}\Re(A\sigma_2B)\|\\&\qquad\leqslant\frac{1}{4mM}\|\cos^2\theta\Phi\Re(A\sigma_1B)+mM\Phi^{-1}\Re(A\sigma_2B)\|^2\\&\qquad\leqslant\frac{(M+m)^2}{4mM}=K,\end{aligned}$$

这等价于

$$\cos^4\theta\Phi^2\Re(A\sigma_1B)\leqslant K^2\Phi^2\Re(A\sigma_2B). \tag{2.2}$$

现在，若 $p \geqslant 2$，分别由引理 2.1、2.5 和不等式 (2.1) 可得

$$\begin{aligned}
&\| \cos^p \theta \Phi^{\frac{p}{2}} \Re(A\sigma_1 B) M^{\frac{p}{2}} m^{\frac{p}{2}} \Phi^{-\frac{p}{2}} \Re(A\sigma_2 B) \| \\
&\quad \leqslant \frac{1}{4} \left\| \cos^p \theta \Phi^{\frac{p}{2}} \Re(A\sigma_1 B) + M^{\frac{p}{2}} m^{\frac{p}{2}} \Phi^{-\frac{p}{2}} \Re(A\sigma_2 B) \right\|^2 \\
&\quad \leqslant \frac{1}{4} \left\| \cos^2 \theta \Phi \Re(A\sigma_1 B) + Mm\Phi^{-1} \Re(A\sigma_2 B) \right\|^p \\
&\quad \leqslant \frac{1}{4} (M+m)^p.
\end{aligned}$$

因此，

$$\| \cos^p \theta \Phi^{\frac{p}{2}} \Re(A\sigma_1 B) \Phi^{-\frac{p}{2}} \Re(A\sigma_2 B) \| \leqslant \left(\frac{(M+m)^2}{4^{\frac{2}{p}} Mm} \right)^{\frac{p}{2}}.$$

这意味着 t 在h

$$\cos^{2p} \theta \Phi^p \Re(A\sigma_1 B) \leqslant \left(\frac{(M+m)^2}{4^{\frac{2}{p}} Mm} \right)^p \Phi^p \Re(A\sigma_2 B).$$

□

这一结果在 [3] 中针对 $p = 2$ 得到了证明，系数为 $\sec^{12} \theta$；而我们得到了一个更尖锐的不等式，其系数为 $\sec^4 \theta$。

此外，在定理 2.6 中，若令 $p = 2$、$\sigma_1 = \nabla_v$ 和 $\sigma_2 = \sharp_v$，便可得到对 [18] 和 [21] 中若干结果的改进。

回到命题 2.3 的证明，若令 $\sigma_1 = \nabla_v$，则有 $\Re A \sigma_1 \Re B = \Re(A\sigma_1 B)$。因此，系数 $\cos\theta$ 不会出现。因此，我们得到以下结果。

定理 2.7. 设 $A, B \in \mathcal{S}_\theta$ 满足 $0 < mI \leqslant \Re A, \Re B \leqslant MI$，且 Φ 为正幺线性映射。若 $!_v \leqslant \sigma \leqslant \nabla_v$，则

$$\Re^p \Phi(A \nabla_v B) \leqslant \alpha^p \Re^p \Phi(A\sigma B),$$

其中 $\alpha = \max\{K, 4^{1-\frac{2}{p}} K\}$。

此外，(1.1) 有助于我们证明定理 2.6 的另一个版本。

定理 2.8. 设 $A, B \in \mathcal{S}_\theta$ 满足 $0 < mI \leqslant \Re A^{-1}, \Re B^{-1} \leqslant MI$，且$\sigma$ 为任意均值。那么对于每个正幺线性映射 Φ 和$\sigma^* \leqslant \sigma_1, \sigma_2 \leqslant \sigma$,

$$\Phi^p \Re(A\sigma_1 B) \leqslant \alpha^p \sec^{4p} \theta \Phi^p \Re(A\sigma_2 B),$$

其中 $\alpha = \max\{K, 4^{1-\frac{2}{p}} K\}$。

证明. 只需证明

$$Mm\Phi \Re(A\sigma_1 B) + \Phi^{-1} \Re(A\sigma_2 B) \leqslant \sec^2 \theta \ (M+m) I. \tag{2.3}$$

其余证明与定理 2.6 类似。

如命题 2.3 的证明所示,

$$\Re A^{-1}\sigma\Re B^{-1} + mM(\Re^{-1}A^{-1}\sigma\Re^{-1}B^{-1}) \leqslant (M+m)I.$$

由此不等式和 (1.1) 可得

$$\Re A^{-1}\sigma\Re B^{-1} + Mm(\Re A\sigma\Re B) \leqslant (M+m)I.$$

由引理 2.1 可得

$$\Re(A\sigma_1 B) \leqslant \sec^2\theta(\Re A\sigma_1\Re B) \leqslant \sec^2\theta(\Re A\sigma\Re B). \tag{2.4}$$

此外,

$$\begin{aligned}\Phi^{-1}\Re(A\sigma_2 B) &\leqslant \Phi^{-1}(\Re A\sigma_2\Re B) \leqslant \Phi^{-1}(\Re A\sigma^*\Re B)\\ &\leqslant \Phi(\Re A\sigma^*\Re B)^{-1} = \Phi(\Re^{-1}A\sigma\Re^{-1}B)\\ &\leqslant \sec^2\theta\Phi(\Re A^{-1}\sigma\Re B^{-1}).\end{aligned} \tag{2.5}$$

结合 (2.4) 和 (2.5)，得到 (2.3)。 □

注 2.9. 若在此定理中用 A^{-1}、 B^{-1} 和 σ^* 替换 A、 B、 σ ，则可得

$$\Phi^p\Re(A\sigma_1 B)^{-1} \leqslant \alpha^p\sec^{4p}\theta\Phi^p\Re(A\sigma_2 B)^{-1},$$

其中 $0 < mI \leqslant \Re A$、 $\Re B \leqslant MI$。

引理 2.10。 *[3]*设 $f \in \mathsf{m}$ 且 A、 $B \in \mathcal{S}_\theta$ 对某个 $0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$ 成立。则

$$f(\Re A) \leqslant \Re(f(A)) \leqslant \sec^2\theta f(\Re A).$$

引理 2.11。 *[16,* 命题 2.*1]* 若 σ_1 和 σ_2 是两个均值，满足 $\sigma_1 \leqslant \sigma_2$和 A、 $B \in \mathcal{S}_\theta$, 则

$$\begin{aligned}&(a)\quad \Re(A\sigma_1 B) \leqslant \sec^2\theta\ \Re(A\sigma_2 B)\\ &(b)\quad \Re(A\sigma_2 B)^{-1} \leqslant \sec^2\theta\ \Re(A\sigma_1 B)^{-1}.\end{aligned}$$

下面的定理是涉及算子单调函数的引理 2.11 的一个类似结果。

定理 2.12。设 A、 $B \in \mathcal{S}_\theta$ 使得 $0 < mI \leqslant \Re A$、 $\Re B \leqslant MI$， σ 为任意均值， Φ 为正幺线性映射，且 $f \in \mathsf{m}$。则

$$\Re f\left(\Phi(A\sigma_1 B)\right) \leqslant \sec^2\theta\ \Re f\left(K\sec^2\theta\ \Phi(A\sigma_2 B)\right) \leqslant K\sec^4\theta\ \Re f\left(\Phi(A\sigma_2 B)\right)$$

对于介于 σ 和 σ^* 之间的每个算子均值 σ_1、 σ_2 。

此外，若 $\sigma_1 \leqslant \sigma_2$，则常数 K 可以省略。

证明。由引理 2.10 和定理 2.6 可得

$$\begin{aligned}\cos^2\theta\Re f\left(\Phi(A\sigma_1 B)\right) &\leqslant f\left(\Re\Phi(A\sigma_1 B)\right)\\ &\leqslant f\left(K\sec^2\theta\ \Re\Phi(A\sigma_2 B)\right)\\ &\leqslant \Re f\left(K\sec^2\theta\Phi(A\sigma_2 B)\right).\end{aligned}$$

这就证明了第一个不等式。

第二个不等式由以下事实得出：若 $\lambda \geq 1$，则 $f(\lambda x) 6 \lambda f(x)$。

若 $\sigma_1 \leqslant \sigma_2$，我们可以用引理 2.11 代替定理 2.6，从而避免常数 K。□

同理，利用定理 2.7，我们得到以下定理。

定理 2.13. 设 $A, B \in \mathcal{S}_\theta$ 满足 $0 < mI \leqslant \Re A, \Re B \leqslant MI$, Φ 是一个正幺线性映射，且 $f \in$m。则

$$\Re f(\Phi(A \nabla_v B)) 6 \sec^2\theta \, \Re f(K\Phi(A\sigma B)) \leqslant K \sec^2\theta \, \Re f(\Phi(A\sigma B)),$$

其中 $!_v \leqslant \sigma \leqslant \nabla_v$。

下一个定理是 (1.3) 的扇形版本。

定理 2.14. 设 $A, B \in \mathcal{S}_\theta$ 满足 $0 < mI \leqslant \Re A, \Re B \leqslant MI$。则对于任意正幺线性映射 Φ 以及 σ_1 和 σ_2，其中 ∇_ν 与 $!_\nu$ 之间，

$$\Re\left(f(\Phi(A))\sigma_1 f(\Phi(B))\right) \leqslant K \sec^4\theta \, \Re f\left(\Phi(A\sigma_2 B)\right),$$

对于 $f \in$m。

证明。由引理 2.1 和引理 2.10,

$$\begin{aligned}
\Re\left(f(\Phi(A))\sigma_1 f(\Phi(B))\right) &\leqslant \sec^2\theta \ \left(\Re f(\Phi(A))\sigma_1 \Re f(\Phi(B))\right) \\
&\leqslant \sec^4\theta f(\Re(\Phi(A)))\sigma_1 f(\Re(\Phi(B))) \\
&= \sec^4\theta f(\Phi(\Re(A)))\sigma_1 f(\Phi(\Re(B)))
\end{aligned}$$

现在应用 (1.3) 以及引理 2.1 和引理 2.10，可得

$$\begin{aligned}
f(\Phi(\Re(A)))\sigma_1 f(\Phi(\Re(B))) &\leqslant Kf\left(\Phi(\Re A \sigma_2 \Re B)\right) \\
&\leqslant K \ f\left(\Phi(\Re(A\sigma_2 B))\right) \\
&= Kf\left(\Re(\Phi(A\sigma_2 B))\right) \\
&\leqslant K\Re f(\Phi(A\sigma_2 B)).
\end{aligned}$$

□

注 2.15. 在本定理中，考虑 $\sigma_2 = \nabla_v$。由于 $f \in$ m 是算子凹的，证明的最后部分可写为

$$\begin{aligned}
f(\Phi(\Re A))\sigma_1 f(\Phi(\Re B)) &\leqslant f(\Phi(\Re A))\nabla_v f(\Phi(\Re B)) \\
&\leqslant f\left(\Phi(\Re A)\nabla_v \Phi(\Re B)\right) \\
&= f\left(\Phi(\Re A \nabla_v \Re B)\right) \\
&= f\left(\Re(\Phi(A\nabla_v B))\right) \\
&\leqslant \Re f(\Phi(A\nabla_v B)).
\end{aligned}$$

由此可得

$$\Re\left(f(\Phi(A))\sigma_1 f(\Phi(B))\right) \leqslant \sec^4\theta \, \Re f\left(\Phi(A\nabla_v B)\right),$$

这一结果已在 [3] 中得到证明，其中 σ_1 是几何平均。

3. DETERMINANT, SINGULARVALUE AND NORM INEQUALITIES

首先，我们打算使用定理 2.6、2.7 和 2.8 来陈述这些定理的行列式、奇异值和范数版本。

对于行列式版本，我们使用以下引理。

引理 3.1. (*[10], [13]*) 如果 $A \in \mathcal{S}_\theta$，则

$$\det(\Re A) \leqslant |\det(A)| \leqslant \sec^n \theta \ \det(\Re A).$$

定理 3.2. 对于某个算子均值 σ，令 A、$B \in \mathcal{S}_\theta$ 和 $\sigma^* \leqslant \sigma_1$、$\sigma_2 \leqslant \sigma$。

- 若 $0 < mI \leqslant \Re A$、$\Re B \leqslant MI$，则

$$|\det(A\sigma_1 B)| \leqslant \sec^{3n} \theta \ K^n |\det(A\sigma_2 B)|.$$

- 若 $0 < mI \leqslant \Re A^{-1}$、$\Re B^{-1} \leqslant MI$，则

$$|\det(A\sigma_1 B)| \leqslant \sec^{5n} \theta \ K^n |\det(A\sigma_2 B)|.$$

此外，若 $!_v \leqslant \sigma \leqslant \nabla_v$ 且 $0 < mI \leqslant \Re A$、$\Re B \leqslant MI$，则

$$|\det(A\nabla_v B)| \leqslant \sec^n \theta \ K^n |\det(A\sigma B)|.$$

下面的引理将我们引向奇异值版本。

引理 3.3。（*[5], [8]*）设 $A \in \mathcal{S}_\theta$。则

$$\lambda_j(\Re A) \leqslant s_j(A) \leqslant \sec^2 \theta \lambda_j(\Re A), \ j = 1, ..., n.$$

定理 3.4。设 A、$B \in \mathcal{S}_\theta$ 和 $\sigma^* \leqslant \sigma_1$、$\sigma_2 \leqslant \sigma$，其中某个算子均值为 σ。

- 如果 $0 < mI \leqslant \Re A$、$\Re B \leqslant MI$，那么

$$s_j(A\sigma_1 B) \leqslant \sec^4 \theta \ K s_j(A\sigma_2 B).$$

- 若 $0 < mI \leqslant \Re A^{-1}$、$\Re B^{-1} \leqslant MI$，则

$$s_j(A\sigma_1 B) \leqslant \sec^6 \theta \ K s_j(A\sigma_2 B).$$

此外，如果 $!_v \leqslant \sigma \leqslant \nabla_v$ 且 $0 < mI \leqslant \Re A$、$\Re B \leqslant MI$，那么

$$s_j(A\nabla_v B) \leqslant \sec^2 \theta \ K s_j(A\sigma B).$$

最后，这个引理有助于我们证明相应的范数形式。

引理 3.5. (*[5], [24]*) 设 $A \in \mathcal{S}_\theta$。则

$$\|\Re A\| \leqslant \|A\| \leqslant \sec \theta \|\Re A\|$$

对于任意酉不变范数 $\|\cdot\|$ 在 $B(H)$上。

定理 3.6. 对于某个算子均值 σ，令 A、$B \in \mathcal{S}_\theta$ 和 $\sigma^* \leqslant \sigma_1$、$\sigma_2 \leqslant \sigma$。

- 若 $0 < mI \leqslant \Re A, \Re B \leqslant MI$，则

$$\|A\sigma_1 B\| \leqslant \sec^3 \theta \ K \|A\sigma_2 B\|.$$

• 若 $0 < mI \leqslant \Re A^{-1}, \Re B^{-1} \leqslant MI$，则

$$\|A\sigma_1 B\| \leqslant \sec^5\theta\ K\|A\sigma_2 B\|.$$

此外，若 $!_v \leqslant \sigma \leqslant \nabla_v$ 且 $0 < mI \leqslant \Re A, \Re B \leqslant MI$，则

$$\|A\nabla_v B\| \leqslant \sec\theta\ K\|A\sigma B\|.$$

本节末尾，我们将证明关于 $A\sigma B$ 的类似行列式不等式和范数不等式。

引理 3.7. (*[23]*) 若 $A, B \in \mathcal{S}_\theta$，则

$$|\det(A+B)| \leqslant \sec^{2n}\theta\ |\det(I_n+A)|.|\det(I_n+B)|. \tag{3.1}$$

and

$$\|A+B\| \leqslant \sec\ \theta\ \|I_n+A\|.\|I_n+B\|. \tag{3.2}$$

定理 3.8. 设 $A, B \in S_\theta$ 和 σ 是满足 $\sigma \leqslant \nabla$ 的任意均值。则

$$|\det(A\sigma B)| \leqslant \frac{\sec^{4n}\theta}{2^n}|\det(I_n+A)|.|\det(I_n+B)|.$$

and

$$\|A\sigma B\| \leqslant \frac{\sec^4\theta}{2}\|I_n+A\|.\|I_n+B\|.$$

证明。计算

$$\begin{aligned}
|\det(A\sigma B)| &\leqslant \sec^n\theta\det(\Re(A\sigma B)) && \text{(by Lemma 3.1)}\\
&\leqslant \frac{\sec^{3n}\theta}{2^n}\det(\Re(A+B)) && \text{(by Lemma 2.11)}\\
&\leqslant \frac{\sec^{3n}\theta}{2^n}|\det(\Re(A+B)| && \text{(by Lemma 3.1)}\\
&\leqslant \frac{\sec^{4n}\theta}{2^n}|\det(I_n+A)|.|\det(I_n+B)|. && \text{(by (3.1))}
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\|A\sigma B\| &\leqslant \sec\theta\|\Re(A\sigma B))\| && \text{(by Lemma 3.5)}\\
&\leqslant \frac{\sec^3\theta}{2}\|\Re(A+B)\| && \text{(by Lemma 2.11)}\\
&\leqslant \frac{\sec^3\theta}{2}\|A+B\| && \text{(by Lemma 3.5)}\\
&\leqslant \frac{\sec^4\theta}{2}\|I_n+A\|.\|I_n+B\|. && \text{(by (3.2))}
\end{aligned}$$

□

4. Numerical range of sector matrices

$A \in \mathbb{M}_n$ 的数值半径 $\omega(A)$ 定义为

$$\omega(A) = \sup\{\langle Ax, x\rangle : x \in \mathbb{C}^n, \|x\| = 1\}.$$

当 $A \in S_0$ 时，我们有 $\omega(A) = \|A\|$。因此

$$\omega(\Re A) = \|\Re A\|. \tag{4.1}$$

Bedrani 等人 [3] 证明，如果 A、$B \in \mathcal{S}_\theta$、$\nu \in [0,1]$ 和 $f \in \mathfrak{m}$，那么

$$f(\|\Re A\|) \leqslant \|\Re(f(A))\| \leqslant \sec^2\theta f(\|\Re A\|), \tag{4.2}$$

$$\omega(\Re A) \leqslant \omega(A) \leqslant \sec\theta\ \omega(\Re A). \tag{4.3}$$

定理 4.1. 设 $A, B \in \mathcal{S}_\theta$ 满足 $0 < mI \leqslant \Re A, \Re B \leqslant MI$。如果 $f \in \mathfrak{m}$，且对于某个算子均值 σ，有 $\sigma^* \leqslant \sigma_1, \sigma_2 \leqslant \sigma$，那么

$$f(\omega(A\sigma_1 B)) \leqslant \sec^3\theta\ K\omega\left(f(A\sigma_2 B)\right).$$

证明。利用定理 2.6、f 的凹性、(4.2) 和 (4.3)，我们有

$$\begin{aligned}
f\left(\omega(A\sigma_1 B)\right) &\leqslant f\left(\sec\theta\ \omega(\Re(A\sigma_1 B))\right)\\
&\leqslant f\left(\sec\theta\ \omega(\sec^2\theta K\Re(A\sigma_2 B))\right)\\
&= f\left(\sec^3\theta K\omega(\Re(A\sigma_2 B)\right)\\
&\leqslant \sec^3\theta K f\left(\omega(\Re(A\sigma_2 B))\right)\\
&= \sec^3\theta K f\left(\|\Re(A\sigma_2 B)\|\right)\\
&\leqslant \sec^3\theta K\|\Re f(A\sigma_2 B)\|\\
&= \sec^3\theta K\omega\left(\Re(f(A\sigma_2 B))\right)\\
&\leqslant \sec^3\theta K\omega\left(f(A\sigma_2 B)\right),
\end{aligned}$$

至此，证明得证。 □

注 4.2. 如果我们使用定理 2.7 而不是定理 2.6，则有

$$f(\omega(A\nabla_v B)) \leqslant \sec\theta\ K\omega\left(f(A\sigma B)\right),$$

对于 $!_v \leqslant \sigma \leqslant \nabla_v$。

下一个命题是 [4, 定理 3.5] 的逆命题。

命题 4.3. 设 $A, B \in \mathcal{S}_\theta$ 使得 $0 < mI \leqslant \Re A, \Re B \leqslant MI$。那么，对于每个正幺线性映射 Φ 以及 σ_1 和 σ_2，在 ∇_ν 与 $!_\nu$ 之间，

$$\omega\left(f(\Phi(A))\sigma_1 f(\Phi(B))\right) \leqslant K\sec^5\theta\ \omega\left(f(\Phi(A\sigma_2 B))\right).$$

对于 $f \in \mathfrak{m}$。

证明。由定理 2.14 和 (4.3)，可得

$$\begin{aligned}\omega\left(f(\Phi(A))\sigma_1 f(\Phi(B))\right) &\leqslant \sec\theta\ \omega\left(\Re f(\Phi(A))\sigma_1 f(\Phi(B))\right)\\ &\leqslant K\sec^5\theta\ \omega\left(\Re f(\Phi(A\sigma_2 B))\right)\\ &\leqslant K\sec^5\theta\ \omega\left(f(\Phi(A\sigma_2 B))\right).\end{aligned}$$

□

Statements & Declarations

作者声明，在准备本稿件期间未获得任何资金、拨款或其他支持。

作者没有需要披露的相关财务或非财务利益。

所有作者均参与了研究的设计与实施、结果分析以及稿件撰写。所有作者均已阅读并批准最终稿件。

References

[1] T. Ando，正定矩阵上某些映射的凹性及其在 Hadamard 乘积中的应用，《线性代数及其应用》26（1979），203-241。[2] T. Ando 和 X. Zhan，与算子单调函数相关的范数不等式，《数学年刊》315（1999），771–780。[3] Y. Bedrani、F. Kittaneh 和 M. Sababheh，从正矩阵到增生矩阵，《正性》25（2021），1601–1629。[4] Y. Bedrani、F. Kittaneh 和 M. Sababheh，增生矩阵的数值半径，《线性与多重线性代数》69（2021），957-970。[5] R. Bhatia，《矩阵分析》，Springer-Verlag，纽约，1997。[6] R. Bhatia 和 F. Kittaneh，关于矩阵算术—几何平均不等式的注记，《线性代数及其应用》308（2000），203–211。[7] D. Choi、T. Tam 和 P. Zhang，Fischer's 不等式的推广，《线性代数及其应用》569（2019），311-322。[8] S. Drury 和 M. Lin，数值域位于扇形内的矩阵的奇异值不等式，《算子矩阵》8（2014），1143-1148。[9] M. Fujii、S. Izumino、R. Nakamoto 和 Y. Seo，与 Cauchy-Schwarz 和 Holder-McCarthy 不等式相关的算子不等式，《日本海数学杂志》8（1997），117–122。[10] R.A. Horn 和 C.R. Johnson，《矩阵分析》，剑桥大学出版社，剑桥，2013。[11] M. Khosravi、M. S. Moslehian 和 A. Sheikhhosseini，涉及算子均值和正线性映射的一些算子不等式，《线性与多重线性代数》66（2018），1186-1198。[12] F. Kubo 和 T. Ando，正线性算子的均值，《数学年刊》248（1980），205-224。[13] M. Lin，Hanynsworth 和 Hartfiel 结果的推广，《数学档案》104（2015），93-100。[14] M. Lin，扇形矩阵的一些不等式，《算子矩阵》10（2016），915-921。[15] J.T. Liu、Q.W. Wang，扇形矩阵的更多不等式，《伊朗数学学会通报》44（2018），1059–1066。

[16] S. Malekinejad、M. Khosravi 和 A. Sheikhhosseini，涉及正线性映射的扇形矩阵均值不等式，Positivity，印刷中。[17] Y. Mao 和 Y. Mao，扇形矩阵的 Heinz 均值不等式，《伊朗数学学会通报》46（2020），1767–1774。[18] L. Nasiri 和 S. Furuichi，关于扇形矩阵 Tan-Xie 不等式的逆不等式及其应用，《数学不等式》15（2021），1425–1434。[19] J. E. Pečarić，T. Furuta，J. Mićić Hot 和 Y. Seo，算子不等式中的 Mond-Pečarić 方法，Element，萨格勒布，2005。[20] M. Raissouli、M.S. Moslehian 和 S. Furuichi，两个增生算子的相对熵与 Tsallis 熵，《巴黎科学院数学报告》I辑，355（2017），687–693。[21] C. Yang、Y. Gao 和 F. Lu，算子与矩阵的若干逆均值不等式，《不等式及其应用杂志》（2019），第115篇文章。[22] C. Yang 和 F. Lu，涉及线性映射的扇形矩阵 Heinz 均值不等式，《泛函分析年刊》11（2020），第3期，866–878。[23] C. Yang 和 F. Lu，扇形矩阵不等式的若干推广，《不等式及其应用杂志》（2018），第183篇文章。[24] F. Zhan，一种矩阵分解及其应用，《线性与多重线性代数》63（2015），2033–2042。