arXiv:2305.04537v1 [math.AC] 8 May 2023

Hasse-Schmidt 代数的高阶导子

Paul Barajas

2023年5月9日

摘要

本文建立了 Hasse-Schmidt 代数的高阶导子模与基环的高阶导子模之间的关系。

关键词：Hasse-Schmidt 导数、Hasse-Schmidt 代数、高阶导子

目录

1 高阶导子与 Hasse-Schmidt 代数 3 1.1 Hasse-Schmidt 导数与 Hasse-Schmidt 代数 3 1.2 主要定理.4

2 定理 1.11 的证明 6
2.1 定理 1.11（1）的证明.6 2.2 定理 1.11（2）的证明.11 2.3 定理 1.11（3）的证明.15

3 $\Omega^{(m)}_{A/k} \otimes_{A_n} P_n$ 与 $\Omega^{(m)}_{A_n/k}$ 之间的映射 **20**

4 普适 Hasse-Schmidt 导子的公式与通常的偏导数 24

参考文献 27

引言

导子及其推广概念一直是交换代数中的重要研究对象，并进而成为代数几何、微分几何等领域的有力工具。由于高阶导子有不同的定义，自然会产生一个问题：它们之间是否存在联系（见 [18], [21], [19], [20]）。

在一项近期工作中，T. de Fernex 和 R. Docampo 展示了 Hasse-Schmidt 代数的导子与基环的导子之间的关系。其表述如下：

定理 1. *[9]* 设 $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$。设 k 为一个环，A 为一个 k-代数，且 $HS^n_{A/k}$ 为 A 在 k 上阶数为 n 的 Hasse-Schmidt 代数。设 M 为一个 $HS^n_{A/k}$-模。存在一个自然的 $HS^n_{A/k}$-模同构

$$\mathrm{Der}_k(HS^n_{A/k}, M) \simeq \mathrm{Der}_k(A, M \otimes_{HS^n_{A/k}} HS^n_{A/k}[t]/\langle t^{n+1}\rangle).$$

这一结果对喷射概形和弧空间有重要意义（见 [9]）。它在 Nash 爆裂理论中也有应用（见 [8]）。此外，定理 1 蕴含对偶对象之间的同构，即 K¨ahler 微分模之间的同构。Chiu 和 Narv´aez 也以 Hasse-Schmidt 微分模为主要工具研究了这一对偶版本（见 [6]）。

在本文中，我们继续探讨导子的不同推广之间的关系。H. Osborn 和 Y. Nakai 引入并研究了高阶导子（[23, 18]）。Osborn 和 Nakai 定义的高阶导子与 Grothendieck 在 [14] 中定义的微分算子有关。具体而言，高阶导子是常数项为零的微分算子。我们的主定理建立了 $HS^n_{A/k}$ 的高阶导子模与 A 的高阶导子模之间的关系。这个结果可视为定理 1 的高阶版本。

定理 2. 设 $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$。设 $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$。设 A 是一个 k-代数，且 M 是一个 $HS^n_{A/k}$-模。

(1) 存在一个自然的 $HS^n_{A/k}$-模同态

$$\phi_n : \mathrm{Der}^m_k(HS^n_{A/k}, M) \to \mathrm{Der}^m_k(A, M \otimes_{HS^n_{A/k}} HS^n_{A/k}[t]/\langle t^{n+1}\rangle).$$

(2) 设 $\mathbb{K}$ 是一个零特征域。假设 A 是有限生成的 $\mathbb{K}$-代数。那么 ϕ_n 是满射。

（3）一般来说， ϕ_n 并非单射。

与 $m = 1$ 阶的情形相反，我们发现，在 $m > 1$ 的情形下不存在同构。在前一种情形中，模的平凡扩张这一概念是证明同构的重要工具。后一种情形下不存在同构，很可能与缺乏一种适用于 m 阶导子的 m-平凡扩张概念有关。

近年来，许多作者研究了微分理论中经典结果的高阶版本。例如，人们引入了雅可比矩阵的高阶版本，用以研究有限生成代数的高阶 K¨ahler 微分模（见 [11]）。利用主部模刻画了某些环的正则性（见[1, 3]）。根据奇点集给出了高阶微分模 k-挠无挠性的刻画（见 [7]）。人们还引入了与主部模的秩相关的环的新数值不变量（见 [3]）。此外，这些代数结果也有几何方面的应用：高阶纳什爆破的 Nobile 型定理（见 [10, 12, 13, 2]）、对环面簇的高阶 Nash 爆裂的研究（见[5, 4]），以及复解析超曲面新不变量的引入（见 [15]）。本文也属于这系列近期研究。

下面介绍本文的内容。第 1 节回顾 Hasse-Schmidt 导数和高阶导子的概念，并介绍它们的一些基本性质。第 2 节证明定理 1。第 3 节探讨主定理对高阶微分模的影响。最后，第 4 节给出一个公式，联系高阶情形下的通常偏导数与泛 Hasse-Schmidt 导数。

全文中，我们始终考虑含幺交换环。

1 高阶导子与 Hasse-Schmidt 代数

1.1 Hasse-Schmidt 导数与 Hasse-Schmidt 代数

本节按照 [24] 回顾 Hasse-Schmidt 导数的定义及其一些基本性质。我们还介绍 T. de Fernex 和 R. Docampo 提出的定理，该定理将 Hasse-Schmidt 代数的导子与基环的导子联系起来。

定义 1.1. [24, 节 1] 设 $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$。设 k 为一个环。设 A,B 为 k-代数，并设 $f : k \to A$ 为结构态射。一个从 A 到 B、关于 k、阶为 n 的 Hasse-Schmidt 导数，是一个序列 $(D_0, \ldots, D_n)$（若 $n = \infty$，则为 $(D_0, D_1, \ldots)$），其中 $D_0 : A \to B$ 是一个 k-代数同态，$D_i : A \to B$ 是 k-线性映射；对于 $i \in \{1 \ldots, n\}$ 和 $c \in k$，有 $D_i(f(c)) = 0$；并且对于所有 $x, y \in A$ 以及所有 $l \in \{0, \ldots, n\}$，映射 D_l 满足以下规则：

$$D_l(xy) = \sum_{i+j=l} D_i(x) D_j(y).$$

定义 1.2. [24, 节 1] Hasse-Schmidt 代数 $HS^n_{A/k}$ 定义为一个多项式代数的商。

$$HS^n_{A/k} = A[x^{(i)} | x \in A, i \in \{1, \ldots, n\}]/I,$$

其中，I 是由 $\{(x+y)^{(i)} - x^{(i)} - y^{(i)} | x, y \in A, i \in \{1, \ldots, n\}\}$、$\{f(c)^{(i)} | c \in k, i \in \{1, \ldots, n\}\}$、$\{(xy)^{(i)} - \sum_{j+k=i} x^{(j)} y^{(k)} | x, y \in A, i \in \{0, \ldots, n\}\}$ 生成的理想，其中对所有 $x \in A.$，我们将 $x^{(0)}$ 与 x 等同。我们定义从 A 到 $HS^n_{A/k}$ 的通用 Hasse-Schmidt 导子 $(d_0, d_1, \ldots, d_n)$ 为 $d_i(x) = x^{(i)} + I$。

记号 1.3. 沿用 [9, 6]，的记号，我们用 $A_n = HS^n_{A/k}$, $B_n = \frac{A_n[t]}{\langle t^{n+1} \rangle}$ 表示当 n 有限时的情形，并用 $B_\infty = A_\infty[[t]]$ 表示当 $n = \infty$ 时的情形。考虑 k-代数同态 $\gamma^\#_n : A \to B_n$, $a \mapsto \sum_{j=0}^n d_j(a) t^j$.。注意，$B_n$ 是一个 A_n-模，同时通过 $\gamma^\#_n$. 也是一个 A-模。对于 $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，定义 A_n-模 $B^\infty_n = A_\infty[t]/t^{n+1}$。

注 1.4。注意，$B_\infty \simeq \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} B^\infty_n$（见 [6, 第 8] 页）。

以下结果是本文的主要动机。

定理 1.5。 *[9, 引理 5。1]* 设 $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$。设 k 为一个环，A 为一个 k-代数。设 M 为一个 A_n-模，并考虑带有由 B_n. 上的 A-模结构诱导的 A-模结构的 $M \otimes_{A_n} B_n$ 。那么存在一个自然的 A_n-模同构

$$\mathrm{Der}_k(A_n, M) \simeq \mathrm{Der}_k(A, M \otimes_{A_n} B_n).$$

1.2 主定理

本节中我们陈述主要定理。首先回顾一下阶数为 $m \geq 1$ 的导子的定义及其一些基本性质。

定义 1.6。 [18, 第一章-1] 设 k 为一个环。设 A 为一个 k-代数，M 为一个 A-模。一个阶数为 $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ 的 k-导子是一个 k-同态Δ，它从 A 映射到 M，并满足以下恒等式:

$$\Delta(x_0 \cdots x_m) = \sum_{s=1}^{m} (-1)^{s-1} \sum_{i_1 < \cdots < i_s} x_{i_1} \cdots x_{i_s} \Delta(x_0 \cdots \check{x}_{i_1} \cdots \check{x}_{i_s} \cdots x_m), \tag{1}$$

对于 A 的任意 $m+1$ 个元素的集合 $\{x_0, \ldots, x_m\}$。符号 $\check{}x_{i_j}$ 表示该元素不出现在乘积中。注意，阶为 1 的 k-导子就是通常的导子。我们用 $\mathrm{Der}_k^m(A, M)$ 表示从 A 到 M、关于 k 的 m 阶导子的模。

Hasse-Schmidt 导数与高阶导子之间的一个基本关系见下述命题。

命题 1.7。 *[18, 命题 5]* 设 $n, m \in \mathbb{N}$。设 $D = (D_0, D_1, \ldots, D_n)$ 是一个阶为 n 的 Hasse-Schmidt 导数。那么，第 m 个分量 D_m 是 $1 \leq m \leq n$. 上一个阶为 m 的 k-导子。

设 A 是一个 k-代数，并记 $I_A := \ker(A \otimes_k A \to A,\ a \otimes b \mapsto ab)$。通过在左侧元素上相乘，为 $A \otimes_k A$ 赋予 A-模结构。对于 $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$，定义 A-模

$$\Omega_{A/k}^{(m)} := I_A / I_A^{m+1}.$$

定义映射 $d_A^m : A \to \Omega_{A\ k}^{(m)}/,\ a \mapsto 1 \otimes a - a \otimes 1 + I_A^{m+1}$.

定义 1.8. [18, 第 II 章-1] 的 A-模 $\Omega_{A\ k}^{(m)}/$称为 A 关于 k 的 K¨ahler m 阶微分模。映射 d_A^m 是 m 阶导子，称为 A 的典范 m 阶导子。

定理 1.9. *[23, 命题 1.6]* 设 $D : A \to M$ 是一个 k-导子，阶数为 m。存在唯一的 A-模同态 $g : \Omega_A^{(m)}/k \to M$，使得 $D = g \bigcirc d_A^m$.

注 1.10. 对于 $0 \leq i \leq j \leq \infty$，由前述泛性质，$d_{A_j}^m|_{A_i} : A_i \to \Omega_{A_j}^{(m)}$ 诱导出一个 A-同态 $g_{i,j} : \Omega_{A_i}^{(m)} \to \Omega_{A_j}^{(m)}$. 。这些同态满足

$$g_{j,k} \circ g_{i,j} = g_{i,k}, \quad \text{for all } 0 \leq i \leq j \leq k \leq \infty$$
$$g_{i,i} = Id_{A_i}, \quad \text{for all } i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

因此，它们诱导出一个直接系统，并且

$$\Omega_{A_\infty}^{(m)} = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \Omega_{A_n}^{(m)}. \tag{2}$$

现在我们可以陈述主要定理。

定理 1.11. 设 $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$。设 $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$。设 A 为一个 k-代数。设M 为一个 A_n-模，并考虑 $M \otimes_{A_n} B_n$ ，其 A-模结构由 B_n上的 A-模结构诱导而来

(1) 存在一个自然的 A_n-模同态

$$\phi_n : \mathrm{Der}_k^m(A_n, M) \to \mathrm{Der}_k^m(A, M \otimes_{A_n} B_n).$$

(2) 设 $\mathbb{K}$ 为一个零特征域。假设 A 是一个有限生成的 $\mathbb{K}$-代数。那么 ϕ_n 是满射。

(3) 一般而言， ϕ_n 不是单射。

在接下来的所有讨论中，数 m 将始终固定。因此，我们在记号 ϕ_n上不写字母 m

2 定理 1.11 的证明

本节中始终使用记号 1.3。

2.1 定理 1.11（1）的证明

引理 2.1. 设 $\rho_n : \mathrm{Der}_k^m(A, M \otimes_{A_n} B_n) \to \mathrm{Hom}_A(\Omega^{(m)}_{A\ k}/, M \otimes_{A_n} B_n)$ 是定理 1.9 中 A-模的同构。那么 ρ_n 也是 A_n-模的同构。

证明. 由于 $M \otimes_{A_n} B_n$ 是一个 A_n-模，我们可以通过函数为 $\mathrm{Der}_k^m(A, M \otimes_{A_n} B_n)$ 定义 A_n-模结构

$$\begin{array}{ccc} A_n \times \mathrm{Der}_k^m(A, M \otimes_{A_n} B_n) & \longrightarrow & \mathrm{Der}_k^m(A, M \otimes_{A_n} B_n) \\ (F, D) & \mapsto & FD, \end{array}$$

其中 $FD : A \to M \otimes_{A_n} B_n$, $c \mapsto FD(c)$（此记号表示将 F 乘在第二个位置上）。同理，我们为 $\mathrm{Hom}_A(\Omega^{(m)}_{A\ k}/, M \otimes_{A_n} B_n)$ 定义 A_n-模结构。在这些结构下，ρ_n 是一个 A_n-同态。事实上，设 $F \in A_n$ 和 $D \in \mathrm{Der}_k^m(A, M \otimes_{A_n} B_n)$。对于 $d_A^m(f) \in \Omega^{(m)}_{A\ k}/$，我们有

$$\Big(\rho_n(FD)\Big)(d_A^m(f)) = FD(f) = F\Big(D(f)\Big) = F\Big(\rho_n(D)(d_A^m(f))\Big).$$

因此， $\rho_n(FD) = F\rho_n(D)$。 □

命题 2.2. 设 $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$。设 M 是一个 A_n-模。考虑带有由 B_n 的模结构诱导的 A-模结构的 $M \otimes_{A_n} B_n$ 。设 $D \in \mathrm{Der}_k^m(A_n, M)$，并考虑映射

$$\begin{aligned} \overline{D} : A &\to M \otimes_{A_n} B_n \\ a &\mapsto \sum_{i=0}^{n} D \circ d_i(a) \otimes t^i. \end{aligned}$$

那么 $\overline{D} \in \mathrm{Der}_k^m(A, M \otimes_{A_n} B_n)$。特别地，我们有一个定义良好的 A_n-模态射 $\phi_n : \mathrm{Der}_k^m(A_n, M) \to \mathrm{Der}_k^m(A, M \otimes_{A_n} B_n), D \mapsto \overline{D}$。

证明。首先，由引理 2.1，$\mathrm{Der}_k^m(A, M \otimes_{A_n} B_n)$ 具有 A_n-模的结构，特别是，下面的映射是 A_n-线性的，

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Der}_k^m(A_n, M) & \longrightarrow & \mathrm{Der}_k^m(A, M \otimes_{A_n} B_n) \\ D & \mapsto & \overline{D}. \end{array}$$

由于 D 和 d_i 都是 k-线性的，$\overline{D}$也同样如此。现在我们证明定义 1.6 中的恒等式对 D成立。根据定义，

$$\begin{aligned} \overline{D}(a_0 \cdots a_m) &= \sum_{i=0}^{n} D((a_0 \cdots a_m)^{(i)}) \otimes t^i = \sum_{i=0}^{n} D\Big(\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^{m+1} \\ |\alpha| = i}} a_0^{(\alpha_0)} \cdots a_m^{(\alpha_m)} \Big) \otimes t^i \\ &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^{m+1} \\ |\alpha| = i}} \sum_{s=1}^{m} (-1)^{s-1} \sum_{j_1 < \cdots < j_s} a_{j_1}^{(\alpha_{j_1})} \cdots a_{j_s}^{(\alpha_{j_s})} D\Big(a_0^{(\alpha_0)} \cdots \check{a}_{i_1}^{(\alpha_{j_1})} \cdots \check{a}_{i_s}^{(\alpha_{j_s})} \cdots a_m^{(\alpha_m)} \Big) \otimes t^i. \end{aligned} \tag{3}$$

对于每个子集 $j = \{j_1, j_2, \ldots, j_s\} \subset \{0, 1, \ldots, m\}$，满足 $j_1 < j_2 < \ldots < j_s$，我们定义

$$\begin{aligned} D\big(\check{a_j}^{(\alpha)}\big) &:= D\big(a_0^{(\alpha_0)} \cdots \check{a}_{j_1}^{(\alpha_{j_1})} \cdots \check{a}_{j_s}^{(\alpha_{j_s})} \cdots a_m^{(\alpha_m)}\big), \\ D\big(\check{a}_j\big) &:= D\big(a_0 \cdots \check{a}_{j_1} \cdots \check{a}_{j_s} \cdots a_m\big), \\ a_j^{(\alpha)} &:= a_{j_1}^{\alpha_{j_1}} a_{j_2}^{\alpha_{j_2}} \cdots a_{j_s}^{\alpha_{j_s}}, \end{aligned}$$

其中，符号 $\check{}\, a_{j_i}^{\alpha_{j_i}}$表示该元素不出现在乘积中。使用这一记法，方程 (3) 可改写为

$$\overline{D}(a_0 \cdots a_m) = \sum_{i=0}^{n} \Big(\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^{m+1} \\ |\alpha| = i}} \sum_{s=1}^{m} (-1)^{s-1} \sum_{j_1 < \cdots < j_s} a_j^{(\alpha)} D(\check{a_j}^{\alpha}) \Big) \otimes t^i. \tag{4}$$

对于每个 $\alpha_j = (\alpha_{j_1}, ..., \alpha_{j_s}) \in \mathbb{N}^s$，我们令 $\Gamma_j = \{\gamma \in \mathbb{N}^{m+1} | \gamma_{j_k} = \alpha_{j_k}, k \in \{1, .., s\}\ |\gamma| = i\}$。注意,

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{n}\sum_{s=1}^{m}(-1)^{s-1}\sum_{j_1<\cdots<j_s}\sum_{\substack{\alpha_j\in\mathbb{N}^s\\0\le|\alpha_j|\le i}}a_j^{(\alpha_j)}\sum_{\gamma\in\Gamma_j}D(\check{a_j}^{(\gamma)})\\&=\sum_{i=0}^{n}\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^{m+1}\\|\alpha|=i}}\sum_{s=1}^{m}(-1)^{s-1}\sum_{j_1<\cdots<j_s}a_j^{(\alpha)}D(\check{a_j}^{(\alpha)}).\end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned}\overline{D}(a_0\cdots a_m)&=\sum_{i=0}^{n}\sum_{s=1}^{m}(-1)^{s-1}\sum_{j_1<\cdots<j_s}\sum_{\substack{\alpha_j\in\mathbb{N}^s\\0\le|\alpha_j|\le i}}a_j^{(\alpha_j)}\sum_{\gamma\in\Gamma_j}D(\check{a_j}^{(\gamma)})\\&=\sum_{i=0}^{n}\sum_{s=1}^{m}(-1)^{s-1}\sum_{j_1<\cdots<j_s}\sum_{\substack{\alpha_j\in\mathbb{N}^s\\0\le|\alpha_j|\le i}}a_j^{(\alpha_j)}D(\sum_{\gamma\in\Gamma_j}\check{a_j}^{(\gamma)}).\end{aligned}$$

集合 $\ell_j = \sum_{k=1}^{s}\alpha_{j_k} = |\alpha_j|$. 因此

$$\sum_{\gamma\in\Gamma_j}\check{a_j}^{(\gamma)}=\sum_{\gamma\in\Gamma_j}a_0^{(\gamma_0)}\cdots\check{a}_{j_1}^{(\alpha_{j_1})}\cdots\check{a}_{j_s}^{(\alpha_{j_s})}\cdots\check{a}_m^{(\gamma_m)}=\sum_{\substack{\gamma'\in\mathbb{N}^{m+1-s}\\|\gamma'|=i-\ell_j}}a_0^{(\gamma_0')}a_1^{(\gamma_1')}\cdots\check{a}_{j_1}\cdots\check{a}_{j_s}\cdots a_m^{(\gamma_{m+q-s}')}$$

$$=(\check{a_j})^{(i-\ell_j)}.$$

因此,

$$\begin{aligned}\overline{D}(a_0\cdots a_m)&=\sum_{i=0}^{n}\sum_{s=1}^{m}(-1)^{s-1}\sum_{j_1<\cdots<j_s}\sum_{\substack{\alpha_j\in\mathbb{N}^s\\0\le|\alpha_j|\le i}}a_j^{(\alpha_j)}D\big((\check{a_j})^{(i-\ell_j)}\big)\otimes t^i\\&=\sum_{i=0}^{n}\sum_{s=1}^{m}(-1)^{s-1}\sum_{j_1<\cdots<j_s}\sum_{\substack{\alpha_j\in\mathbb{N}^s\\0\le|\alpha_j|\le i}}D\big((\check{a_j})^{(i-\ell_j)}\big)\big)\otimes a_j^{(\alpha_j)}t^{\ell_j+i-\ell_j}\\&=\sum_{i=0}^{n}\sum_{s=1}^{m}(-1)^{s-1}\sum_{j_1<\cdots<j_s}\sum_{\substack{\alpha_j\in\mathbb{N}^s\\0\le|\alpha_j|\le i}}(a_j^{(\alpha_j)}t^{\ell_j})\Big(D\big((\check{a_j})^{(i-\ell_j)}\big)\otimes t^{i-\ell_j}\Big).\end{aligned}$$

我们还有，

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{\substack{\alpha_j\in\mathbb{N}^s\\0\le|\alpha_j|\le i}}(a_j^{(\alpha_j)}t^{\ell_j})\Big(D\big((\check{a_j})^{(i-\ell_j)}\big)\otimes t^{i-\ell_j}\Big)$$
$$=\sum_{\substack{\alpha_j\in\mathbb{N}^s\\0\le|\alpha_j|\le i}}\big(\prod_{k=1}^{s}a_{j_k}^{\alpha_{j_k}}t^{\ell_j}\big)\sum_{i-\ell_j=0}^{n}\big(D((\check{a_j})^{(i-\ell_j)}\otimes t^{i-\ell_j}\big).$$

因此，

$$\overline{D}(a_0\cdots a_m)=\sum_{s=1}^{m}(-1)^{s-1}\sum_{j_1<\cdots<j_s}\Big(\sum_{\substack{\alpha_j\in\mathbb{N}^s\\0\le|\alpha_j|\le i}}\prod_{k=1}^{s}a_{j_k}^{\alpha_{j_k}}t^{\ell_j}\Big)\sum_{i-\ell_j=0}^{n}\big(D((\check{a_j})^{(i-\ell_j)}\otimes t^{i-\ell_j}\big).$$

回想一下，

$$\prod_{k=1}^{s}\gamma_n^{\#}(a_{j_k})=\prod_{k=1}^{s}\big(\sum_{i=0}^{n}(a_{j_k})^{(i)}t^i\big)=\sum_{i=0}^{n}\Big(\sum_{i_1+\cdots+i_s=i}a_{j_1}^{(i_1)}\cdots a_{j_s}^{(i_s)}t^i\Big).$$

由此可得，

$$\begin{aligned}\overline{D}(a_0\cdots a_m)&=\sum_{s=1}^{m}(-1)^{s-1}\sum_{j_1<\cdots<j_s}\big(\prod_{k=1}^{s}\gamma_n^{\#}(a_{j_k})\big)\big(\overline{D}(a_0\cdots\check{a}_{j_1}\cdots\check{a}_{j_s}\cdots a_m)\big)\\&=\sum_{s=1}^{m}(-1)^{s-1}\sum_{j_1<\cdots<j_s}a_{j_1}a_{j_2}\cdots a_{j_s}\overline{D}\big(a_0\cdots\check{a}_{j_1}\cdots\check{a}_{j_s}\cdots a_m\big).\end{aligned}.$$

□

命题 2.3. 设 M 是一个 A_∞-模。存在一个 A_∞-同态

$$\mathrm{Der}_k^m(A_\infty,M)\to\mathrm{Der}_k^m(A,M\otimes_{A_\infty}B_\infty).$$

证明. 设 n，$n'\in\mathbb{N}$。由于对于所有满足 $n\le n'$ 的 n、$n'\in\mathbb{N}$，都有 $A_n\hookrightarrow A_{n'}$，我们有以下关于 A-模的同态递降链：

$$\cdots\to\mathrm{Der}_k^m(A_n,M)\to\mathrm{Der}_k^m(A_{n-1},M)\to\cdots\to\mathrm{Der}_k^m(A_1,M)\to\mathrm{Der}_k^m(A_0,M).$$

因此，我们得到一个 A-模的逆系统 $\{\mathrm{Der}_k^m(A_n,M)\}_{n\in\mathbb{N}}$。我们还有一个自然的环同态 $\psi_n:B_n\hookrightarrow B_n^\infty$。利用 ψ_n，我们可以定义 A-同态

$$\begin{array}{ccccc}\mathrm{Der}_k^m(A_n,M)&\to&\mathrm{Der}_k^m(A,M\otimes_{A_n}B_n)&\to&\mathrm{Der}_k^m(A,M\otimes_{A_\infty}B_n^\infty)\\D&\mapsto&\overline{D}&\mapsto&(Id_M\otimes\psi)\circ\overline{D}\end{array}.$$

此外，利用自然嵌入 $\theta_{n,\ n'} : B_n^\infty \hookrightarrow B_{n'}^\infty$，我们可以定义一个$A$-同态

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Der}_k^m(A, M \otimes_{A_\infty} B_n^\infty) & \to & \mathrm{Der}_k^m(A, M \otimes_{A_\infty} B_{n'}^\infty) \\ E & \mapsto & (Id_M \otimes \theta_{n,n'}) \circ E \end{array}.$$

前述同态诱导出如下的A-模交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \to & \mathrm{Der}_k^m(A_n, M) & \to & \mathrm{Der}_k^m(A_{n-1}, M) & \to & \cdots \\ & & \downarrow \phi_n & & \downarrow \phi_{n-1} & & \\ \cdots & \to & \mathrm{Der}_k^m(A, M \otimes_{A_\infty} B_n^\infty) & \to & \mathrm{Der}_k^m(A, M \otimes_{A_\infty} B_{n-1}^\infty) & \to & \cdots \end{array}.$$

这个图诱导出 A-同态

$$\begin{array}{ccc} \overline{\phi_\infty} : \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Der}_k^m(A_n, M) & \to & \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Der}_k^m(A, M \otimes_{A_\infty} B_n^\infty) \\ (D_0, D_1, \ldots, D_n, \ldots) & \mapsto & (\overline{D_0}, \overline{D_1}, \ldots, \overline{D_n}, \ldots) \end{array}.$$

应用定理 1.9，我们得到

$$\overline{\phi'_\infty} : \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}(\Omega^{(m)}_{A_n/k}, M) \to \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}(\Omega^{(m)}_{A/k}, M \otimes_{A_\infty} B_n^\infty).$$

由逆极限与 Hom 函子和张量积的交换性质（参见 [17, 第 2]章），我们得到

$$\phi'_\infty : \mathrm{Hom}(\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \Omega^{(m)}_{A_n/k}, M) \to \mathrm{Hom}(\Omega^{(m)}_{A/k}, M \otimes_{A_\infty} \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} B_n^\infty).$$

利用注 1.4 和方程 (2) 得出的是

$$\phi'_\infty : \mathrm{Hom}(\Omega^{(m)}_{A_\infty/k}, M) \to \mathrm{Hom}(\Omega^{(m)}_{A/k}, M \otimes_{A_\infty} B_\infty).$$

最后，由定理 1.9 可得一个 A-模同态

$$\phi_\infty : \mathrm{Der}_k^m(A_\infty, M) \to \mathrm{Der}_k^m(A, M \otimes_{A_\infty} B_\infty).$$

根据引理 2.1，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，$\mathrm{Der}_k^m(A, M \otimes_{A_\infty} B_\infty)$ 都是一个 A_n-模。特别地，它是一个 A_∞-模。另一方面，根据定义，$\mathrm{Der}_k^m(A_\infty, M)$ 是一个 A_∞-模。因此，ϕ_∞ 是 A_∞- 模的同态。 □

2.2 定理 1.11 的证明（2）

命题 2.4. 设 $n \in \mathbb{N}$、 $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$。设 $\mathbb{K}$ 为一个零特征域，且 $A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_s]/I$。在这种情况下，命题 2.2 中的映射 ϕ_n 是满射。

先引入一些记号，以便在该结果的证明中使用。令 $\alpha = (\alpha_1^0, \ldots, \alpha_1^n, \ldots, \alpha_s^0, \ldots, \alpha_s^n) \in \mathbb{N}^{s(n+1)}$ and $\beta = (\beta_1 \ldots, \beta_s) \in \mathbb{N}^s$。

- $\underline{x}^\alpha := (x_{(0)1})^{\alpha_1^0} (x_{(1)1})^{\alpha_1^1} \cdots (x_{(n)1})^{\alpha_1^n} \cdots (x_{(j)i})^{\alpha_i^j} \cdots (x_{(0)s})^{\alpha_s^0} \cdots (x_{(n)s})^{\alpha_s^n}$.
- $x^\beta := x_1^{\beta_1} \cdots x_s^{\beta_s}$.
- $|\alpha| := \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{n} \alpha_i^j$ 和 $|\beta| := \sum_{i=1}^{s} \beta_i$.
- 令 $\Delta := \{\underline{x}^\alpha | \alpha \in \mathbb{N}^{s(n+1)}$ 和 $1 \leq |\alpha| \leq m\}$。对于所有 $i \in \{1, \ldots, s\}$ 和 $j \in \{1, \ldots, n\}$，我们定义 Δ 的以下子集：

$$\Delta^0 := \left\{ \underline{x}^\alpha = (x_1^{(0)})^{\alpha_1^0} (x_2^{(0)})^{\alpha_2^0} \cdots (x_s^{(0)})^{\alpha_s^0} | \underline{x}^\alpha \in \Delta \right\}.$$
$$\Delta_i^j := \left\{ \underline{x}^\alpha = x_i^{(j)} (x_i^{(0)})^{\alpha_i^0} (x_{i+1}^{(0)})^{\alpha_{i+1}^0} \cdots (x_s^{(0)})^{\alpha_s^0} | \underline{x}^\alpha \in \Delta \right\}.$$

- 令 $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_{|\beta|}) \in \mathbb{N}^{|\beta|}$. 我们定义

$$x^{(\gamma)} := x_1^{(\gamma_1)} \cdots x_1^{(\gamma_{\beta_1})} x_2^{(\gamma_{\beta_1+1})} \cdots x_2^{(\gamma_{\beta_1+\beta_2})} \cdots x_s^{(\gamma_{\beta 1+\cdots+\beta_{s-1}+1})} \cdots x_s^{(\gamma_{|\beta|})}$$

（由于对 γ_l 没有任何条件，因此我们将 $x^{(\gamma)}$ 视为 $k[x_1, \ldots, x_s]_\infty$ 的一个元素。）

- 令 $j \in \{0, 1 \ldots, n\}$。我们记

$$\Gamma^j := \{\gamma \in \mathbb{N}^{|\beta|} | \ |\gamma| = j, \gamma_l \neq j \text{ for all } l \in \{1, \ldots, |\beta|\}\}.$$

引理 2.5. 令 $j \in \{0, 1 \ldots, n\}$ 且 $\gamma \in \Gamma^j$。则存在 $\alpha_\gamma \in \mathbb{N}^{s(n+1)}$，使得 $x^{(\gamma)} = \underline{x}^{\alpha_\gamma}$ 且 $|\beta| = |\alpha_\gamma|$.

证明. 对于给定的 $\gamma \in \Gamma_j$，我们定义向量 $\alpha_\gamma = (\alpha_i^j)_{\substack{1 \leq i \leq s \\ 0 \leq j \leq n}} \in \mathbb{N}^{s(n+1)}$，其中

$$\alpha_1^j = |\{l \in \{1, \ldots, \beta_1\} | \gamma_l = j\}|,$$
$$\alpha_i^j = |\{l \in \{\beta_1 + \cdots + \beta_{i-1} + 1, \ldots, \beta_1 + \cdots + \beta_i\} | \gamma_l = j\}|, \text{ for } i \geq 2.$$

根据构造，我们有 $x^{(\gamma)} = \underline{x}^{\alpha_\gamma}$。此外，由于 $x^{(\gamma)}$ 是由 $|\beta|$ 项相乘得到的，因此 $|\alpha_\gamma| = |\beta|$. □

注 2.6. 设 $\beta \in \mathbb{N}^s$. 。通过反复应用 Hasse-Schmidt 导数的莱布尼茨法则，我们得到:

$$(x^\beta)^{(j)} = \sum_{\substack{\gamma\in\mathbb{N}^{|\beta|}\\ |\gamma|=j}} x^{(\gamma)} = \beta_1 x_1^{(j)}(x_1^{(0)})^{\beta_1-1}(x_2^{(0)})^{\beta_2}\cdots(x_s^{(0)})^{\beta_s} + \sum_{\substack{\gamma\in\mathbb{N}^{|\beta|}\\ |\gamma|=j\\ \gamma_l\neq j,\ l=1,\ldots,\beta_1}} x^{(\gamma)}$$

$$= \beta_1 x_1^{(j)}(x_1^{(0)})^{\beta_1-1}(x_2^{(0)})^{\beta_2}\cdots(x_s^{(0)})^{\beta_s} + \beta_2 x_2^{(j)}(x_1^{(0)})^{\beta_1}(x_2^{(0)})^{\beta_2-1}\cdots(x_s^{(0)})^{\beta_s}$$

$$+ \sum_{\substack{\gamma\in\mathbb{N}^{|\beta|}\\ |\gamma|=j\\ \gamma_l\neq j,\ l=1,\ldots,\beta_1+\beta_2}} x^{(\gamma)}.$$

迭代这一过程，我们得到:

$$(x^\beta)^{(j)} = \sum_{i=1}^{s} \beta_i x_i^{(j)}(x_1^{(0)})^{\beta_1}\cdots(x_i^{(0)})^{\beta_i-1}\cdots(x_s^{(0)})^{\beta_s} + \sum_{\gamma\in\Gamma^j} x^{(\gamma)}.$$

注 2.7. 设 $B = k[y_1,\ldots,y_t]$ 和 M 为一个 B-模。通过反复应用（1）中的 m 阶导数的乘积法则，我们可以推导出，任意导子$D \in \mathrm{Der}^m_{B/k}(B,M)$ 均由满足 $\tau \in \mathbb{N}^t$ 的单项式 x^τ 所确定，即$1 \le |\tau| \le m$.

在下面的例子中，我们将说明之前引入的记号以及证明命题 2.4 的主要思路。

例 2.8. 设 $\mathbb{K}$ 是一个特征为 0 的域。令 $A = \mathbb{K}[x_1,x_2]$，于是 $A_1 = \mathbb{K}[x_1^{(0)},x_1^{(1)},x_2^{(0)},x_2^{(1)}]$. 。考虑命题 2.2 中的映射 ϕ_1，

$$\phi_1 : \mathrm{Der}^2_{\mathbb{K}}(A_1,A_1) \to \mathrm{Der}^2_{\mathbb{K}}(A, A_1\otimes_{A_1} B_1).$$

令 $\Delta = \{\underline{x}^\alpha | \alpha\in\mathbb{N}^4, 1\le|\alpha|\le 2\}$。注意,

$$\Delta^0 = \{x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, (x_1^{(0)})^2, x_1^{(0)}x_2^{(0)}, (x_2^{(0)})^2\},$$
$$\Delta_1^1 = \{x_1^{(1)}, x_1^{(0)}x_1^{(1)}, x_1^{(1)}x_2^{(0)}\},$$
$$\Delta_2^1 = \{x_2^{(1)}, x_2^{(1)}x_2^{(0)}\}.$$

令 $E \in \mathrm{Der}^2_{\mathbb{K}}(A, A_1\otimes_{A_1}B_1)$。则 $E = E_0\otimes 1 + E_1\otimes t$，其中 $E_j \in \mathrm{Der}^m_{\mathbb{K}}(A,A_1)$，对 $j=0$, 1 成立。接下来，我们定义 $D \in \mathrm{Der}^2_{\mathbb{K}}(A_1,A_1)$，使得 $\phi_1(D) = E$。根据注 2.7，只需在单项式 $\underline{x}^\alpha$ 上定义 D，其中 $\alpha\in\Delta$:

$$D(\underline{x}^\alpha) = \begin{cases} E_0(x_1^{\alpha_1^0}x_2^{\alpha_2^0}) & \text{if} \quad \underline{x}^\alpha \in \Delta^0 \\ \frac{1}{\alpha_1^0+1}E_1\left(x_1^{\alpha_1^0+1}x_2^{\alpha_2^0}\right) & \text{if} \quad \underline{x}^\alpha \in \Delta_1^1 \\ \frac{1}{\alpha_2^0+1}E_1\left(x_2^{\alpha_2^0+1}\right) & \text{if} \quad \underline{x}^\alpha \in \Delta_2^1 \\ 0 & \text{if} \quad \underline{x}^\alpha \in \Delta\setminus\Delta^0\cup\Delta_1^1\cup\Delta_2^1 \end{cases}.$$

现在，我们证明 $D = \overline{E}$。根据注 2.7，只需对单项式 x^β 检验这个等式，其中 $\beta \in \mathbb{N}^2$，使得 $1 \le |\beta| \le 2.$。注意，

$$\begin{aligned}\overline{D}(x_1) &= D \circ d_0(x_1) \otimes 1 + D \circ d_1(x_1) \otimes t \\ &= D(x_1^{(0)}) \otimes 1 + D(x_1^{(1)}) \otimes t \\ &= E_0(x_1) \otimes 1 + E_1(x_1) \otimes t = E(x_1).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{D}((x_1)^2) &= D \circ d_0((x_1)^2) \otimes 1 + D \circ d_1((x_1)^2) \otimes t \\ &= D((x_1^{(0)})^2) \otimes 1 + 2D(x_1^{(0)} x_1^{(1)}) \otimes t \\ &= E_0((x_1)^2) \otimes 1 + 1/2(2E_1((x_1)^2)) \otimes t = E((x_1)^2).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{D}(x_1x_2) &= D \circ d_0(x_1x_2) \otimes 1 + D \circ d_1(x_1x_2) \otimes t \\ &= D(x_1^{(0)} x_2^{(0)}) \otimes 1 + D(x_1^{(0)} x_2^{(1)} + x_1^{(1)} x_2^{(0)}) \otimes t \\ &= E_0(x_1x_2) \otimes 1 + E_1(x_1x_2) \otimes t = E(x_1x_2).\end{aligned}$$

类似的计算表明，$D(x_2) = E(x_2)$, 且 $D((x_2)^2) = E((x_2)^2)$。因此，$\phi_1(D) = \overline{D} = E$。

证明。（命题 2.4）设 $E = \sum_{j=0}^{n} E_j \otimes t^j \in \mathrm{Der}_k^m(A, M \otimes B_n)$。根据注 2.7，只需找到一个导子 $D \in \mathrm{Der}_k^m(A_n, M)$，使得对于所有满足 $1 \le |\beta| \le m$ 的单项式 x^β，都有 $\overline{D}(x^\beta) = E(x^\beta)$。我们通过确定导子 $D : A_n \to M$ 在 $\underline{x}^\alpha \in \Delta$ 中的取值来定义它，具体如下：

$$D(\underline{x}^\alpha) = \begin{cases} E_0(x_1^{\alpha_1^0} \cdots x_s^{\alpha_s^0}) & \text{if} \quad \underline{x}^\alpha \in \Delta^0 \\ \frac{1}{\alpha_i^0+1} E_j\left(x_i^{\alpha_i^0+1} x_{i+1}^{\alpha_{i+1}^0} \cdots x_s^{\alpha_s^0}\right) & \text{if} \quad \underline{x}^\alpha \in \Delta_i^j \text{ for some } j \in \{1, \ldots, n\} \\ 0 & \text{if} \quad \underline{x}^\alpha \notin \Delta_i^j \text{ for all } j \in \{0, \ldots, n\} \end{cases}.$$

令 $\beta \in \mathbb{N}^s$，使得 $1 \le |\beta| \le m$ 和 D 如前所述。根据 D 的定义并应用注 2.6，我们得到

$$
\begin{aligned}
\overline{D}(x^\beta) &= \sum_{j=0}^{n} \big(D \circ d_j\big)(x^\beta) \otimes t^j = \sum_{j=0}^{n} D\big((x^\beta)^{(j)}\big) \otimes t^j \\
&= D((x^\beta)^{(0)}) \otimes 1 + \sum_{j=1}^{n} \Big[D((x^\beta)^{(j)})\Big] \otimes t^j \\
&= D\left((x_1^{(0)})^{\beta_1}(x_2^{(0)})^{\beta_2}\cdots(x_s^{(0)})^{\beta_s}\right) \otimes 1 \\
&+ \sum_{j=1}^{n} \left[D\left(\sum_{i=1}^{s} \beta_i x_i^{(j)} (x_1^{(0)})^{\beta_1}\cdots(x_i^{(0)})^{\beta_i - 1}\cdots(x_s^{(0)})^{\beta_s}\right) + \sum_{\gamma\in\Gamma^j} D(x^{(\gamma)}) \right] \otimes t^j
\end{aligned}
$$

首先，对于 $j = 0$ 和 $(x_1^{(0)})^{\beta_1}(x_2^{(0)})^{\beta_2}\cdots(x_s^{(0)})^{\beta_s} \in \Delta^0$，我们有

$$
D\left((x_1^{(0)})^{\beta_1}(x_2^{(0)})^{\beta_2}\cdots(x_s^{(0)})^{\beta_s}\right) = E_0(x_1^{\beta_1}\cdots x_s^{\beta_s}) = E_0(x^\beta).
$$

考虑 $j \geq 1$。我们观察到：

- For $x_i^{(j)}(x_i^{(0)})^{\beta_i}\cdots(x_s^{(0)})^{\beta_s} \in \Delta_i^j$,

$$
D\left(\beta_i x_i^{(j)}(x_i^{(0)})^{\beta_i - 1}\cdots(x_s^{(0)})^{\beta_s}\right) = \beta_i \frac{1}{\beta_i} E_j(x_i^{\beta_i - 1 + 1}\cdots x_s^{\beta_s}) = E_j(x^\beta).
$$

- 对于每个 $\beta \in \mathbb{N}^s$，我们定义 $i_1 = \min\{i | \beta_i \neq 0, i \in \{1, \ldots, s\}\}$。对于 $i > i_1$，我们有 $D\left(\beta_i x_{(j)\,i}(x_{(0)\,i_1})^{\beta_{i_1}}\cdots(x_{(0)\,i})^{\beta_i - 1}\cdots(x_{(0)s})^{\beta_s}\right) = 0$。

- 根据引理 2.5，对于 $\gamma \in \Gamma^j$，存在 $\alpha_\gamma \in \mathbb{N}^{s(n+1)}$ 使得 $x_{(\gamma)} = \underline{x}^{\alpha_\gamma}$并且 $|\alpha_\gamma| = |\beta|$. 由于 $1 \leq |\beta| \leq m$，因此 $\underline{x}^{\alpha_\gamma} \in \Delta$. 此外，由于 $\gamma_l \neq j$，对于所有 $l \in \{1, \ldots, |\beta|\}$，我们有 $\underline{x}^{\alpha_\gamma} \notin \Delta_i^j$，对所有 $j \in \{0, \ldots, n\}$ 均成立。于是，对于 $\gamma \in \Gamma^j$，我们有 $D(x_{(\gamma)}) = D(\underline{x}^{\alpha_\gamma}) = 0$.

由前面三项可知,

$$
\begin{aligned}
D\left((x^\beta)^{(j)}\right) &= D\left(\beta_{i_1} x_{i_1}^{(j)}(x_{i_1}^{(0)})^{\beta_{i_1}-1}\cdots(x_s^{(0)})^{\beta_s}\right) \\
&+ \sum_{i>i_1}^{s} D\left(\beta_i x_i^{(j)}(x_i^{(0)})^{\beta_i - 1}\cdots(x_s^{(0)})^{\beta_s}\right) + \sum_{\gamma\in\Gamma^j} D(x^\gamma) \\
&= E_j(x^\beta).
\end{aligned}
$$

因此

$$
\overline{D}\left(x^\beta\right) = \sum_{j=0}^{n} D\big((x^\beta)^{(j)}\big) \otimes t^j = \sum_{j=0}^{n} E_j\big(x^\beta\big) \otimes t^j = E\left(x^\beta\right).
$$

□

2.3 定理 1.11 (3) 的证明

在本节中， $\mathbb{K}$ 表示一个零特征域。下面的例子表明，对于某个环 A ，映射 ϕ_n 不是单射，其中任意 $m \geq 2$ 和 $n \geq 1$均如此。

例 2.9。设 $A = \mathbb{K}[x]$。于是， $A_n = \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n]$。令 $M = A_n$并考虑 $D = \frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial x_n^m} \in \mathrm{Der}_k^m(A_n, A_n)$。我们来证明，对所有$f \in A$， $D(f) = 0$。事实上，由于 D 是可加的，只需证明对所有 $l \in \mathbb{N}$以及 $i \in \{0, \ldots, n\}$， $D((x^l)^{(i)}) = 0$。当 $i < n$时，这显然成立，因为 $(x^l)^{(i)}$ 中没有单项式含有变量 x_n。当 $i = n$时，对 l作直接归纳，并在 $(x^l)^{(n)}$ 上使用莱布尼茨法则，可得 $D((x^l)^{(n)}) = 0$，其中 $m \geq 2$。

前一个例子只适用于关于 x_n 的偏导数，也就是 A_n 的“最后一个”变量。这可能会让人以为在 A_∞ 中，映射 ϕ_∞ 是单射。遗憾的是，事实并非如此，下面我们将对此进行说明。

引理 2.10. 设 $A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_s]$，并设 x^β是 A. 中的一个单项式。我们有

$$d_A^2(x^\beta) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^s \\ |\alpha|=2}} \frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}(x^\beta) d_A^2(x^\alpha) + (2 - |\beta|) \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^s \\ |\alpha|=1}} \frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}(x^\beta) d_A^2(x^\alpha).$$

证明. 首先，设 $e_1, \ldots, e_s$是 $\mathbb{N}^s$的标准基。记 $\Delta_\alpha(x^\beta) = \frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}(x^\beta)$ 和 $(d_A^2(x))^\alpha = d_A^2(x_1)^{\alpha_1} \cdots d_A^2(x_s)^{\alpha_s}$。根据 [18, 第二章-2],, 我们有

$$d_A^2(x^\beta) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^s \\ 1 \leq |\alpha| \leq 2}} \Delta_\alpha(x^\beta)(d_A^2(x))^\alpha.$$

特别地，如果 $|\beta| = 2$，我们可以推导出

$$(d_A^2(x))^\beta = d_A^2(x^\beta) - \sum_{i=1}^{s} \Delta_{e_i}(x^\beta) d_A^2(x_i).$$

现在令 $x^\beta \in A_\circ$ 我们观察到:

$$
\begin{aligned}
d_A^2(x^\beta) &= \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^s\\ 1\le|\alpha|\le 2}} \Delta_\alpha(x^\beta)(d_A^2(x))^\alpha \\
&= \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^s\\ |\alpha|=2}} \Delta_\alpha(x^\beta)\Big(d_A^2(x^\alpha) - \sum_{i=1}^s \Delta_{e_i}(x^\alpha) d_A^2(x_i)\Big) \\
&+ \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^s\\ |\alpha|=1}} \Delta_\alpha(x^\beta)(d_A^2(x))^\alpha \\
&= \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^s\\ |\alpha|=2}} \Delta_\alpha(x^\beta) d_A^2(x^\alpha) - \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^s\\ |\alpha|=2}} \sum_{i=1}^s \Delta_\alpha(x^\beta)\Delta_{e_i}(x^\alpha) d_A^2(x_i) \\
&+ \sum_{i=1}^s \Delta_{e_i}(x^\beta) d_A^2(x_i) \\
&= \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^s\\ |\alpha|=2}} \Delta_\alpha(x^\beta) d_A^2(x^\alpha) - \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^s\\ |\alpha|=2}} \sum_{i=1}^s \binom{\beta-e_i}{\alpha-e_i}\Delta_{e_i}(x^\beta) d_A^2(x_i) \\
&+ \sum_{i=1}^s \Delta_{e_i}(x^\beta) d_A^2(x_i) \\
&= \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^s\\ |\alpha|=2}} \Delta_\alpha(x^\beta) d_A^2(x^\alpha) + \sum_{i=1}^s \Big(1 - \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^s\\ |\alpha|=2}} \binom{\beta-e_i}{\alpha-e_i}\Big)\Delta_{e_i}(x^\beta) d_A^2(x_i) \\
&= \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^s\\ |\alpha|=2}} \Delta_\alpha(x^\beta) d_A^2(x^\alpha) + \sum_{i=1}^s \Big(1 - \beta_1 - \cdots - (\beta_i - 1) - \cdots - \beta_s\Big)\Delta_{e_i}(x^\beta) d_A^2(x_i) \\
&= \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^s\\ |\alpha|=2}} \Delta_\alpha(x^\beta) d_A^2(x^\alpha) + \sum_{i=1}^s \Big(2 - |\beta|\Big)\Delta_{e_i}(x^\beta) d_A^2(x_i) \\
&= \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^s\\ |\alpha|=2}} \frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}(x^\beta) d_A^2(x^\alpha) + (2-|\beta|) \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^s\\ |\alpha|=1}} \frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}(x^\beta) d_A^2(x^\alpha).
\end{aligned}
$$

□

注 2.11. 设 $A = \mathbb{K}[x]$ 和 $n \in \mathbb{N}_\circ$ 利用引理 2.10 和定理 1.9，我们得到:
如果 $D \in \mathbf{Der}_k^2(A_n, A_n)$ 且 x^β 是 A_n 中的单项式，那么

$$
D(x^\beta) = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^{n+1}\\ |\alpha|=2}} F_\alpha \frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}(x^\beta) + (2-|\beta|) \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^{n+1}\\ |\alpha|=1}} F_\alpha \frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}(x^\beta),
$$

其中 $F_\alpha = D(x^\alpha) \in A_n$.

引理 2.12。沿用注 2.11 的记号。于是,

$$\ker \phi_n = \left\{ D \in \mathrm{Der}_k^2(A_n, A_n) |\ F_{e_j} = 0,\ \sum_{i=0}^{j} F_{e_i+e_{j-i}} = 0,\ \text{for all } j \in \{0,1,\dots,n\} \right\},$$

其中, e_0、e_1、...、e_n 是 $\mathbb{N}^{n+1}$. 的标准基。

证明。将引理陈述中右侧的集合记为 A。

首先, 我们证明如果 $D \in \mathrm{A}$, 那么 $D \in \ker \phi_n$. 。由注 2.7 可知, $\mathrm{Der}_k^2(A, A_n \otimes B_n)$ 的元素由单项式 x, x^2. 确定。因此, 只需证明 $\phi_n(D)(x) = 0$, 以及 $\phi_n(D)(x^2) = 0$。注意:

$$\begin{aligned}
\phi_n(D)(x) &= \sum_{j=0}^{n} (D(x^{(j)})) \otimes t^j \\
&= \sum_{j=0}^{n} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1} \\ |\alpha|=2}} F_\alpha \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}(x^{(j)}) + (2-1) \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1} \\ |\alpha|=1}} F_\alpha \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}(x^{(j)}) \otimes t^j \\
&= \sum_{j=0}^{n} F_{e_j} \otimes t^j = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_n(D)(x^2) &= \sum_{j=0}^{n} \left(D((x^2)^{(j)}) \right) \otimes t^j \\
&= \sum_{j=0}^{n} \left(D(\sum_{i=0}^{j} x^{(i)} x^{(j-i)}) \right) \otimes t^j \\
&= \sum_{j=0}^{n} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1} \\ |\alpha|=2}} F_\alpha \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} (\sum_{i=0}^{j} x^{(i)} x^{(j-i)}) \\
&\quad + (2-2) \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1} \\ |\alpha|=1}} F_\alpha \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}(x^{(j)}) (\sum_{i=0}^{j} x^{(i)} x^{(j-i)}) \otimes t^j \\
&= \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1} \\ |\alpha|=2}} F_\alpha \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}(x^{(i)} x^{(j-i)}) \otimes t^j \\
&= \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j} F_{e_i+e_{j-i}} \otimes t^j = 0.
\end{aligned}$$

因此， $D \in \ker\ \phi_n$.。现在，我们证明另一个包含关系。设 $\partial_{x^\alpha} := \frac{\partial^\alpha}{\partial x^{\alpha}}$。令 $D \in \ker \phi_n$，注意到

$$0 = \overline{D} = \sum_{j=0}^{n} D \circ d_j \otimes t^j$$

因此，对于所有 $f \in A$ ，我们得到

$$0 = D\big(d_j(f)\big) \otimes t^j. \tag{5}$$

考虑双线性映射 $L : A_n \times B_n \to B_n$， $(F, G) \mapsto FG$.。方程 (5) 意味着

$$\sum_{j=0}^{n} L\Big(D\big(d_j(f)\big), t^j\Big) = 0, \text{ for all } f \in A. \tag{6}$$

由等式（6）可得彩票计划

$$\sum_{j=0}^{n} D\big(d_j(f)\big)t^j = P \text{ for some } P \in \langle t^{n+1} \rangle. \tag{7}$$

因此，对于所有 $j \in \{0, \ldots, n\}$，均有 $D(d_j(f)) = 0$。特别地，如果 $f = x$，并利用注 2.11，则

$$0 = \Big(\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1} \\ |\alpha|=2}} F_\alpha \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}(x^{(j)}) + (2-1) \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1} \\ |\alpha|=1}} F_\alpha \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}(x^{(j)}) \Big) = F_{e_j}$$

对所有 $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$。因此，

$$D = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1} \\ |\alpha|=2}} F_\alpha \frac{1}{\alpha!} \partial x^\alpha.$$

现在，如果 $f = x^2$ 因此

$$\begin{aligned} 0 &= \Big(\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1} \\ |\alpha|=2}} F_\alpha \frac{1}{\alpha!} \partial_{x^\alpha} \Big)\big(d_j(x^2)\big) \\ &= \Big(\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1} \\ |\alpha|=2}} F_\alpha \frac{1}{\alpha!} \partial_{x^\alpha} \Big)\Big(\sum_{i=0}^{j} d_i(x) d_{j-i}(x) \Big). \end{aligned}$$

注意，对于满足 $|\alpha| = 2$ 的 $\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$

$$\frac{1}{\alpha!}\partial_{x^\alpha}\big(x^{(i)}x^{(j-i)}\big) = \begin{cases} 0, & \text{if } \alpha \neq e_i + e_{j-i} \\ 1, & \text{if } \alpha = e_i + e_{j-i} \end{cases}.$$

因此，

$$0 = \Big(\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^{n+1}\\|\alpha|=2}} F_\alpha \frac{1}{\alpha!}\partial_{x^\alpha}\Big)\Big(\sum_{i=0}^{n} d_i(x)d_{j-i}(x)\Big) = \sum_{i=0}^{j} F_{e_i+e_{j-i}}.$$

□

下面的例子表明，映射 ϕ_∞ 不是单射。

例 2.13。设 $A = \mathbb{K}[x]$。于是， $A_\infty = \mathbb{K}[x_0 \ldots, x_n, \ldots]$. 对于每个 $k \in \mathbb{N}$，定义导子 $D_k : A_k \to A_\infty$ 如下：

$$\begin{aligned} D_0 &= 0 \\ D_1 &= \frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \\ D_2 &= D_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_0 x_2} \\ D_k &= D_{k-1} + \frac{\partial^2}{\partial x_0 x_k} - \frac{\partial^2}{\partial x_1 x_{k-1}} \text{ for } k \geq 3 \end{aligned}$$

我们断言 $D = (D_0, D_1, D_2, \ldots) \in \ker \phi_\infty$。这由以下事实推出：

(1) $D = (D_0, D_1, D_2, \ldots) \in \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Der}_k^m(A_n, A_\infty)$.

(2) $\phi_k(D_k) = 0$ 对所有 $k \in \mathbb{N}$ 成立。

为证明 (1)，固定 $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$，并令 $j < k$。由于 A_j 中的单项式不含变量 x_k，我们有 $\frac{\partial^2}{\partial x_0 x_k}|_{A_j} = 0.$。另一方面，根据 Hasse-Schmidt 导数的莱布尼茨法则，我们得到 $\frac{\partial^2}{\partial x_1 x_{k-1}}|_{A_j} = 0.$ 因此， $D_k|_{A_j} = D_j$.

现在我们证明 (2)。注意， $\phi_0(D_0) = 0$，并且根据例 2.9， $\phi_1(D_1) = 0$。利用引理 2.12，我们证明对所有 $i \geq 2.$， $\phi_i(D_i) = 0$。注意， D_k 由二阶偏导数定义。因此，

$$F_{e_j}^k = D_k(x_j) = 0.$$

现在我们证明对所有 k 和所有 $j \in \{0, \dots, k\}$，$\sum_{i=0}^{j} F^k_{e_i+e_{j-i}} = 0$。首先，我们考虑 D_2。注意，

$$\begin{aligned} F^2_{e_0+e_0} = F^2_{2e_0} = D_2(x_0^2) = 0, \\ F^2_{e_0+e_1} + F^2_{e_1+e_0} = 2F^2_{e_0+e_1} = 2D_2(x_0x_1) = 0, \\ F^2_{e_0+e_2} + F^2_{e_1+e_1} + F^2_{e_2+e_0} = 2F^2_{e_0+e_2} + F^2_{2e_1} = 2D_2(x_0x_2) + D_2(x_1^2) = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

根据引理 2.12，$\phi_2(D_2) = 0$. 我们对 $k \geq 3$. 继续进行归纳。令 $\frac{\partial^2}{\partial x_i x_j} = \partial_{x_i x_j}$. 根据定义，$D_3 = D_2 + \partial_{x_0x_3} - \partial_{x_1x_2}$. 注意：

$$\begin{aligned} F^3_{e_0+e_0} = F^3_{2e_0} = D_3(x_0^2) = 0, \\ F^3_{e_0+e_1} + F^3_{e_1+e_0} = 2F^3_{e_0+e_1} = 2D_3(x_0x_1) = 0, \\ F^3_{e_0+e_2} + F^3_{e_1+e_1} + F^3_{e_2+e_0} = 2D_3(x_0x_2) + D_3(x_1^2) = 1 - 1 = 0. \\ F^3_{e_0+e_3} + F^3_{e_1+e_2} + F^3_{e_2+e_1} + F^3_{e_3+e_0} = 2D_3(x_0x_3) + 2D_3(x_1x_2) = 2 - 2 = 0. \end{aligned}$$

因此，$\phi_3(D_3) = 0$。假设 $D_k \in \text{核}\, \phi_k.$。我们已经知道，对于 $j \in \{0, \dots, k\}$，有 $D_{k+1}|_{A_j} = D_j$。利用 $j \in \{3, 4, \dots, n\}$ 的归纳法假设，我们得到

$$\sum_{i=0}^{j} F^{k+1}_{e_i+e_{j-i}} = 0.$$

对于 $j = k+1$，注意到的是

$$\sum_{i=0}^{k+1} F^{k+1}_{e_i+e_{j-i}} = \sum_{i=0}^{k+1} D_{k+1}(x_i x_{j-i}) = 2D_{k+1}(x_0x_{k+1}) + 2D_{k+1}(x_1x_k) = 2 - 2 = 0.$$

由引理 2.12，$\phi_{k+1}(D_{k+1}) = 0$。因此，对于所有 $k \in \mathbb{N}.$，$D_k \in \text{核}\, \phi_k$。

3 $\Omega^{(m)}_{A\ /k} \otimes_{A_n} P_n$ 与 $\Omega^{(m)}_{A_n\ k/}$ 之间的映射

本节研究定理 1.11 关于高阶微分模的一个推论。

定义 3.1. [9, 节 4] 对于任意 $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，我们将 P_n 定义为由下式给出的B_n-模

$$P_n := t^{-n}A_n[t]/tA_n[t]$$

当 n 有限且

$$P_\infty := A_\infty((t))/tA_\infty[[t]]$$

当 $n = \infty$ 时。

定理 1.5 的 [9] 中给出的主要推论是以下公式:

定理 3.2。 *[9, 定理 5.3]* 设 A 是一个 k-代数。对于所有 $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，都存在一个 A_n-模的同构

$$\Omega_{A_n/k} \simeq \Omega_{A/k} \otimes_{A_n} P_n.$$

接下来，我们将利用定理 1.11 研究模 $\Omega^{(m)}_{A_n\ /k}$ 与 $\Omega^{(m)}_{A\ k\ /}$ 之间的关系。

引理 3.3。 *[9, 引理 4.5]* 对于 $n \in \mathbb{N}$，将 t^{-j} 映到 t^{-j+n} 的态射给出了 B_n-模 P_n 与 B_n 之间的一个同构。相反，P_∞ 与 B_∞ 并不同构，甚至作为 A_∞- 模也不同构。

注 3.4。 [9, 注 4.3] 对于每个 A_n-模 M，都有一个典范同构

$$M \otimes_{A_n} B_n \simeq \mathrm{Hom}_{A_n}(P_n, M)$$

作为 B_n-模，由下式给出

$$G = \sum_{j=0}^{n} m_j \otimes a_j t^j \mapsto \big(\theta_G : p = \sum_{j=0}^{n} a'_{-j} t^{-j} \mapsto \sum_{j=0}^{n} a'_{-j} a_j m_j\big).$$

利用命题 2.2 的映射，我们可以明确描述一个从 $\Omega^{(m)}_{A\ /k} \otimes_A P_n$ 到 $\Omega^{(m)}_{A_n\ /k}$ 的映射。

命题 3.5. 设 $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$。设 A 是一个 k-代数。存在一个 A_n-模同态

$$\phi_n^\vee : \Omega^{(m)}_{A/k} \otimes_A P_n \to \Omega^{(m)}_{A_n/k},$$

使得 $\phi_n^\vee(d^m_A(f) \otimes t^{-j}) = d^m_{A_n}(f_{(j)})$。

证明。综合定理 1.9、命题 2.2、注 3.4 和引理 2.1，我们得到一串 A_n-同态。

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{A_n}(\Omega^{(m)}_{A_n/k}, M) \cong \mathrm{Der}^m_k(A_n, M) &\to \mathrm{Der}^m_k(A, M \otimes_{A_n} B_n) \\
&\cong \mathrm{Hom}_A(\Omega^{(m)}_{A/k}, M \otimes_{A_n} B_n) \\
&\cong \mathrm{Hom}_A(\Omega^{(m)}_{A/k}, \mathrm{Hom}_{A_n}(P_n, M)) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{A_n}(\Omega^{(m)}_{A/k} \otimes_A P_n, M).
\end{aligned}$$

所有这些同态都是显式的。从 $M = \Omega^{(m)}_{A_n/k}$ 的恒等式开始应用它们，我们得到一个同态 $\phi_n^\vee : \Omega^{(m)}_{A/k} \otimes P_n \to \Omega^{(m)}_{A_n/k}$，使得 $\phi_n^\vee(d^m_A(f) \otimes t^{-j}) = d^m_{A_n}(f_{(j)})$. □

备注 3.6. 对于通常的导子，映射 $\phi_n^\vee$ 在 [9, 引理 5.1]的证明中隐式出现。在这种情况下，$\phi_n^\vee$ 是一个同构（参见 [9, 定理 5.3]）。相反，根据定理 1.11 (3)，映射 ϕ_n 一般并非单射。特别地，根据定理 1.9，$\phi_n^\vee$ 一般并非满射。在 A 为多项式环的特殊情形下，值得指出的是，模 $\Omega^{(m)}_{A/k} \otimes P_n$ 和 $\Omega^{(m)}_{A_n/k}$ 都是自由模，但它们的秩不同（参见 [2, 备注 2.20]）。

下面的例子表明，同态 $\phi_n^\vee$ 一般而言并不是单射。

例 3.7。令 $A = \frac{\mathbb{K}[x_1,x_2]}{\langle x_1x_2\rangle}$。因此，$A_1 = \frac{\mathbb{K}[x_1^{(0)},x_1^{(1)},x_2^{(0)},x_2^{(1)}]}{\langle x_1^{(0)}x_2^{(0)}, x_1^{(0)}x_2^{(1)}+x_1^{(1)}x_2^{(0)}\rangle}$。我们来说明，在这种情况下，$\phi_1^\vee$ 不是单射。令 $f = x_1x_2$, $f_1 = x_1^{(0)}x_2^{(0)}$, $f_2 = x_1^{(0)}x_2^{(1)} + x_1^{(1)}x_2^{(0)}$.

我们考虑 $\Omega^{(2)}_{A/\mathbb{K}} \otimes_{A_1} P_1$ 的如下表示（参见 [2, 推论 2.15]，并利用 $P_1 \simeq B_1$ 是 B_1-模这一事实）：

$$\Omega^{(2)}_{A/\mathbb{K}} \otimes_{A_1} P_1 = \frac{\bigoplus_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^2\\ 1\le|\beta|\le 2}} A_1(d^2_A(x))^\alpha \otimes 1 \bigoplus_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^2\\ 1\le|\beta|\le 2}} A_1(d^2_A(x))^\alpha \otimes t^{-1}}{\langle f_\beta\otimes 1, f_\beta\otimes t\rangle_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^2\\ 0\le|\beta|\le 1}}},$$

其中 $f_\beta = (d^2_A(x))^\beta d^2_A(f)$。

类似地，考虑 $\Omega^{(2)}_{A_1/\mathbb{K}}$ 的如下表示（参见 [1, 定理 2.8]）：

$$\Omega^{(2)}_{A_1/\mathbb{K}} = \frac{\bigoplus_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^4\\ 1\le|\beta|\le 2}} d^2_{A_1}(\underline{x})^\alpha}{\langle F^1_\beta, F^2_\beta\rangle_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^4\\ 0\le|\beta|\le 1}}},$$

其中 $F^i_\beta = d^2_{A_1}(\underline{x})d^2_{A_1}(f_i)$ $i\in\{1,2\}$。

令 $F = 2((d^2_A(x_2))^2 \otimes x_1^{(0)}x_1^{(1)}) + \frac{1}{2}((d^2_A(x_2))^2 \otimes (x_1^{(0)})^2t^{-1})$。首先我们看到 $F \neq 0$. 假设 $F = 0$。这意味着

$$F - \Big(\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^2\\ 0\le|\beta|\le 1}} g^0_\beta f_\beta\otimes 1 + \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^2\\ 0\le|\beta|\le 1}} g^1_\beta f_\beta\otimes t^{-1}\Big) = 0. \tag{8}$$

特别地，方程 (8) 意味着：

$$
\begin{aligned}
&g^1_{(1,0)}((d^2_A(x_1))^2 \otimes t^{-1}) = 0\\
&(x^{(0)}_2 g^1_{(0,1)} + x^{(0)}_1 g^1_{(1,0)}) d^2_A(x_1) d^2_A(x_2) \otimes t^{-1} = 0\\
&(\frac{x^{(0)}_1}{2} - g^1_{(0,1)} x^{(0)}_1)\Big((d^2_A(x_2))^2 \otimes t^{-1}\Big) = 0
\end{aligned}
$$

因此， $g^1{}_{(0,1)} = 0$ 并且 $g^1{}_{(0,1)} = \frac{x^{(0)}_1}{2} \neq 0$，这就产生了矛盾。因此 $F \neq 0$.现在我们证明 $\phi^\vee_1(F) = 0$。首先，注意到：

$$
\begin{aligned}
\phi^\vee_1(F) &= \phi^\vee_1(2((d^2_A(x_2))^2 \otimes x^{(0)}_1 x^{(1)}_1) + \frac{1}{2}((d^2_A(x_2))^2 \otimes (x^{(0)}_1)^2 t^{-1}))\\
&= 2x^{(0)}_1 x^{(1)}_1 \phi^\vee_1((d^2_A(x_2))^2 \otimes 1) + \frac{(x^{(0)}_1)^2}{2} \phi^\vee_1((d^2_A(x_2))^2 \otimes t^{-1})\\
&= 2x^{(0)}_1 x^{(1)}_1 (d^2_{A_1}(x^{(0)}_2))^2 + (x^{(0)}_1)^2 d^2_{A_1}(x^{(0)}_2) d^2_{A_1}(x^{(1)}_2).
\end{aligned}
$$

令 $\beta_1 = = (0, 0, 1, 0)$，并注意到

$$
\begin{aligned}
F^1_{\beta_1} &= x^{(0)}_2 d^2_{A_1}(x^{(0)}_1) d^2_{A_1}(x^{(0)}_2) + x^{(0)}_1 (d^2_{A_1}(x^{(0)}_2))^2,\\
F^2_{\beta_1} &= x^{(1)}_2 d^2_{A_1}(x^{(0)}_1) d^2_{A_1}(x^{(0)}_2) + x^{(0)}_2 d^2_{A_1}(x^{(1)}_1)(d^2_{A_1}(x^{(0)}_2))^2 + x^{(1)}_1 d^2_{A_1}(x^{(0)}_2)\\
&\quad + x^{(0)}_1 d^2_{A_1}(x^{(0)}_2) d^2_{A_1}(x^{(1)}_2).
\end{aligned}
$$

此外，

$$
\begin{aligned}
x^{(1)}_1 F^1_{\beta_1} + x^{(0)}_1 F^2_{\beta_1} &= x^{(1)}_1 \Big(x^{(0)}_2 d^2_{A_1}(x^{(0)}_1) d^2_{A_1}(x^{(0)}_2) + x^{(0)}_1 (d^2_{A_1}(x^{(0)}_2))^2\Big)\\
&\quad + x^{(0)}_1 \Big(x^{(1)}_2 d^2_{A_1}(x^{(0)}_1) d^2_{A_1}(x^{(0)}_2) + x^{(0)}_2 d^2_{A_1}(x^{(1)}_1) d^2_{A_1}(x^{(0)}_2)\\
&\quad + x^{(1)}_1 (d^2_{A_1}(x^{(0)}_2))^2 + x^{(0)}_1 d^2_{A_1}(x^{(0)}_2) d^2_{A_1}(x^{(1)}_2)\Big)\\
&= \Big(x^{(1)}_1 x^{(0)}_2 + x^{(0)}_1 x^{(1)}_2\Big) d^2_{A_1}(x^{(0)}_1) d^2_{A_1}(x^{(0)}_2)\\
&\quad + 2x^{(0)}_1 x^{(1)}_1 (d^2_{A_1}(x^{(0)}_2))^2 + \Big(x^{(0)}_1 x^{(0)}_2\Big) d^2_{A_1}(x^{(1)}_1) d^2_{A_1}(x^{(0)}_2)\\
&\quad + (x^{(0)}_1)^2 d^2_{A_1}(x^{(0)}_2) d^2_{A_1}(x^{(1)}_2)\\
&= 2x^{(0)}_1 x^{(1)}_1 (d^2_{A_1}(x^{(0)}_2))^2 + (x^{(0)}_1)^2 d^2_{A_1}(x^{(0)}_2) d^2_{A_1}(x^{(1)}_2).
\end{aligned}
$$

因此，

$$
\begin{aligned}
\phi^\vee_1(F) &= 2x^{(0)}_1 x^{(1)}_1 (d^2_{A_1}(x^{(0)}_2))^2 + (x^{(0)}_1)^2 d^2_{A_1}(x^{(0)}_2) d^2_{A_1}(x^{(1)}_2)\\
&= x^{(1)}_1 F^1_{\beta_1} + x^{(0)}_1 F^2_{\beta_1} = 0.
\end{aligned}
$$

4 万有哈斯-施密特导子与通常偏导数的一个公式

在这项研究过程中，我们遇到一个将 Hasse-Schmidt 导子与通常的偏导数联系起来的公式。对于一阶导数，这种关系似乎广为人知（参见 [9, 第 5] 节或 [2, 引理 2.9]，其中给出了下述公式的一个初等证明；另见 [22, 命题 2.3.11] 和 [22, 推论 2.3.12 和 2.3.13]，了解更多应用）：

$$\frac{\partial f^{(k)}}{\partial x_i^{(j)}} = d_{k-j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \text{ for all } 0 \le j \le k \le n. \tag{9}$$

在最后这一节中，我们给出一个类似的公式，用来联系哈斯-施密特导子与高阶偏导数。

对于 $\alpha = (\alpha_1^0, \ldots, \alpha_1^n, \ldots, \alpha_s^0, \ldots, \alpha_s^n) \in \mathbb{N}^{s(n+1)}$，令

$$\hat{\alpha} := (\sum_{j=0}^{n} \alpha_1^j, \sum_{j=0}^{n} \alpha_2^j, \ldots, \sum_{j=0}^{n} \alpha_s^j) \in \mathbb{N}^s.$$

对于 $i \in \{1, \ldots, s\}$，我们定义 $\lambda_i := \sum_{j=0}^{n} j\alpha_i^j$。记 $\lambda_\alpha := \sum_{i=1}^{s} \lambda_i$。

命题 4.1. 设 $l, n \in \mathbb{N}$。给定 $\alpha \in \mathbb{N}^{s(n+1)}$，使得 $0 \le \lambda_\alpha \le l \le n$。则以下恒等式作为多项式环$\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_s]$上的函数成立：

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \circ d_l = d_{l-\lambda_\alpha} \circ \frac{\partial^{\hat{\alpha}}}{\partial x^{\hat{\alpha}}}.$$

证明. 记 $\partial_{x^\alpha} = \frac{\partial^\alpha}{\partial_{x^\alpha}}$. 。由恒等式 (9),

$$\partial_{x_i^{(j)}} \circ d_k = d_{k-j} \circ \partial_{x_i}, \ 0 \le j \le k \le n. \tag{10}$$

根据定义，$\partial_{(x_i^{(j)})^{\alpha_i^j}} \bigcirc d_l = \partial_{x_i^{(j)}}(\partial_{x_i^{(j)}} \ldots (\partial_{x_i^{(j)}} \bigcirc d_l))$. 由等式（10）可得

$$\begin{aligned}
\partial_{(x_i^{(j)})^{\alpha_i^j}} \circ d_l &= \partial_{x_i^{(j)}}\left(\partial_{x_i^{(j)}} \ldots \partial_{x_i^{(j)}}\left(\partial_{x_i^{(j)}} \circ d_l\right)\right) \\
&= \partial_{x_i^{(j)}}\left(\partial_{x_i^{(j)}} \ldots \partial_{x_i^{(j)}}\left(d_{l-j}(\partial_{x_i})\right)\right) \\
&= \partial_{x_i^{(j)}}\left(\partial_{x_i^{(j)}} \ldots \partial_{x_i^{(j)}}\left(d_{l-2j}(\partial_{x_i} \circ \partial_{x_i})\right)\right).
\end{aligned}$$

重复这一过程，我们得到

$$\begin{aligned}\partial_{(x_i^{(j)})^{\alpha_i^j}} \circ d_l &= d_{l-\alpha_i^j \cdot j} \circ \left(\partial_{x_i}\left(\partial_{x_i} \cdots (\partial_{x_i})\right)\right) \\ &= d_{l-\alpha_i^j \cdot j} \circ \partial_{x_i^{\alpha_i^j}}. \end{aligned} \tag{11}$$

固定 $i \in \{1, \ldots, s\}$。则方程 (11) 给出

$$\begin{aligned}\partial_{(x_i^{(0)})^{\alpha_i^0}} \circ \cdots \circ \partial_{(x_i^{(n)})^{\alpha_i^n}} \circ d_l &= \partial_{(x_i^{(0)})^{\alpha_i^0}} \circ \cdots \circ \partial_{(x_i^{(n-1)})^{\alpha_i^{n-1}}} \circ d_{l-\alpha_i^n \cdot n} \circ \partial_{x_i^{\alpha_i^n}} \\ &= \partial_{(x_i^{(0)})^{\alpha_i^0}} \circ \cdots \circ d_{l-(\alpha_i^n n)-(\alpha_i^{n-1}(n-1))} \circ \partial_{x_i^{\alpha_i^{n-1}}} \circ \partial_{x_i^{\alpha_i^n}}.\end{aligned}$$

重复此过程得到

$$\begin{aligned}\partial_{(x_i^{(0)})^{\alpha_i^j}} \circ \cdots \circ \partial_{(x_i^{(n)})^{\alpha_i^j}} \circ d_l &= d_{l-\sum_{j=0}^n \alpha_i^j \cdot j} \circ \partial_{x_i^{\sum_{j=0}^n \alpha_i^j}} \\ &= d_{l-\lambda_i} \circ \partial_{x_i^{\sum_{j=0}^n \alpha_i^j}}.\end{aligned}$$

前面的计算导出了下面的恒等式。对于 $\alpha = (\alpha_1^0, \ldots, \alpha_1^n, \ldots, \alpha_s^0, \ldots, \alpha_s^n) \in \mathbb{N}^{s(n+1)}$，我们有

$$\begin{aligned}\partial_{x^\alpha} \circ d_l &= \partial_{(x_1^{(0)})^{\alpha_1^0}} \circ \cdots \circ \partial_{(x_s^{(n)})^{\alpha_s^n}} \circ d_l \\ &= \partial_{(x_1^{(0)})^{\alpha_1^0}} \circ \cdots \circ \partial_{(x_{s-1}^{(n)})^{\alpha_{s-1}^n}} \circ d_{l-\lambda_s} \circ \partial_{x_s^{\sum_{j=0}^n \alpha_s^j}} \\ &= \partial_{(x_1^{(0)})^{\alpha_1^0}} \circ \cdots \circ \partial_{(x_{s-2}^{(n)})^{\alpha_{s-2}^n}} \circ d_{l-\lambda_s-\lambda_{s-1}} \circ \partial_{x_{s-1}^{\sum_{j=0}^n \alpha_{s-1}^j}} \circ \partial_{x_s^{\sum_{j=0}^n \alpha_s^j}}.\end{aligned}$$

反复应用此步骤，我们得出

$$\begin{aligned}\partial_{x^\alpha} \circ d_l &= d_{l-\sum_{i=1}^s \lambda_i} \circ \partial_{x_1^{\sum_{j=0}^n \alpha_1^j}} \circ \cdots \circ \partial_{x_s^{\sum_{j=0}^n \alpha_s^j}} \\ &= d_{l-\lambda} \circ \partial_{x^{\hat{\alpha}}}.\end{aligned}$$

□

参考文献

[1] Barajas, P., and Duarte, D. 关于超曲面的 n 阶微分模。纯粹与应用代数杂志 224, 2 (2020), 536–550。

[2] Barajas, P., and Duarte, D. 关于超曲面喷射概形的 Nobile 型定理。大阪数学杂志 60, 3 (2022)。[3] Brenner, H., Jeffries, J., and Núñez-Betancourt, L. 用微分算子量化奇点。数学进展 358 (2019), 106843。[4] Chávez-Martínez, E. 由最小解消分解 A^n 的 n 阶 Nash 爆裂的正规化，2021。[5] Chávez-Martínez, E., Duarte, D., and Flores, A. G. 高阶切映射及关于曲线高阶 Nash 爆裂的一个猜想。Mathematische Zeitschrift 297 (2018), 1767–1791。[6] Chiu, C., and Narváez Macarro, L. 模的高阶导子与 Hasse–Schmidt 模。Michigan Math. J. 提前出版 (2022), 1 – 15。[7] de Alba, H., and Duarte, D. 关于超曲面的 n 阶微分模的 k-扭元。纯粹与应用代数杂志 225, 8 (2021), 106646。[8] de Fernex, T., and Docampo, R. 喷射概形的 Nash 爆裂。傅里叶研究所年刊 69, 6 (2019), 2577–2588。[9] de Fernex, T., and Docampo, R. 弧空间上的微分。Duke Mathematical Journal 169, 2 (2020), 353 – 396。[10] Duarte, D. 正规环面簇上的高阶 Nash 爆裂。代数杂志 418 (2014), 110–128。[11] Duarte, D. 超曲面高阶 Nash 爆裂的计算方面。代数杂志 477 (2017), 211–230。[12] Duarte, D., and Núñez-Betancourt, L. 素特征下正规环面簇的高阶 Nash 爆裂。Tohoku Mathematical Journal 73, 3 (2021), 449 – 462。[13] Duarte, D., and Núñez-Betancourt, L. 素特征下的 Nash 爆裂。Revista Matem ´atica Iberoamericana 38, 1 (2022), 257 – 267。[14] Grothendieck, A. ´代数几何要素：IV。 ´概形与概形态射的局部研究，第三部分。Publications Math ´ematiques de l'IH ´ES 28 (1966), 5–255。

[15] Hussain, N., Ma, G., Yau, S. S.-T., and Zuo, H. 奇点的高阶纳什爆破局部代数及其导子李代数。代数杂志 618 (2023)，165–194。
[16] Ishii, S. 光滑性与喷射概形。新潟—富山奇点 2007（纯粹数学高级研究）56 (2009)，187–199。[17] Kashiwara, M., and Schapira, P. 范畴与层。数学科学基础丛书：332。Springer 出版社，2006。
[18] Nakai, Y. 高阶导子 I。大阪数学杂志 7 (1970)，1–27。
[19] Narváez Macarro, L. Hasse–Schmidt 导子、除幂与微分光滑性。傅里叶研究所年刊 59，7 (2009)，2979–3014。[20] Narváez Macarro, L. 关于非零特征下的 m-可积导子模。数学进展 229，5 (2012)，2712–2740。[21] Narváez Macarro, L. Hasse–Schmidt 导子与经典导子之比较。“奇点概览”。当代数学，美国数学会（2018）。
[22] Narváez Macarro, L. Hasse-Schmidt 导子的迷你课程。https://personal.us.es/narvaez/course HS 2018.pdf，2018。
[23] Osborn, H. 微分模 I。数学年刊 170 (1967)，221–244。[24] Vojta, P. 通过 Hasse-Schmidt 导子研究射流。载于《丢番图几何：2005 年 4 月 12 日至 7 月 22 日在意大利比萨举行的研讨会精选论文》。比萨：高等师范出版社，2007 年，第 335–361 页。

Paul Barajas, Universidad Autónoma de Zacatecas, Paseo a La Bufa entronque Solidaridad s/n, CP 98000, Zacatecas, Mexico36178329@uaz.edu.mx, paulvbg@gmail.com