arXiv:2305.04535v1 [math.CO] 8 May 2023

关于维数为二的 Cohen-Macaulay偏序集与置换图

Rizwan Jahangir 和 Dharm Veer

Abstract. 我们刻画了维数为二的 Cohen-Macaulay偏序集；它们恰好是可剖分且强连通的维数为二的偏序集。我们还给出了这些偏序集的组合描述。利用二维偏序集的余可比图是置换图这一事实，我们刻画了 Cohen-Macaulay置换图。

1. Introduction

Cohen-Macaulay偏序集的概念最早由 Baclawski 在其论文中定义 [Bac76] ，采用纯组合学的方式（参见 [Bac80，第 3] 节）。Reisner [Rei76] 和 Stanley [Sta75a] 独立地给出了 Cohen-Macaulay偏序集的环论定义；Reisner [Rei76，定理1] 证明了这两种定义等价。Stanley [Sta75b] 利用 Reisner 的结果证明了球面的上界猜想。这标志着 Stanley-Reisner理论的开端，它作为桥梁连接了组合学、交换代数和拓扑学。

本文旨在刻画维数为二的 Cohen-Macaulay偏序集；事实上，我们证明它们是可剖分的且强连通。偏序集P 的线性扩张 π 是底集 P 上的一个线性序，并且只要 $x \leq y$ 在 P中，就有 $x \leq y$ 在 π 中。若偏序集 P是线性扩张 π_1、.....、 π_d的交，也就是说，对所有 $1 \leq i \leq d.$ ，$x \leq y$在 P中当且仅当 $x \leq y$ 在 π_i中。偏序集 P 的维数是满足以下条件的最小整数 d： P可以表示为 d 个线性扩张 P的交。偏序集的维数由 Dushnik 和 Miller [DM41]定义。

如果一个偏序集的序复形在域 K 上是 Cohen-Macaulay 的 K （定义见第 2节），则称该偏序集在域上是 Cohen-Macaulay 的。类似地，如果一个偏序集的序复形是可剖分的（分别为强连通），则称该偏序集是可剖分的（分别为强连通）。已知，可剖分偏序集在任意域上都是 Cohen-Macaulay 的 [BH93，定理 5.1。13], 而 Cohen-Macaulay 偏序集是强连通的（见 [Bj¨o95，命题 11。7]）。

设 P 为一个偏序集。若 P 中任意两个不同元素均不可比，则称 P 为一个反链。对于 $p \in P$， p 的高度是 P的诱导子偏序集的秩，该诱导子偏序集由所有满足 $q \leq p$的 $q \in P$组成。在本文中，我们证明如下：

定理 1. 设 P 为一个维数为二的有限偏序集。则以下各项等价：

(1) P 是可剖分的。(2) P 是Cohen-Macaulay的。(3) P 是强连通的。(4) P 是一个反链，或者 P 是纯的，并且对于所有 $0 \leq i \leq rank（P）-1$，由 P 中高度为 i 和高度为 $i+1$ 的元素组成的诱导子偏序集是连通的。

我们利用定理 1 刻画 Cohen-Macaulay置换图。证明基于以下事实： [GRU83，定理 1] 置换图是一个维数至多为二的偏序集的余可比图，并且偏序集的序复形的 Stanley-Reisner理想

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：06A07；次要分类号：05E40。
Key words and phrases. 偏序集的维数、Cohen-Macaulay偏序集、可剖分偏序集、置换图。DV获得了IIT Gandhinagar的资助，并部分获得了Infosys基金会奖学金的资助。

与其余可比图的边理想相同。第 2节介绍定义与预备知识。定理的证明见第 3节。

致谢。该项目始于第二作者访问土耳其萨班哲大学的 Ayesha Asloob Qureshi 期间，他感谢她的热情款待。两位作者都感谢她进行的几次富有帮助的讨论。

2. Preliminaries

本文中，所有偏序集均为有限集，所有图均为简单有限图。

设 K 是一个域， Δ 是一个有限单纯复形。对于 Δ 的一个面 σ，定义 Δ 中 σ 的链接，记作 link(Δ,σ)，为子复形 $\{\tau \in \Delta\colon \tau\cup\sigma \in \Delta, \tau\cap\sigma = \varnothing\}$. 如果对于 Δ 的每个面 σ，都有 H_i(link(Δ,σ) K) $=0$，且对所有 $i <$ dim(link(Δ,σ))，则称单纯复形 Δ 在 K 上是 Cohen-Macaulay。这里，H_i(K) 是具有 K 中系数的第 i 个约化同调群。Reisner [Rei76, Theorem 1] 证明了： Δ 在 K 上是 Cohen-Macaulay，当且仅当与 Δ （在 K 上）相关联的斯坦利-雷纳环是 Cohen-Macaulay。

设 P 是一个偏序集。对于 x、$y \in P$，若 $x < y$ 且不存在满足 $x < z < y$ 的 $z \in P$，则称 y 覆盖 x，记作 $x \lessdot y$。 P 的链 C 是 P 的一个全序子集。 P 的链 C 的长度为 $\#C-1$，其中 $\#C$ 是 C 的基数。 P 的秩记作 rank(P)，它是 P 中各链长度的最大值。若 P 的所有极大链长度相同，则称该偏序集为纯偏序集。 P 的诱导子偏序集 Q 是定义在底集 P 的一个子集上的偏序集，满足对于任意 x、$y \in Q$，$x \le y$ 属于 Q 当且仅当 $x \le y$ 属于 P。偏序集 P 的序复形 $\Delta(P)$ 是以 P 的底集为顶点集的单纯复形，其面为 P 的链。

设 P 和 Q 是定义在不交集合上的两个偏序集。偏序集 P 和 Q 的不交并是定义在集合 $P\cup Q$ 上的偏序集 $P+Q$，其序关系如下：若 x、$y \in P+Q$，则当且仅当 x、$y \in P$ 且 $x \le y$ 属于 P，或 x、$y \in Q$ 且 $x \le y$ 属于 Q 时， $x \le y$。可以写成两个偏序集的不交并的偏序集称为不连通；否则称为连通。

设 P 是一个纯偏序集， $\Delta(P)$ 是其序复形。若对 P 的任意两条极大链 γ 和 γ'，都存在一列 σ_0、σ_1、……、σ_k 的极大链，使得 $\sigma_0 = \gamma$、 $\sigma_k = \gamma'$，且 $\sigma_i \cap \sigma_{i+1}$ 是一条长度为 rank(P) -1 的链，则称 $\Delta(P)$ 是强连通的。已知 Cohen-Macaulay 复形是强连通的（见 [Bj¨o95，命题 11.7]）。

序复形 $\Delta(P)$ 称为 可剖分的，如果 P 的极大链可以排成线性序γ_0、……、γ_m，使得对所有 $1 \le j < i \le m$，存在一个 $v \in \gamma_i \setminus \gamma_j$ 以及某个 $k \in [i-1]$ 满足$\gamma_i \setminus \gamma_k = \{v\}$。满足此定义的线性序称为 剖分序 于 P。可剖分复形在任意域上都是 Cohen-Macaulay 的 [BH93，定理 5.1。13]。

偏序集 P 的余可比图 G 是一个以 P 的底集为顶点集的图，使得当且仅当 x 和 y 在 P 中不可比时，$\{x,y\}$ 是 G 的一条边。若一个图是某个偏序集的余可比图，我们就称它为余可比图。

设 l_0，……，l_k 是若干条水平线，每条线从左到右标记为 $[n] =\{1,\dots,n\}$ 的置换。对于每个 $i \in [n]$，曲线 f_i 由 k 条直线段组成，这些线段将 i 上的 l_r 与 i 中的 l_{r+1} 相连，其中 $0 \le r \le k-1$。当 $k=1$ 时，这样的图称为置换图。当 $k \ge 2$ 时，它称为 k 个置换图的串接。图 1 给出了 $n=4$ 的两个置换图串接的示例。

由交图 G 个置换图串接构成的 k 是一个以 $[n]$ 为顶点集的图，其中 $\{i,j\}$ 是 G 的一条边，当且仅当 f_i 与 f_j相交。Golumbic 等人 [GRU83 的定理 1] 证明，一个图是余可比图，当且仅当它是 k 个置换图串接的交图。

如果一个图 G 是某个置换图示（即 $k=1$）的交图，则称它为置换图。注意，偏序集的维数不超过二，当且仅当其余可比图是置换图。此外，根据定义，偏序集的维数为一，当且仅当它是线性序。

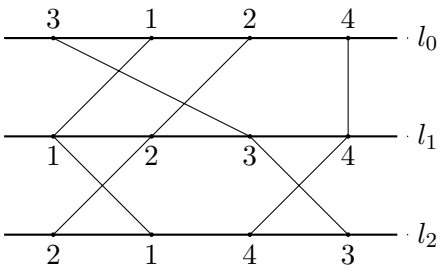


FIGURE 1. 两个置换图的拼接

3. PROOF OF THE THEOREM 1

对于（1） $\Longrightarrow$ （2），见 [BH93，定理 5.1。13], 而（2） $\Longrightarrow$ （3）可由 [Bj¨o95，命题 11 推得。7]对于（3） $\Longrightarrow$ （4），我们将在下面的引理中证明该定理的一个更一般的结论。

引理3.1. 设 P 是一个强连通偏序集。那么 P 是一个反链，或者对于所有 $0 \leq i \leq$，满足秩(P) -1 的情形，由高度为 i 和高度为 $i+1$ 的元素组成的 P 的诱导子偏序集是连通的。

证明. 显然，反链是强连通的。因此我们可以假设秩(P) ≥ 1。我们用反证法。固定一个满足 $0 \leq i \leq$ 秩(P) -1 的 i，使得由高度为 i 和高度为 $i+1$ 的元素组成的 P 的诱导子偏序集Q 是不连通的。设 Q 是两个子偏序集 Q_1 和 Q_2的不交并。由于 P 是纯的， P 的每条极大链都包含一个高度为 i 的元素和一个高度为 $i+1$的元素。因此，对于所有 $j=1$， 2， Q_j 至少包含一个高度为 i 的元素和至少一个高度为 $i+1$ 的元素。

设 m_1 和 m_2 是 P 的两条极大链，使得 $m_1 \cap Q_2 = \emptyset$ 和 $m_2 \cap Q_1 = \emptyset$ （这里，$\cap$ 表示集合论交集）。由于 P 是强连通的，存在一个序列σ_0、σ_1、.....、σ_k，由极大链组成，使得 $m_1 = \sigma_0$、 $m_2 = \sigma_k$，且对所有 $0 \leq j \leq k-1$， $\sigma_j \cap \sigma_{j+1}$都是长度为 rank$(P)$ -1 的链。令 l 为满足 $\sigma_l \cap Q_2 \neq \emptyset$的最小整数。由于根据 l 的选取有$\sigma_{l-1} \cap Q_2 = \emptyset$，且 $\sigma_{l-1} \cap \sigma_l$ 是长度为 rank(P) -1的链，因此我们得到$\sigma_l \cap Q_2$ 是一个单元素集，记作 $\{a\}$。首先，假设 a 在 P中的高度为 $i+1$。令 $b \in \sigma_l$ 满足 $b \lessdot a$。由于 P 是纯的， b 在 P中的高度为 i。此外，由于 $\sigma_l \cap Q_2 = \{a\}$，有 $b \notin Q_2$；因此 $b \in Q_1$，这就产生了矛盾。对于 a 在 P中的高度为 i 的情形，可作类似论证。至此，定理得证。□

现在，本节的目的是证明定理 1 的 (4) $\Longrightarrow$ (1)。设 τ 是 $[n]$ 上的一个置换。 τ 按如下方式给出 $[n]$ 上的一个线性序：对于 $i,j \in [n], i<j$，若存在 $a,b \in [n]$，使得 $a<b$ 属于 $\mathbb{N}$，且 $\tau(a)$ $=i$ 并且 $\tau(b)$ $=j$，则 i。术语滥用地说，我们称置换 τ 为一个线性序。我们将 τ 写作 $[\tau_1,\ldots,\tau_n]$，其中对于所有 $a \in [n]$， $\tau_a := \tau(a)$。注意，对于任意 $a,b \in [n]$， $\tau_a < \tau_b$ 属于 τ 当且仅当 τ_b 在 τ 中位于 τ_a 的右侧。对于两个置换 σ 和 τ， $P_{\sigma,\tau}$ 表示 σ 与 τ 的交所得到的偏序集。我们从一个观察开始：维数为二的偏序集同构于一个由恒等置换与另一个置换的交所得到的偏序集。

命题 3.2. 设 σ 和 τ 是 $[n]$ 上的两个置换。那么，存在一个置换 π 使得 $P_{\sigma,\tau} \simeq P_{\mathrm{id},\pi}$，其中 id 是恒等置换。

证明。令 $\pi = \sigma^{-1}\tau$。定义一个映射 $\varphi : P_{\mathrm{id},\pi} \to P_{\sigma,\tau}$，使得 $\varphi(j) = \sigma(j)$。显然， φ 定义良好，且它是一个双射。只需证明 $i<j$ 在 $P_{\mathrm{id},\pi}$ 中，当且仅当 $\sigma(i) < \sigma(j)$ 在 $P_{\sigma,\tau}$中。

假设 $i<j$ 属于 $P_{\mathrm{id},\pi}$，即 $i<j$ 属于 $\mathbb{N}$，且存在 $a,b \in [n]$，使得 $a<b$ 满足$\pi(a) = i$ 且 $\pi(b) = j$。显然， $\sigma(i) < \sigma(j)$ 属于 σ。此外，我们有 $\pi(a) = \sigma^{-1}\tau(a) = i$；因此$\tau(a) = \sigma(i)$。类似地， $\tau(b) = \sigma(j)$。所以， $\tau(a) = \sigma(i) < \sigma(j) = \tau(b)$ 属于 τ。因此， $\sigma(i) < \sigma(j)$ 属于$P_{\sigma,\tau}$。

反过来，假设 $\sigma(i) < \sigma(j)$ 属于 $P_{\sigma,\tau}$，即 $i < j$ 属于 $\mathbb{N}$，且存在 $a, b \in [n]$，使得 $a < b$ 满足 $\tau(a) = \sigma(i)$ 且 $\tau(b) = \sigma(j)$。因此，$\sigma^{-1}\tau(a) = i$ 且 $\sigma^{-1}\tau(b) = j$。所以 $i < j$ 属于 π。因此，$i < j$ 属于 $P_{\mathrm{id},\pi}$。□

例 3.3. 下面举例说明上述命题。设 $\sigma = [2,3,1,4,5]$ 和 $\tau = [3,2,1,5,4]$ 是两个置换。那么，$P_{\sigma,\tau}$ 如图 2a 所示。设 $\pi = \sigma^{-1}\tau$。注意，$\pi = [2,1,3,5,4]$ 和 $P_{\mathrm{id},\pi}$ 如图 2b 所示。此外，显然，$j \mapsto \sigma(j)$ 是从 $P_{\mathrm{id},\pi}$ 到 $P_{\sigma,\tau}$ 的一个同构。□



(a) $P_{\sigma,\tau}$ (b) $P_{\mathrm{id},\pi}$

FIGURE 2

定义 3.4. 设 P 是一个维数为二的偏序集。通过重新标记，不妨设 P 是集合 $[n]$ 上的偏序集。因此，P 可写成两个置换的交，例如 σ 和 τ。根据命题 3.2，存在一个置换 π，使得 $P \simeq P_{\mathrm{id},\pi}$，其中 $P_{\mathrm{id},\pi}$ 是恒等置换与 π 的交所成的偏序集。我们将 $P_{\mathrm{id},\pi}$ 记作 P_π。□

定理 1 $\Longrightarrow$ (1) 的 （4）的证明思路受到 [Joj04] 的启发。设 P_π 是定义 3.4 中所定义的偏序集3.4。对于 $0 \le i \le \mathrm{rank}(P_\pi)$，令 P_i 为 i 中所有高度为 P_π 的元素组成的集合。对于所有 i，定义线性序 $<_i$ 于 P_i 如下:

$$x <_i y \text{ if and only if } x > y \text{ in } \mathbb{N}.$$

对于 $x \in P_\pi$，令 $U(x)$ 为 P_π 中所有覆盖 x 的元素所组成的集合。若 $x \in P_i$，则当 P_π 为纯偏序集时，对于所有 $y \in U(x)$，都有 $y \in P_{i+1}$。对于 $x \in P_\pi$，定义 $x_{\min} := \min(U(x))$ 和 $x_{\max} := \max(U(x))$。

根据 P_π 和线性序 $<_i$ 的定义，我们可以直接得到以下几点观察。

观察 3.5。设 P_π 为纯偏序集。我们有

(1) 若 $x <_i y$ 属于 P_i，则 π 具有 $[\ldots, x, \ldots, y, \ldots]$ 的形式，因为 x 和 y 在 P_π 中不可比较，且 $x > y$ 属于 $\mathbb{N}$。(2) 若对于某些 x、$y \in P_\pi$，有 $y \in U(x)$，则 $x < y$ 属于 $\mathbb{N}$。此外，y 位于 π 中 x 的右侧。(3) 若对于某些 $x \in P_{i-1}$ 和 $y \in P_i$，有 $x_{\min} <_i y <_i x_{\max}$，则 $y \in U(x)$。事实上，由 (1) 和 (2) 可知，π 具有 $[\ldots, x, \ldots, x_{\min}, \ldots, y, \ldots, x_{\max}, \ldots]$ 的形式。此外，注意到 $x < x_{\max}$ 属于 $\mathbb{N}$，因为 $x_{\max} \in U(x)$；因此 $x < y$ 属于 $\mathbb{N}$。所以，$y \in U(x)$。□

引理 3.6. 设 P_π 是满足定理 1 的 (4) 的偏序集。设 $[x, y]$ 是 P_π 中的一个区间，使得 $\mathrm{height}(x) = i$，$\mathrm{height}(y) = j$ 且 $j - i \ge 2$。设 $x = y_i \lessdot y_{i+1} \lessdot \cdots \lessdot y_j = y$ 是 $[x, y]$ 中的一条链，使得对于所有满足 $i < k < j$ 的 k，都存在一个 $x_k \in [x, y]$，$x_k \lessdot_k y_k$。那么，存在某个整数 k'，$i < k' < j$，使得 $y_{k'-1} \lessdot x_{k'} \lessdot y_{k'+1}$。

证明. 首先，我们断言如下：若对于某个 x，$x \lessdot_l y$ 属于 P_l，$y \in P_l$ 且 $0 \le l \le \mathrm{rank}(P_\pi) - 1$，则 $y_{\min} \le_{l+1} x_{\max}$ 属于 P_{l+1}。

假设该断言成立。如果 $j - i = 2$，那么我们可以取 $k' = i + 1$。现在假设 $j - i > 2$。考虑 x_{i+1}。如果 $x_{i+1} \lessdot y_{i+2}$，那么我们可以取 $k' = i + 1$。否则，如果 $x_{i+1} \not\lessdot y_{i+2}$，那么根据该断言，$y_{i+1} \lessdot x_{i+2}$。现在考虑 x_{i+2}。如果 $x_{i+2} \lessdot y_{i+3}$，那么我们可以取 $k' = i + 2$。否则，如果 $x_{i+2} \not\lessdot y_{i+3}$，那么根据该断言，$y_{i+2} \lessdot x_{i+3}$。照此继续，并利用情形 $j - i = 2$，我们便得到所需的 $x_{k'}$，从而完成证明。

现在我们证明该断言。反设存在一个 $l \in \{0,1,\ldots,$秩$(P_\pi)-1\}$ 以及 $x,y \in P_l$，使得 $x \lessdot_l y$ 属于 P_l，且 $x_{\max} <_{l+1} y_{\min}$ 属于 P_{l+1}。我们证明，由 P_l 和 P_{l+1} 组成的 P_π 的诱导子偏序集 Q 是不连通的。

定义

$$Q_1 = \{p \in P_\pi : \text{either } p \in P_l \text{ and } p \leq_l x \text{ or } p \in P_{l+1} \text{ and } p <_{l+1} y_{\min}\}$$

and

$$Q_2 = \{p \in P_\pi : \text{either } p \in P_l \text{ and } y \leq_l p \text{ or } p \in P_{l+1} \text{ and } y_{\min} \leq_{l+1} p\}.$$

我们证明，Q 是子偏序集 Q_1 和 Q_2的不交并。假设 Q_1 与 Q_2之间存在一条边。那么，要么存在一个 $x' <_l x$满足 $y_{\min} \leq_{l+1} x'_{\max}$，要么存在一个 $y' \in P_l$ 满足 $y <_l y'$ 和 $y'_{\min} <_{l+1} y_{\min}$。我们分别考虑这两种情况:

(i) 存在一个 $x' <_l x$ 满足 $y_{\min} \leq_{l+1} x'_{\max}$。于是，$x < x'$、$x'_{\max} \leq y_{\min}$ 属于 $\mathbb{N}$。利用观察 3.5，我们得到 π具有形式 $[\ldots,x',\ldots,x,\ldots,x_{\max},\ldots,y_{\min},\ldots,x'_{\max},\ldots]$；事实上，根据观察 3.5 的（1），$x$ 在 π 中位于 x' 右侧；根据观察 3.5 的（2），$x_{\max}$ 在 π 中位于 x 右侧；而 $x_{\max}$、$y_{\min}$、$x'_{\max}$ 的位置由观察 3.5 的（1）给出。根据观察 3.5 的（2），$x' < x'_{\max}$ 属于 $\mathbb{N}$。由于 $x < x' < x'_{\max}$ 属于 $\mathbb{N}$，且$x'_{\max}$ 在 π中位于 x 右侧，我们得到 $x'_{\max} \in U(x)$。这就构成了矛盾。

(ii) 存在一个 $y' \in P_l$ 满足 $y <_l y'$ 且 $y'_{\min} <_{l+1} y_{\min}$。于是，$y' < y$，$y_{\min} < y'_{\min}$ 在 $\mathbb{N}$中。利用观察 3.5，π具有如下形式：$[\ldots,y,\ldots,y',\ldots,y'_{\min},\ldots,y_{\min},\ldots]$。注意，$y'_{\min}$在 y 中的右侧 π。此外，注意到$y < y'_{\min}$在 $\mathbb{N}$ 中，因为$y \leq y_{\min} \leq y'_{\min}$ 在 $\mathbb{N}$中。因此$y'_{\min} \in U(y)$，这就产生了矛盾。至此，该断言得证。□

We are now ready to prove (4) $\Longrightarrow$ (1) of our main theorem.

证明 (4) $\Longrightarrow$ (1)。根据定义 3.4，只需对偏序集 P_π证明结论，其中P_π 的定义见定义 3.4。设 P_π 是一个秩为 r 且满足（4）的偏序集。如果$\pi = [n, n-1, \ldots, 1]$，那么 P_π是一个反链。因此，反链的维数为二。根据可剖分性的定义，反链是可剖分的。因此，我们可以假设 P_π 不是反链。

考虑置换 $\pi' = [0, \pi, n+1]$ 作用于 $n+2$ 个元素上。那么，$P_{\pi'} = P_\pi \cup \{0, n+1\}$，其中 0 和 $n+1$ 分别是 $P_{\pi'}$ 的最小元和最大元。注意，$P_{\pi'}$ 是秩为 $r+2$ 的纯偏序集，并满足（4）的假设。由于可剖分偏序集的每个区间也是可剖分的 [BW83，命题 8。2]，我们可以用 π 替换 π'。

设 C：$x_0 \lessdot x_1 \lessdot \cdots \lessdot x_{r+2}$ 和 C'：$y_0 \lessdot y_1 \lessdot \cdots \lessdot y_{r+2}$ 是 P_π 的两条极大链。注意，$x_0 = y_0 = 0$ 和 $x_{r+2} = y_{r+2} = n+1$。设 $j' = \max\{i \in [r+2] : x_i \neq y_i\}$。在 P_π 的极大链上定义线性序 $<_E$ 如下:

$$C <_E C' \text{ if and only if } x_{j'} <_{j'} y_{j'}.$$

在上述记号下，假设 $C <_E C'$。令 $i' = \max\{i < j' : x_i = y_i\}$. 于是，$x_{i'} = y_{i'} \lessdot y_{i'+1} \lessdot \cdots \lessdot y_{j'+1} = x_{j'+1}$是 $[x_{i'}, y_{j'+1}]$中的一条极大链。我们分以下几种情况讨论:

（1）如果 $x_k <_k y_k$对所有 $i' < k < j'+1$均成立，则区间 $[x_{i'}, y_{j'+1}]$中的极大链 $x_{i'} = y_{i'} \lessdot y_{i'+1} \lessdot \cdots \lessdot y_{j'+1} = x_{j'+1}$满足引理 3.6的假设，即对所有 k，$i' < k < j'+1$存在一个 $z_k \in [x_{i'}, y_{j'+1}]$ 使得 $z_k \lessdot_k y_k$，因为 $<_k$是线性序，并且对所有k均成立。因此存在一个 k'，$i' < k' < j'+1$ 使得 $y_{k'-1} \lessdot z_{k'} \lessdot y_{k'+1}$ 根据引理 3.6成立。如果令

$$C'' : y_0 \lessdot y_1 \lessdot \cdots \lessdot y_{k'-1} \lessdot z_{k'} \lessdot y_{k'+1} \lessdot \cdots \lessdot y_{r+2},$$

则为 $C'' <_E C'$、$y_{k'} \in C' \setminus C$ 和 $C' \setminus C'' = \{y_{k'}\}$。

(2) 存在一个满足 $i' < k < j'+1$ 的 k，使得 $y_k <_k x_k$。令 $l = \max\{k : i' < k <_{j'+1}$ 和 $y_k <_k x_k\}$。首先，我们证明 $y_l < x_{l+1}$ 属于 P_π。根据 l 的选取，我们有 $x_{l+1} <_{l+1} y_{l+1}$；因此 $y_{l+1} < x_{l+1}$ 属于 $\mathbb{N}$。此外，$y_l < y_{l+1}$ 属于 P_π。于是 $y_l < y_{l+1} < x_{l+1}$ 属于 $\mathbb{N}$。在给定条件下，π 具有形式 $[\ldots,y_l,\ldots,x_l,\ldots,x_{l+1},\ldots,y_{l+1},\ldots]$。注意，$x_{l+1}$ 在 π 中位于 y_l 的右侧。因此，$y_l < x_{l+1}$ 属于 P_π。

现在考虑区间 $[y_l, y_{j'+1}]$。注意， $j'+1-l \geq 2$，因为 $x_{j'} <_{j'} y_{j'}$。此外，注意对所有 $l < k < j'+1$， $x_k \in [y_l, y_{j'+1}]$，因为 $y_l < x_{l+1}$ 属于 P_π，且根据 l 的选取， $x_k <_k y_k$。因此，对所有 k， $l < k < j'+1$，都存在一个 $z_k \in [y_l, y_{j'+1}]$，使得 $z_k \lessdot_k y_k$。因此，区间 $[y_l, y_{j'+1}]$ 中的极大链 $y_l \lessdot y_{l+1} \lessdot \cdots \lessdot y_{j'+1} = x_{j'+1}$ 满足引理 3.6 的假设。于是存在一个 k'， $l < k' < j'+1$，使得 $y_{k'-1} \lessdot z_{k'} \lessdot y_{k'+1}$。因此，我们可以重复 (1) 中的论证来完成证明。因此， $<_E$ 是 P_π的极大链上的一个壳序。这就完成了证明。 □

我们看到，定理 1 有助于刻画 Cohen-Macaulay置换图。设 G 是一个顶点集为 $[n]$的图。设 $S = K[x_1, \ldots, x_n]$ 是域 K上的多项式环。设$I_G = (x_i x_j : \{i, j\}$ 是 G的一条边)为 边理想 G。若 G 是 *Cohen-Macaulay* 的，当且仅当S/I_G 是 Cohen-Macaulay。

现在假设 G 是一个置换图。那么， G是由水平线 l_0 和 l_1构成的置换图示的交图。假设 l_0 和 l_1 分别由置换 π_0 和 π_1 标记。设 P 是 π_0 与π_1的交所构成的偏序集。根据 [GRU83，定理 1], ， P 的余可比图是 G ，且P 的维数至多为二。 P 的序复形的 Stanley-Reisner理想与 G 的边理想相同。因此，根据[Rei76，定理 1], ，可得 P 是 Cohen-Macaulay，当且仅当 G 是 Cohen-Macaulay。若 P 的维数为一，则 P 是线性序；因此， I_G 是平凡理想。于是 G 是 Cohen-Macaulay。当 P 的维数为二时，我们可以利用定理 1检验 G是否为 Cohen-Macaulay。因此， G 在任意域上都是 Cohen-Macaulay。

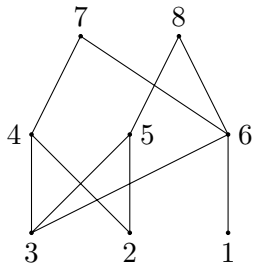


FIGURE 3

由 [Bj¨o95，命题 11。7] 和引理 3.1 可知，定理 1中的条件（4 ）是偏序集为 Cohen-Macaulay 的必要条件。在下面的例子中，我们将说明它并非充分条件。更确切地说，我们将说明，当偏序集的维数为 4 $\implies$ （2）和（4） $\implies$ （1）定理 1 中的条件可能不成立。 ≥ 3。

例 3.7。考虑图 3 所示的偏序集 P 。SageMath [Sage] 计算表明， P 的维数为三。事实上， P 是以下置换的交集： $[1, 3, 6, 2, 4, 7, 5, 8]$, $[2, 3, 4, 5, 1, 6, 7, 8]$ 和 $[3, 1, 2, 6, 5, 8, 4, 7]$。显然， P 满足定理 1 的条件 (4)。注意，link(Δ(P) $\{2\}$) $= \{\{4, 7\}, \{5, 8\}\}$，它~是不连通的。由于 dim(link(Δ(P) $\{2\}$)) $= 1$ 且 H_0(link(Δ(P) $\{2\}$) K) $= K$，因此 P不是 Cohen-Macaulay 的。因此， P 不可剖分。□

我们计算过的所有例子都表明，对于三维偏序集，可剖分性与 Cohen-Macaulay 性相一致。这一点以及定理 1促使我们提出以下问题：最小的 $d \in \mathbb{N}$ 是多少，使得存在一个维数为d 但不可剖分的 Cohen-Macaulay 偏序集?

REFERENCES

[Bac76] Kenneth Paul Baclawski。 *Homology and combinatorics of ordered sets*。1976年。博士学位论文（Ph.D.）– 哈佛大学。[Bac80] Kenneth Baclawski。Cohen-Macaulay 有序集。 *J. Algebra*，63(1):226–258，1980年。

[BH93] Winfried Bruns 和 J
¨ *Cohen-Macaulay rings* 39 *Cambridge Studies in Advanced* urgen *Mathematics* Herzog。《》，卷（）。剑桥大学出版社，剑桥，。[Bj¨o95] A. Bj¨orner。拓扑方法。载于 1993 *Handbook of combinatorics, Vol. 1*, 2，第 1819–1872 页。Elsevier Sci. B. V.，阿姆斯特丹，1995 年。[BW83] Anders Bj¨orner 和 Michelle Wachs。论字典序可剥层偏序集。 *Trans. Amer. Math. Soc.*, 277 1 323 341, 1983 ( ): – 。[DM41] Ben Dushnik 和 E. W. Miller。偏序集。 *Amer. J. Math.*, 63:600–610, 1941。[GRU83] Martin Charles Golumbic、Doron Rotem 和 Jorge Urrutia。可比图与交图。 *Discrete Math.*, 43(1):37–46, 1983。[Joj04] Du˘sko Joji´c。关于可剥层平面偏序集的一则注记。 *Novi Sad J. Math.*, 34(2):119–125, 2004。[Rei76] Gerald Allen Reisner。多项式环的 Cohen-Macaulay 商环。 *Advances in Math.*, 21 49, 1976 1 30( ): – 。[Sage] Sage开发团队。 *SageMath, the Sage Mathematics Software System (Version 9.2)*, 2020。https://www.sagemath.org。[Sta75a] Richard P. Stanley。Cohen-Macaulay环与可构造多胞体。 *Bull. Amer. Math. Soc.*, 81:133– 135, 1975。[Sta75b] Richard P. Stanley。上界猜想与 Cohen-Macaulay环。 *Studies in Appl. Math.*, 54 2 135 142, 1975 ( ): – 。

Sabanci University,
Faculty of Engineering and Natural Sciences, Orta Mahalle, Tuzla 34956,Istanbul, Turkey
Email address: rizwan@sabanciuniv.edu

Indian Institute of Technology Gandhinagar Palaj Gujarat 382355. India ,,
Chennai Mathematical Institute Siruseri Tamilnadu 603103. India
, ,*Email address*: dharm.v@iitgn.ac.in