arXiv:2305.04495v1 [math.CA] 8 May 2023

绝对值矩阵方程唯一可解性的充分条件

值矩阵方程

Shubham Kumar[1, *], Deepmala[2, *]

1[2] *Mathematics Discipline*,

PDPM-Indian Institute of Information Technology、 Design and Manufacturing、 Jabalpur、 M.P.、 India

* *Email: shub.srma@gmail.com, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5237-9719,*
* *Email: dmrai23@gmail.com, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2600-6836.*

1 摘要

本文讨论了两个绝对值矩阵方程的唯一可解性。我们针对广义绝对值矩阵方程（GAVME） $AX + B|X| = F$给出了唯一可解条件 $\rho(|A^{-1}B|) < 1$ 。该条件优于Kumar等人 [《数值分析与逼近理论杂志》51(1)（2022年）83-87]提出的条件。我们还讨论了新广义绝对值矩阵方程（ NGAVME） $AX+B|CX| = F$ 在$A, B, C, F, X \in \mathcal{R}^{n\times n}$下唯一可解性的不同条件。此外，我们还给出了对Wang 等人发表的成果《应用数学快报》116（2021年） 106966]中推论2.1的修正版 [。

关键词。绝对值矩阵方程。唯一解。充分条件。2020年数学学科分类。15A06, 15A18，90C30。

2 引言

NGAVME 定义为

$$AX + B|CX| = F, \tag{1}$$

这是下列 GAVME 的一种推广形式。

$$AX + B|X| = F, \tag{2}$$

其中， A、 B、 C、 $F \in \mathcal{R}^{n\times n}$ 均为已知量， $X \in \mathcal{R}^{n\times n}$ 为待确定量。对于一个矩阵 $A \in \mathcal{R}^{n\times n}$ 和一个向量 $x \in \mathcal{R}^n$， $|A|$ 和 $|x|$ 分别表示该矩阵和该向量的逐分量绝对值。

分别为向量。

GAVME 和 NGAVME 是以下广义绝对值方程（GAVE）的推广。

$$Ax + B|x| = f, \tag{3}$$

其中 A、 $B \in \mathcal{R}^{n\times n}$、 $f \in \mathcal{R}^n$ 为已知量， $x \in \mathcal{R}^n$ 为未知量。

Sylvester 型绝对值方程定义为

$$AXK + B|X|L = F, \tag{4}$$

其中矩阵 A、 B、 K、 L、 $F \in \mathcal{R}^{n\times n}$ 已知， $X \in \mathcal{R}^{n\times n}$ 待求得。 .

Rohn [1] 最早研究了广义绝对值方程（GAVE）（3），随后 Mangasarian 等人 [2, 3] 对 GAVE 进行了深入研究。绝对值方程是一个活跃的研究领域，因为它们在数学的不同分支中有着广泛的应用，例如线性规划和二次规划等优化问题、线性区间方程，以及求解双矩阵博弈中的纳什均衡点。有关不同类型绝对值方程的更多详情及其应用，读者可参阅（[4, 5, 6] 及其中的参考文献）。

在文献中，Baksalary 等人 [7, 8] 分别考虑了矩阵方程 $AX - BY = C$ 和 $AXB+CYD = E$，并建立了其可解性的充要条件。Roth [9], 给出了矩阵方程 $AX-YB = C$ 和 $AX-XB = C$的可解条件。对于方程 $AXB+CYD = E$，Peng 等人 [10] 提出了一种求解它们的迭代方法。Dehghan 和 Hajarian [11, 12] 讨论了一般耦合矩阵方程的数值方法。（[13, 14]及其所引文献）讨论了 Sylvester 型 AVE (4) 的唯一可解条件。Li [15] 研究了新一类 Sylvester 型 AVE $AXK + |BXL| = F$，并给出了其唯一可解的充分条件。最近，Dehghan 等人 [16] 将绝对值方程的思想拓展到了矩阵方程。

受 [17], Sylvester 型 AVE 相关工作的启发，我们进一步推广了 GAVME 的概念，并研究了 NGAVME。这些矩阵方程在工程学的许多分支中都有出现，例如区间矩阵方程 [18, 19], 、鲁棒控制[20] 等领域。针对这些形式各异的矩阵方程，文献（[7, 8, 11, 12, 16, 13, 10, 9, 21, 14, 22] 及其中的参考文献）中已有若干关于可解性和数值方法的研究结果。

NGAVME (1)、GAVME (2) 和 Sylvester 型 AVE (4) 中非可微项和非线性项的出现，使得相关研究既具挑战性又饶有趣味。据我们所知，目前尚无人研究 NGAVME (1)。基于此，本文给出了 NGAVEM 和 GAVME 唯一可解性的充分条件。

该结构 本文的结构如下：第 2 节回顾一些结果和定义。在

第 3 节，我们给出关于 NGAVME (1) 唯一可解性的一些结果，并获得 GAVME (2) 的唯一解条件。最后，我们在第 4 节总结讨论。

3 预备知识

为便于后续使用，本节回顾若干定义和结论。我们使用矩阵的 vec 算子和克罗内克积“$\otimes$”；关于 vec 算子和克罗内克积的定义与性质，参见 [13, 23, 21]。

定义 3.1. [24] 设 $\mathcal{M} = \{M_1, M_2\}$ 表示满足 $M_1, M_2 \in \mathcal{R}^{n\times n}$ 的矩阵集合。若矩阵 R $\in \mathcal{R}^{n\times n}$ 满足 $R_{j.} \in \{(M_1)_{j.}, (M_2)_{j.}\}$(或 $R_{.j} \in \{(M_1)_{.j}, (M_2)_{.j}\}$) j=1,2,...,n，则称其为 $\mathcal{M}$ 的行代表矩阵（或列代表矩阵），其中 $R_{j.}$, $(M_1)_{j.}$, 和 $(M_2)_{j.}$ (或 $R_{.j}$, $(M_1)_{.j}$, 和 $(M_2)_{.j}$) 分别表示 R、 M_1 和 M_2 的 j^{th} 行（或列）。

定义 3.2. [24] 如果 $\mathcal{M} = \{M_1, M_2\}$ 的每个行（或列）代表矩阵的行列式均为正，则称 $\mathcal{M}$ 具有行（或列） $\mathcal{W}$-性质。

定理 3.1. *[23]* 对于非负矩阵 $A, B \in \mathcal{R}^{n\times n}$，如果 $0 \leq A \leq B$，则 $\rho(A) \leq \rho(B)$，其中 $\rho(.)$ 表示矩阵的谱半径。

定理 3.2. *[23]* 对于矩阵 $A \in \mathcal{R}^{n\times n}$，存在一个矩阵范数 $|||.|||$，使得 $\rho(A) \leq |||A|||$。

定理 3.3. *[16, 25, 26, 22]* 若满足以下任一条件，则 GAVME (2) 恰有一个解：

(i) $\sigma_{max}(|B|) < \sigma_{min}(A)$;

(ii) $\sigma_{max}(B) < \sigma_{min}(A)$，其中 $\sigma_{max}(.)$ 和 $\sigma_{min}(.)$ 分别表示最大和最小奇异任意实数方阵的值，分别;

(iii) $\rho(|A^{-1}|.|B|) < 1$;

(iv) $\sigma_{max}(A^{-1}B) < 1$,

其中 A 是一个可逆矩阵。

定理 3.4。 *[21]* GAVME (2) 恰有一个解，如果以下任一情形成立：(i) 列 $\mathcal{W}$-性质由 $\{Q + P, -Q + P\}$ 满足；(ii) $Q + P$是非奇异的，且列 $\mathcal{W}$-性质由 $\{I, (Q + P)^{-1}(-Q + P)\}$ 满足，其中 n^2–阶单位矩阵 I；(iii) $Q + P$是非奇异的，且矩阵 $(Q + P)^{-1}(-Q + P)$ 是一个 P-矩阵；(iv) $\{(Q + P)F_1 + (-Q + P)F_2\}$ 是可逆的，其中 F_1、 $F_2 \in \mathcal{R}^{n^2\times n^2}$ 是任意两个非负对角矩阵，满足 $diag(F_1 + F_2) > 0$，且 $Q = I \otimes B$ 和 $P = I \otimes A$。

定理3.5。 *[21]* 在 $P+Q$ 的每个对角元素与其对应的 $P-Q$ 元素具有相同符号的情况下，如果以下任一陈述成立，则 GAVME (2) 恰好有一个解：

(i) $Q+P$和 $-Q+P$均列严格对角占优；

(ii) $Q+P$、 $-Q+P$及其所有列代表矩阵均按列不可约对角占优，其中 $Q=I\otimes B$ 和 $P=I\otimes A$。

定理 3.6. *[21]* 若非奇异矩阵 A 满足条件 $\rho((I\otimes A^{-1}B)D)<1$，对任意满足 $d_i\in[-1,1]$ 的对角矩阵 $D=diag(d_i)\in\mathcal{R}^{n^2\times n^2}$ 均成立，则 GAVME (2) 恰有一个解。

定理 3.7. *[14]* 若满足以下条件，则 Sylvester 型 AVE (4) 恰有一个解：

$$\sigma_{max}(LK^{-1})\sigma_{max}(A^{-1}B)<1, \tag{5}$$

其中 A 和 K 均为非奇异矩阵。

4 主要结果

为了证明 GAVME 唯一可解性的谱半径条件，需要以下引理。

引理 4.1. *[5]*若满足以下条件

$$\rho(|A^{-1}B|)<1,$$

则对于任意 f，GAVE (3) 恰有一个解，其中矩阵 A 可逆。

基于引理 4.1，我们得到以下结果。

定理 4.2. 若可逆矩阵 A 和矩阵 B 满足条件

$$\rho(|A^{-1}B|)<1, \tag{6}$$

则对于任意矩阵 F，GAVME (2) 恰有一个解。

证明。令 $X=(x_1,...,x_m)$ 和 $F=(f_1,...,f_m)$，其中 x_j和 f_j分别为矩阵 X 和 F 的第 j 列。根据 $|X|=(|x_1|,...,|x_m|)$，GAVME (2) 可改写为 $A(x_1,...,x_m)+B(|x_1|,...,|x_m|)=(f_1,...,f_m)$，或等价地，

$$Ax_j+B|x_j|=f_j, \tag{7}$$

其中 $j=1$、2、...、m. 当条件 $\rho(|A^{-1}B|)<1$ 成立时，引理 4.1 保证 GAVE (7) 对每个 k 都有唯一解。由此，我们可以分别计算每个 x_k。 □

在定理 4.2 中，我们得到了关于 (2) 的唯一可解性的新结果。实际应用中，我们的条件很容易验证，而定理 3.4 和定理 3.6 给出的条件在实际应用中则有局限性。在定理 3.4 中，我们必须确定给定集合中所有列代表矩阵的行列式；而要应用定理 3.6，我们需要找出所有对角矩阵 D，这并非易事。

此外，根据定理 3.1，我们有 $\rho(|A^{-1}B|) \leq \rho(|A^{-1}|.|B|)$。这意味着条件$\rho(|A^{-1}B|)$略优于 $\rho(|A^{-1}|.|B|)$。为检验我们条件的有效性，我们考虑了例 4.1 和例 4.2。我们将我们的谱半径条件 (6) 与定理 3.3 中给出的全部三个条件进行比较。我们观察到，我们的谱半径条件 (6) 略优于条件 $\rho(|A^{-1}|.|B|) < 1$，并且在某些情况下，我们的条件性能优于定理 3.3 中所示的奇异值条件。

例 4.1. *[21]*令

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \quad and \quad B = \begin{bmatrix} -0.5 & 1 \\ 0.5 & -2 \end{bmatrix}.$$

于是充分条件 $\rho(|A^{-1}B|) = 0.38826 < 1$ 成立。因此，GAVME (2) 有唯一解。此外，$\rho(|A^{-1}|.|B|) = 1 \not< 1$，$\sigma_{max}(B) = 2.3354 \not< 2.1939 = \sigma_{min}(A)$，且 $\sigma_{max}(|B|) = 2.3354 \not< 2.1939 = \sigma_{min}(A)$。定理 3.3 的三个条件均不成立，因此这些条件无法用于判定 GAVME (2) 的唯一解。

例 4.2. 考虑以下 GAVME (2)

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1.2 & 1.1 \\ -2 & 0.8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |x_1| & |x_2| & |x_3| \\ |x_4| & |x_5| & |x_6| \\ |x_7| & |x_8| & |x_9| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.5 & 9 & 1 \\ 0.8 & 3.8 & 1.8 \\ 3.4 & -4.6 & -5.2 \end{bmatrix}$$

显然，$\rho(|A^{-1}B|) = 0.9091 < 1$. 此外，$\sigma_{max}(A^{-1}B) = 1.0885 \not< 1$, $\sigma_{max}(|B|) = 1.8019 \not< \sigma_{min}(A) = 0.9038$ 和 $\sigma_{max}(B) = 1.8019 \not< \sigma_{min}(A) = 0.9038$. 这里，定理 (3.3) 的条件无法用于判断 GAVME (2) 是否有唯一解。该 GAVME 有唯一解 X =

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0.5 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

4.1 NGAVME 解的唯一性条件

现在，我们讨论 NGAVME (1) 的唯一可解性。为获得 NGAVME (1) 的唯一可解条件，我们利用 NGAVME (1) 与 GAVME (2) 之间的等价性。

假设矩阵 C 可逆，则 NGAVME (1) 可写成如下等价的 GAVME 形式

$$AC^{-1}Y + B|Y| = F,\ with\ Y = CX. \tag{8}$$

根据定理 3.3，我们有以下结果。

定理 4.3. 若满足以下任一条件，则 NGAVME (1) 恰有一个解：

(i) $\sigma_{max}(|B|) < \sigma_{min}(AC^{-1})$，其中 C 为可逆矩阵；
(ii) $\sigma_{max}(B) < \sigma_{min}(AC^{-1})$，其中 C 为可逆矩阵；
(iii) $\rho(|CA^{-1}|.|B|) < 1$；(iv) $\sigma_{max}(CA^{-1}B) < 1$,

其中 A 为可逆矩阵。

证明. 为证明上述结果，我们将在定理 3.3 中使用方程 (8)。由于方程 (8) 等价于 GAVME 形式 2，因此根据定理 3.3，定理 4.3 的结果成立。 □

定理 4.4. 若满足以下任一条件，则 NGAVME (1) 恰有一个解：

(i) $\{R+S, R-S\}$ 满足列 $\mathcal{W}$-性质；

(ii) $R+S$可逆，且列 $\mathcal{W}$-性质在 $\{I, (R+S)^{-1}(R-S)\}$ 保持不变，其中 n^2–阶单位矩阵 I；

(iii) $R+S$ 可逆，且矩阵 $(R+S)^{-1}(R-S)$ 是 P-矩阵；

(iv) $\{(R+S)F_1+(R-S)F_2\}$可逆，其中 F_1、$F_2 \in \mathcal{R}^{n^2\times n^2}$是任意两个非负对角矩阵，且 $diag(F_1 + F_2) > 0$，其中 $R = I \otimes AC^{-1}$ 和 $S = I \otimes B$.

证明。将方程 (8)代入定理 3.4，可直接得到定理 4.4 的结果。 □

定理 4.5. 若 $R+S$的每个对角元素都与 $R-S$的对应元素同号，则只要以下任一陈述成立，NGAVME (1) 就恰有一个解：(i) $R+S$ 和 $R-S$ 均为列严格对角占优；

(ii) $R+S$、$R-S$ 及其所有列代表矩阵均按列不可约对角占优，其中 $R = I \otimes AC^{-1}$ 和 $S = I \otimes B$.

证明。由于 (8) 等价于 GAVME (2)，因此将定理3.5应用于 (8)，即可得到我们的结果。

□

定理4.6. 设非奇异矩阵A和C满足条件 $\rho((I \otimes CA^{-1}B)D) < 1$ 对任意对角矩阵 $D = diag(d_i) \in \mathcal{R}^{n^2\times n^2}$ 且 $d_i \in [-1, 1]$都成立，则NGAVME (1)恰有一个解。

证明。上述结果的证明可直接由定理 3.6 和方程 (8) 得出。 □

定理 4.7. 如果条件 $\rho(|CA^{-1}B|) < 1$ 成立，则 NGAVME (1) 恰有一个解，其中 A 是一个可逆矩阵。

证明。利用定理 3.7 和方程 (8) 可直接得证。 □

根据奇异值、克罗内克积的性质以及定理 3.2，我们有如下计算：

$\rho((I\otimes CA^{-1}B)D) \leq \sigma_{max}((I\otimes CA^{-1}B)D) \leq \sigma_{max}(I\otimes CA^{-1}B)\sigma_{max}(D) \leq \sigma_{max}(I\otimes CA^{-1}B) = \sigma_{max}(I)\sigma_{max}(CA^{-1}B) = \sigma_{max}(CA^{-1}B)$.

由上述表达式和定理 4.7 可得以下结果。

命题 4.8. 当条件 $\sigma_{max}(CA^{-1}B) < 1$成立时，NGAVME (1) 恰有一个解，其中 A 是一个可逆矩阵。

尽管命题 4.8 的条件也出现在定理 4.3 中，但这里我们采用不同的方法。根据可逆矩阵 A 的关系 $\sigma_{max}(A)\sigma_{min}(A^{-1}) = 1$ ，以下结果也可用来代替命题 4.8。

推论 4.9. 当条件 $\sigma_{min}(B^{-1}AC^{-1}) > 1$ 成立且 B 和 C 可逆时，NGAVME (1) 恰有一个解。

在实践中，我们可以将我们的结果应用于较大规模问题。为了确定我们的结果的有效性，我们考虑以下小规模问题。

例 4.3. 考虑以下矩阵。

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & -5 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad and \quad F = \begin{bmatrix} 14 & -7 & 19 \\ 12 & 4 & 3 \\ 1 & 39 & -12 \end{bmatrix}.$$

通过简单计算，我们得到，$\sigma_{max}(CA^{-1}B) = 0.90873 < 1$，$\rho(|CA^{-1}B|) = 0.70285 < 1$，以及 $\sigma_{min}(B^{-1}AC^{-1}) = 1.1004 > 1$。这里分别满足定理 4.7、定理 4.8 和推论 4.9 的条件，因此相应的 NGAVME 具有唯一解。NGAVEM (1) 的唯一解为

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

备注 4.10. 显然，定理 4.3 到定理 4.7 分别是定理 3.3 到定理 3.6（包括定理 4.2）中结果的推广形式。此外，定理 4.7 的条件略优于定理 4.3 的条件 (iii)，这一点由定理 3.1 可轻易验证。

现在，我们将重点关注 Wang 等人 [14] 针对 Sylvester 类绝对值方程 (4) 的唯一解所给出的充分条件，Wang 等人 [14] 给出的表述如下：

定理 4.11. *[14]* Sylvester 型 AVE (4) 恰有一个解，如果

$$\sigma_{min}(LK^{-1})\sigma_{min}(A^{-1}B) > 1, \tag{9}$$

其中，A 和 K 是非奇异矩阵。

一般而言，定理 4.11 的结论是不正确的。考虑 n=1 的情形，矩阵 $A = 1$、$B = 2$、$K = 1$ 和 $L = 1$ 满足条件 (9)，即 $\sigma_{min}(LK^{-1})\sigma_{min}(A^{-1}B) = 2 > 1$，但是 Sylvester 型 AVE $X + 2|X| = 1$ 有两个解，而 $X + 2|X| = -1$ 无解。

现在，我们给出定理 4.11 的修正版。

定理 4.12. 若

$$\sigma_{min}(KL^{-1})\sigma_{min}(B^{-1}A) > 1, \tag{10}$$

其中，B 和 L 为非奇异矩阵。

证明。设 $A_1 = LK^{-1}$ 和 $A_2 = A^{-1}B$，则根据简单关系 $\sigma_{max}(B_1)\sigma_{min}(B_1^{-1}) = 1$，对于非奇异矩阵 B_1，应用定理 3.7，即可得到我们的结果。 □

为验证定理 4.12，考虑 [14]，中的示例 1 和示例 2，通过简单计算可得 $\sigma_{min}(KL^{-1})\sigma_{min}(B^{-1}A) = 1.3334 > 1$，以及 $\sigma_{min}(KL^{-1})\sigma_{min}(B^{-1}A) = 1.0153 > 1$，分别对应示例 1 和示例 2。因此，我们的结果对于检验 Sylvester 型 AVE (4) 的唯一解是有效的。

5 结论

本研究提出了 GAVME 唯一可解性的谱半径条件。利用 GAVME 的结果，得出了一些确保 NGAVME 唯一可解性的结论。[16, 25, 26, 21, 22] 中的已发表成果在此得到了推广。

参考文献

[1] J. Rohn. 方程 $Ax + B|x| = b$ 的择一性定理。《线性与多重线性代数》，52(6):421–426，2004年。[2] O. L. Mangasarian 和 R. R. Meyer. 绝对值方程。《线性代数及其应用》，419(2-3):359–367，2006年。[3] O. L. Mangasarian. 绝对值规划。《计算优化与应用》，36(1):43–53，2007年。[4] F. Mezzadri. 关于一般绝对值方程的解。《应用数学快报》，107:106462，2020年。[5] S. L. Wu 和 S. Shen. 关于广义绝对值方程的唯一解。《优化快报》，15:2017–2024，2021年。[6] S. L. Wu. 一类新广义绝对值方程的唯一解。《应用数学快报》，116:107029，2021年。[7] J. K. Baksalary 和 R. Kala. 矩阵方程 AX - YB = C。《线性代数及其应用》，25:41–43，1979年。[8] J. K. Baksalary 和 R. Kala. 矩阵方程 AXB + CYD = E。《线性代数及其应用》，30:141–147，1980年。[9] W. E. Roth. 矩阵中的方程 AX - YB = C 和 AX - XB = C. 载于《美国数学会会刊》，第3卷，392–396，1952年。[10] Z. Y. Peng 和 Y. X. Peng. 求解矩阵方程 AXB+ CYD = E 的一种高效迭代方法。《数值线性代数及其应用》，13(6):473–485，2006年。[11] M. Dehghan 和 M. Hajarian. 求解广义耦合西尔维斯特矩阵方程自反解的迭代算法及其最佳逼近。《应用数学与计算》，202(2):571–588，2008年。[12] M. Dehghan 和 M. Hajarian. 广义双对称矩阵上的一般耦合矩阵方程。《线性代数及其应用》，432(6):1531–1552，2010年。[13] B. Hashemi. 类西尔维斯特绝对值矩阵方程可解性的充分条件。《应用数学快报》，112:106818，2021年。

[14] L. Wang 和 C. Li。方形 Sylvester 类绝对值方程唯一解的新充分条件。《应用数学快报》，116：106966，2021年。[15] C. Li。新型 Sylvester 类绝对值方程唯一解的充分条件。《优化理论与应用杂志》，195(2)：676–683，2022年。[16] M. Dehghan 和 A. Shirilord。求解广义绝对值矩阵方程的矩阵多分裂 Picard 迭代法。《应用数值数学》，158：425–438，2020年。[17] H. Zhou 和 S. L. Wu。关于一类绝对值方程的唯一解 $Ax-B|Cx|=d$。《AIMS 数学》，6(8)：8912–8919，2021年。[18] A. Neumaier。方程组的区间方法。第 37 号。剑桥大学出版社，1990年。[19] N. P. Seif、S. A. Hussein 和 A. S. Deif。区间 Sylvester 方程。《计算》，52(3)：233–244，1994年。[20] V. N. Shashikhin。大规模区间系统中极点的鲁棒配置。《自动化与远程控制》，63：200–208，2002年。[21] W. L. Tang 和 S. X. Miao。关于绝对值矩阵方程的可解性和 Picard 型方法。《计算与应用数学》，41(2)：78，2022年。[22] K. Xie。关于广义绝对值矩阵方程的唯一可解性。《美国应用数学杂志》，9(4)：104–107，2021年。[23] R. A. Horn 和 C. R. Johnson。矩阵分析。剑桥大学出版社，2012年。[24] R. Sznajder 和 M. S. Gowda。p0 性质和 p 性质的推广；扩展垂直和水平线性互补问题。《线性代数及其应用》，223：695–715，1995年。[25] S. Kumar 和 Deepmala。关于广义绝对值矩阵方程唯一可解条件的注记。《数值分析与逼近理论杂志》，51(1)：83–87，2022年。[26] S. Kumar 和 Deepmala。关于广义绝对值矩阵方程唯一可解性的注记。《国家科学院快报》，1–3，2023年。