arXiv:2305.04552v1 [math.DG] 8 May 2023

Lorentz–Minkowski空间中的类时极小曲面的等距类与反等距类

SHINTARO AKAMINE

摘要。欧几里得三维空间 $\mathbb{R}^3$ 中极小曲面的等距类具有刚性：如果两个单连通极小曲面等距，那么其中一个全等于另一个的特定一参数族中的某个曲面，该一参数族称为伴随族。另一方面，具有洛伦兹度量的曲面的情况则有所不同。本文证明，在 Lorentz-Minkowski三维空间 $\mathbb{R}^3_1$ 中，存在两个彼此等距的类时极小曲面，但其中一个不属于另一个的伴随族的全等类。我们还在曲面没有平坦点的假设下，证明了类时极小曲面的等距类与反等距类的刚性定理。

此外，我们还展示了此类曲面的对称性如何在各种变形（包括等距变形和反等距变形）过程中传播。特别是，我们讨论了 Goursat 变换的某些对称性守恒律。

1. 引言

将平均曲率保持不变并允许一参数等距变形族的曲面称为*Bonnet*曲面。根据 Bonnet [6]，，已知欧几里得空间 $\mathbb{R}^3$ 中任意非全脐的常平均曲率曲面都是 Bonnet曲面。对于 $\mathbb{R}^3$中的极小曲面，每个极小曲面都有一个一参数族的等距极小曲面，称为伴随族。此外，Schwarz [23,p.175]证明了如下刚性定理：

事实 1.1。 如果 $\mathbb{R}^3$ 中的两个单连通极小曲面是等距的，那么其中一个与伴随族中的某个曲面全等。

然而，在具有洛伦兹度量的曲面情形中，情况如下所述有所不同。

- 不仅可以考虑等距变形，还可以考虑反等距变形；后者会反转原曲面的第一基本形式。
- 形算子不一定可对角化，因此在此类曲面上可能出现一个特殊点，即所谓的拟脐点，在该点形算子不可对角化（见第 2.2 节）。此外，即使在极小曲面的情形中，脐点和拟脐点一般也不是孤立的。

本文研究洛伦兹-闵可夫斯基三维空间 $\mathbb{R}^3_1$ 中的类时极小曲面，其符号为 $(-,+,+)$。这类曲面的诱导度量是洛伦兹度量，且平均曲率恒为零。以下是第一个主要定理。

定理 A。 以下陈述成立。

(1) 存在两个平坦类时极小曲面，它们彼此等距，但其中一个不属于另一个的伴随族的全等类。

2010 数学学科分类。 主要分类53A10；次要分类53B30、57R45。关键词和短语。 Lorentz-Minkowski 空间、类时极小曲面、对称性、等距类、反等距类。本研究部分得到了日本学术振兴会（JSPS）科学研究费助成事业（KAKENHI）项目编号19K14527和23K12979的资助。

设 f_1 和 f_2 为 $\mathbb{R}^3_1$ 中不含平坦点的单连通类时极小曲面。此外，以下结论成立。

(2) 如果 f_1 和 f_2 等距，那么 f_1 与伴随族$\{(f_2)_\theta\}_{\theta\in\mathbb{R}}$ 中的一个曲面全等。(3) 如果 f_1 和 f_2 反等距，那么 f_1 与共轭曲面 f_2的伴随族$\hat{}$ $\hat{}\{(f_2)_\theta\}_{\theta\in\mathbb{R}}$ 中的一个曲面全等。

陈述 (1) 给出了一个反例，表明事实 1.1 中关于类时极小曲面的相同断言并不成立。陈述 (2) 和 (3) 表明，在曲面没有平坦点的假设下，类时极小曲面的等距类与反等距类具有刚性，其中平坦点是指高斯曲率 K 为零的点。我们指出，类时极小曲面的平坦点由脐点和拟脐点构成。类时极小曲面的伴随族和共轭曲面的定义将在定义 2.3 中给出。

在本文的后半部分，我们考察类时极小曲面的对称性。我们说明这类曲面的对称性如何在各种变形下传递，包括上述等距变形和反等距变形。每个从（单连通）洛伦兹曲面 M 到 $\mathbb{R}^3_1$ 的共形类时极小曲面 $f\colon M\to\mathbb{R}^3_1$，都可表示为取值于抛复三维空间 $\mathbb{C}'^3$ 中的双全纯零曲线 $\Phi\colon M\to\mathbb{C}'^3$ 的实部，即 $f=\mathrm{Re}\,\Phi$。更具体地说，Konderak 给出了一个 Weierstrass 型表示公式 [17]，更多细节见事实 2.1。由于保角性在形如 $f_A:=\mathrm{Re}\,A\Phi$ 的变换下保持不变，这种变换称为 f 的 ***Goursat*变换**（见 [11]），其中 A 是抛复共形群中的一个矩阵

$$\mathrm{CO}(1,2;\mathbb{C}')=\{A\in\mathrm{M}(3,\mathbb{C}')\mid {}^tAI_{1,2}A=cI_{1,2},\ c\in\mathbb{C}',\ c\bar{c}\neq 0\},$$

其中，${}^tA$ 是 A 的转置矩阵，且$I_{1,2}=\mathrm{diag}(-1,1,1)$。$f$的对称性 g是洛伦兹曲面 M的一个等距变换，满足 $f\circ g=Of+t$，其中 O 属于 $\mathbb{R}^3_1$ 的非定型正交群$O(1,2)$，而 $t\in\mathbb{R}^3_1$是一个向量；我们称 O 为 g的线性部分。这类对称性的集合记为 $S_f(M)$，通常称为空间群（见定义 2.7）。在上述设定下，我们给出 Goursat变换的以下对称性守恒律。

定理 B. 设 $f\colon M\to\mathbb{R}^3_1$ 是一个单连通类时极小曲面，f_A 是其在 $A\in\mathrm{CO}(1,2;\mathbb{C}')$和 $g\in S_f(M)$ 下的 ***Goursat*** 变换，且线性部分为 O。则以下结论成立。

(1) 当 $\tilde{g}$ 为保向时，存在 $O\in\mathrm{O}(1,2)$ 使得 $AO=OA$ 当且仅当$\tilde{g}\in S_{f_A}(M)$ 成立，且其线性部分为 O。(2) 当 $\tilde{g}$ 为反向时，存在 $O\in\mathrm{O}(1,2)$ 使得 $AO=OA$ 当且仅当$\tilde{g}\in S_{f_A}(M)$ 成立，且其线性部分为 O。

人们经常讨论变形过程中极小曲面的对称性守恒。一个众所周知的经典对称性对应是：$\mathbb{R}^3$ 中的极小曲面（或 $\mathbb{R}^3_1$中的类时极小曲面）上关于一条直线的直线对称性，对应于共轭曲面关于与该直线正交的平面的平面对称，参见[9, 15, 16], 例如。类似地，正如 Kim、Koh、Shin 和 Yang [16], 所讨论的，$\mathbb{R}^3_1$中的类时极小曲面上的收缩奇点（也称为圆锥状奇点）与折叠奇点之间也存在对称性对应。所有这些对称性都源于反射原理，而反射原理由形如 $g(z)=\bar{z}$的反向等距变换导出。因此，通过考虑 $J=jI_3$ 的 Goursat变换 f_J，其中 j 是 $\mathbb{C}'$ 的虚数单位，I_3 是单位矩阵，可以得到这些对称性关系，如定理 B 所示。此外，通过在第4.2节中考虑由特殊矩阵 D 给出的 Goursat变换 f_D，这些关于直线、平面、收缩奇点和折叠奇点的对称性可以在推论 4.9 中得到统一。具体示例见例5.1和图1。

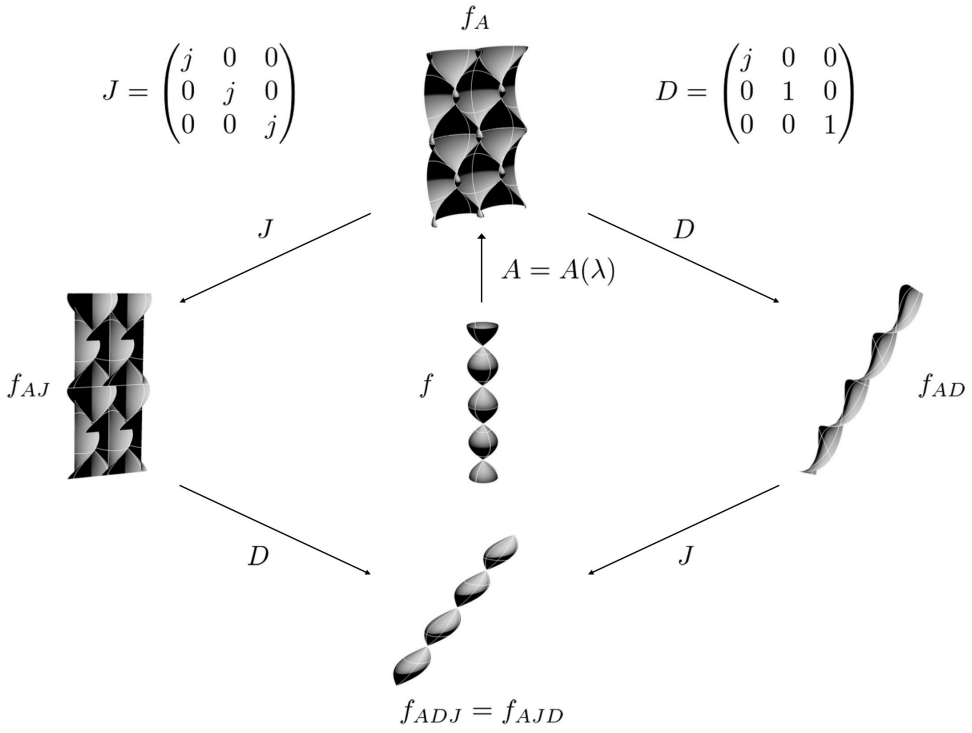

图1。在 Goursat变换下的对称性彼此相关：初始曲面 f （椭圆悬链面）上的两个保向平移对称性沿一个方向退化，其性质如推论 4.3 所述得以保持。此外，四种反向对称性—— f_A的平面对称、 f_{AJ}的直线对称、 f_{AD} 的折叠对称性以及 f_{ADJ}的点对称——也彼此对应，如推论 4.9 所述。

对于平移对称性，Meeks [22]给出了欧几里得空间中的共轭极小曲面具有平移对称性的充要条件。Leschke 和 Moriya[18] 还揭示了 $\mathbb{R}^3$ 和 $\mathbb{R}^4$中极小曲面的单因子 dressing 的平移对称性守恒结果，而这也是 Goursat变换的一种特殊形式。由于平移对称性对应于定理 B 中 $O = I_3$ 的情形，因此我们也在推论 4.3 中得到了平移对称性的守恒定律。

类似地，作为定理 B 的一个应用，通过考虑 CO(1，2;$\mathbb{C}'$) 中的特定矩阵，

$$J(\theta) = \begin{pmatrix} \mathsf{e}^{j\theta} & 0 & 0 \\ 0 & \mathsf{e}^{j\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \mathsf{e}^{j\theta} \end{pmatrix}, \quad \hat{J}(\theta) = \begin{pmatrix} j\mathsf{e}^{j\theta} & 0 & 0 \\ 0 & j\mathsf{e}^{j\theta} & 0 \\ 0 & 0 & j\mathsf{e}^{j\theta} \end{pmatrix} \text{ and } A(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda+\frac{1}{\lambda}}{2} & j\frac{\lambda-\frac{1}{\lambda}}{2} & 0 \\ j\frac{\lambda-\frac{1}{\lambda}}{2} & \frac{\lambda+\frac{1}{\lambda}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

其中 $\theta \in \mathbb{R}$ 和 $\lambda > 0$，我们在推论 4.5 中得到了关于等距变形 $\{f_\theta\} = \{f_{J(\theta)}\}$、反等距变形 $\{f_\theta\} = \{f_{\hat{J}(\theta)}\}$ 的对称性关系。这是洛伦兹情形下对应于 Meeks [22，定理 5.5] 中关于极小曲面结果的对应结论；对于 $\{f_{A(\lambda)}\}$ 这些在第 4.3 节讨论的称为 *López-Ros*变形的变形，亦是如此。

本文组织如下：第 2 节介绍双复分析和类时极小曲面的一些概念。第 3 节探讨类时极小曲面的等距类与反等距类。定理 A 的证明分为两部分：命题 3.1 和定理 3.4 的证明。关于定理 A 的 (1)，我们还在命题 3.2 中确定了所有平坦类时极小曲面。第 4 节证明定理 B，并给出它在若干著名的重要变形与变换中的应用。最后，第 5 节从 Goursat变换的角度描述若干具体例子的对称性之间的关系。

2. 预备知识

首先，我们简要回顾双复分析和类时极小曲面的理论。有关更详细的引言，请读者参阅诸如 [1, 2, 14, 17, 26]等文献及其参考文献。

2.1. 双复分析。 双复数 （或分裂复数）是形如 $z = x + jy$ 的数 z，其中 $x,\ y \in \mathbb{R}$，且 j 是满足 $j^2 = 1$ 的虚数单位。我们用 $\mathbb{C}'$ 表示这类双复数的集合，并称之为双复平面。与复数的情形类似， $\mathbb{C}'$ 在 $\mathbb{R}$ 上构成一个代数，并且可以定义.....的概念。

- the 实部 $\operatorname{Re} z := x$ and the 虚部 $\operatorname{Im} z := y$ of $z = x + jy$,
- 作为 $z = x + jy$ 的共轭 $\bar{z}$ $\bar{z} := x - jy$，并且
- z 的模平方定义为 $|z|^2 := z\bar{z} = x^2 - y^2$。

需要指出的是，关系 $|z|^2 < 0$ 有可能成立，而关系 $|jz|^2 = -|z|^2$ 也成立。

给定一个双复函数 $\mathsf{f} : \Sigma \subset \mathbb{C}' \to \mathbb{C}'$，其中 Σ 是一个单连通域。若 f 满足以下条件，则称 f 为双全纯函数:

$$\mathsf{f}_{\bar{z}} = \partial_{\bar{z}}\mathsf{f} = 0, \tag{1}$$

其中 $\partial_z := \frac{1}{2}(\partial_x + j\partial_y)$ 和 $\partial_{\bar{z}} := \frac{1}{2}(\partial_x - j\partial_y)$ 是双复 Wirtinger 导数。此外，若函数 $\mathsf{f} : \Sigma \to \mathbb{C}'$ 在 Σ 的一个开稠密子集上取值于 $\mathbb{C}'$，且对任意 $p \in \Sigma$，都存在一个双全纯函数 g，使得 fg 在 p附近是双全纯的，则称 f 为双全纯函数。

我们回顾本文中用到的一些基本双复解析函数。指数函数 e^z 定义为

$$\mathsf{e}^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

我们可以看到双复数版本的欧拉公式

$$\mathsf{e}^{j\theta} = \cosh\theta + j\,\sinh\theta, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

利用此函数，双曲线 $\{z \in \mathbb{C}' \mid |z|^2 = 1\}$ 或 $\{z \in \mathbb{C}' \mid |z|^2 = -1\}$ 上的每个元素分别可写为 $z = \pm\mathsf{e}^{j\theta}$ 或 $z = \pm j\mathsf{e}^{j\theta}$，其中某个 θ，这将在定理 3.4 的证明中发挥重要作用。

双复圆函数也通过对其实数对应函数进行解析延拓来定义，如下所示。

$$\mathtt{cos}\, z := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \mathtt{sin}\, z := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \mathtt{tan}\, z := \frac{\mathtt{sin}\, z}{\mathtt{cos}\, z}.$$

函数 $\mathtt{cos}\, z$ 和 $\mathtt{sin}\ z$ 在 $\mathbb{C}'$ 上是双全纯的，并满足以下关系

$$\mathtt{cos}\, z = \cos x \cos y - j \sin x \sin y, \quad \mathtt{sin}\, z = \sin x \cos y + j \cos x \sin y,$$

其中 $z = x + jy$。函数 $\mathtt{tan}\, z$ 在 $\mathbb{C}'$ 上是双全纯的。

2.2. 类时极小曲面及其对称群。令 $\mathbb{R}^3_1$ 为具有不定内积的 Lorentz-Minkowski 三维空间。

$$\langle {}^t(x_1,x_2,x_3), {}^t(y_1,y_2,y_3)\rangle = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

若曲面 $f\colon\ M \to \mathbb{R}^3_1$ 从一个二维流形 M 到 $\mathbb{R}^3_1$，则当其第一基本形式 $\mathrm{I}_f = \langle df, df\rangle$ 为洛伦兹型时，称其为类时。类时曲面的高斯曲率 K 和平均曲率 H 定义如下。

$$K := \det S, \quad H := \frac{1}{2}\mathrm{tr}S,$$

其中，S 是 f 的形算子。类时曲面的显著性质之一是形算子的可对角化性。类时曲面的形算子 S 并不总能在 $\mathbb{R}$ 上对角化，也就是说，主曲率可能是复数。更准确地说，在 $\mathbb{R}^3_1$ 中的类时曲面的每一点处，S 的可对角化性有以下三种可能：

(i) S 在 $\mathbb{R}$ 上可对角化。在这种情况下，$H^2 - K \geq 0$，且等式在脐点处成立。(ii) S 在 $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ 上可对角化。在这种情况下，$H^2 - K < 0$。(iii) S 在 $\mathbb{C}$ 上不可对角化。在这种情况下，$H^2 - K = 0$。满足此条件的每一点称为拟脐点（见 [8]）。

本文讨论类时极小曲面，它们是满足 $H = 0$ 的类时曲面。因此，上述关系表明，S 的可对角化性与 K 的符号直接相关，而类时极小曲面对 K 的符号没有限制。这与以下情形截然不同：$K \leq 0$ 对 $\mathbb{R}^3$ 中的极小曲面成立，而 $K \geq 0$ 对 $\mathbb{R}^3_1$ 中的极大曲面成立。

利用双复分析，类时极小曲面在洛伦兹曲面上存在一种魏尔斯特拉斯型表示 [17]（对于带奇点的曲面，另见 [1]）：

事实 2.1. 任意类时极小曲面 $f\colon\ M \to \mathbb{R}^3_1$ 均可表示为

$$f(z) = \mathrm{Re}\int {}^t(-(1+h^2), j(1-h^2), 2h)\eta \tag{2}$$

定义在一个单连通洛伦兹曲面 M 上，其中 h 是双全纯的，而 η 和 $h^2\eta$ 是双全纯的。此外，该曲面的诱导度量为

$$\mathrm{I}_f = -(1-|h|^2)^2|\eta|^2. \tag{3}$$

我们称 (h,η) 为类时极小曲面 f 的魏尔斯特拉斯数据。

注记 2.2。双全纯函数 h 按如下方式与 f 的高斯映射对应。设 $S^2_1 = \{{}^t(x_1,\ x_2,\ x_3) \in \mathbb{R}^3_1 \mid -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ 为单位伪球面，$H^1 = \{{}^t(x_1,\ x_2) \in \mathbb{R}^2_1 \mid -x_1^2 + x_2^2 = -1\}$ 为 x_1x_2-平面上的双曲线，并将其视为闵可夫斯基平面 $\mathbb{R}^2_1$。我们考虑关于点 $(0,\ 0,\ 1)$ 的如下立体投影 $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{x}) = {}^t\left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}\right), \quad \boldsymbol{x} = {}^t(x_1,x_2,x_3)$$

从 $S^2_1 \setminus \{x_3 \neq 1\}$ 到 $\mathbb{R}^2_1 \setminus H^1$。由于我们可以取一个单位法向量场 ν，使其属于 (2) a s

$$\nu = \frac{1}{1-|h|^2}\,{}^t\big(2\,\mathrm{Re}\,h, 2\,\mathrm{Im}\,h, 1+|h|^2\big),$$

我们有如下关系 $\mathcal{P}\circ\nu = h$，其中我们将 x_1x_2 平面与 $\mathbb{C}'$ 等同。

与极小曲面和极大曲面的情形类似，类空极小曲面也具有如下的伴随族和共轭曲面。

定义 2.3（伴随族和共轭曲面）。设 f 是由魏尔斯特拉斯数据 (h, η) 表示的类时极小曲面（如式 (2)），我们定义 伴随族 $\{f_\theta\}_{\theta\in\mathbb{R}}$ 为由魏尔斯特拉斯数据 $(h, \mathrm{e}^{j\theta}\eta)$ 定义的类时极小曲面 f_θ。我们还将由魏尔斯特拉斯数据 $(h, j\eta)$ 定义的类时极小曲面 f 称为 f 的共轭曲面。

注 2.4. 与极小曲面和极大曲面不同，共轭曲面 f 不是伴随族 $\{f_\theta\}_{\theta\in\mathbb{R}}$的成员。根据 (3) 和关系式 $|jz|^2 = -|z|^2$，每个 f_θ 都与原曲面 $f = f_1$ 等距，而 f 与 f反等距。

魏尔斯特拉斯型表示公式 (2) 为类时极小曲面给出了一个共形参数化。此外，类时曲面在零坐标(u, v)上具有以下特征，在这些坐标下，曲面的第一基本形式写作 $\mathrm{I}_f = \Lambda du dv$，其中 Λ 是某个函数。

事实 2.5 ([21]). 如果 $\varphi(u)$ 和 $\psi(v)$ 是 $\mathbb{R}^3_1$ 中的零曲线，且 $\varphi'(u)$ 和 $\psi'(v)$ 对所有 u 和 v均线性无关，那么

$$f(u, v) = \varphi(u) + \psi(v) \tag{4}$$

是一个类时极小曲面。反过来，任意类时极小曲面都可以局部写成方程(4)，其中包含两条零曲线。

注 2.6. 我们可以很容易地验证，定义 2.3 中的伴随族 $\{f_\theta\}_{\theta\in\mathbb{R}}$ 和共轭曲面 f 分别对应于式 (4) 中生成零曲线 φ 和 ψ 的变形，具体如下。

$$f_\theta(u, v) = e^\theta\varphi(u) + e^{-\theta}\psi(v), \quad \hat{f}(u, v) = \varphi(u) - \psi(v).$$

这些曲面具有关系 $f_\theta = \cosh\theta f + \sinh\theta f$。

在第 4 节中，我们将看到，类时极小曲面的对称性可以通过包括上述等距变形和反等距变形在内的各种变形来加以控制。为此，我们基于文献 [22] 中的研究定义类时极小曲面的对称群。

定义 2.7（空间群）。设 $f\colon M \to \mathbb{R}^3_1$ 是一个类时极小曲面。$f(M)$ 在 $\mathbb{R}^3_1$中的对称性所诱导的 M的等距变换群称为 f的空间群$S_f(M)$，它由满足 $f(g(p)) = Of(p) + t$的等距变换 $g\colon M \to M$ 组成，其中 $O \in O$是一个矩阵$(1, 2)$，$t \in \mathbb{R}^3_1$是一个向量，$p \in \mathbb{R}^3_1$为任意值。

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow[f]{} & f(M) \subset \mathbb{R}^3_1 \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \text{isometry of } \mathbb{R}^3_1} \\ M & \xrightarrow{f} & f(M) \subset \mathbb{R}^3_1 \end{array}$$

我们称矩阵部分 O为 $g \in S_f(M)$的线性部分。我们还用 $S^\circ_f(M)$表示 $S_f(M)$的保向子群，用 $S^r_f(M)$表示 $S_f(M)$的反向元素。

3. 刚性定理

正如我们在注 2.4 和引言中所见，伴随族给出了等距变形，反过来，根据事实 1.1 的意义，结论也成立。在事实 1.1 的证明中，非平面极小曲面的平坦点是孤立的这一事实以及实解析性发挥了重要作用，例如可见于 [24, p.275], 。基于同样的原因，同样的结论显然也适用于 $\mathbb{R}^3_1$中的极大曲面。

然而，类时极小曲面的平坦点，即满足 $K=0$ 的点，由脐点和拟脐点组成，并且一般而言并非孤立。因此，我们可以构造一个反例，说明事实 1.1 中关于类时极小曲面的相同断言并不成立。

命题 3.1。 存在两个彼此等距的类时极小曲面，但其中一个不属于另一个的伴随族的全等类。

证明。 我们如下构造两个彼此等距的平坦类时极小曲面，其中一个是类时平面，而另一个不是。

$$f_1(u,v)=\varphi_1(u)+{}^t(v,0,v),\quad \varphi_1(u)={}^t(-2,\sqrt{3},1)e^u/2,$$
$$f_2(u,v)=\varphi_2(u)+{}^t(v,0,v),\quad \varphi_2(u)={}^t\left(-u-\frac{3}{4}e^u,2\sqrt{3}e^{u/2},-u+\frac{3}{4}e^u\right),$$

其中 φ_1 和 φ_2 是零曲线。直接计算可得，曲面 f_1 和 f_2 的第一基本形式 I_{f_1} 和 I_{f_2} 满足

$$\mathrm{I}_{f_1}=\mathrm{I}_{f_2}=3e^u dudv,$$

因此，曲面 f_1 和 f_2 等距。

根据定义，曲面 f_1 是一个类时平面，且为全脐。曲面 f_2 是全拟脐的，因为它具有如下形式的不可对角化形算子

$$\begin{pmatrix}0&0\\ \sqrt{3}e^{-u/2}&0\end{pmatrix}.$$

最后，由注 2.6 可知，平面的伴随族仍为平面。因此，我们得到所需结果。□

命题 3.1 表明，存在许多平坦类时极小曲面。这里，我们确定这类平坦类时极小曲面。

命题 3.2。 $\mathbb{R}^3_1$ 中的任意平坦类时极小曲面都是柱面，其底曲线和导曲线均为类光曲线。

证明。 我们在定义域 D 上考虑如下形式的局部参数化 (4)：$(u_0-\varepsilon,\ u_0+\varepsilon)\times(v_0-\varepsilon,\ v_0+\varepsilon)$。在 D 上，第一基本形式和第二基本形式可写为如下形式。

$$\mathrm{I}=2\Lambda dudv\quad\text{and}\quad \mathrm{II}=Qdu^2+Rdv^2.$$

因此，形算子 S 和高斯曲率 K 为

$$S=\mathrm{I}^{-1}\mathrm{II}=\begin{pmatrix}0&\frac{R}{\Lambda}\\ \frac{Q}{\Lambda}&0\end{pmatrix},\quad K=-\frac{QR}{\Lambda^2}. \tag{5}$$

这里我们指出，Codazzi 方程表明系数 $Q=Q(u)$ 和 $R=R(v)$ 都是单变量函数，见 [10]。

当 Q 和 R 在 D上恒等于零时，曲面 f 是全脐的，因此它是类时平面的一部分。当 $Q\neq 0$ 或 $R\neq 0$ 在 D上成立时，不失一般性，我们可以假设 $Q(u_0)\neq 0$。由于 R 是单变量函数且 $QR\equiv 0$，我们得到 $R\equiv 0$ 在 D上。这意味着 $\psi'//\psi''$，因此我们可以取一个参数 $\tilde{v}=\tilde{v}(v)$和一个类光向量 $\psi_0\in\mathbb{R}^3_1$，使得 $\psi=\tilde{v}\psi_0$，从而完成证明。□

注 3.3。 二次微分 $Qdu^2=\langle f_{uu},\nu\rangle du^2$ 和 $Rdv^2=\langle f_{vv},\nu\rangle du^2$ 被称为 f 的霍普夫微分，其中 ν 是 f 的单位法向量场。Fujioka 和 Inoguchi [10] 证明，在满足条件 $Q\neq 0$，$R\equiv 0$ 或 $Q\equiv 0$，$R\neq 0$ 的洛伦兹空间形式中，任何无脐点的类时（不必是极小）曲面都必须是直纹曲面，其底曲线和母线均为类光曲线，这种曲面称为*B*-滚动。关于 $\mathbb{R}^3_1$ 中的 B-滚动，另见 [7, 8, 12, 14, 21]。

排除平坦点后，事实 1.1 中所述的等距与反等距类的以下刚性定理成立。

定理 3.4. 设 f_1 和 f_2 是没有平坦点和奇点的单连通类时极小曲面。则以下结论成立。

(1) 若 f_1 和 f_2 等距，则 f_1 与其伴随族$\{(f_2)_\theta\}_{\theta\in\mathbb{R}}$ 中的某个曲面全等。(2) 若 f_1 和 f_2 反等距，则 f_1 与共轭曲面 f_2的伴随族$\hat{}$ $\hat{}\{(f_2)_\theta\}_{\theta\in\mathbb{R}}$ 中的某个曲面全等。

为证明该定理，需要指出，通过增加一个额外假设，全纯函数所具有的以下基本性质对抛双全纯函数也成立。

引理 3.5. 若抛双全纯函数 f 满足 $|\mathfrak{f}|^2 = c$ ，其中 c为非零常数，则 f是常值函数。

该引理可由柯西-黎曼型方程直接推出，见 (1)。当 $c = 0$时，与全纯函数的情形相反，存在非恒定抛双全纯函数 f 满足 $|\mathfrak{f}|^2 = 0$ ，例如 f(z) $= z(1 + j)$。

定理 3。4。 与 $\mathbb{R}^3$中的曲面一样，类时曲面 f的第一、第二和第三基本形式 $\mathrm{I}_f = \langle df, df\rangle$、II $_f = -\langle df, d\nu\rangle$ 和 $\mathrm{III}_f = \langle d\nu, d\nu\rangle$ 满足关系

$$-K\mathrm{I}_f - 2H\mathrm{II}_f + \mathrm{III}_f = 0,$$

其中， K 和 H 分别是 f的高斯曲率和平均曲率。条件 $H = 0$意味着 $\mathrm{III}_f = K\mathrm{I}f$。当 f_1 和 f_2 等距（分别地，反等距）时，$\mathrm{I}_{f_1} = \mathrm{I}_{f_2}$ 和 $K_{f_1} = K_{f_2}$（分别地，$\mathrm{I}_{f_1} = -\mathrm{I}_{f_2}$ 和 $K_{f_1} = -K_{f_2}$）成立，因此，在情况（1）和（2）下， f_1 和 f_2 的第三基本形式均满足 $\mathrm{III}_{f_1} = \mathrm{III}_{f_2}$ 。根据第三基本形式的定义以及假设 $K \neq 0$，这意味着曲面 f_1 和 f_2 的单位法向量场 ν_1 和 ν_2 具有相同的非退化第一基本形式 $\mathrm{I}_{\nu_1} = \mathrm{I}_{\nu_2}$。

另一方面，关系 $\mathrm{I}_{\nu_1} = \mathrm{I}_{\nu_2}$ 以及曲面 ν_1 和ν_2 的魏因加滕方程蕴含 $\mathrm{II}_{\nu_1} = \mathrm{II}_{\nu_2}$。因此，根据曲面论基本定理，我们得出，在对 $\mathbb{R}^3_1$施加一个等距变换后，$\nu_1 = \nu_2$ 。

设 (h_i, η_i) 是曲面 $f_i\,(i = 1,2)$ 的魏尔斯特拉斯数据。根据注记 2.2，关系 $\nu_1 = \nu_2$ 表明 $h_1 = h_2$ 。由于我们考虑的是正则曲面，方程 (3) 蕴含：当 f_1 和 f_2 等距时，$|\eta_1|^2 = |\eta_2|^2 \neq 0$ ；当 f_1 和 f_2 反等距时， $|\eta_1|^2 = -|\eta_2|^2 \neq 0$ 。于是，我们得到满足 $|\hat{}\eta_2/\hat{}\eta_1|^2 = \pm 1$ 的双全纯函数 $\hat{}\eta_2/\hat{}\eta_1$ ，其中 $\eta_i = \hat{}\eta_i dz^2\,(i = 1,2)$。最后，引理 3.5 表明，$\hat{}\eta_2/\hat{}\eta_1$ 是一个常值函数，且$|\hat{}\eta_2/\hat{}\eta_1|^2 = \pm 1$。因此，存在一个实数 θ ，使得当 f_1 和 f_2 等距时，$\hat{}\eta_2/\hat{}\eta_1 = \pm \mathrm{e}^{j\theta}$ ；当 f_1 和 f_2 反等距时，$\hat{}\eta_2/\hat{}\eta_1 = \pm j\mathrm{e}^{j\theta}$ 。

总之，我们证明了在对 $\mathbb{R}^3_1$ 进行等距变换后，$(h_2, \eta_2) = (h_1, \pm \mathrm{e}^{j\theta}\eta_1)$ 或 $(h_2, \eta_2) = (h_1, \pm j\mathrm{e}^{j\theta}\eta_1)$，从而得到了所需的结果。

□

4. 类时与反类时极小曲面的变形与对称性

在本节中，我们展示类时极小曲面 f 的对称性如何在 $\hat{}$ 等距变形 $\{f_\lambda\}_\lambda$ 和反等距变形 $\{f_\lambda\}_\lambda$ 下得以保持。我们还展示，在更一般的变换和变形过程中，即使曲面的形状发生改变，类时极小曲面的对称性也会得以延续。

我们将】【。记符号 CO(1，2;$\mathbb{C}'$) 表示具有符号序列（−，+，+）的抛复共形群，即

$$\mathrm{CO}(1,2;\mathbb{C}') = \{A \in \mathrm{M}(3,\mathbb{C}') \mid {}^tAI_{1,2}A = cI_{1,2},\ |c|^2 \neq 0\},$$

其中，${}^tA$ 是 A 的转置矩阵，$I_{1,2}=\mathrm{diag}(-1,1,1)$。

设 $f=\mathrm{Re}\int\omega$ 为定义在单连通洛伦兹曲面 M 上、具有抛物全纯1-形式 $\omega={}^t(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ 的共形类时极小曲面。对于矩阵 $A\in\mathrm{CO}(1,2;\mathbb{C})$，该曲面

$$f_A(p):=\mathrm{Re}\left(A\int_{p_0}^{p}\omega\right)+f_A(p_0) \tag{6}$$

也会得到一个共形类时极小曲面，因为 A 满足条件 $\langle A\omega,A\omega\rangle=c\langle\omega,\omega\rangle=0$。根据 Goursat 的工作 [11]，我们称其为 f 的*Goursat*变换。

首先，我们回顾以下引理（黎曼情形见 [22, 引理 5.3] ）。

引理4.1。设 $f\colon M\to\mathbb{R}^3_1$ 是一个单连通类时极小曲面，由$f=\mathrm{Re}\left(\int\omega\right)$表示，其抛物全纯*1*-形式为 $\omega={}^t(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$。则

(1) 若 $g\in S^{\circ}_f(M)$ 的线性部分为 $O\in O(1,2)$，则 $g^*\omega=O\omega$;

(2) 若 $g\in S^{r}_f(M)$ 的线性部分为 $O\in O(1,2)$，则 $g^*\omega=O\bar{\omega}$。

证明。由关系 $f=\mathrm{Re}\left(\int\omega\right)$，我们首先注意到 $\omega=df+j*df$，其中 $*$是由关系表示的洛伦兹霍奇星算子

$$*dx=dy,\quad *dy=dx$$

对于每个抛物复坐标 $z=x+jy$。根据假设 $g\in S_f(M)$，存在一个等距变换 $\tilde{g}$，作用于 $\mathbb{R}^3_1$，使得 $\tilde{g}\circ f=f\circ g$。因此，关系

$$g^*df=g^*(f^*dx)=(f\circ g)^*dx=f^*(\tilde{g}^*dx)=f^*Odx=Of^*dx=Odf$$

成立，其中 $dx={}^t(dx_1,dx_2,dx_3)$。因此，利用以下事实，我们可以得到所需的关系式（1）和（2）：若 g保向，则 $g^*(*df)=*g^*(df)$；若 g反向，则 $g^*(*df)=-*g^*(df)$。□

注4.2（关于具有奇点的曲面的情形）。我们注意到，洛伦兹曲面上1-形式的 Hodge 星算子由以下公式定义

$$*dz=jdz,\quad *d\bar{z}=jd\bar{z}.$$

这意味着它仅取决于抛物复结构，而不取决于洛伦兹度量。这一事实表明，引理4.1的断言以及本节的结果以完全相同的方式适用于具有奇点的类时极小曲面。这里，奇点是指所考虑曲面的诱导度量退化的点。关于具有奇点的类时极小曲面的详细内容，参见 [1, 16]。

这里，我们给出定理 B 的证明，说明空间群$S_{f_A}(M)$与 $S_f(M)$之间的关系。

定理 B 的证明。我们仅证明情形 (1)。设 $f_A=\mathrm{Re}\left(A\int\omega\right)$ 且 $g\in S^{\circ}_f(M)\widetilde{\ }$的线性部分为 O。为证明充分性，设 $AO=OA$。

首先，我们证明 $g\in S^{\circ}_f(M)$是 $f_A(M)$的等距变换。f_A的第一基本形式 I_{f_A}写为

$$\mathrm{I}_{f_A}=4\langle(f_A)_w,\overline{(f_A)_w}\rangle dwd\bar{w}=\langle A\omega,\overline{A\omega}\rangle,$$

$\widetilde{\ }$，因此引理4.1和假设 $AO=OA$ 推出

$$g^*\mathrm{I}_{f_A}=\langle Ag^*\omega,\overline{Ag^*\omega}\rangle=\langle AO\omega,\overline{AO\omega}\rangle=\langle\widetilde{O}A\omega,\overline{\widetilde{O}A\omega}\rangle=\langle A\omega,\overline{A\omega}\rangle=\mathrm{I}_{f_A},$$

这意味着，g 也是 $f_A(M)$的等距变换。

接下来，我们检验 g 是否也诱导出 $f_A(M)$的对称性。

$$\begin{aligned}
f_A(g(p)) &= \mathrm{Re}\left(A\int_{p_0}^{g(p)}\omega\right) + f_A(p_0)\\
&= \mathrm{Re}\left(A\int_{p_0}^{g(p_0)}\omega\right) + \mathrm{Re}\left(A\int_{g(p_0)}^{g(p)}\omega\right) + f_A(p_0)\\
&= \mathrm{Re}\left(A\int_{p_0}^{p} g^*\omega\right) + f_A(g(p_0))\\
&= \mathrm{Re}\left(A\int_{p_0}^{p} O\omega\right) + f_A(g(p_0))\\
&= \mathrm{Re}\left(AO\int_{p_0}^{p}\omega\right) + f_A(g(p_0))\\
&= \mathrm{Re}\left(\widetilde{O}A\int_{p_0}^{p}\omega\right) + f_A(g(p_0))\\
&= \widetilde{O}f_A(p) - \widetilde{O}f_A(p_0) + f_A(g(p_0)).
\end{aligned}$$

反之，若 $g \in S_{f_A}(M)$ 且其线性部分为矩阵 $O \in \mathrm{O}(1,2)$。那么存在一个向量$\tilde{t} \in \mathbb{R}^3_1$ 使得 $f_A \circ g = \widetilde{O}f_A + \tilde{t}$。根据关系式 $g^*(A\omega) = AO\omega$，对该方程两边求导数，可得 $AO = OA$。

这证明了 (1)，4.1 中的关系情形可类似地利用假设 $AO =$ 得证。

由于单位矩阵 I_3 与任意矩阵可交换，我们得到关于平移对称性守恒的以下结果。

推论 4.3. 在定理 *B* 的相同假设下，设保定向等距变换 $g \in S^\circ_f(M)$ 给出了曲面 f 的平移对称性，则 $g \in S^\circ_{f_A}(M)$ 也给出了任意 *Goursat*变换 f_A（适用于 $A \in \mathrm{CO}(1,\ 2;\mathbb{C}')$）的平移对称性，只要平移向量非零。

利用这个推论，我们可以像例 5.2 中那样构造许多周期类时极小曲面。

注 4.4. 在 [22, 推论 5.2], 中，Meeks 指出了欧几里得空间中的共轭极小曲面具有平移对称性的充要条件。此外，Leschke 和 Moriya [18] 揭示了极小曲面的单因子 dressing 在 $\mathbb{R}^3$ 和 $\mathbb{R}^4$中的平移对称性保持的类似结果；这也是古尔萨变换的一种特殊形式。参见 [18]中的定理 6.2 和推论 6.8。

形式为 (6) 的古尔萨变换包含类时极小曲面的各种重要变换和变形。下面，我们将介绍定理 B 在特定变形中的一些应用。

4.1. **伴随族与共轭：再探讨。** 定义 2.3 中的等距变形 $\{f_\theta\}_{\theta\in\mathbb{R}}$ 和ˆ反等距变形 $\{f_\theta\}_{\theta\in\mathbb{R}}$ 也分别对应于矩阵 $\mathrm{e}^{j\theta}I_3$ 和 $j\mathrm{e}^{j\theta}I_3$的古尔萨变换。因此，我们得到以下结果，它是 Meeks 关于极小曲面的结果的类时对应版本；该结果描述了空间群在上述变换下的行为。 [22, 定理 5.5],

C推论 4.5. 设 $f\colon M \to \mathbb{R}^3_1$ 为一个单连通类时极小曲面。该 n

(1) 对所有 $\theta \in \mathbb{R}$， $S^\circ_f(M) = S^\circ_{f_\theta}(M) = S^\circ_{\hat{f}_\theta}(M)$。此外， $g \in S^\circ_f(M)$ 的线性部分在等距变形 $\{f_\theta\}_{\theta\in\mathbb{R}}$ 和反等距变形 $\{f_\theta\}_{\theta\in\mathbb{R}}$下保持不变。*(2)* 如果 $g \in S^r_f(M)$，则对所有 $\theta \neq 0$, $g \notin S^r_{f_\theta}(M)$。*(3)* 如果 $g \in S^r_f(M)$，则对于某个 $\theta \in \mathbb{R}$， $g \in S^r_{\hat{f}_\theta}(M)$ 当且仅当 $\theta = 0$。此外，如果$g \in S^r_f(M)$ 的线性部分为 O，则 $g \in S^r_{\hat{f}}(M)$ 的线性部分为 $-O$。

证明。设 g 是 $S_f(M)$ 中的一个对称性，其线性部分为 O。

当 g 是保向时，断言 (1) 由定理 B 以及 $\mathsf{e}^{j\theta}I_3$ 和 $j\mathsf{e}^{j\theta}I_3$ 与 O 可交换这一事实得出。

当 g 为反向时，定理 B 断言，$g \in S_{f_\theta}(M)$ 成立，当且仅当存在 $O \in \mathrm{O}(1,2)$ 使得

$$\mathsf{e}^{j\theta}I_3 O = \widetilde{O}\overline{\mathsf{e}^{j\theta}I_3} \Leftrightarrow \mathsf{e}^{2j\theta}O = \widetilde{O}.$$

因此，我们得到 $\theta = 0$，从而证明断言（2）。另一方面，当且仅当存在 $O \in \mathrm{O}(1,2)$ 使得 $g \in S_{f_\theta}(M)$ 成立时，$\sim$才成立。

$$j\mathsf{e}^{j\theta}I_3 O = \widetilde{O}\overline{j\mathsf{e}^{j\theta}I_3} \Leftrightarrow \mathsf{e}^{2j\theta}O = -\widetilde{O}.$$

因此，我们得到 $\theta = 0$ 和 $O = -O$，从而证明断言（3）。 □

从现在起，我们关注共轭。对类时极小曲面 f 进行共轭 f，对应于关于矩阵的 f Goursat变换

$$J = \begin{pmatrix} j & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j \end{pmatrix} \in \mathrm{CO}(1,2;\mathbb{C}'). \tag{7}$$

由于 J 与任意矩阵可交换，共轭与任意 Goursat变换除相差一个常向量外是可交换的。更确切地说，存在如下交换图。

$$\begin{array}{ccc} f & \xrightarrow{\quad\text{Goursat transformation}\quad} & f_A \\ \Big\downarrow{\scriptstyle\text{conjugation}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\text{conjugation}} \\ \hat{f} = f_J & \xrightarrow{\text{Goursat transformation}} & \hat{f}_A = f_{AJ} = f_{JA} \end{array}$$

其中 $A \in \mathrm{CO}(1,2;\mathbb{C}')$。根据关系式 $J = -J$、定理 B 和推论 4.5，我们得到曲面 $f, f_A, f = f_J$和 $f_A = f_{AJ}$的空间群之间的如下关系。

推论 4.6。设 $f\colon\ M \to \mathbb{R}^3_1$ 是一个单连通类时极小曲面， g 是 $f(M)$的保定向（分别地，反定向）等距变换。假设 A是$\mathrm{CO}(1,2;\ \mathbb{C}')$ 中的一个矩阵，并且$\sim$ $\sim$ $\sim O$、O 是 $\mathrm{O}(1,2)$ 中的矩阵，使得 $AO = OA$（分别地， $AO = OA$）。那么以下命题等价。

(1) $g \in S_f(M)$ 线性部分为 O,(2) $g \in S_f(M)$ 线性部分为 O（分别为 $-O$）, (3) $g \in S_{f_A}(M)$ 线性部分为 O, (4) $g \in S_{f_A}(M)$ 线性部分为 O（分别为 $-O$）。

4.2. **自对偶关系**。 下一个重要的 Goursat变换是以下自对偶关系。我们称具有矩阵的类时极小曲面 f 的 Goursat变换 f_D

$$D = \begin{pmatrix} j & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{CO}(1,2;\mathbb{C}') \tag{8}$$

的对偶类时极小曲面关于 f。

对偶类时极小曲面 f_D 具有以下显著性质。

命题4.7。设 f 是一个类时极小曲面，其魏尔斯特拉斯数据为 (h,η)。对偶类时极小曲面 f_D 的魏尔斯特拉斯数据 (h_D,η_D) 为

$$h_D = \frac{(1+j)\,h-(1-j)\,1/h}{2}, \quad \eta_D = \frac{(1+j)\,1/h-(1-j)\,h}{2}h\eta.$$

特别地，对偶性会反转曲面 f 的高斯曲率 K_f 与对偶曲面 f_D 的高斯曲率 K_{f_D} 的符号，如下所示

$$\mathrm{sgn}(K_f) = -\mathrm{sgn}(K_{f_D}).$$

证明。前述关系可通过直接计算立即得到。由于 f 的第二基本形式 $\mathrm{II}f$ 写作

$$\mathrm{II}_f = \mathrm{Re}\,(\eta dh),$$

我们可以通过证明关系 $\eta_D dh_D = j\eta dh$ 来验证后一性质。 □

注4.8（极小曲面与极大曲面之间的对偶性）。 考虑 $\mathbb{R}^3$ 中一个极小曲面，它可写为 $f = \mathrm{Re}\,{}^t(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$，其全纯1-形式为 $\omega_j (j = 1, 2, 3)$，以及变换

$$\begin{pmatrix} \tilde{\omega}_1 \\ \tilde{\omega}_2 \\ \tilde{\omega}_3 \end{pmatrix} = \widetilde{D} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{D} := \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

其中， i 是复平面 $\mathbb{C}$ 上满足 $i^2 = -1$ 的虚数单位。尽管矩阵 $\widetilde{D}$ 既不属于复正交群 $\mathrm{O}(3;\mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{M}(3,\mathbb{C}) \mid {}^tAA = I_3\}$，也不属于不定复正交群 $\mathrm{O}(1,2;\mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{M}(3,\mathbb{C}) \mid {}^tAI_{1,2}A = I_{1,2}\}$，曲面 $f_{\tilde{D}} := \mathrm{Re}\,{}^t(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \tilde{\omega}_3)$ 却给出了 $\mathbb{R}^3_1$ 中的一个极大曲面。 $\mathbb{R}^3$ 中的极小曲面与 $\mathbb{R}^3_1$ 中的极大曲面之间的这种一一对应称为对偶性，参见 [13] ，例如也可参见[3, 5, 19, 25] 。

我们还要指出，任何极小曲面的高斯曲率都非正 $K \le 0$ ，而任何极大曲面的高斯曲率都非负 $K \ge 0$。因此，命题4.7意味着， f 与 f_D 之间的自对偶性是上述极小曲面与极大曲面之间对偶性的洛伦兹版本。

在本小节末尾，我们讨论由反射原理导出的对称性，它们与共轭 $f = f_J$ 和对偶 f_D密切相关。众所周知，如果欧几里得空间中的极小曲面含有一条直线，那么该曲面关于这条直线具有对称性，而其共轭曲面关于垂直于该直线的平面具有平面对称。同样的结果对于极大曲面和 $\mathbb{R}^3_1$中的类时极小曲面也成立，例如参见[4] 和 [16] 。由于这种反射对称是通过形如 $g(z) = \bar{z}$ 的反定向等距变换，并针对适当的坐标 z获得的，因此推论 4.6中(1)与(2)之间的等价性是这一事实的推广。它还可用于表达如下对应关系：类时极小曲面 f 上关于收缩奇点的对称性，与共轭曲面 f上关于折叠奇点的对称性之间的关系。

为了处理类时极小曲面上的奇点，我们回顾 [16]中引入的广义类时极小曲面类。

非恒定光滑映射 $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}^3_1$ 从洛伦兹曲面 M 到 $\mathbb{R}^3_1$，称为广义类时极小曲面，如果 f 在 M 的一个开稠密集上是浸入，并且在 M的每一点附近都存在一个局部坐标系 $(U;\ x,\ y)$，使得 $\langle f_x, f_x\rangle = -\langle f_y, f_y\rangle$、$\langle f_x, f_y\rangle \equiv 0$和$f_{xx} - f_{yy} \equiv 0$在 U上成立。对于每个局部坐标系 $(U;\ x,\ y)$，令

$$\mathcal{A} = \{p \in U \mid f_x(p) \text{ or } f_y(p) \text{ is lightlike in } \mathbb{R}^3_1\}, \quad \mathcal{B} = \{p \in U \mid df_p = 0\}.$$

由于诱导度量 I_f 在 $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$中的每一点 p 处退化，我们称 p 为 f的一个奇点。若存在一条正则曲线 $\gamma\colon I \to U$，它从区间 I 出发并经过 p，且 $\gamma(I) \subset \mathcal{A}$，同时 $f\circ\gamma(I)$在 $\mathbb{R}^3_1$中变为一个单点，我们称奇点 $p \in \mathcal{A}$ 为收缩奇点（或类锥奇点），并将该点称为收缩奇点。若存在 p 的一个邻域，使得曲面可重新参数化为 $p=(0,0)$，且 $f_y(x,0) \equiv 0$，则称奇点 $p \in \mathcal{A}$ 为折叠奇点（或折痕奇点）。我们将像 $\{f(x,0) \mid (u,0) \in U)\}$称为折叠奇点。利用奇异比约林表示公式，关于收缩奇点和折叠奇点的反射原理已在 [16, 引理 4.3 和 4.5]中得到证明。

ˆ通过考察 Goursat变换 $f = f_J$ 和 f_D，关于直线、平面、收缩奇点和折叠奇点的对称性可以统一如下（黎曼情形下也有相同结论，更多详情见 [3] ）。

推论 4.9。设 $f\colon M \to \mathbb{R}^3_1$ 是一个单连通类时极小曲面。则以下命题等价。

(1) f 关于曲面 f 上平行于 x_1轴的类时直线具有直线对称性，ˆ(2) $f = f_J$ 关于平行于 x_2x_3 平面的类空平面具有平面对称，ˆ该平面垂直于曲面 f，(3) f_D 关于一个收缩奇点具有点对称，并且ˆ(4) $f_D = f_{DJ} = f_{JD}$ 关于一个折叠奇点具有折叠对称性。

证明。我们仅给出 f 含有形如 $f(x+j0) = {}^t(x,\ 0,\ 0)$的直线时的论证。根据 [16, 引理 4.1], 中的正则反射原理，我们得到

$$f(\bar{z}) = Of(z), \quad \text{where } O = \mathrm{diag}(1,-1,-1) \text{ and } z = x + jy.$$

根据关系式 $JO = -OJ$ 和推论 4.6，共轭曲面 f_J 具有对称性 $f_J(\bar{z}) = -Of_J(z)$，相差一个平移，从而证明断言（2）。类似地，关系式 $DO = -I_3D$诱导出点对称 $f_D(\bar{z}) = -f_D(z)$，相差一个平移。特别地，$f_D(x+j0)$在 $\mathbb{R}^3_1$ 中收缩为一个点，从而证明断言（3）。最后，关系式 $D(-O) = I_3D$ 诱导出折叠对称性 $f_{JD}(\bar{z}) = f_{JD}(z)$，相差一个平移，从而证明断言（4）。□

4.3. **López-Ros 变形**。Goursat变换的另一个有趣例子是下面的 López-Ros 型变形。我们通过将魏尔斯特拉斯数据从 $(h,\ \eta)$ 改变为 $(\lambda h,\ \eta/\lambda)$，定义类时极小曲面 f的*López-Ros* 变形 $\{f_\lambda\}_{\lambda>0}$，即

$$f_\lambda(p) = \mathrm{Re}\int_{p_0}^{p} {}^t\left(-\left(\frac{1}{\lambda} + \lambda h^2\right), j\left(\frac{1}{\lambda} - \lambda h^2\right), 2h\right)\eta + f_\lambda(p_0). \tag{9}$$

这种变形由 [20]为 $\mathbb{R}^3$中的极小曲面引入，且与原始的 López-Ros 变形一样，变形 $\{f_\lambda\}_{\lambda>0}$保持第二基本形式不变，因为 $f = f_1$ 的第二基本形式 II_f 写作

$$\mathrm{II}_f = \mathrm{Re}\,(\eta dh).$$

此外，经过直接计算可知，变形（9）是通过相对于矩阵的 $f = f_1$ 的 Goursat变换得到的。

$$A = A(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda+\frac{1}{\lambda}}{2} & j\frac{\lambda-\frac{1}{\lambda}}{2} & 0 \\ j\frac{\lambda-\frac{1}{\lambda}}{2} & \frac{\lambda+\frac{1}{\lambda}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{CO}(1,2;\mathbb{C}'). \tag{10}$$

而保持第一基本形式 If 的等距变形 $\{f_\lambda\}_\lambda$ 和保持 $-\mathrm{I}f$ 的反等距变形 $\{f_\lambda\}_\lambda$ 都保留了某种对称性。作为定理 B 的一个应用，我们可以通过 López-Ros 变形，在保持第二基本形式 IIf 的同时控制类时极小曲面的对称性。

注4.10（环境空间中的等距变换作为 Goursat 变换）。我们应当指出，$\mathbb{R}^3_1$ 中的环境空间等距变换与 Goursat 变换（6）通常并不满足交换律，而这种非交换性会产生不同于原曲面的曲面，且这些曲面与原曲面并不等距。在极小曲面与极大曲面的对偶性情形下，Araújo 和 Leite 曾讨论过这种非交换性 [5]（另见注4.8）。

对于类时极小曲面，经过平移后，我们可以将$\mathbb{R}^3_1$中的环境等距变换视为具有 $\mathrm{O}(1,2) \subset \mathrm{CO}(1,2;\mathbb{C})$ 中矩阵的 Goursat 变换。因此，我们也可以通过定理 B 处理由这些变换的非交换性所产生的不同曲面的对称性。

5. 示例

本节中，我们给出上一节讨论的对称性关系的具体例子。首先来看推论 4.6 如何给出 f, f_D, f 与 f_D 之间的许多对称性关系。

例5.1（洛伦兹恩内珀曲面、抛物螺旋面及其共轭曲面）。取定义在 $\mathbb{C}'$ 上的魏尔斯特拉斯数据（h, η）=（z, dz）。由式（2）表示的曲面为

$$\begin{aligned} f(z = x + jy) &= \mathrm{Re}\, {}^t\left(-z - \frac{z^3}{3}, j\left(z - \frac{z^3}{3}\right), z^2\right) \\ &= {}^t\left(-x - \frac{x^3}{3} - xy^2, y - x^2y - \frac{y^3}{3}, x^2 + y^2\right) \end{aligned}$$

它称为洛伦兹恩内珀曲面（例如见 [17]）。利用式（8）中的矩阵 D，其对偶曲面 f_D 可写为如下形式。

$$\begin{aligned} f_D(z) &= \mathrm{Re}\left(D\, {}^t\left(-z - \frac{z^3}{3}, j\left(z - \frac{z^3}{3}\right), z^2\right)\right) \\ &= {}^t\left(-y - x^2y - \frac{y^3}{3}, y - x^2y - \frac{y^3}{3}, x^2 + y^2\right). \end{aligned}$$

曲面 f_D 及其共轭曲面 f_D 实际上就是分别称为类时抛物螺旋面和类时抛物线悬链面的曲面（例如见 [16]）。下面来看 f, f_D, f 和 f_D 的对称性之间有何联系。

首先，曲面 f 具有以下反向平面对称性：

$$f(\bar{z}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} f(z), \quad f(-\bar{z}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} f(z).$$

根据定理 B 和矩阵关系

$$D\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\overline{D},\qquad D\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\overline{D},$$

对偶类时极小曲面 f_D 具有以下对称性:

$$f_D(\bar{z})=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}f_D(z),\quad f_D(-\bar{z})=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}f_D(z)$$

这意味着 f_D 关于类空 x_3 轴具有直线对称性，并且关于沿 $\operatorname{Im} z=0$ 的折叠奇点具有折叠对称性，见图 2 右上方。

此外，根据推论 4.6，共轭曲面 f 关于类空 x_2 轴和类时 x_1 轴具有以下线对称性:

$$\hat{f}(\bar{z})=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\hat{f}(z),\quad \hat{f}(-\bar{z})=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\hat{f}(z).$$

ˆ 最后，推论 4.6 表明， f_D 具有以下对称性:

$$\hat{f}_D(\bar{z})=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\hat{f}_D(z),\quad \hat{f}_D(-\bar{z})=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\hat{f}_D(z).$$

ˆ 这意味着， f_D 关于类时 x_1x_2-平面对称，并且关于沿 $\operatorname{Im} z=0$ 收缩的奇点具有点对称性，见图 2 右下方。

ˆˆ 对于保定向等距变换，我们还可以根据推论 4.6 f， f_D， f验证， f_D关于类空 x_3-轴具有直线对称性:

$$f(-z)=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}f(z),\quad f_D(-z)=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}f_D(z).$$
$$\hat{f}(-z)=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\hat{f}(z),\quad \hat{f}_D(-z)=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\hat{f}_D(z).$$

例 5.2 （周期 Bonnet 型曲面）。 最后，我们来看 López-Ros 变形的对称关系。取定义在 $\mathbb{C}'$ 上的魏尔斯特拉斯数据（h， η） = （$\tan z$， $_{1\,2}\cos^2 z dz$）。由（2）表示的曲面为

$$\begin{aligned}f(z=x+jy)&=\operatorname{Re}{}^{t}\left(-\frac{z}{2},\frac{j}{4}\,\mathtt{sin}\,2z,-\frac{1}{4}\,\mathtt{cos}\,2z\right)\\&={}^{t}\left(-\frac{x}{2},\frac{1}{4}\cos 2x\sin 2y,-\frac{1}{4}\cos 2x\cos 2y\right)\end{aligned}$$

它被称为椭圆悬链面，是一种旋转类时极小曲面。利用式 (10) 中的矩阵 $A(\lambda)$，其 López-Ros 变形 $f_\lambda=f_{A(\lambda)}$ 如下。

$$f_\lambda(z)=\operatorname{Re}\left(A(\lambda)\,{}^{t}\left(-\frac{z}{2},\frac{j}{4}\,\mathtt{sin}\,2z,\frac{1}{4}\,\mathtt{cos}\,2z\right)\right).$$



图 2。洛伦兹 Enneper 曲面 f （左上）、抛物螺旋面 $\hat{f}_D$ （右上）、共轭 Enneper 曲面 f （左下）和抛物悬链面 $\hat{}$catenoid f_D （右下）。

f_λ 的魏尔斯特拉斯数据为 $(\lambda h, \eta/\lambda) = (\lambda \tan z, \frac{1}{2\lambda}\cos^2 z dz)$，因此，曲面 f_λ 正是被称为 类时极小 *Bonnet* 型曲面的曲面，其中每条曲率线对于任意 $\lambda > 0$ 都位于一个平面上，参见图 3。有关此类曲面的更多详细信息，请参见 [2]。下面我们来看看 f 的对称性如何通过 López-Ros 变形 $\{f_\lambda\}_{\lambda>0}$ 得以保持或发生改变。

曲面 f 具有以下保向对称性：

$$f(z+\pi) = f(z) + {}^t\left(-\frac{\pi}{2}, 0, 0\right), \quad f(z+j\pi) = f(z), \quad f(-z) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} f(z).$$

显然，对每个 λ，这些对称性的线性部分彼此可交换，且与 (10) 中的矩阵 $A(\lambda)$ 可交换。因此，定理 B 表明，上述对称性会传递到变形曲面 f_λ上。特别是，上述对称性的线性部分保持如下。

$$f_\lambda(z+\pi) = f_\lambda(z) + {}^t\left(-\frac{\pi}{4}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right), 0, 0\right),$$

$$f_\lambda(z+j\pi) = f_\lambda(z) + {}^t\left(0, -\frac{\pi}{4}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right), 0\right), \quad f_\lambda(-z) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} f_\lambda(z).$$

这些关系意味着，曲面 f_λ 对 $\lambda \neq 1$ 是双周期的，而椭圆悬链面$f = f_1$ 是单周期的，并且 f_λ 对任意 $\lambda > 0$ 都关于 x_3 轴具有直线对称性。此外， f 具有以下反向对称性：

$$f(\bar{z}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} f(z), \quad f(-\bar{z}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} f(z).$$

¯如果 O 是上述任意一个矩阵，我们可以验证，对于每个 λ， O 都满足式 (10) 中的矩阵 $A = A(\lambda)$ 所对应的 $AO = OA$。因此，定理 B 表明，上述对称性会传播到变形曲面 f_λ，如下所示。

$$f_\lambda(\bar{z}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} f_\lambda(z), \quad f_\lambda(-\bar{z}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} f_\lambda(z),$$

这意味着，对于任意 $\lambda > 0$，曲面 f_λ 关于类时 x_1x_3-平面和类空x_2x_3-平面的平面对称性均得以保留。

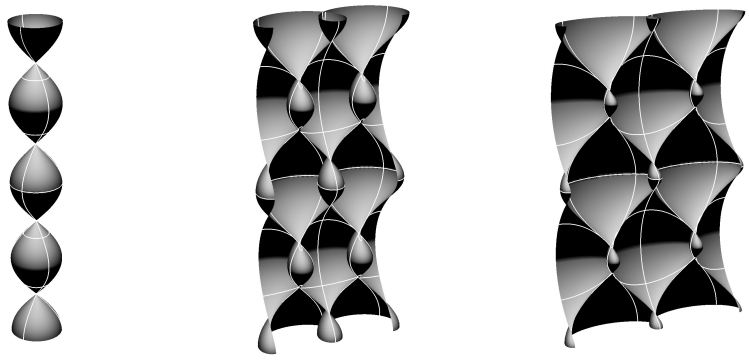

图 3. 单周期椭圆悬链面 f_1（左）、双周期 Bonnet 型曲面 $f_{1.5}$（中）和 f_2（右）。除平移对称性外，这些曲面还具有例 5.2 中讨论的平面对称性和直线对称性。

参考文献

[1] S. Akamine，带奇点类时极小曲面的高斯曲率行为，《北海道数学杂志》48 (2019)，537–568。[2] S. Akamine、J. Cho、Y. Ogata，类时 Thomsen 曲面的分析，《几何分析杂志》30(1) (2020)，731–761。[3] S. Akamine 和 H. Fujino，极小曲面与极大曲面边值问题的对偶性，即将在《通讯分析与几何》发表，arXiv:1909.00975。[4] L.J. Alías、R.M.B. Chaves 和 P. Mira，Lorentz-Minkowski 空间中极大曲面的 Björling 问题，《剑桥哲学会数学汇刊》134 (2003)，289–316。[5] H. Araújo 和 M.L. Leite，一个极小曲面对应多少个极大曲面？《剑桥哲学会数学汇刊》146 (2009)，第1期，165–175。[6] O. Bonnet，《关于可展曲面理论的回忆录》，《综合理工学院学报》42 (1867)，72–92。[7] R.M.B. Chaves、M.P. Dussan、M. Magid，Lorentz-Minkowski 空间中类时曲面的 Björling 问题，《数学分析与应用杂志》377 (2011)，第2期，481–494。[8] J.N. Clelland，$\mathbb{R}^1 2$ 中的全拟脐类时曲面，《亚洲数学杂志》16，189–208 (2012)。[9] U. Dierkes、S. Hildebrandt 和 F. Sauvigny，《极小曲面》，第二版，《数学科学基础原理》 [第339卷，施普林格，海德堡，2010。[10] A. Fujioka 和 J. Inoguchi，洛伦兹空间形式中的类时 Bonnet 曲面，《微分几何及其应用》18，103 111 2016– ( )。[11] E. Goursat，关于极小曲面的一种变换方式，《数学学报》11 (1887)，第1–4期，257–264。第二篇回忆录。MR1554756[12] L. Graves，洛伦兹空间之间余维一等距浸入，《美国数学会汇刊》252 (1979)，367–392。[13] H. Lee，极小曲面与极大曲面之间对偶性的推广，《几何专论》，373–386 (2011)。

[14] J. Inoguchi 和 M. Toda，通过环群构造类时极小曲面，《应用数学学报》**63**，313–355 (2004)。[15] H. Karcher，极小曲面的构造，《几何综述》，东京大学，1989，以及讲义第12号，SFB 256，波恩，1989，第1–96页。[16] Y. W. Kim、S.-E. Koh、H. Shin 和 S.-D. Yang，类空极大曲面、类时极小曲面与*Björling*表示公式，《韩国数学会志》**48**，1083–1100 (2011)。[17] J. Konderak，洛伦兹曲面的魏尔斯特拉斯表示定理，《复变函数理论与应用》**50** (5)，319–332 (2005)。[18] K. Leschke 和 K. Moriya，单因子 *dressing* 与欧几里得三维空间中极小曲面的 *López-Ros* 变形，《数学杂志》**291**，1015–1058 (2019)。[19] F.J. López、R. López 和 R. Souam，*Lorentz-Minkowski* 空间中的黎曼型极大曲面 $\mathbb{L}^3$，《密歇根数学杂志》**47** (2000)，第3期，469–497。[20] F.J. López 和 A. Ros，关于零亏格嵌入的完备极小曲面，《微分几何杂志》**33**(1)，293–300 (1991)。[21] L. McNertney，洛伦兹3空间中常曲率曲面的单参数曲面族，博士论文，布朗大学 (1980)。[22] W.H. Meeks，三重周期极小曲面理论，《印第安纳大学数学杂志》，**39**(3)，877–936 (1990)。[23] H.A. Schwarz，《数学论文集》第**1**卷。施普林格，柏林 (1890)。[24] M. Spivak，微分几何综合导论，第**IV**卷，Publish or Perish公司 (1970)。[25] M. Umehara 和 K. Yamada，闵可夫斯基空间中带奇点的极大曲面，《北海道数学杂志》**35**，13 40 2006– ( )。[26] T. Weinstein，《洛伦兹曲面导论》，《德古意特数学丛书》**22**，Walter de Gruyter，柏林 (1996)。

（Shintaro Akamine）日本大学生物资源科学部通识教育部，日本神奈川县藤泽市亀野1866号，邮编252-0880电子邮件地址：akamine.shintaro@nihon-u.ac.jp