通过厄米-高斯模式激发原子中的禁戒电子跃迁

Anton A. Peshkov[1, 2*], *Elena Jordan*[1], *Markus Kromrey*[1], *Karan K. Mehta*[3], *Tanja E. Mehlstäubler*[1, 4, 5], 和 *Andrey Surzhykov*[1, 2, 6]

arXiv:2305.04523v2 [physics.atom-ph] 9 May 2023

提出并从理论上研究了由导引光束结构产生的厄米-高斯（HG）模式对囚禁离子的光激发。具体而言，我们推导出诱导原子跃迁拉比频率的简洁解析表达式，该表达式同时取决于 HG 光束参数和实验几何结构。利用这些通用表达式，我们研究了位于 HG_{10} 和 HG_{01} 光束低强度中心的 Yb^+ 离子中的 $^2S_{1/2} \rightarrow {}^2F_{7/2}$ 电八极（E3）跃迁。我们展示了如何通过适当选择入射光的偏振和外磁场的方向来增强相应的拉比频率；外磁场定义了目标离子的量子化轴。针对实验可行的光束参数所进行的计算表明，所实现的拉比频率可与传统拉盖尔-高斯（LG）模式下观测到的频率相当，甚至更高。由于集成光子学能够相对直接地产生纯度高且稳定性好的类 HG 模式，我们的结果表明，这些模式有望成为研究高度禁戒原子跃迁的新工具。

1 引言

近年来，人们对结构光场在显微术 [1], 光镊 [2],操控冷量子气体 [3], 以及经典与量子通信系统 [4,5]中的应用兴趣日益浓厚。这种兴趣源于结构光的独特性质，例如随空间变化的振幅、相位和偏振 [6,7]。从计量学角度来看，结构光尤为重要，因为它有望激发窄线宽钟跃迁，同时抑制不利的光移。这之所以能够实现，是因为结构光束呈现出高度不均匀的强度分布，中心区域为暗区（低强度区）。置于该中心区域的原子或离子受到的电场强度较低，但梯度较大，这有利于非偶极跃迁，同时对原子能级的扰动较弱。这种“在暗处激发”已在单个受困 $^{40}Ca^+$ [8] 和 $^{171}Yb^+$ 离子的实验中成功实现 [9]。在这些实验中，离子与传统的拉盖尔–高斯（LG）模式相互作用，激发概率表现出对偏振和所施加磁场方向的强烈依赖性 [10,11]。人们也利用光学驻波开展了类似研究 [12,13]。

尽管使用 $^{40}Ca^+$ 和 $^{171}Yb^+$离子的两项实验，为利用结构光驱动电偶极禁戒跃迁迈出了重要步伐，但它们都受到目标离子相对于低强度激光光束中心定位不精确的影响。目标离子定位的不确定性不仅源于陷阱中原子的热运动，也源于激光光束缺乏指向稳定性。后一问题可通过采用将光传输光学元件直接集成到原子阱中的方案来部分解决 [14–16]。此类光子集成电路采用光刻技术制造，形成矩形波导结构，

* 通讯作者电子邮箱：anton.peshkov.ext@ptb.de[1] 德国联邦物理技术研究院，D-38116 布伦瑞克，德国[2] 布伦瑞克工业大学数学物理研究所，D-38106 布伦瑞克，德国[3] 康奈尔大学电气与计算机工程学院，美国纽约州伊萨卡，NY 14850[4] 莱布尼茨大学汉诺威分校量子光学研究所，D-30167 汉诺威，德国[5] 莱布尼茨大学汉诺威分校纳米与量子工程实验室，Schneiderberg 39，30167 汉诺威，德国[6] 布伦瑞克新兴纳米计量学实验室，D-38106 布伦瑞克，德国

版权信息由出版商提供

这些结构的几何形状使得较容易激发近似于厄米–高斯（HG）模式的自由空间光束。与拉盖尔–高斯模式不同，厄米–高斯模式不具有旋转对称性。因此，在本文中，我们提出在光子集成装置中使用 HG模式，对强禁戒（原子钟）跃迁进行精密光谱学研究。为评估这一方法的可行性，我们在此研究单个受困 Yb^+ 离子与厄米–高斯光的相互作用。

本文组织如下。第 2 节简要讨论偏振厄米-高斯光束激发单个囚禁原子的振幅推导。基于所得表达式，我们在第 3 节探究由激光诱导的 $^2S_{1/2}(F=0) \rightarrow {}^2F_{7/2}(F=3, M=0)$ 电八极（E3）跃迁，该跃迁发生在局域于光束暗中心的 $^{171}Yb^+$ 离子中。我们特别关注该跃迁的拉比频率 $\Omega^{(HG)}$ 如何受到入射厄米-高斯光的偏振及外磁场取向的影响。此外，我们给出了在现实实验参数下的 $\Omega^{(HG)}$计算结果，这些结果表明，HG模式可作为在集成光学装置中研究偶极禁戒跃迁的有效工具。最后，第 4 节总结全文并展望未来。

2 理论

2.1 贝塞尔模式

在分析 HG模式引起的光激发过程之前，我们先回顾原子与贝塞尔光相互作用这一较简单的问题。由于这一主题在文献中已有大量讨论 [11,17–19],，这里我们仅列出基本表达式。贝塞尔光束具有确定的角动量沿其传播方向的投影$m\gamma$ 、螺旋度 λ以及线动量的纵向分量k_z。此外，横向动量的绝对值 $|\boldsymbol{k}_\perp| = \kappa$，因而频率$\omega = ck = c\sqrt{k_z^2 + \kappa^2}$也都是固定的。这种贝塞尔光束的矢势

$$\boldsymbol{A}^{(\mathrm{B})}_{m_\gamma \lambda}(\boldsymbol{r}; \kappa, k_z) = \int a_{\kappa m_\gamma}(\boldsymbol{k}_\perp)\, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\lambda}\, e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}\, \frac{d^2\boldsymbol{k}_\perp}{(2\pi)^2} \tag{1}$$

可写成波矢为$\boldsymbol{k}$ 的平面波叠加，这些波矢均匀分布在一个圆锥表面上。圆锥轴线与光的传播方向重合，其张角为 $\theta_k = \arcsin(\kappa/k)$。在式（1）中，$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\lambda}$ 是光子偏振矢量，满足库仑规范条件$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\lambda} \cdot \boldsymbol{k} = 0$；振幅$a^{\kappa m_\gamma}(\boldsymbol{k}_\perp)$定义为：

$$a_{\kappa m_\gamma}(\boldsymbol{k}_\perp) = \frac{2\pi}{\kappa}\,(-i)^{m_\gamma}\, e^{i m_\gamma \phi_k}\, \delta(k_\perp - \kappa), \tag{2}$$

其中，ϕ_k 是波矢的方位角。

利用矢势 (1)，我们可以写出辐射跃迁 $|\alpha_g F_g M_g\rangle + \gamma \rightarrow |\alpha_e F_e M_e\rangle$ 的振幅。这里，原子的基态和激发态由核I、电子J和总$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{J}$角动量，以及它们在原子量子化轴上的投影$M = M_F$表征。该轴沿外磁场$\boldsymbol{B}$方向，与光传播方向之间的夹角为 θ （见图 1）。此外， α 表示唯一确定这些态所需的所有其他量子数。跃迁振幅为：

$$\begin{aligned}\mathscr{M}^{(\mathrm{B})}_{M_e M_g} &= \left\langle \alpha_e F_e M_e \middle| \sum_q \boldsymbol{\alpha}_q\, \boldsymbol{A}^{(\mathrm{B})}_{m_\gamma \lambda}(\boldsymbol{r}_q; \kappa, k_z) \middle| \alpha_g F_g M_g \right\rangle \\ &= \int a_{\kappa m_\gamma}(\boldsymbol{k}_\perp)\, e^{-i\boldsymbol{k}_\perp \boldsymbol{b}} \\ &\quad \times \left\langle \alpha_e F_e M_e \middle| \sum_q \boldsymbol{\alpha}_q\, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\lambda}\, e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}_q} \middle| \alpha_g F_g M_g \right\rangle \frac{d^2\boldsymbol{k}_\perp}{(2\pi)^2},\end{aligned} \tag{3}$$

其中，$\boldsymbol{\alpha}_q$ 是第q个电子的狄拉克矩阵向量，而碰撞参数$\boldsymbol{b}$表示原子相对于光束轴的横向位置。引入这一参数是因为贝塞尔模式和厄米-高斯模式具有复杂的位置依赖结构。对于贝塞尔光束，碰撞参数为零的情况$b = 0$对应于原子位于涡旋线 [11]上。

为了计算振幅（3），我们需要选择整个“原子加 光”系统的量子化轴。两个最显而易见的选择是光的传播轴和磁场方向。当然，物理可观测量与坐标系的特定选择无关。然而，就分析而言，将整体量子化轴选在$\boldsymbol{B}$场方向上更为实用。在确定几何构型后，我们现在可以将标准的多极分解技术应用于辐射场的矢势 [20]。具体而言，$\boldsymbol{A}^{(\mathrm{B})}{}_{m_\gamma \lambda}$ 的平面波分量展开式为：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\lambda}\, e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} = &\sqrt{2\pi} \sum_{pLMM'} i^L\, [L]^{1/2}\, (i\lambda)^p\, D^L_{M\lambda}(\phi_k, \theta_k, 0) \\ &\times D^L_{M'M}(\pi, \theta, \pi)\, \boldsymbol{a}^{(p)}_{LM'}(\boldsymbol{r}),\end{aligned} \tag{4}$$

其中 $D^L{}_{M\lambda}$ 是 Wigner D 函数， $[L] = 2L+1$， 而$\boldsymbol{a}^{(p)}{}_{LM'}$ 指磁（$p=0$）和电（$p=1$）多极势。

版权信息将由出版商提供

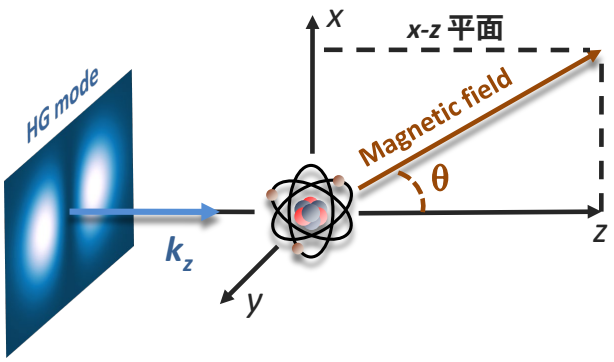

图1 厄米-高斯模式激发单个囚禁原子的几何示意图。角度 θ 定义了量子化轴（由外磁场确定）相对于光传播方向的取向。x-z平面由光传播轴和磁场张成。原子位于光束中心附近，该中心位于$x = y = 0$。

在式 (4) 中，θ_k和 ϕ_k 分别是相对于光束轴和x-z 平面确定各平面波分量传播方向的角度。利用 Wigner-Eckart 定理并对$\boldsymbol{k}_\perp$积分，可得:

$$\begin{aligned}\mathscr{M}^{(\mathrm{B})}_{M_e M_g}(\boldsymbol{b}) &= \sqrt{2\pi}\sum_{pLM} i^L\,[L,F_g]^{1/2}\,(i\lambda)^p\,(-1)^{m_\gamma}\,i^M \\ &\times e^{i(m_\gamma - M)\phi_b}\,d^L_{M,\lambda}(\theta_k)\,d^L_{M,M_e-M_g}(\theta)\,J_{m_\gamma - M}(\kappa b) \\ &\times \langle F_g M_g\, LM_e - M_g | F_e M_e\rangle\,(-1)^{J_e+I+F_g+L} \\ &\times \begin{Bmatrix} F_e & F_g & L \\ J_g & J_e & I \end{Bmatrix} \langle \alpha_e J_e || H_\gamma(pL) || \alpha_g J_g\rangle, \end{aligned} \tag{5}$$

其中，$d^L{}_{M,\lambda}$ 和$J^{m_\gamma - M}$分别是小维格纳函数和贝塞尔函数。此外，我们引入了跃迁算符$H\gamma(pL) = \sum_q \boldsymbol{\alpha}_q \boldsymbol{a}^{(p)}{}_L(\boldsymbol{r}^q)$的约化矩阵元，它与原子和光子的角动量投影无关。从式（5）可以看出，矩阵元 $\mathscr{M}(\mathrm{B})_{M_e M_g}$取决于磁场的倾斜角 θ、原子的碰撞参数$\boldsymbol{b}$、张角 θ_k、螺旋度λ以及光束的总角动量投影$m\gamma$。过去，式（5）曾用于研究暴露于贝塞尔光束和拉盖尔-高斯光束下的原子和离子的跃迁 [9,21]。当原子位于涡旋线附近时，将该公式应用于后一种情况是合理的，因为此处 LG 模式与贝塞尔模式的相位和强度分布几乎相同 [22]。

2.2 厄米-高斯模式

讨论了如何计算贝塞尔（以及 LG）辐射的跃迁振幅后，我们现在可以考察厄米-高斯模式 HG$_{mn}$对原子的光激发。这些模式是笛卡尔坐标系下傍轴波动方程的解，通常由两个指标m 和n表征，它们决定了模式的横向强度分布 [23]。本研究将重点关注模式 HG_{00} （高斯光束）、HG_{10}, 和 HG_{01}，这些模式计划用于 PTB 未来的芯片原子钟实验。

与无衍射的贝塞尔解不同，贝塞尔解的强度分布在每个垂直于光束轴的平面上都相同，而厄米-高斯（HG）强度分布的宽度会在传播过程中发生变化。在计划进行的实验中，目标原子或离子将被放置在宽度最小的平面上，即$z = 0$处。在该平面上，频率为 ω、束腰为w_0 的 HG_{00},、HG_{10}, 和 HG_{01} 模式的矢势可写为:

$$\boldsymbol{A}^{(\mathrm{HG}_{00})}(x,y) = \boldsymbol{e}A_0\,e^{-(x^2+y^2)/w_0^2}, \tag{6a}$$

$$\boldsymbol{A}^{(\mathrm{HG}_{10})}(x,y) = \boldsymbol{e}A_0\,\frac{2x}{w_0}\,e^{-(x^2+y^2)/w_0^2}, \tag{6b}$$

$$\boldsymbol{A}^{(\mathrm{HG}_{01})}(x,y) = \boldsymbol{e}A_0\,\frac{2y}{w_0}\,e^{-(x^2+y^2)/w_0^2}, \tag{6c}$$

其中$\boldsymbol{e}$是偏振矢量 [24]。在方程（6）中，常数$A_0 = \sqrt{4P/(c\epsilon_0\omega^2\pi w_0^2)}$的选取使得强度$I = c\epsilon_0\omega^2|\boldsymbol{A}|^2/2$在光束横截面上的积分等于总功率$P$ [25, 26]。由方程（6）可知，HG_{10} 和 HG_{01} 模式分别有一条沿y 轴和x 轴延伸的节点线。如图 2上图所示，每条节点线都将两个亮斑分隔开。因此，与贝塞尔模式和高斯模式不同，HG_{10} 和 HG_{01} 解不具备相对于光传播方向的轴对称性。

厄米-高斯模式的跃迁振幅的严格计算比贝塞尔辐射的情况稍微复杂一些。幸运的是，在位于$x = y = 0$ 的光束中心附近，在傍轴区域内，HG_{00},HG_{10}, 和HG_{01} 模式（6）可以很好地近似为贝塞尔解（1）的线性组合。特别是，对于圆偏振的厄米-

版权声明行将由出版商提供

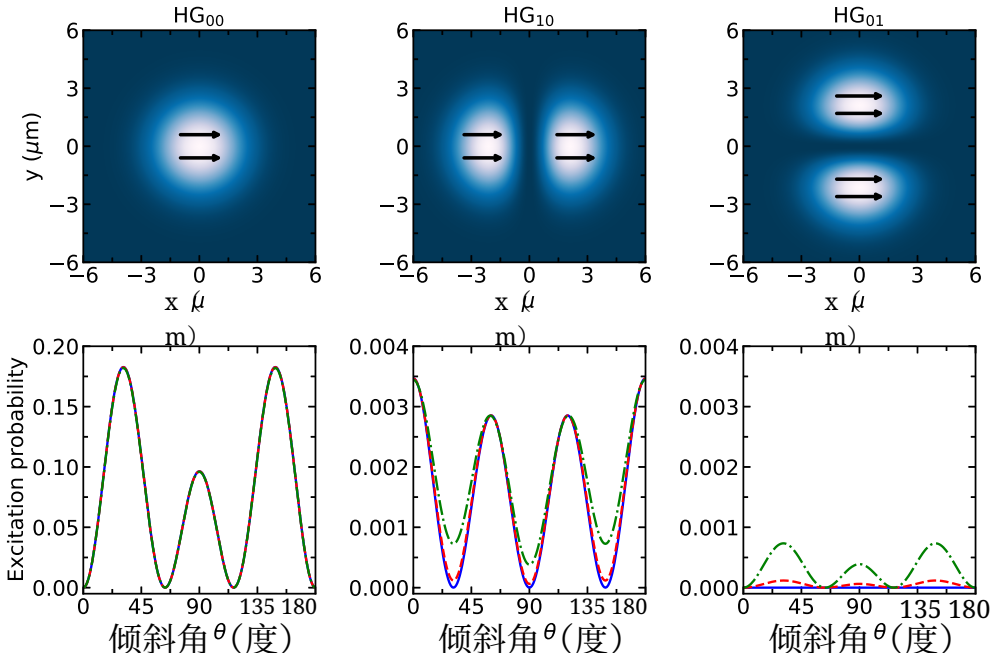

图 2 上：沿x轴线性偏振的厄米-高斯模式 HG00 （左）、HG10 （中）和 HG01 （右）的强度分布。下：对于位于光束中心（蓝色实线）的单个 $^{171}\mathrm{Yb}^{+}$ 离子，或具有宽度参数为 $\sigma = 40\,\mathrm{nm}$（红色虚线）和 $\sigma = 100\,\mathrm{nm}$（绿色点划线）的空间分布，跃迁 $|F_g=0,\ M_g=0\rangle \to |F_e=3,\ M_e=0\rangle$ 的概率随磁场倾斜角 θ 变化的曲线。计算采用波长 467 nm、束腰 $w_0 = 3\,\mu$m、总功率 $P = 1\,\mathrm{mW}$ 和脉冲持续时间 $t = 1.5\mathrm{ms}$。

高斯光束，我们得到：

$$\boldsymbol{A}^{(\mathrm{HG}_{00})}_{\lambda=\pm1} \approx \pm i A_0\, \boldsymbol{A}^{(\mathrm{B,\,par})}_{m_l=0,\,\lambda=\pm1}, \tag{7a}$$

$$\boldsymbol{A}^{(\mathrm{HG}_{10})}_{\lambda=\pm1} \approx \pm 1.04\, \frac{iA_0}{\sqrt{2}} \left[\boldsymbol{A}^{(\mathrm{B,\,par})}_{m_l=+1,\,\lambda=\pm1} - \boldsymbol{A}^{(\mathrm{B,\,par})}_{m_l=-1,\,\lambda=\pm1} \right], \tag{7b}$$

$$\boldsymbol{A}^{(\mathrm{HG}_{01})}_{\lambda=\pm1} \approx \pm 1.04\, \frac{A_0}{\sqrt{2}} \left[\boldsymbol{A}^{(\mathrm{B,\,par})}_{m_l=+1,\,\lambda=\pm1} + \boldsymbol{A}^{(\mathrm{B,\,par})}_{m_l=-1,\,\lambda=\pm1} \right], \tag{7c}$$

其中

$$\boldsymbol{A}^{(\mathrm{B,\,par})}_{m_l\lambda}(\boldsymbol{r}) \approx \boldsymbol{A}^{(\mathrm{B})}_{m_\gamma\lambda}(\boldsymbol{r}; \kappa \ll k_z) = \boldsymbol{e}_\lambda\, (-i)^\lambda J_{m_l}(\kappa r_\perp)\, e^{i m_l \phi}\, e^{i k_z z}. \tag{8}$$

后一个表达式是在傍轴条件 $\kappa \ll k_z$下，对式 (1) 关于 $\boldsymbol{k}_\perp$ 积分得到的，更多细节请参阅文献 [11] 。在式 (8) 中，$m_l = m_\gamma - \lambda$ 表示轨道角动量的投影，而 $\boldsymbol{e}_\lambda \equiv \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\parallel z,\lambda}$ with $\lambda = \pm1$ 表示描述右旋和左旋圆偏振辐射态的矢量。

为了用近轴贝塞尔光束(8)近似 HG 解(6)，我们还调整了由张角 θ_k 确定的横向与纵向光子动量分量之比，以及通用前因子。具体而言，对于 HG_{00}，我们选择了 $\theta_k = \arcsin[2/(w_0 k)]$，；而对于 HG_{10} 和 HG_{01}，张角取为 $\theta_k = \arcsin[2.6/(w_0 k)]$，前因子取为 1.04。对于这些参数选择，方程(6)和(7)给出的矢势在位于$x = y = 0$的光束中心附近几乎等效。例如，对于上方面板图2所示、波长为467 nm、束腰为 3 μm 的模式，其等效区域的边界为 $-2\,\mu\mathrm{m} < x < 2\,\mu\mathrm{m}$ 和 $-2\,\mu\mathrm{m} < y < 2\,\mu\mathrm{m}$。这足以描述未来使用多普勒冷却原子的实验；由于热涨落，预计原子定位在光束中心附近，精度优于40 nm。对于所选参数，我们还可以忽略光束强度分布对z的依赖所带来的影响，因为其瑞利长度约为 60 μm（即光束宽度显著增大的距离），远大于原子的z 坐标的预期涨落。

利用公式（7），我们可以将圆偏振光激发原子的跃迁振幅表示为

版权声明行将由出版商提供。

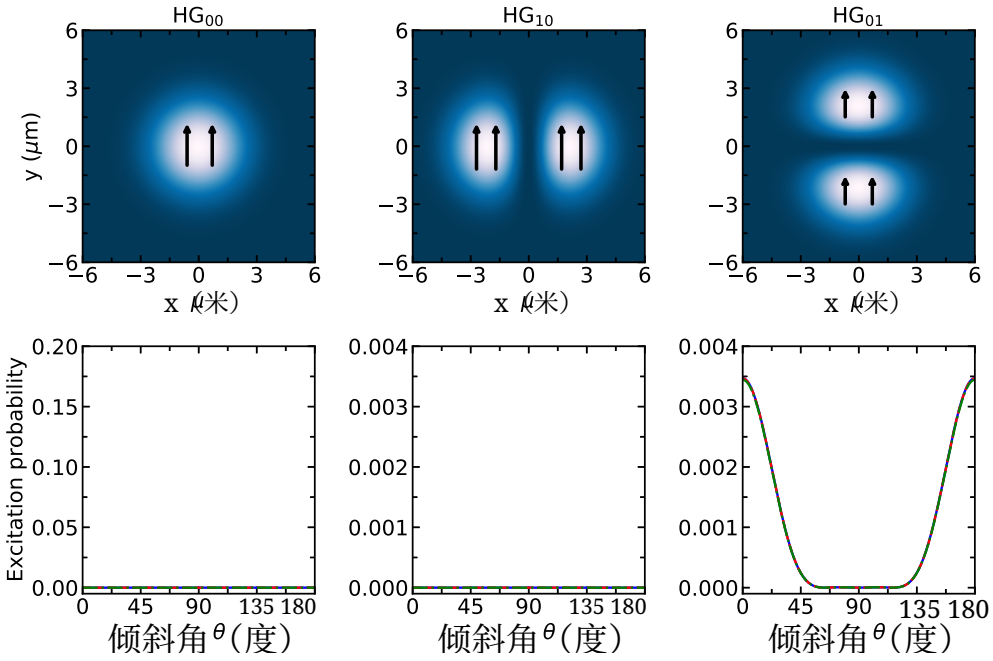

图3 与图2相同，但对应沿y轴的线偏振。

polarized HG modes

$$\mathcal{M}^{(\mathrm{HG}_{00})}_{M_eM_g}(\lambda=\pm1)\approx\pm i\,A_0\,\mathcal{M}^{(\mathrm{B,\,par})}_{M_eM_g}(m_l=0,\lambda=\pm1)\,, \tag{9a}$$

$$\mathcal{M}^{(\mathrm{HG}_{10})}_{M_eM_g}(\lambda=\pm1)\approx\pm1.04A_0\,\frac{i}{\sqrt{2}} \times\left[\mathcal{M}^{(\mathrm{B,\,par})}_{M_eM_g}(m_l=+1,\lambda=\pm1) -\mathcal{M}^{(\mathrm{B,\,par})}_{M_eM_g}(m_l=-1,\lambda=\pm1)\right], \tag{9b}$$

$$\mathcal{M}^{(\mathrm{HG}_{01})}_{M_eM_g}(\lambda=\pm1)\approx\pm1.04A_0\,\frac{1}{\sqrt{2}} \times\left[\mathcal{M}^{(\mathrm{B,\,par})}_{M_eM_g}(m_l=+1,\lambda=\pm1) +\mathcal{M}^{(\mathrm{B,\,par})}_{M_eM_g}(m_l=-1,\lambda=\pm1)\right], \tag{9c}$$

用其贝塞尔对应形式（5）表示。这些公式可直接用于求得线偏振光的振幅：

$$\mathcal{M}^{(\mathrm{HG}_{00,10,01})}_{M_eM_g}(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\mathcal{M}^{(\mathrm{HG}_{00,10,01})}_{M_eM_g}(\lambda=+1) +\mathcal{M}^{(\mathrm{HG}_{00,10,01})}_{M_eM_g}(\lambda=-1)\right], \tag{10a}$$

$$\mathcal{M}^{(\mathrm{HG}_{00,10,01})}_{M_eM_g}(y)=\frac{i}{\sqrt{2}}\left[\mathcal{M}^{(\mathrm{HG}_{00,10,01})}_{M_eM_g}(\lambda=-1) -\mathcal{M}^{(\mathrm{HG}_{00,10,01})}_{M_eM_g}(\lambda=+1)\right], \tag{10b}$$

其中，我们采用了线偏振与圆偏振单位矢量之间的标准关系式$\boldsymbol{e}_x=(\boldsymbol{e}_{\lambda=+1}+\boldsymbol{e}_{\lambda=-1})/\sqrt{2}$和$\boldsymbol{e}_y=i(\boldsymbol{e}_{\lambda=-1}-\boldsymbol{e}_{\lambda=+1})/\sqrt{2}$ [20]。

3 结果与讨论

虽然上述理论可用于描述任意原子在低阶 HG模式激发下的情形，但这里我们将考虑 $^{171}\mathrm{Yb}^+$ 离子中的 $4\mathrm{f}^{14}6\mathrm{s}\ {}^2\mathrm{S}_{1/2}(\mathrm{F}=0)\rightarrow4\mathrm{f}^{13}6\mathrm{s}^2\ {}^2\mathrm{F}_{7/2}(\mathrm{F}=3)$ 跃迁。这一 467纳米跃迁通过 E3通道进行，备受关注，因为它可作为高精度光学钟的参考，并能用于搜寻新物理 [27–29]。下面我们将重点关注磁亚能级 $M_g=M_e=0$之间的跃迁，它们可通过塞曼效应进行光谱分辨。如式 (5) 所示，计算跃迁振幅需要知道约化矩阵元 $\langle4\mathrm{f}^{13}6\mathrm{s}^2\,{}^2\mathrm{F}_{7/2}||H_\gamma(\mathrm{E3})||4\mathrm{f}^{14}6\mathrm{s}\ {}^2\mathrm{S}_{1/2}\rangle$。计算 $^{171}\mathrm{Yb}^+$ 的这一矩阵元十分复杂，需要采用精密的原子结构理论。为避免这一点，我们可以根据以下表达式估算该矩阵元

$$\langle4f^{13}6s^2\,{}^2F_{7/2}||H_\gamma(E3)||4f^{14}6s^2\,S_{1/2}\rangle=\sqrt{\frac{1}{\pi\alpha\omega\tau}}, \tag{11}$$

该表达式将其与 $^2F_{7/2}$ 激发态的实测寿命 $\tau = 4.98 \times 10^7$ s 联系起来 [30,31]。我们还假设光束总功率为$P = 1$ mW，束腰为$w_0 = 3\ \mu$m。近期利用 LG 光激发$^{171}Yb^+$ 离子 E3 跃迁的实验也采用了类似的参数范围 [9]。

3.1 跃迁概率

现在我们可以使用方程（10）来计算线偏振 HG 模式激发 $^{171}Yb^+$ 离子的概率W。对于碰撞参数确定的原子，其跃迁概率由$W(\boldsymbol{b}) = \left|ec\mathcal{M}(\mathrm{HG})(\boldsymbol{b})/\hbar\right|^2 t^2/4$ 给出。这个近似公式是通过分析短相互作用时间t [32]下的拉比振荡推导得出的。下面的计算中，我们假设$t = 1.5$ ms，这远小于拉比频率的倒数。

如上所述，在实际实验中无法对原子的位置进行完美控制。为考虑这种不确定性，我们假设碰撞参数$\boldsymbol{b}$服从宽度为σ的高斯分布：

$$f(\boldsymbol{b}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{b^2}{2\sigma^2}}. \tag{12}$$

借助$f(\boldsymbol{b})$，我们可以用半经典近似表示以光束轴为中心的单个原子靶的跃迁概率：

$$W_{x,y}^{(\mathrm{HG})} = \frac{(ect)^2}{4\hbar^2} \int f(\boldsymbol{b}) \left|\mathcal{M}_{M_e M_g}^{(\mathrm{HG})}(x,y)\right|^2 d^2\boldsymbol{b}. \tag{13}$$

过去，这种近似已成功用于描述 LG 模式 [9] 下获得的实验结果。

图2展示了 HG_{00}（左）、HG_{10}（中）和 HG_{01}（右）模式下，跃迁概率随磁场倾斜角 θ 的变化情况，这些模式均沿x方向线偏振。其中，蓝色实线表示原子恰好位于光束中心时的结果（$b = 0, \sigma = 0$），而红色虚线和绿色点划线分别对应于空间分布 $f(\boldsymbol{b})$ 的宽度参数为 $\sigma = 40$ nm 和 100 nm 时，根据公式（13）得出的预测结果。由于在集成光学装置中，预计光束指向波动可以忽略不计，因此我们根据空间原子波包的热展宽估算了这些参数。在这种情况下，对于经典谐振子，可以通过关系式 $m_a\omega_r^2\sigma^2/2 = k_B T/2$ 推导出 σ，其中m_a 是离子的质量，而T是其温度。利用这一表达式，我们得到了上述宽度σ，对应于一种现实的

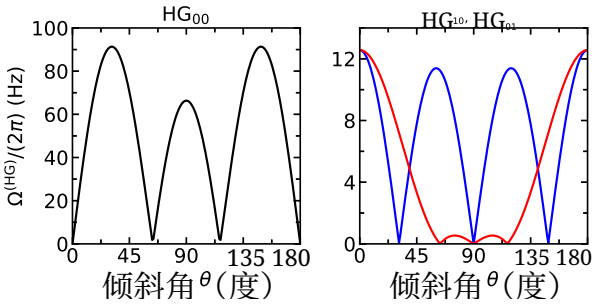

图4 拉比频率(15) 随磁场倾斜角 θ 的变化：HG_{00} （黑线）和 HG_{10} （蓝线）模式沿x方向线偏振，以及 HG_{01} （红线）模式沿y方向线偏振。原子位于光束中心（$b = 0, \sigma = 0$）。其他参数均与图2相同。

囚禁频率为 $\omega_r = 2\pi \times 600$ kHz，温度$T = T_{\mathrm{Doppler}} = 0.5$ mK，对应于多普勒冷却极限；以及$T = 3.1$ mK。在后续关于光移的讨论中，我们还将考虑较小的宽度 $\sigma = 10$ nm，这对应于被囚禁 Yb^+ 离子的量子力学基态波函数尺寸。我们看到，对于高斯光束，激发概率$W^{(HG_{00})}{}_x$对目标尺寸的变化不敏感。这是可以预料的，因为高斯光束尺寸 $\approx 3\ \mu$m远大于此处考虑的任何宽度参数。因此，HG_{00} 模式的强度和相位在目标的整个分布范围内几乎保持不变。在这种情况下，激发概率呈现出众所周知的平面波行为 [11],，在角度 $\theta = 31°$、$90°$ 和 $149°$ 处达到最大值。

对于 HG_{10} 和 HG_{01} 模式，可以观察到$W_x^{(\mathrm{HG})}$的另一种变化规律。在这两种情况下，原子的离域可能会影响激发概率；然而，只有当靶标非常大时，这种影响才会显著，即 $\sigma \approx 100$ nm。这种对 σ 的依赖性源于 HG_{10} 和 HG_{01} 光束电场分布的不均匀性。此外，它们复杂的内部结构也会影响跃迁概率对 θ 的依赖性。例如，$W^{(HG_{10})}{}_x$ 在 $\theta = 0°$, $60°, 120°$ 和 $180°$ 处增强，这与高斯区域中观察到的情况大不相同。相比之下，$W^{(HG_{01})}{}_x$ 呈现出与$W^{(HG_{00})}{}_x$ 在定性上相似的 θ 依赖性，但受到强烈抑制，只有靶标较大时才能观察到。

图 3 显示了相同三种模式 HG_{00}, HG_{10}，和 HG_{01}，在沿 y 方向线偏振时的激发概率。如图所示，HG_{00} 和 HG_{10} 光束几乎不会诱导 $M_g = 0 \to M_e = 0$

版权声明将由出版商提供

跃迁，与磁场的倾斜角 θ 无关。E3 跃迁受到抑制，可以用对称性论证来解释。例如，针对平面波辐射和所关注的跃迁，文献 [11] 中基于离子态和入射光的对称性分析，对激发概率为零进行了详细讨论。当原子位于涡旋线 $b=0$ 上时，这种分析可扩展至 HG_{00} 和 HG_{10} 模式，但对于离域原子则不完全成立。尽管如此，对于后一种情况 $\sigma>0$，E3 跃迁的概率极小，因此在图 3 的左图和中图中无法观察到。相比之下，HG_{01} 激发在倾斜角较小和较大时均有可能发生，并且在 $\theta=0°$ 和 $180°$ 时最为显著。

3.2 拉比频率和光移

从图2和图3可以看出，对于完全局域的原子，$b=0$ 和 $\sigma=0$得到的结果，与在多普勒温度下、$\sigma=40\,\mathrm{nm}$时公式（13）的预测仅有微小差异。因此，我们认为，在未来实验的分析中可以忽略原子空间展布的影响；在这些实验中，目标的尺寸远小于束腰。如上所述，计划在 PTB 开展的研究便属于这种情况，其中集成光学方案提高了激光束相对于离子的指向稳定性。完全局域原子的近似使我们能够推导出拉比频率的简单解析表达式：

$$\Omega^{(\mathrm{HG})}=\frac{ec}{\hbar}\left|\mathcal{M}^{(\mathrm{HG})}_{M_eM_g}(b=0)\right|. \tag{14}$$

事实上，利用公式（10）和（14），对于由各种线偏振厄米-高斯模式诱导的 $|F_g=0,M_g=0\rangle+\gamma\rightarrow|F_e=3,M_e=0\rangle$ $E3$ 跃迁，我们得到：

$$\Omega_x^{(\mathrm{HG}_{00})}\approx\sqrt{\frac{6P}{\hbar\omega k^2w_0^2\tau}}\left|\sin\theta(5\cos^2\theta-1)\right|, \tag{15a}$$

$$\Omega_x^{(\mathrm{HG}_{10})}\approx 2.7\sqrt{\frac{3P}{\hbar\omega k^4w_0^4\tau}}\left|\cos\theta(15\cos^2\theta-11)\right|, \tag{15b}$$

$$\Omega_y^{(\mathrm{HG}_{01})}\approx 2.7\sqrt{\frac{3P}{\hbar\omega k^4w_0^4\tau}}\left|\cos\theta(5\cos^2\theta-1)\right|, \tag{15c}$$

$$\Omega_y^{(\mathrm{HG}_{00})}=\Omega_y^{(\mathrm{HG}_{10})}=\Omega_x^{(\mathrm{HG}_{01})}\approx 0, \tag{15d}$$

其中，我们针对较小的开口角 θ_k，采用了由式（5）得到的贝塞尔振幅的傍轴近似。

在图 4 中，我们展示了针对第 3 节开头所述参数组计算得到的非零拉比频率 $\Omega^{(\mathrm{HG}_{00})}{}_x$、$\Omega^{(\mathrm{HG}_{10})}{}_x$ 和 $\Omega^{(\mathrm{HG}_{01})}{}_y$。我们看到，对于高斯模式和 $\theta=31°$ 或 $149°$，拉比频率可能达到 $\Omega^{(\mathrm{HG}_{00})}{}_x\approx 2\pi\times 90\,\mathrm{Hz}$；而对于 HG_{10} 和 HG_{01} 光束，其最大值为 $\Omega^{(\mathrm{HG}_{10})}{}_x=\Omega^{(\mathrm{HG}_{01})}{}_y\approx 2\pi\times 12\,\mathrm{Hz}$，且 $\boldsymbol{B}\parallel\boldsymbol{k}z$。将 $\Omega^{(\mathrm{HG}_{10})}$ 和 $\Omega^{(\mathrm{HG}_{01})}$ 与先前实验中使用的拉盖尔-高斯模式对应的拉比频率 [9] 进行比较同样很有意义。利用公式 (8) 及上述理论，我们得到 $\Omega^{(\mathrm{HG}_{10})}{}_x/\Omega^{(\mathrm{LG}_{01})}{}_x=\Omega^{(\mathrm{HG}_{01})}{}_y/\Omega^{(\mathrm{LG}_{01})}{}_y$，这表明，由 HG 模式诱导的 E3 跃迁激发概率是采用 LG 光时的两倍。此外，我们估计，在我们的光束参数和最佳激发几何条件下，置于 HG_{10} 或 HG_{01} 模式中心的 $^{171}Yb^+$ 离子所经历的光移范围为从 $\Delta\nu=50\,\mathrm{Hz}$ 到 8 Hz，当目标尺寸从 $\sigma=100\,\mathrm{nm}$ 变化到 40 nm 时 [30,33]。对于“量子力学”宽度 $\sigma=10\,\mathrm{nm}$，还可以实现约为 $\Delta\nu=0.5$ Hz 的更小光移。这些数值与 HG_{01} 模式的光移相当，并且远小于高斯光束在功率经过调节、以提供相似拉比频率时产生的 $\Delta\nu=205\,\mathrm{Hz}$。

4 结论与展望

在本文中，我们提出在光子集成电路中使用厄米-高斯模式来激发电偶极禁戒原子钟跃迁。为研究这一方案的可行性，我们对 HG 模式激发单个囚禁原子的过程进行了理论分析。通过将 HG 矢势表示为其在傍轴近似下写出的贝塞尔对应形式，我们推导出了光致跃迁拉比频率 $\Omega^{(\mathrm{HG})}$ 的简单解析表达式。这些表达式可用于分析 $\Omega^{(\mathrm{HG})}$ 对 HG 光束参数以及外磁场取向的依赖关系；外磁场用于定义目标离子的量子化轴。我们应用所建立的理论，研究了位于光束中心的 $^2S_{1/2}\rightarrow{}^2F_{7/2}$ E3 跃迁在 $^{171}Yb^+$ 离子中的情况。针对实验可行参数进行的计算，帮助我们确定了入射光偏振与磁场取向的最佳组合，可产生相当大的拉比频率。对于 HG_{10} 和 HG_{01} 模式，我们估算出 $\Omega^{(\mathrm{HG})}$ 处于数十 Hz 的范围，这可能超过在相同束腰和功率下此前使用的“标准”拉盖尔-高斯光的 $\Omega^{(\mathrm{LG})}$。这表明，厄米-高斯光束可作为研究高度禁戒原子跃迁的有效工具。

版权信息将由出版商提供

在本研究中，我们采用了一种“半经典”方法，即公式（13），以考虑目标离子相对于光束中心的离域效应。尽管预计该方法能够对拉比频率与实验几何构型以及入射厄米–高斯光束状态之间的依赖关系给出可靠的定性预测，但仍需将其与目标原子的质心运动经过量子化处理的全量子理论进行比较验证。此前，已有研究针对暴露于驻波电磁波中的原子靶标开展了类似研究 [13]。采用含时密度矩阵方法的全量子分析 [34] 目前正在进行中，相关结果将在后续发表的论文中予以介绍。

基于我们的理论分析，我们提出了一种基于 Yb^+ 离子八极跃迁的光子集成电路（PIC）频率基准，可用于基于 PIC 的光学钟。与现有装置相比，这种光学钟的体积将缩小数个数量级，同时功耗更低、指向稳定性更高，因此非常适合实验室之外的应用，包括深空导航和大地测量。作为这一方向上的首次实验，我们计划在“芯片时钟”装置中使用*x*偏振 HG_{10} 或*y*偏振 HG_{01} 模式。为实现最低的光频移，我们计划使用 $^{173}Yb^+$ 运行该光学钟；这种方案可提供大 10 倍的跃迁矩阵元，从而使其钟跃迁上的光移降低 100 倍[30,35]。由于原子跃迁的线宽仍窄于激光线宽，抑制因子还可能根据激光噪声谱进一步增大。

致谢

本研究由德国研究基金会（DFG，德国研究基金会）资助，项目编号为 445408588（SU 658/5-1），并获德国卓越战略项目 EXC-2123 QuantumFrontiers-3908379 资助。

本研究还获得马克斯·普朗克—理化技术研究院—RIKEN 时间、常数与基本对称性中心的支持。感谢 C.-F. Grimpe 就集成光学开展讨论。

参考文献

[1] R.Heintzmann、M. G. L. Gustafsson，《自然》Photon.**2009**，*3*，362。[2] M. Padgett、R. Bowman，《自然》Photon.**2011**，*5*，343。[3] M. F. Andersen、C. Ryu、P. Cladé、V. Natarajan、A. Vaziri、K. Helmerson、W. D. Phillips，《Phys. Rev. Lett.》**2006**，*97*，170406。

[4] J. Wang, J. Yang, I. M. Fazal, N. Ahmed, Y. Yan, H. Huang, Y. Ren, Y. Yue, S. Dolinar, M. Tur, A. E. Willner, 《自然·光子学》2012, 6, 488.[5] M. Krenn, M. Huber, R. Fickler, R. Lapkiewicz, S. Ramelow, A. Zeilinger, Proc. Natl Acad. Sci. 2014, 111, 6243.[6] H. Rubinsztein-Dunlop 等, J. Opt. 2017, 19, 013001.[7] Y. Shen, X. Wang, Z. Xie, C. Min, X. Fu, Q. Liu, M. Gong, X. Yuan, LightSci. Appl. 2019, 8, 90.[8] C. T. Schmiegelow, J. Schulz, H. Kaufmann, T. Ruster, U. G. Poschinger, F. Schmidt-Kaler, Nat. Commun. 2016, 7, 12998.[9] R. Lange, N. Huntemann, A. A. Peshkov, A. Surzhykov, E. Peik, Phys. Rev. Lett. 2022, 129, 253901.[10] M. Solyanik-Gorgone, A. Afanasev, C. E. Carlson, C. T. Schmiegelow, F. Schmidt-Kaler, J. Opt. Soc. Am. B 2019, 36, 565.[11] S. A.-L. Schulz, A. A. Peshkov, R. A. Müller, R. Lange, N. Huntemann, Chr. Tamm, E. Peik, A. Surzhykov, Phys. Rev. A 2020, 102, 012812.[12] A. B. Mundt, A. Kreuter, C. Becher, D. Leibfried, J. Es- chner, F. Schmidt-Kaler, R. Blatt, Phys. Rev. Lett. 2002, 89, 103001.[13] A. R. Vasquez, C. Mordini, C. Vernière, M. Stadler, M. Malinowski, C. Zhang, D. Kienzler, K. K. Mehta, J. P. Home, Phys. Rev. Lett. 2023, 130, 133201.[14] K. K. Mehta, C. D. Bruzewicz, R. McConnell, R. J. Ram, J. M. Sage, J. Chiaverini, Nature Nanotech. 2016, 11, 1066. [15] K. K. Mehta, C. Zhang, M. Malinowski, T.-L. Nguyen, M. Stadler, J. P. Home, 《自然》2020, 586, 533. [16] R. J. Niffenegger, J. Stuart, C. Sorace-Agaskar, D. Kha- ras, S. Bramhavar, C. D. Bruzewicz, W. Loh, R. T. Max- son, R. McConnell, D. Reens, G. N. West, J. M. Sage, J. Chiaverini, 《自然》2020, 586, 538.[17] M. Babiker, D. L. Andrews, V. E. Lembessis, J. Opt. 2019, 21, 013001.[18] B. A. Knyazev, V. G. Serbo, Phys.-Usp. 2018, 61, 449.[19] A. Surzhykov, D. Seipt, V. G. Serbo, S. Fritzsche, Phys. Rev. A 2015, 91, 013403.[20] M. E. Rose, 《角动量基础理论》，约翰·威立父子出版公司，纽约，1957 年.[21] A. Afanasev, C. E. Carlson, C. T. Schmiegelow, J. Schulz, F. Schmidt-Kaler, M. Solyanik, New J. Phys. 2018, 20, 023032.[22] B. Baghdasaryan, B. Böning, W. Paufler, S. Fritzsche, Phys. Rev. A 2019, 99, 023403.[23] D. L. Andrews、M. Babiker 编，《光的角动量》，剑桥大学出版社，剑桥，2013 年.[24] G. J. Gbur，《奇异光学》，CRC出版社，博卡拉顿，佛罗里达州，2017 年.[25] M. Fox，《量子光学：导论》，牛津大学出版社，牛津，2006 年.[26] S. A. Akhmanov, S. Yu. Nikitin，《物理光学》，克拉伦登出版社，牛津，1997 年。

版权信息将由出版商提供

[27] V. A. Dzuba,V. V. Flambaum, M. S. Safronova, S. G. Porsev, T. Pruttivarasin, M. A. Hohensee, and H. Häffner, Nature Phys. **2016**, *12*, 465.[28] C. Sanner, N. Huntemann, R. Lange, Chr. Tamm, E. Peik, M. S. Safronova, S. G. Porsev, 《自然》**2019**,*567*, 204.[29] L. S.Dreissen, C.-H. Yeh, H. A. Fürst, K. C. Grense- mann, T. E. Mehlstäubler, Nat. Commun. **2022**, *13*, 7314.[30] R.Lange, A. A. Peshkov, N. Huntemann, Chr. Tamm, A. Surzhykov, E. Peik, Phys. Rev. Lett. **2021**, *127*, 213001. [31] R.V. Popov, A. V. Maiorova, Opt. Spectrosc. **2017**, *122*, 366.[32] M. Auzinsh, D. Budker, S. M. Rochester, 《光学偏振原子：理解光与原子相互作用》, 牛津大学出版社, 牛津**2010**.[33] W. M. Itano, J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol. **2000**,*105*, 829.[34] A. A. Peshkov, Y. M. Bidasyuk, R. Lange, N. Hunte- mann, E. Peik, A. Surzhykov, Phys. Rev. A **2023**, *107*, 023106.[35] V. A. Dzuba,V. V. Flambaum, Phys. Rev. A **2016**, *93*, 052517.

版权声明行将由出版商提供。