arXiv:2305.04555v1 [eess.SY] 8 May 2023

链路故障条件下分布式滤波随机子图的一致性分析

Stefano Battilotti*、Filippo Cacace†、Massimiliano d'Angelo‡

2023年5月9日

摘要

本文对存在链路故障情况下的分布式共识算法进行了稳定性分析。该算法结合了一种专为处理链路故障而设计的新型 Push-Sum 算法广播版本，以及一种新型递归共识滤波器。分析基于随机拉普拉斯矩阵和随机子图的性质，同时也可能适用于其他分布式估计问题。我们刻画了收敛速度、所需的最小一致性步骤数，以及链路故障对广播式 Push-Sum 算法和递归共识算法的影响。数值仿真验证了理论分析结果。

关键词：滤波、网络分析、随机系统、随机图。

1 引言

分布式估计基于使用多个传感器节点，协同执行单个设备无法完成的大规模感知任务。近年来，低成本传感器的普及和无线网络的发展推动了许多基于分布式估计与滤波的应用，这一领域已成为滤波理论中最活跃的研究主题之一 [3, 10, 13]。分布式滤波算法规定了网络节点交换和处理信息的方式，使其能够在每个节点只能与邻居通信的约束下，在与系统类型相关的广泛不同设置中，获得目标系统状态的共同估计，涵盖

*S. Battilotti任职于意大利罗马萨皮恩扎大学" A. Ruberti"信息工程、自动化与管理工程系（DIAG），地址：Via Ariosto 25, 00185, Rome, Italy（电子邮箱：battilotti@diag.uniroma1.it）。

†F. Cacace任职于意大利罗马生物医学园区大学（Università Campus Bio-Medico di Roma）（电子邮箱：f.cacace@ieee.org）。

‡M. d'Angelo任职于意大利罗马萨皮恩扎大学" A. Ruberti"信息工程、自动化与管理工程系（DIAG），地址：Via Ariosto 25, 00185, Rome, Italy（电子邮箱：mdangelo@diag.uniroma1.it）。

连续时间或离散时间、线性或非线性系统，以及双向或单向、广播或异步、静态或动态网络等通信模式。本文研究离散时间下、由无向图表示的双向链路上的随机线性时不变系统，其中链路受到随机对称链路故障的影响。

现有的分布式滤波方法大多属于基于共识的范式，大致可分为三类 [13]：状态估计融合 [23,24,28,29,34],、测量向量融合 [11,17,19,22,30,33],和信息向量融合 [5,16,27,31,32]。也有人提出了混合方法 [6]。基于扩散的滤波器 [7] 源自扩散自适应策略 [25] ，但其结构与基于共识的滤波器相似。在离散时间设定下，为了保持估计误差的稳定性并克服非局部可观测性问题，这些方法大多要求邻居之间在每个时间单位内执行多个共识步骤。一些方法的数值比较见 [2]。一个有意思的实际结论是：当每个时间单位内执行的共识步骤过少时，对于任意网络和系统，现有方法都无法保证令人满意的估计精度。

近期许多研究考虑了存在链路故障时的分布式估计问题 [10]。由于节点可能知道也可能不知道链路故障，因此可以考虑两种不同的情形：节点可能意识到来自某个邻居的消息丢失了，也可能没有意识到。近期论文 [15] 针对这两种情形分别提出了不同的滤波器。我们聚焦于第一种情形；关于第二种情形，请参见 [1,15] 及其中的参考文献。我们考虑的情形与 [20]中的情形相同。该方案中，误差协方差不会收敛至集中式卡尔曼滤波器的误差协方差；误差不是均方有界的，而只是随机有界的；此外，该方案也没有给出一致性步骤数量的下界。 [15]中的次优 SDKF 也存在类似局限，因为无法确定共识步骤的下界。 [9], 提出了一种基于状态估计融合、仅需一个共识步骤的方法，该方法在 H_∞ 框架下考虑了扇区有界非线性系统和有向图。该情形更加一般，因此所得结果也相应地较弱：很难以分布式方式计算滤波器的 H_∞ 性质。 [36]中的分布式扩展卡尔曼滤波器也存在类似问题。近期论文 [35] 将 [5] 中的方法扩展至存在未知输入、随机链路故障和时变系统的情形。此情形下的主要问题包括通信开销大、共识步骤较少时的性能，以及在分布式环境中验证收敛条件这一难题。

本文提出并分析了 [2] 在存在链路故障情况下的DKF算法扩展。DKF采用两个独立的共识算法。第一个旨在就网络的整体感知能力达成共识，第二个用于递归估计阶段的共识。采用两个独立的算法可以在不影响其收敛至集中式滤波器的情况下，减轻通信负担

随着一致性步骤数量的增加。 [2] 中的DKF具有一项特性，即可以在每个节点计算使估计误差均方有界所需的一致性步骤的最小数量。我们的目标是在存在随机链路故障的情况下扩展这些特性，并刻画收敛速度、一致性步骤数量的下界以及链路故障的影响。第二项贡献是提出一种适用于链路故障情况的广播式Push-Sum算法改进方案。

该问题在第 2 节中进行了正式定义。分布式滤波算法在第 3 节中给出，并在第 4 节中分别对算法的两个部分进行了稳定性分析。第 5 节中的示例用于验证理论结果。有关该分析的其他结果见附录。

符号与预备知识 $\mathbb{N}$、 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$ 分别表示自然数、实数和复数。 $|S|$ 表示集合 S 的基数。对于方阵 A，$\mathrm{tr}(A)$ 表示其迹， $\sigma(A)$ 表示其谱， $\rho(A)$ 表示其谱半径。若 $\rho(A) < 1$，则称 A 为舒尔稳定矩阵。 $\|A\|$ 表示矩阵算子范数。 $\mathbb{E}\{\cdot\}$表示期望。 $\otimes$ 表示向量或矩阵之间的克罗内克积， $M^{[n]} = M \otimes M^{[n-1]}$ 表示克罗内克幂，其中 $M^{[0]} = I$ 为幂次。算子$\mathrm{row}_i()$、$\mathrm{col}_i()$和$\mathrm{diag}_i()$ 分别表示由索引为 i的矩阵和向量进行的水平、垂直和对角组合。$\mathrm{stack}(M) \in \mathbb{R}^{nm\times 1}$ 表示矩阵 $M \in \mathbb{R}^{n\times m}$的堆叠。 I_n 表示 $\mathbb{R}^n$中的单位矩阵， $1_N \in \mathbb{R}^N$表示所有元素均为1的向量， $U_N = 1_N 1_N^\top$ 表示一个大小为 N且每个元素均为1的方阵。若随机序列 $\{X_t(\omega)\}$ 满足$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[X_t] = 0$，则称其为渐近无偏的；若满足$\sup_{t\geqslant 0} \mathbb{E}[\|X_t\|^2] < +\infty$，则称其为均方有界的。

2 问题陈述与假设

在连接 N 个节点的无向网络上，我们研究过程的分布式递归估计问题

$$\mathbf{x}_{t+1} = A\mathbf{x}_t + \mathbf{f}_t, \tag{1}$$

$$\mathbf{y}_t^{(i)} = C_i\mathbf{x}_t + \mathbf{g}_t^{(i)}, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{2}$$

其中， $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$、$\mathbf{y}_t^{(i)} \in \mathbb{R}^{q_i}$， $q_i \geqslant 0$是节点 $i \in\{1, 2 \ldots, N\}$处可用的输出； $\mathbf{f}_t$ 和 $\mathbf{g}_t^{(i)}$， $i = 1, \ldots, N$是均值为零的白噪声，彼此独立，协方差分别为 Q 和 R_i， $i = 1, \ldots, N$。矩阵$R = \mathrm{diag}_i(R_i)$ 非奇异。$\mathbf{x}_0$ 是一个随机变量，其均值为 $\bar{\mathbf{x}}_0 := \mathbb{E}\{\mathbf{x}_0\}$，协方差为 Ψ_0。我们记 $\mathbf{y}_t = \mathrm{col}_i(\mathbf{y}_t^{(i)})$ ，而 $C = \mathrm{col}_i(C_i)$ 是输出映射的聚合矩阵。当 $q_i = 0$ 时，该节点不具备感知能力。因此，为了在每个节点获得 $\mathbf{x}_t$ 的估计值，必须在相邻节点之间交换信息。我们考虑为（1）–（2）设计一个分布式状态估计器的问题，该估计器由 N个局部估计器组成，每个节点对应一个，并在可能发生通信故障的情况下与邻居交换局部信息。

节点之间的信息交换由无向图 $\mathcal{G}=(\mathcal{V},\mathcal{E})$ 建模，其中顶点 $\mathcal{V}=\{1,2\ldots,N\}$ 表示 N 个节点，$\mathcal{E}\subseteq\mathcal{V}\times\mathcal{V}$ 是图的边集。若 $\mathcal{G}$中存在一条边 (i,j)，则意味着节点 i 和 j 能够相互交换信息。该图是无向图，即边 (i,j) 和 $(j,i)\in\mathcal{E}$ 被视为同一条边。若 $(i,j)\in\mathcal{E}$，则节点 i 和 j（其中 $i\neq j$）互为邻居。节点 i 的邻居集合为 $\mathcal{N}^{(i)}:=\{j\in\mathcal{V}:(j,i)\in\mathcal{E}\}$，$\nu^{(i)}=|\mathcal{N}^{(i)}|$ 是其基数；$\mathcal{N}^{(i)}=\{i\}\cup\mathcal{N}^{(i)}$ 是包含 i 自身在内的邻居集合，其中$\bar{\nu}^{(i)}=\nu^{(i)}+1$。路径是图中一系列相连的边。若任意一对顶点之间都存在路径，则该图是连通的。$\mathcal{G}$的邻接矩阵$\mathcal{A}\in\mathbb{R}^{N\times N}$的第 (i,j) 个元素在 $(i,j)\in\mathcal{E}$ 时为 1，否则为 0。度矩阵 $\mathcal{D}=\mathrm{diag}_{i=1}^{N}(\nu^{(i)})$ 是 $\mathcal{G}$的对角矩阵，其第 i 个元素为 $\nu^{(i)}$。无向 $\mathcal{G}$ 的拉普拉斯矩阵是由$\mathcal{L}=-\mathcal{A}+\mathcal{D}$定义的对称矩阵 $\bar{\mathcal{L}}\in\mathbb{R}^{N\times N}$。当图连通时，

$$0=\lambda_1(\mathcal{L})<\lambda_2(\mathcal{L})\leqslant\cdots\leqslant\lambda_N(\mathcal{L}),$$

，其中 $\lambda_i(\mathcal{L})$ 表示 $\mathcal{L}$ 的一个特征值。与 $\lambda_1(\mathcal{L})$ 相关联的特征向量为$\mathbf{1}_N$。

假设1 图 $\mathcal{G}=(\mathcal{V},\mathcal{E})$ 是连通的。

假设2 对 (C,A) 是可观测的，而对 $(A,Q^{\frac{1}{2}})$ 是可控的。

假设2保证集中式滤波器的估计误差方差有界。故障的存在由伯努利随机过程 $\beta_t^{(ij)}(\omega)\in\{0,1\}$建模，其中 t 是离散时间索引。具体而言，当 $\beta_t^{(ij)}(\omega)=1$ 时，节点 i 和 j 可以通信；而当 $\beta_t^{(ij)}(\omega)=0$时则不能。我们假设这些变量服从均匀概率分布 $P(\beta_t^{(ij)}(\omega)=1)=p_\beta$，且在时间上相互独立，并且独立于噪声 $\mathbf{f}_t$、$\mathbf{g}_t^{(i)}$。我们设定 $\beta_t^{(ii)}(\omega)=1$，因为节点 i 有自己的测量，并假设链路故障是对称的，即 如果在时刻 t 节点 i 没有收到来自节点 j的消息，那么节点j 也不会收到来自节点 i的消息。我们还定义过程 $\beta_t^{(ij)}{}_{,h}(\omega)$，其满足 $h\in\mathbb{N}$ 且具有与 $\beta_t^{(ij)}(\omega)$相同的性质，用于对共识步骤迭代中的丢失进行建模。令$\nu_t^{(i)}(\omega)=\sum_{j\in\mathcal{N}^{(i)}}\beta_t^{(ij)}(\omega)$ 表示存在链路故障时刻 t 的邻居数量，且 $\bar{\nu}_t^{(i)}(\omega)=\nu_t^{(i)}(\omega)+1$。最后，我们引入断连概率 p_d，即由于链路故障，网络在时刻 t 处于断连状态的概率，该概率不随时间变化。p_d 取决于 p_β，也取决于网络拓扑。我们将这些性质总结为以下假设。

假设3 断连概率小于1，$p_d<1$。对于所有$i,j\in\mathcal{V}$，$t\geqslant 0$，$h\geqslant 0$，$\beta_t^{(ij)}$，$\beta_{t\,h}^{(ij)}{}_{,}$，$\mathbf{f}_t$、$\mathbf{g}_t^{(i)}$ 彼此独立。此外，对于 $i\neq j$，序列 $\beta_t^{(ij)}(\omega)$ 和 $\beta_t^{(ij)}{}_{,h}(\omega)$ 是均值为 $p_\beta<1$ 的同分布伯努利序列，且 $\beta_t^{(ij)}(\omega)=\beta_t^{(ji)}(\omega)$ 和 $\beta_t^{(ij)}{}_{,h}(\omega)=\beta_t^{(ji)}{}_{,h}(\omega)$，而 $\beta_t^{(ii)}(\omega)\equiv 1$。

3 链路故障下的分布式卡尔曼滤波器

所提出的算法如图1所示，是对 [2] 中的分布式卡尔曼滤波器（DKF）的扩展，我们将用于估计增益和链路故障的分布式算法整合其中。节点 i处的初始误差估计和协方差 $\hat{\mathbf{x}}_0^{(i)}$ 以及 $\Psi_0^{(i)}$ ，在相应值可用时分别设为$\mathbf{x}_0$ 和 Ψ_0 。 ε 是任意小的正实数。该算法有两个参数：一致性增益 $\delta \in \mathbb{R}$ 和一致性迭代次数 $\gamma \in \mathbb{N}$。具体而言：

- 步骤2是对存在链路故障时的 Push-Sum算法 $[2, 18]$ 所作的修改（见注释1）。我们将证明

$$\frac{\lim_{t\to\infty} \tilde{C}_t^{(i)}}{\lim_{t\to\infty} w_t^{(i)}} = G = \sum_{i=1}^{N} C_i^\top R_i^{-1} C_i \tag{10}$$

$$\frac{\lim_{t\to\infty} \tilde{n}_t^{(i)}}{\lim_{t\to\infty} w_t^{(i)}} = N \tag{11}$$

  因此 $G_t^{(i)} \to \sum_{i=1}^{N} C_i R_i^{-1} C_i, \quad N_t^{(i)} \to N$。

- 式（7）–（8）计算滤波增益。考虑到上文给出的$G^{(i)}$、 $N^{(i)}$的渐近值，容易验证 $K_t^{(i)} \to N P_\infty C_i^\top R_i^{-1}$，其中$P_\infty$ 是集中式卡尔曼滤波器（即所有 $\mathbf{y_t}$ 均可用的卡尔曼滤波器）的黎卡提方程的解，

$$\begin{aligned} P_\infty = &(I_n - K_\infty C)(A P_\infty A^\top + Q)(I_n - K_\infty C)^\top \\ &+ P_\infty C^\top R^{-1} C P_\infty, \end{aligned} \tag{12}$$

$$K_\infty = P_\infty C^\top R^{-1}. \tag{13}$$

- 步骤4和步骤5计算局部状态估计。步骤4执行一个基于局部可用测量值的局部预测与校正步骤。步骤5通过 γ 个步骤，利用增益 δ 对估计值进行动态平均。

注释1 原始 *Push-Sum*算法 *[18]* 是一种基于闲聊的协议，用于在静态网络上计算聚合函数。更适用于动态智能体网络的广播版本已在 *[2]* 和 *[26]*中提出。广播式*Push-Sum*算法按 $y_0^{(i)} = x^{(i)}$、 $w_0^{(i)} = 0$、$w_0^{(1)} = 1$的方式计算 $\sum_{i=1}^{N} x^{(i)}$ ，

$$y_{t+1}^{(i)} = \frac{y_t^{(i)}}{\bar{\nu}^{(i)}} + \sum_{j\in\mathcal{N}^{(i)}} \frac{y_t^{(j)}}{\bar{\nu}^{(j)}}, \quad w_{t+1}^{(i)} = \frac{w_t^{(i)}}{\bar{\nu}^{(i)}} + \sum_{j\in\mathcal{N}^{(i)}} \frac{w_t^{(j)}}{\bar{\nu}^{(j)}}. \tag{14}$$

$w_t^{(i)}$ 是一个正标量权重。在 *[2]*中证明了 $y_t^{(i)}/w_t^{(i)}$ 收敛到$\sum_{i=1}^{N} x^{(i)}$。这里使用的算法是一个用于处理链路故障的新版本。在

存在链路故障时的DKF算法，节点 i

1：设置 **停止**=false、 $\hat{\mathbf{x}}_{0|0}^{(i)} = \hat{\mathbf{x}}_0^{(i)}$, $P_0^{(i)} = \Psi_0^{(i)}$, $\tilde{C}_0^{(i)} = C_i^\top R_i^{-1} C_i$, $\tilde{n}_0^{(i)} = 1$, $w_0^{(i)} = 0$，但 $w_0^{(1)} = 1$ 和 $\bar{\nu}^{(i)} = |\mathcal{N}^{(i)}|$除外。

2：在时刻 $t \geqslant 0$，如果**停止**，则转到步骤 3；否则执行：

2.1：将 $\underbrace{\tilde{C}_t^{(i)}}_{\bar{\nu}^{(i)}}, \underbrace{\tilde{n}_t^{(i)}}_{\bar{\nu}^{(i)}}, \underbrace{w_t^{(i)}}_{\bar{\nu}^{(i)}}$ 发送给邻居。2.2：

计算

$$\tilde{C}_{t+1}^{(i)} = \frac{\tilde{C}_t^{(i)}}{\bar{\nu}^{(i)}} + \sum_{j \in \mathcal{N}^{(i)}} \beta_t^{(ij)} \frac{\tilde{C}_t^{(j)}}{\bar{\nu}^{(j)}} + (1 - \beta_t^{(ij)}) \frac{\tilde{C}_t^{(i)}}{\bar{\nu}^{(i)}} \tag{3}$$

$$\tilde{n}_{t+1}^{(i)} = \frac{\tilde{n}_t^{(i)}}{\bar{\nu}^{(i)}} + \sum_{j \in \mathcal{N}^{(i)}} \beta_t^{(ij)} \frac{\tilde{n}_t^{(j)}}{\bar{\nu}^{(j)}} + (1 - \beta_t^{(ij)}) \frac{\tilde{n}_t^{(i)}}{\bar{\nu}^{(i)}} \tag{4}$$

$$w_{t+1}^{(i)} = \frac{w_t^{(i)}}{\bar{\nu}^{(i)}} + \beta_t^{(ij)} \frac{w_t^{(j)}}{\bar{\nu}^{(j)}} + \sum_{j \in \mathcal{N}^{(i)}} (1 - \beta_t^{(ij)}) \frac{w_t^{(i)}}{\bar{\nu}^{(i)}} \tag{5}$$

$$(G_{t+1}^{(i)}, N_{t+1}^{(i)}) = \begin{cases} \left(\frac{\tilde{C}_{t+1}^{(i)}}{w_{t+1}^{(i)}}, \frac{\tilde{n}_{t+1}^{(i)}}{w_{t+1}^{(i)}} \right), \text{ if } w_{t+1}^{(i)} \neq 0, \\ (C_i^\top R_i^{-1} C_i, 1) \text{ otherwise.} \end{cases} \tag{6}$$

2.3：如果 $\|\tilde{C}_{t+1}^{(i)}\| > 0$ 和 $\|\tilde{C}_{t+1}^{(i)} - \tilde{C}_t^{(i)}\| < \varepsilon$ ，则设置**停止**=为 true。

3：计算

$$P_{t+1}^{(i)} = (AP_t^{(i)}A^\top + Q)(I_n + G_{t+1}^{(i)}(AP_t^{(i)}A^\top + Q))^{-1} \tag{7}$$

$$K_{t+1}^{(i)} = \begin{cases} N_{t+1}^{(i)} P_{t+1}^{(i)} C_i^\top R_i^{-1} \text{ if } C_i \neq 0, \\ 0 \text{ otherwise.} \end{cases} \tag{8}$$

4：获取$\mathbf{y}_{t+1}^{(i)}$ 并计算

$$\mathbf{z}_{t+1,0}^{(i)} = A\hat{\mathbf{x}}_{t|t}^{(i)} + K_{t+1}^{(i)}(\mathbf{y}_{t+1}^{(i)} - C_i A\hat{\mathbf{x}}_{t|t}^{(i)}).$$

5：对于 $h = 0, \ldots, \gamma - 1$ 执行

5.1. 将 $\mathbf{z}_{t+1,h}^{(i)}$ 发送给邻居

5.2. 计算

$$\mathbf{z}_{t+1,h+1}^{(i)} = \mathbf{z}_{t+1,h}^{(i)} + \frac{1}{\delta} \sum_{j \in \mathcal{N}^{(i)}} \beta_{t,h}^{(ij)} (\mathbf{z}_{t+1,h}^{(j)} - \mathbf{z}_{t+1,h}^{(i)}) \tag{9}$$

6. 设置 $\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t+1}^{(i)} = \mathbf{z}_{t+1,\gamma}^{(i)}$ ，然后转到步骤2。

图 1：存在链路故障时的分布式卡尔曼滤波器（DKF）。

在谣传和广播这两种版本中，每个节点都会从其邻居处接收共识数据，并将其除以邻居数量。由于故障，节点在传输时并不知道邻居的瞬时数量，因此无法同步执行此操作。新算法不使用可变的邻居数量 $\bar{\nu}_t^{(i)}(\omega)$ ，而是使用标称（恒定）值 $\bar{\nu}^{(i)}$，并以局部值 $\tilde{C}_t^{(i)}/\bar{\nu}^{(i)}$,$\tilde{n}_t^{(i)}/\bar{\nu}^{(i)}$, $w_t^{(i)}/\bar{\nu}^{(i)}$ 替代缺失的数据包 $\beta_t^{(ij)} = 0$。

注 2 值得注意的是，与其他流行的共识算法不同， $\tilde{C}_t^{(i)} - \tilde{C}_t^{(j)}$ 不会收敛到零，并且$\tilde{C}_t^{(i)}$ 、 $\tilde{n}_t^{(i)}$ 和 $w_t^{(i)}$ 的渐近值取决于智能体。然而，对于所有 $(i,$ $\tilde{C}_t^{(i)}/\bar{\nu}_t^{(i)} - \tilde{C}_t^{(j)}/\bar{\nu}_t^{(j)} \to 0\, j)$。所关注的和的估计值，即 $N = \sum_{i=1}^{N} \tilde{n}^{(i)}$ 和 $G = \sum_{i=1}^{N} C_i^\top R_i^{-1} C_i$，分别为 $\tilde{n}_t^{(i)}/w_t^{(i)}$ 和 $\tilde{C}_t^{(i)}/w_t^{(i)}$ 。

注释 3 当难以将除一个节点之外的所有节点的初始条件 $w_0^{(i)}$ 设置为零时，可以采用 *[26]* 的 最大一致性算法，以便在图中有效地确定一个领导者。存在链路故障时，对所得算法的分析可以类比本文所述的方法进行。

备注 4 我们假设，在不存在链路故障的情况下，网络图 $\mathcal{G}$ 是静态的。在这种情况下，当 $G^{(i)}$、 $N^{(i)}$ 和 $K^{(i)}$ 达到渐近值时，算法的第一部分，即步骤*2*，可以停止。此外，在标准假设下，步骤*3*中的迭代黎卡提方程经过有限次额外迭代后即可达到稳态值。因此，在稳态下，滤波器可简化为图*1*中的步骤 *4*、*5*。

注释 5 故障由相互独立的变量建模。在每个时刻 $t > 0$ ，发生在步骤 *2.2*、(3)、(5)中的链路故障由 $\beta_t^{(ij)}(\omega)$ 建模，而平均步骤 *5.2* 中的故障由 $\beta_t^{(ij)}{}_{,h}(\omega)$ 建模。

注 6 参数 δ 和 γ 的选择将在下一节中讨论。此选择不会影响步骤 *2*、*3*。

4 有链路故障时分布式卡尔曼滤波器的分析

图1中的估计算法大致可分为两部分。步骤 $2,3$ $K^{(i)}$ $G = C^\top R^{-1} C =$ 旨在通过计算 $\sum_{i=1}^{N} C_i^\top R_i^{-1} C_i$ $K^{(i)}$ 来估计最优增益，而第二部分则将 用于在线估计算法。因此，我们将分析分为两部分。首先证明$K^{(i)} \to N P_\infty C_i^\top R_i^{-1}$ 。然后，我们可以分析当 $K^{(i)}$ 被其渐近值替代时估计算法的行为。

时间 t （分别为 $(t,\ h)$ 对于动态平均）下的通信模式由随机拉普拉斯矩阵描述

$$(\mathcal{L}_t(\omega))_{i,j} = \begin{cases} -\beta_t^{(ij)}(\omega), \text{ if } i \neq j \\ \nu_t^{(i)}(\omega) = \sum_{\ell \in \mathcal{N}^{(i)}} \beta_t^{(i\ell)}(\omega), \text{ if } i = j. \end{cases} \tag{15}$$

假设3保证随机拉普拉斯矩阵仍具有初始拉普拉斯矩阵 $\bar{}$的性质 $\mathcal{L}$。

$\bar{}$**引理 1** 如果假设*3*成立，则：*(i)* $\mathbb{E}[\mathcal{L}_t(\omega)] = p_\beta \mathcal{L}$；*(ii)* $\mathcal{L}_t(\omega)$ 是对称半正定的；*(iii)* $0 \in \sigma(\mathcal{L}_t(\omega))$ 及其对应的左、右归一化特征向量分别为 $v = \frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{1}_N$ 和 $v^\top$；*(iv)* 对所有 ω，$\rho(\mathcal{L}_t(\omega)) \leqslant \overline{\rho(\mathcal{L})}$。

证明。前三个性质是因为 $\mathcal{L}_t(\omega)$ 是$\bar{}$仍然是无向图的拉普拉斯矩阵。为证明 $\rho(\mathcal{L}_t(\omega)) \leqslant \rho(\mathcal{L})$，我们回顾以下众所周知的性质（见 [8]，第 1.2 节），$x^\top \mathcal{L} x = \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} (x_i - x_j)^2$，这意味着，$\forall x \in \mathbb{R}^N$，$0 \leqslant x^\top \mathcal{L}_t(\omega) x \leqslant x^\top \bar{\mathcal{L}} x$，即$\|\mathcal{L}_t(\omega)\| \leqslant \|\mathcal{L}\|$。两个矩阵都是对称且半正定的，并且$\bar{}$于是 $\max(\sigma(\mathcal{L}_t(\omega))) \leqslant \max(\sigma(\mathcal{L}))$。□

4.1 局部增益的收敛性分析

本节旨在证明，在存在链路故障的情况下，图中步骤 $\sum_{i=1}^N C_i^\top R_i^{-1} C_i$ 2 1 N $G =$ 的广播式Push-Sum算法会在每个节点计算出 P_∞ 和 $K^{(i)}$。这实现了 和 的分布式计算，而它们对于分布式卡尔曼滤波器在步骤 4、5 中的滤波器方程至关重要。

广播式Push-Sum算法的收敛性已在 [26] 中得到研究。为完整起见，我们报告无链路故障情况下的收敛结果。

定理 1 在不存在链路故障的情况下（即 $\beta_t^{(ij)} = \beta_t^{(ij)}{}_{,h} = 1 \ \forall t, h \geqslant 0, i \neq j$），若假设*1*成立，则由 (3)–(5)生成的序列 $\tilde{C}_t^{(i)}$，$\tilde{n}_t^{(i)}$，$w_t^{(i)}$ 满足

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{C}_t^{(i)} \to \frac{\bar{\nu}^{(i)}}{\sum_{j=1}^N \bar{\nu}^{(j)}} \sum_{j=1}^N C_j^\top R_j^{-1} C_j \tag{16}$$

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{n}_t^{(i)} \to \frac{\bar{\nu}^{(i)}}{\sum_{j=1}^N \bar{\nu}^{(j)}} N \tag{17}$$

$$\lim_{t\to\infty} w_t^{(i)} \to \frac{\bar{\nu}^{(i)}}{\sum_{j=1}^N \bar{\nu}^{(j)}} \tag{18}$$

该结果已在附录 A.3 中得到证明。将其推广至存在链路故障的情形（这是本文的主要结果之一）需要假设3。

定理 2 如果假设*1*和假设*3*均得到满足，则极限(16)–(18) 依概率成立。

证明见附录 A.4。

4.2 估计误差的渐近分析

本节分析存在链路故障时 DKF 的性能，对应于图1中的步骤 4、5。具体而言，我们证明，当 δ 和 γ足够大时，存在链路故障时 DKF 提供的估计是渐近无偏且均方有界的。这也为调节参数 δ 和 γ提供了一些指导。我们假设 $G^{(i)}$ 和 $N^{(i)}$ 的值已分别达到其渐近值 $G = C^\top R^{-1} C$ 和 N，并且 $K^{(i)} = NP_\infty C_i^\top R_i^{-1}$，其中 P_∞ 满足式 (12)。

令 $\widehat{\mathbf{X}}_t = \mathrm{col}_{i=1}^N(\widehat{\mathbf{x}}_{t|t}^{(i)}) \in \mathbb{R}^{nN}$ 为各节点的估计值，$\mathbf{X}_t = \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^{nN}$ 为对应于系统状态的向量，其演化规律为

$$\mathbf{X}_{t+1} = \mathbf{1}_N \otimes (A\mathbf{x}_t + \mathbf{f}_t) = (I_N \otimes A)\mathbf{X}_t + \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{f}_t. \tag{19}$$

因此，总体估计误差为$\mathbf{E}_t = \mathbf{X}_t - \widehat{\mathbf{X}}_t = \mathrm{col}_{i=1}^N(\mathbf{e}_t^{(i)})$，其中$\mathbf{e}_t^{(i)} = \mathbf{x}_t - \widehat{\mathbf{x}}_{t|t}^{(i)}$。

令 $\bar{\mathcal{L}} = \bar{\mathcal{L}}^\top$ 表示无故障时的通信图。其谱为 $\mathcal{L}$ $\sigma(\mathcal{L}) = \{\lambda_1 = 0, \lambda_2, \ldots, \lambda_N\}$，其中 $\lambda_i \in \mathbb{R}$对于 $i = 1, \ldots, N$。令

$$M_t^{(\gamma)}(\omega) = \prod_{h=0}^{\gamma-1} \left(I_N - \frac{1}{\delta} \mathcal{L}_{t,h}(\omega) \right) \in \mathbb{R}^{N \times N}. \tag{20}$$

平均步骤 5.2 可通过式 (20) 中的 $M_t^{(\gamma)}(\omega)$ 以及$\mathbf{Z}_{t+1,h} = \mathrm{col}_{i=1}^N(\mathbf{z}_{t+1,h}^{(i)})$, $i = 1, \ldots, N$ 表示为

$$\mathbf{Z}_{t+1,h+1} = \left(M_t^{(\gamma)}(\omega) \otimes I_n \right) \mathbf{Z}_{t+1,h}. \tag{21}$$

令 $A_i = (I - K^{(i)} C_i) A$。由式 (12)、(13) 可知，对于 $A_C = A - K_\infty C A$。

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N A_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (I_n - K^{(i)} C_i) A = (I_n - K_\infty C) A = A_C. \tag{22}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}
\mathbf{z}_{t+1,0}^{(i)} =& A\widehat{\mathbf{x}}_{t|t}^{(i)} + K^{(i)} \left(C_i A \left(\mathbf{x}_t - \widehat{\mathbf{x}}_{t|t}^{(i)} \right) + C_i \mathbf{f}_t + \mathbf{g}_{t+1}^{(i)} \right) \\
=& A\mathbf{x}_t - A_i \mathbf{e}_t^{(i)} + K^{(i)} \left(C_i \mathbf{f}_t + \mathbf{g}_{t+1}^{(i)} \right) \qquad (23) \\
\widehat{\mathbf{X}}_{t+1} =& \left(M_t^{(\gamma)}(\omega) \otimes I_n \right) (\mathbf{1}_N \otimes A\mathbf{x}_t) \\
& - \left(M_t^{(\gamma)}(\omega) \otimes I_n \right) \mathrm{diag}_i(A_i) \mathbf{E}_t \\
& + \left(M_t^{(\gamma)}(\omega) \otimes I_n \right) \mathrm{col}_i \left(K^{(i)} (C_i \mathbf{f}_t + \mathbf{g}_{t+1}^{(i)}) \right) \\
=& (I_N \otimes A) \mathbf{X}_t - \left(M_t^{(\gamma)}(\omega) \otimes I_n \right) \mathrm{diag}_i(A_i) \mathbf{E}_t \\
& + \left(M_t^{(\gamma)}(\omega) \otimes I_n \right) \mathrm{col}_i \left(K^{(i)} (C_i \mathbf{f}_t + \mathbf{g}_{t+1}^{(i)}) \right), \qquad (24)
\end{aligned}$$

其中，我们利用了这一性质。

$$\left(M_t^{(\gamma)}(\omega)\otimes I_n\right)(\mathbf{1}_N\otimes A\mathbf{x}_t)=(\mathbf{1}_N\otimes A\mathbf{x}_t)=(I_N\otimes A)\mathbf{X}_t$$

它由 $M_t^{(\gamma)}(\omega)\mathbf{1}_N=\mathbf{1}_N$ 递减而来（见附录 A.2 中的引理 9，第 3 点）。将 (24) 从 (19) 中相减

$$\mathbf{E}_{t+1}=A_{\mathcal{G}}^{(\gamma)}(\omega)\mathbf{E}_t+\left(M_t^{(\gamma)}(\omega)\otimes I_n\right)\operatorname{col}_{i=1}^{N}(\mathbf{h}_t^{(i)}),\tag{25}$$

with

$$A_{\mathcal{G}}^{(\gamma)}(\omega)=\left(M_t^{(\gamma)}(\omega)\otimes I_n\right)\operatorname{diag}_i(A_i)\tag{26}$$

$$\mathbf{h}_t^{(i)}=(I_n-K^{(i)}C_i)\mathbf{f}_t-K^{(i)}\mathbf{g}_{t+1}^{(i)}.\tag{27}$$

(25) 中 $\mathbf{E}_t$ 的稳定性分析并不简单，因为 $A_{\mathcal{G}}^{(\gamma)}(\omega)$ 是一个随机矩阵。我们的分析利用附录 B 中的引理 10，该引理为随机矩阵线性系统的均方有界性提供了充分条件。我们还使用以下简单的界。

引理 2 设 $M(\omega)\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是一个对称随机矩阵，满足 $\forall\omega:\rho(M(\omega))\leqslant 1$ 且 $\mathbb{P}(\{\omega:\ \rho(M)=1\})<1$。则 $\rho(\mathbb{E}[M(\omega)])<1$。

证明。由于 $M(\omega)$ 是对称的，$\rho(M(\omega))=\|M(\omega)\|$ 且 $\rho(\mathbb{E}[M(\omega)])=\|\mathbb{E}[M(\omega)\|$。显然，$1>\mathbb{E}[\rho(M(\omega))]$；根据詹森不等式，$1>\mathbb{E}[\rho(M(\omega))]=\mathbb{E}[\|M(\omega)\|]\geqslant\|\mathbb{E}[M(\omega)]\|=\rho(\mathbb{E}[M(\omega)])$。□

式（25）中的矩阵 $M_t^{(\gamma)}(\omega)$ 通常并非对称矩阵，但它具有若干有趣的性质。

引理 3 $M_t^{(\gamma)}(\omega)$ 的期望值为

$$\mathbb{E}\left[M_t^{(\gamma)}(\omega)\right]=\bar{M}^{(\gamma)}=\left(I_N-\frac{p_\beta}{\delta}\bar{\mathcal{L}}\right)^{\gamma}.\tag{28}$$

$\bar{M}^{(\gamma)}$ 的特征值为$\{(1-\frac{p_\beta}{\delta}\lambda_i)^\gamma\}$，其中 $\lambda_i\in\sigma(\bar{\mathcal{L}})$。特别地，$1\in\sigma(\bar{M}^{(\gamma)})$。

证明见 A.1，其中还给出了其他辅助结果和性质。主要结果是，对于足够大的 δ 和 γ，存在链路故障时 DKF 提供的估计是渐近无偏且均方有界的（证明见附录 A.5）。

定理 3 当假设*1*、*2*和*3*成立，且 $\delta>\rho(\mathcal{L})$ 存在 $\gamma_0\in\mathbb{N}$使得 $\forall\gamma>\gamma_0$ 时，分布式卡尔曼滤波器的估计值（图*1*中的步骤*4*和*5*）是渐近无偏的，且均方有界。

当输出矩阵相同时，会出现一种特殊情况，即 $C_i=C_j,\ i,j=1,\dots,N$，这意味着对于所有 $i=1,\dots,N$，$A_i=A_C$均成立。在这种情况下，无论执行多少个共识步骤，都能得到渐近无偏估计值。

推论1 在定理 *3* 的假设下，如果另外 $C_i = C_j$ 对于 i, j =1、.....、 N那么对于任意 $\gamma \geqslant 1$，分布式卡尔曼滤波器的估计（图*1*中的步骤*4*和*5*）是渐近无偏且均方有界的。此外，在此情况下，变换坐标中估计误差的方程 (25) $\widetilde{\mathbf{E}}_t = \mathcal{T}^{-1}\mathbf{E}_t = \mathcal{T}^{\top}\mathbf{E}_t$，其中 $\mathcal{T}$在(75) 中定义为 *is*

$$\widetilde{\mathbf{E}}_{t+1} = \begin{pmatrix} A_C & 0 \\ 0 & S_t^{(\gamma)}(\omega) \otimes A_C \end{pmatrix} \widetilde{\mathbf{E}}_t + \tilde{\mathbf{h}}_t, \tag{29}$$

其中 $S_t^{(\gamma)}(\omega)$ 在(58) 中定义， $\tilde{\mathbf{h}}_t$ 在(78)中定义。

证明见附录A.6，矩阵 $S_t^{(\gamma)}(\omega)$的性质总结于引理 9。下面的引理给出了变换噪声$\mathbf{h}_t$ 的协方差在 $\gamma \to \infty$时的渐近值。

引理4 设 $\Psi_{\tilde{\mathbf{h}}} = \mathbb{E}[\tilde{\mathbf{h}}_t \tilde{\mathbf{h}}_t^{\top}] \in \mathbb{R}^{nN \times nN}$。若假设*1*、*2*和*3*成立，且 $\delta > \rho(\mathcal{L})$，则$\lim_{\gamma\to\infty} \Psi_{\tilde{\mathbf{h}}}$ 等于

$$\begin{pmatrix} N(I_n - K_\infty C)Q(I_n - K_\infty C)^{\top} + NP_\infty C^{\top}R^{-1}CP_\infty & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

该引理的证明见附录A.7。现在我们可以将分布式卡尔曼滤波器的另一项关键性质扩展到存在链路故障的情况。

定理4 若假设*1*、*2*和*3*成立，且 $\delta > \rho(\mathcal{L})$，则对于 $t \to \infty$ 和 $\gamma \to \infty$，每个节点处估计误差的协方差均趋于集中式卡尔曼滤波器的协方差P_∞ 。

证明见附录A.8。

所有结果均在条件 $\delta > \rho(\mathcal{L})$下获得，该条件保证 $\mathbb{E}[S_t^{(\gamma)}(\omega)^{[2]}]$ 和 $\bar{S}^{\gamma}$ $\bar{S}$ $1 - \frac{p_\beta}{\delta}\lambda_i$ 为舒尔稳定。由于 的特征值满足 $\lambda_i \in \sigma(\mathcal{L}) > 0$，稳定性与性能之间存在权衡。较大的 δ 更为安全，但估计误差期望值收敛至 0 的速度较慢，且方差可能较大。因此，在实践中，略大于 $\rho(\mathcal{L})$ 的值是最佳选择。显然，仅凭局部信息无法验证 $\delta > \rho(\mathcal{L})$，但可以使用 $\delta > \max_i\{\nu^{(i)}\} > \rho(\bar{\mathcal{L}})$ （见 [2]），其中 $\max_i\{\nu^{(i)}\}$ 可通过分布式算法计算。

4.3 共识步数的界限

通过保证误差系统$\mathbf{E}_t]$ 的稳定性，可以得到均值动态 $\mathbb{E}[$的下界 γ

$$\mathbb{E}[\mathbf{E}_{t+1}] = \mathbb{E}[A_{\mathcal{G}}^{(\gamma)}]\mathbb{E}[\mathbf{E}_t] = \left(\bar{M}^{(\gamma)} \otimes I_n\right) \mathrm{diag}_i(A_i)\mathbb{E}[\mathbf{E}_t] \tag{30}$$

渐近稳定。为此，我们将对对偶全局误差系统$\mathbf{e}_t = \mathbb{E}\left[A_{\mathcal{G}}^{(\gamma)}\right]^{\top}\mathbf{e}_t$进行推理。如果

$$\mathcal{T}^{\top}\mathbf{e}_t = (T^{\top}\otimes I_n)\mathbf{e}_t =: \widetilde{\mathbf{e}}_t = \begin{pmatrix}\widetilde{\mathbf{e}}_t^{(1)}\\ \widetilde{\mathbf{e}}_t^{(2)}\end{pmatrix}, \tag{31}$$

其中 $\mathcal{T} = (v\ W)\otimes I_n$ 如式（75）所示，我们得到

$$\begin{pmatrix}\widetilde{\mathbf{e}}_{t+1}^{(1)}\\ \widetilde{\mathbf{e}}_{t+1}^{(2)}\end{pmatrix} = \mathbb{E}[H_t(\omega)]^{\top}\begin{pmatrix}\widetilde{\mathbf{e}}_t^{(1)}\\ \widetilde{\mathbf{e}}_t^{(2)}\end{pmatrix} = \bar{H}^{\top}\begin{pmatrix}\widetilde{\mathbf{e}}_t^{(1)}\\ \widetilde{\mathbf{e}}_t^{(2)}\end{pmatrix}, \tag{32}$$

¯其中 $H_t(\omega)$ 定义于 (77)， $H = \mathbb{E}[H_t]$,

$$\bar{H}^{\top} = \begin{pmatrix}A_C^{\top} & \mathbb{E}[H_{21}^{(\gamma)}]^{\top}\\ H_{12}^{\top} & \mathbb{E}[H_{22}^{(\gamma)}]^{\top}\end{pmatrix} = \mathcal{T}^{\top}\bar{A}_D^{\top}\mathcal{T}\begin{pmatrix}I_n & 0\\ 0 & \bar{S}^{\gamma}\otimes I_n\end{pmatrix} \tag{33}$$

其中，$\bar{S} = \mathbb{E}[S_{t,h}(\omega)]$ 在式（53）中定义， $H_{21}^{(\gamma)}(\omega)$、 $H_{22}^{(\gamma)}(\omega)$ 在式（77）中定义，$\bar{A}_D =$ 为对角矩阵$_{i=1}^{N}(A_i)$。黎卡提方程（12）保证总是可以选取 $\lambda\in(0,1)$ ，使得

$$A_C P_\infty A_C^{\top} \leqslant \lambda P_\infty. \tag{34}$$

在下一个定理的证明中，我们使用加权范数

$$\|N\|_M := \sup_{z\in\mathbb{R}^m}\sqrt{\frac{z^{\top}N^{\top}MNz}{z^{\top}Mz}}, \tag{35}$$

$N\in\mathbb{R}^{m\times m}$, $M\in\mathcal{P}_+(m)$。 (34) 意味着 $\|A_C^{\top}\|_{P_\infty}\leqslant\sqrt{\lambda}$。

¯**定理 5** 如果对于所有满足 $\rho(A_R(\gamma))<1$ 的 γ ，具有链路故障的分布式卡尔曼滤波器（*DKF*）都是渐近无偏的， $\delta>\rho(\mathcal{L})$

$$A_R(\gamma) := \begin{pmatrix}\sqrt{\lambda} & \theta_{p_\beta}^{\gamma}c_B\\ c_B & \theta_{p_\beta}^{\gamma}c_B\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2} \tag{36}$$

$$c_B := (1+N\|P_\infty\|\|G\|_{P_\infty})\|A\|_{P_\infty}, \tag{37}$$

其中， $\lambda\in(0、\ 1)$ 满足(34)，且 $\theta_{p_\beta}:=1-\frac{p_\beta}{\delta}(1-\cos(\pi/N))<1$。

证明。由于 $\|\mathcal{T}\|=1$ 和 $\|\bar{A}_D^{\top}\| = \|\mathbf{diag}_i(A_i)\| = \max_i\|A_i\|$,

$$\|\mathcal{T}^{\top}\bar{A}_D^{\top}\mathcal{T}\|_{I_N\otimes P_\infty} = \max_i\|A_i\|_{I_N\otimes P_\infty}\leqslant c_B. \tag{38}$$

此外，注意到，根据式（54）定义的 θ_{p_β} ，

$$\|\bar{S}\otimes I_n\|_{I_{N-1}\otimes P_\infty} = \|\bar{S}\otimes I_n\|\leqslant\theta_{p_\beta}, \tag{39}$$

$$\|(\bar{S}\otimes I_n)^{\gamma}\|_{I_{N-1}\otimes P_\infty} = \|\bar{S}\|^{\gamma}\leqslant\theta_{p_\beta}^{\gamma}. \tag{40}$$

利用 $\|A_C^{\top}\|_{P_\infty} \leqslant \sqrt{\lambda}$、式 (33) 和式 (38)，可得

$$\|\widetilde{\mathbf{e}}_{t+1}^{(1)}\|_{P_\infty} \leqslant \sqrt{\lambda}\|\widetilde{\mathbf{e}}_t^{(1)}\|_{P_\infty} + \theta_{p_\beta}^{\gamma} c_B \|\widetilde{\mathbf{e}}_t^{(2)}\|_{I_{N-1}\otimes P_\infty} \tag{41}$$

$$\|\widetilde{\mathbf{e}}_{t+1}^{(2)}\|_{I_{N-1}\otimes P_\infty} \leqslant c_B\|\widetilde{\mathbf{e}}_t^{(1)}\|_{P_\infty} + \theta_{p_\beta}^{\gamma} c_B \|\widetilde{\mathbf{e}}_t^{(2)}\|_{I_{N-1}\otimes P_\infty} \tag{42}$$

最后，我们得出结论

$$\begin{pmatrix} \|\widetilde{\mathbf{e}}_{t+1}^{(1)}\|_{P_\infty} \\ \|\widetilde{\mathbf{e}}_t^{(2)}\|_{I_{N-1}\otimes P_\infty} \end{pmatrix} \leqslant A_R(\gamma) \begin{pmatrix} \|\widetilde{\mathbf{e}}_t^{(1)}\|_{P_\infty} \\ \|\widetilde{\mathbf{e}}_t^{(2)}\|_{I_{N-1}\otimes P_\infty} \end{pmatrix}. \tag{43}$$

因此，式 (30) 稳定的充分条件是 $A_R(\gamma)$ 的谱半径小于 1。□

推论 2 当 (36) 时，该条件始终成立。

$$\left(1 - \frac{p_\beta(1-\cos(\pi/N))}{\delta}\right)^{\gamma} < \left(\frac{1-\sqrt{\lambda}}{c_B}\right)^2 \tag{44}$$

γ 的下界界限证明是通过计算(36)中的 $\rho(A_R(\gamma))$ 的上界小于1得到的，该下界由(44)表示。

$$\mathbb{E}\left[H_t(\omega)^{[2]}\right] = \left(\begin{array}{c|ccc} A_C^{[2]} & A_C \otimes H_{12} & H_{12} \otimes A_C & {H_{12}}^{[2]} \\ \hline A_C \otimes \mathbb{E}[H_{21}^{(\gamma)}] & A_C \otimes \mathbb{E}[H_{22}^{(\gamma)}] & H_{12} \otimes \mathbb{E}[H_{21}^{(\gamma)}] & H_{12} \otimes \mathbb{E}[H_{22}^{(\gamma)}] \\ \mathbb{E}[H_{21}^{(\gamma)}] \otimes A_C & \mathbb{E}[H_{21}^{(\gamma)}] \otimes H_{12} & \mathbb{E}[H_{22}^{(\gamma)}] \otimes A_C & \mathbb{E}[H_{22}^{(\gamma)}] \otimes H_{12} \\ \mathbb{E}[{H_{21}^{(\gamma)}}^{[2]}] & \mathbb{E}[H_{21}^{(\gamma)} \otimes H_{22}^{(\gamma)}] & \mathbb{E}[H_{22}^{(\gamma)} \otimes H_{21}^{(\gamma)}] & \mathbb{E}[{H_{22}^{(\gamma)}}^{[2]}] \end{array}\right)$$

图 2：矩阵 $\mathbb{E}\left[H_t(\omega)^{[2]}\right]$ 的结构。

注释 7 *Theorem 5* 中定义的参数 θ_{p_β} 取决于成功通信概率，该概率可由每个节点根据已知链路故障的统计数据进行估计。由于对所有 $p_\beta < 1$，我们都有 $\theta_{p_\beta} < 1$，因此总存在 γ 使得 $\rho(A_R(\gamma)) < 1$。每个节点都已知矩阵 P、G、N 和 A，因此可以在本地计算 γ 的下界。

定理 6 如果对于所有满足 $\rho(A_S(\gamma)) < 1$ 的 γ，带有链路故障的分布式卡尔曼滤波器均方有界，

$$A_S(\gamma) := \begin{pmatrix} \lambda & c_B\sqrt{\lambda} & c_B\sqrt{\lambda} & c_B^2 \\ c_B\theta_{p_\beta}^{\gamma}\sqrt{\lambda} & c_B\theta_{p_\beta}^{\gamma}\sqrt{\lambda} & c_B^2\theta_{p_\beta}^{\gamma} & c_B^2\theta_{p_\beta}^{\gamma} \\ c_B\theta_{p_\beta}^{\gamma}\sqrt{\lambda} & c_B^2\theta_{p_\beta}^{\gamma} & c_B\theta_{p_\beta}^{\gamma}\sqrt{\lambda} & c_B^2\theta_{p_\beta}^{\gamma} \\ c_B^2\theta_{p_d}^{\gamma} & c_B^2\theta_{p_d}^{\gamma} & c_B^2\theta_{p_d}^{\gamma} & c_B^2\theta_{p_d}^{\gamma} \end{pmatrix} \tag{45}$$

其中，$\lambda \in (0, 1)$ 满足(34)，c_B 在(37)中定义，$\theta_{p_\beta} < 1$ 在(54)中定义，$\theta_{p_d} < 1$ 在定理 *5* 中定义。

证明。经过导致式 (76) 的 **~坐标变换**$_t = \mathcal{T}^\top \mathbf{E}_t$，我们通过 $\rho(\mathbb{E}[H_t(\omega)^{[2]}]) < 1$ 推导均方有界的条件（见引理 10，iii）。矩阵 $\mathbb{E}[H_t(\omega)^{[2]}]$ 如图 2 所示。采用与定理 5 中相同的方法，我们通过 $\mathbb{R}^{4\times4}$ 中矩阵的谱半径，推导出谱半径的一个上界；该矩阵是通过使用 $\mathbb{E}[H_t(\omega)^{[2]}]$各块范数的上界得到的。前三行各块范数的上界与定理 5 中的相同。对于第四行，我们需要 $\|\mathbb{E}[S_t^{(\gamma)}(\omega)^{[2]}]\|$的一个上界，该上界由引理 9，2)，(iii) 提供。□

注 8 界 (45) 不仅取决于链路概率 p_β，还取决于断连概率 p_d。后一个参数取决于 p_β 和网络拓扑。因此，智能体必须掌握有关网络配置的一些信息，才能估计 p_d。

5 仿真结果

我们考虑对具有离散化步长τ的平面系统进行跟踪的问题，其中传感器可能只能估计位置的一个分量，即

$$A = \begin{pmatrix} I_2 & \tau I_2 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R_i = \sigma_g^2$$
$$Q = \sigma^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\tau^3 I_2 & \frac{1}{2}\tau^2 I_2 \\ \frac{1}{2}\tau^2 I_2 & I_2 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

我们考虑图 3 所示的拓扑结构，该结构由一个包含 $N = 10$ 个节点和 17 条弧的连通图构成。节点 5 和节点 10 分别具有测量矩阵 C_1 和 C_2，其余节点仅具有通信能力。在 $_\tau = 0.25$、 $\sigma = 0.05$、 $\sigma_g = 0.1$ 条件下，我们针对 γ 的若干取值进行了 $N_s = 300$ 次仿真，每次仿真包含 $k = 450$ 个点。均方误差（MSE）通过对所有节点和时刻的估计误差范数取平均值计算得到，即 $k \in [\frac{1}{5}\bar{k}, \ldots, \bar{k}]$（以避免瞬态效应）。图 4 展示了不同链路故障概率（即 $1 - p_\beta$）下，所有节点的均方误差随共识步骤迭代次数 γ 变化的平均结果。右侧的图是对.....的放大图。

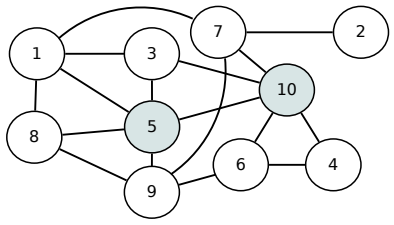


图 3：示例的网络拓扑。

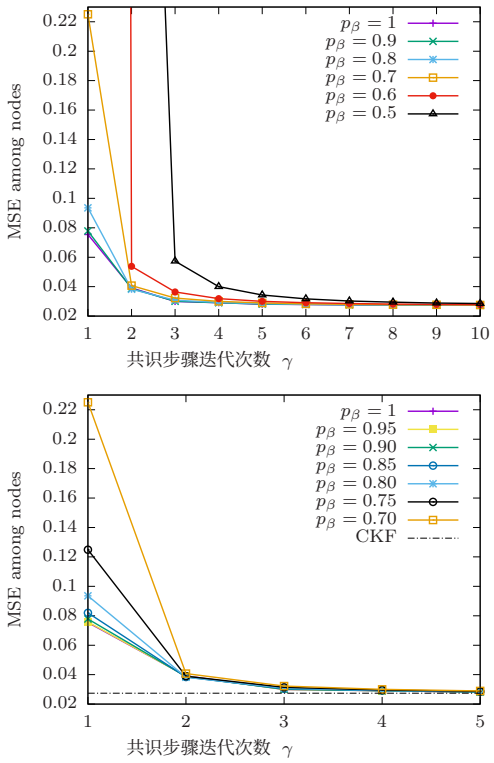


图 4：不同接收信息的概率（即 p_β）下，节点间均方误差随 γ 的变化。右图是左图的放大图，对概率等级进行了更精细的离散化。

左图对概率等级进行了更精细的离散化，对应 CKF 的曲线表示无链路故障时集中式卡尔曼滤波器的性能。我们可以看到，当链路故障概率为 $1-p_\beta = 0.3$ 时，所提出的滤波器在 $\gamma = 1$ 下仍然稳定，且性能可接受；而当链路故障概率为 $1-p_\beta = 0.4$（$\gamma = 1$）以及链路故障概率为 $1-p_\beta = 0.5$（$\gamma \in \{1,\ 2\}$）时，滤波器的均方误差无界。正如预期，随着 γ 增大，滤波器的性能会改善，并趋近于无链路故障时的集中式最优性能（图 4，右图）。图 4（右图）显示，对于 $p_\beta \in [0.7,\ 1]$ 和 $\gamma \geqslant 2$，性能基本相同。图 5 展示了在所考虑的示例中，为使均方误差与集中式卡尔曼滤波器（CKF，无链路故障）相比的差异保持在 10% 以内，接收信息的最小值 p_β 随共识步骤迭代次数 γ 的变化情况。红色区域表示性能差异超过 10% 的区域，而浅蓝色区域表示性能差异低于 10% 的区域。我们观察到，在此示例中，无法将相对于 CKF 的性能差异保持在.....

若 $\gamma \leqslant 2$，链路故障在 10% 以内。

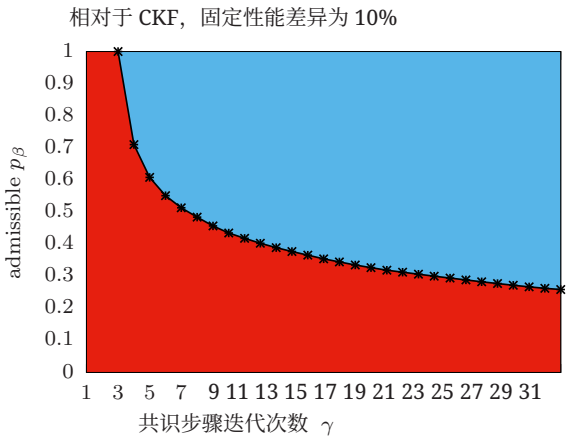


图 5：为使相对于无链路故障时集中式卡尔曼滤波器（CKF）的均方误差（MSE）性能差异保持在 10% 左右，给出了接收信息的概率 p_β 关于共识步骤迭代次数 γ 的最小允许值。红色区域表示性能差异超过 10% 的区域，而浅蓝色区域表示性能差异低于 10% 的区域。

6 结论

本文研究了在线性时不变系统中，当故障具有对称性且在时间上不相关时，存在随机链路故障的多共识步骤分布式滤波器的稳定性。可按照 [2] 将该方法扩展到有向可对称化图。未来的研究可致力于将这一框架扩展到时变系统或非线性系统、随机时延 [4], 、非对称且相关的故障过程或攻击 [12]。

A 证明

A.1 引理3的证明

对于随机拉普拉斯矩阵的独立性，

$$\mathbb{E}[M_t^{(\gamma)}(\omega)] = \prod_{h=0}^{\gamma-1} \left(I_N - \frac{1}{\delta} \mathbb{E}[\mathcal{L}_{t,h}(\omega)] \right) = \bar{M}^{(\gamma)}. \tag{46}$$

设 U 为非奇异矩阵，满足 $\bar{\mathcal{L}} = U\Lambda U^{-1}$，其中 Λ 为对角实矩阵。于是，

$$\bar{M}^{(\gamma)} = \left(I_N - \frac{p_\beta}{\delta}\bar{\mathcal{L}}\right)^\gamma = U\left(I_N - \frac{p_\beta}{\delta}\Lambda\right)^\gamma U^{-1}. \tag{47}$$

显然，$I_N - \frac{p_\beta}{\delta}\Lambda$ 的特征值为 $\{1 - \frac{p_\beta}{\delta}\lambda_i\}$，其左右特征向量为 $\{e_j\}$ $(I_N - \frac{p_\beta}{\delta}\Lambda)e_j = (1 - \frac{p_\beta}{\delta}\lambda_j)e_j$，即标准基的单位向量。$(I_N - \frac{p_\beta}{\delta}\Lambda)^\gamma e_j = (1 - \frac{p_\beta}{\delta}\lambda_j)^\gamma e_j$ 由此可得，并且根据相似关系，$(1 - \frac{p_\beta}{\delta}\lambda_j)^\gamma \in \sigma(\bar{M}^{(\gamma)})$。特别地，由于 $\lambda_1 = 0$，因此 $1 \in \sigma(\bar{M}^{(\gamma)})$。 □

A.2 辅助结果

引理 5 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{D}$ 分别为一个无向连通图的邻接矩阵和度矩阵。则矩阵 $\Theta = (I + \mathcal{A})(I + \mathcal{D})^{-1}$ 具有以下性质：

a) Θ 是非负、不可约且列随机的。

b) $\rho(\Theta) = 1 = \lambda_1 \in \sigma(\Theta)$, *and* $\lambda_1 = 1$ *is simple.*

c) Θ 是本原的，也就是说，$\lambda_1 = 1$ 是单位圆上的唯一特征值，即 $|\lambda_i| < 1$，对于 $i \neq 1$。

d) $\lambda_1 = 1$ 的右特征向量和左特征向量 u_1、$v_1^\top$ 是仅有的非负特征向量，其中

$$u_1 = \mathrm{col}_{i=1}^N(\bar{\nu}^{(i)}) = \mathrm{col}_{i=1}^N(\nu^{(i)} + 1) \tag{48}$$

$$v_1^\top = \mathbf{1}_N^\top. \tag{49}$$

证明。a)项。根据构造，Θ的元素不是 0 就是正数。Θ 的不可约性源于矩阵 $\mathcal{A}$ 是一个连通无向图的邻接矩阵这一事实。根据该性质

$$\Theta = (I_N + \mathcal{D} + \mathcal{A} - \mathcal{D})(I_N + \mathcal{D})^{-1} = I_N - \mathcal{L}(I_N + \mathcal{D})^{-1}$$

很容易验证，Θ 的第 i 列中的元素不是 0 就是 $1/(\nu^{(i)}+1)$, 即 非零元素都相同，且共有 $\nu^{(i)}+1$ 个，因此每列的和为 1。

b)项。性质 $\rho(\Theta) \in \sigma(\Theta)$ 可由非负不可约矩阵的佩龙–弗罗贝尼乌斯定理推出（例如参见 [21], 第 8 章）。对 Θ 的各列应用格申戈林圆盘定理可得 $\rho(\Theta) \leqslant 1$。我们证明 $\lambda_1 = 1 \in \sigma(\Theta)$，因此 $\rho(\Theta) = 1$。事实上

$$\Theta \cdot u_1 = \Theta \cdot \mathrm{col}_{i=1}^N(\bar{\nu}^{(i)}) = (I_N + \mathcal{A}) \cdot \mathbf{1}_N = \mathrm{col}_{i=1}^N(\bar{\nu}^{(i)}).$$

要点 c）。 Θ 是本原矩阵，因为它是一个非负不可约矩阵，且对角线元素均非零，这是矩阵具有本原性的充分条件（ [21],第 8 章）。

要点 d）。我们已经证明， $u_1 = \mathrm{col}_{i=1}^{N}(\bar{v}^{(i)})$ 是 $\lambda_1 = 1$的右特征向量。此外，由于 Θ 的各列之和为 1， $v_1^\top \cdot \Theta = \mathbf{1}_N^\top \cdot \Theta = \mathbf{1}_N^\top = v_1^\top$。最后，正如佩龙–弗罗贝尼乌斯定理所述， u_1 和 $v_1^\top$是仅有的非负特征向量。□

引理 6 若 $\delta > \rho(\bar{\mathcal{L}})$，则 $\forall\omega$、 $\sigma(M_t^{(\gamma=1)}(\omega)) \subset [-1, 1]$和 $1 \in \sigma(M_t^{(\gamma=1)}(\omega))$，其左右归一化特征向量分别为 $v = \frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{1}_N$ 和 $v^\top$。

证明。引理 1 表明 $\lambda_N(\frac{1}{\delta}\mathcal{L}_t(\omega)) \leqslant \lambda_N(\frac{1}{\delta}\bar{\mathcal{L}}) < 1$。由于 $\frac{1}{\delta}\mathcal{L}_t(\omega)$是对称半正定的，采用与引理 3 相同的推导可得， $M_t^{(\gamma=1)}(\omega) = I_N - \frac{1}{\delta}\mathcal{L}_t(\omega)$ 的特征值为 $\{1 - \frac{1}{\delta}\lambda_i(\mathcal{L}_t(\omega))\}$，其中 $\left|1 - \frac{1}{\delta}\lambda_i(\mathcal{L}_t(\omega))\right| \leqslant 1$。特别地，由于 $\lambda_1(\bar{\mathcal{L}}_t(\omega)) = 0$， $1 \in \sigma(M_t^{(\gamma=1)}(\omega))$。□

引理 7 如果 $\mathcal{L}_t(\omega)$ 是 $\mathcal{G}$的连通子图的拉普拉斯矩阵， $\delta > \rho(\bar{\mathcal{L}})$ 且 $W = 行_{i=1}^{N-1}(w_i) \in \mathbb{R}^{N\times(N-1)}$ 是任意一个（确定性）矩阵，其列构成与 $\mathcal{S}_v$ 张成空间$(\{v\})$, $v = \frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{1}_N$正交的子空间 $\mathcal{S}_v^\perp$ 的一组标准正交基，那么该矩阵

$$S_t(\omega) = I_{N-1} - \frac{1}{\delta}W^\top \mathcal{L}_t(\omega)W, \tag{50}$$

是对称、半正定且舒尔稳定的。此外，

$$\sigma(S_t(\omega)) = \sigma(M_t^{(\gamma=1)}(\omega))\backslash\{1\}. \tag{51}$$

证明。 $S_t(\omega)$ 是对称的，因为 $\mathcal{L}_t(\omega)$ 是对称的。 v 和 $\mathcal{S}_v$ 独立于 ω，因此存在一个确定性矩阵 $W \in \mathbb{R}^{N\times(N-1)}$ 使得 $v^\top W = W^\top v = 0$, $W^\top W = I_{N-1}$。矩阵 $vv^\top, WW^\top \in \mathbb{R}^{N\times N}$分别是 $\mathcal{S}_v$和 $\mathcal{S}_v^\perp$上的投影矩阵，且 $I_N = vv^\top + WW^\top$。此外，对于所有 ω 和 $x \in \mathbb{R}^N$, $\mathcal{L}_t(\omega)x \in \mathcal{S}_v^\top$，由于 $v^\top\mathcal{L}_t(\omega)x = 0$。因此， $WW^\top\mathcal{L}_t(\omega)W = \mathcal{L}_t(\omega)W$，因为 $\mathcal{L}_t(\omega)W$的列属于 $\mathcal{S}_v^\perp$，且 $WW^\top$是 $\mathcal{S}_v^\perp$上的投影矩阵。于是，

$$M_t^{(\gamma=1)}(\omega) = I_N - \frac{1}{\delta}\mathcal{L}_t(\omega) = vv^\top + WS_t(\omega)W^\top. \tag{52}$$

这两个分解矩阵彼此正交。当 $\mathcal{L}_t(\omega)$连通时，特征值 $1 \in \sigma(M_t^{(\gamma=1)}(\omega))$ 的重数为一，并且由于 $vv^\top v = v$，它是 $vv^\top$ 唯一的非零特征值。根据引理 6， $M_t^{(\gamma=1)}(\omega)$的其余 $N-1$ 个特征值属于区间 $(-1, 1)$，它们是第二项的特征值，即 $S_t(\omega)$ 和 0 的特征值。□

引理 8 若 $\mathcal{L}$ 是如引理 7 中的 $\mathcal{G}$、 $\delta > \rho(\mathcal{L})$、$W$ 的连通图的拉普拉斯矩阵，则该矩阵

$$\bar{S} = I_{N-1} - \frac{p_\beta}{\delta}W^\top\bar{\mathcal{L}}W, \tag{53}$$

是对称半正定矩阵，且满足舒尔稳定性。此外，

$$\begin{aligned}\|\bar{S}\| = \rho(\bar{S}) &= 1 - \frac{p_\beta}{\delta}\lambda_2(\bar{\mathcal{L}}) \\ &\leqslant \theta_{p_\beta} := 1 - \frac{p_\beta}{\delta}(1-\cos(\pi/N)) \qquad (54)\\ \bar{M}^{(\gamma)} &= vv^\top + W\bar{S}^\gamma W^\top \qquad (55)\\ \bar{S}^\gamma &= W^\top \bar{M}^{(\gamma)} W. \qquad (56)\end{aligned}$$

证明。根据引理 7 中的相同步骤，很容易证明（53）中定义的 S 的性质，因为 $\delta/p_\beta \geqslant \delta > \rho(\mathcal{L})$。利用下界 $\lambda_2(\mathcal{L}) \geqslant 2(1-\cos(\pi/N))$（见 [14]），可由（53）推出（54）。由（52）很容易看出，对于 $\gamma = 1$，恒等式（55）成立。依次归纳可得，

$$\bar{M}^{(\gamma)} = \bar{M}^{(\gamma-1)}\bar{M}^{(1)} = vv^\top + W\bar{S}^\gamma W^\top. \qquad (57)$$

要得到（56），只需分别在（55）各项左乘和右乘 $W^\top$ 与 W，并回想 $W^\top W = I_{N-1}$。□

引理 9 若假设*3*成立，且

$$S_t^{(\gamma)}(\omega) := \prod_{h=0}^{\gamma-1} S_{t,h}(\omega). \qquad (58)$$

则对于所有 t:

1. $\mathbb{E}[S_t^{(\gamma)}(\omega)] = \bar{S}^\gamma$。

2. 若还满足 $\delta > \rho(\mathcal{L})$，则:

(i) $\mathbb{E}[\|S_t^{(\gamma)}(\omega)S_t^{(\gamma)}(\omega)^\top\|] < 1$.

(ii) $\mathbb{E}[S_t^{(\gamma)}(\omega)S_t^{(\gamma)}(\omega)^\top]$ *is Schur.*

(iii) $\|\mathbb{E}[S_t^{(\gamma)}(\omega)^{[2]}]\| \leqslant \theta_{p_d}^\gamma$,

$$\theta_{p_d} := (1-p_d)\theta_{p_\beta}^2 + p_d < 1 \qquad (59)$$

(iv) $\lim_{\gamma\to\infty}\|\mathbb{E}[S_t^{(\gamma)}(\omega)^{[2]}]\| = 0$.

3. 对于所有 ω，$1 \in \sigma(M_t^{(\gamma)}(\omega))$，相应的左归一化特征向量和右归一化特征向量分别为 $v = \frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{1}_N$ 和 $v^\top$。

4. 若 $\delta > \rho(\mathcal{L})$ 且 $p_d < 1$，则

$$\begin{aligned}\lim_{\gamma\to\infty}\bar{M}^{(\gamma)} &= \lim_{\gamma\to\infty}\mathbb{E}\left[M_t^{(\gamma)}(\omega)\right] = vv^\top = \frac{1}{N}U_N \\ \lim_{\gamma\to\infty}\mathbb{E}\left[M_t^{(\gamma)}(\omega)^\top M_t^{(\gamma)}(\omega)\right] &= vv^\top = \frac{1}{N}U_N\end{aligned}$$

证明。第 1 点。利用分解式 (52)，我们得到

$$M_t^{(\gamma)}(\omega) = vv^\top + W\left(\prod_{h=0}^{\gamma-1} S_{t,h}(\omega)\right)W^\top. \tag{60}$$

对 $\mathbb{E}[M_t^{(\gamma)}(\omega)] = \bar{M}^{(\gamma)}$ 取期望，并与比较后，我们得出 $\mathbb{E}[S_t^{(\gamma)}(\omega)] = \bar{S}^\gamma$。(55)

要点 2。$S_{t,\ h}(\omega)$ 是对称的，并且若 $\delta > \rho(\mathcal{L})$，则 $\rho(S_{t,\ h}(\omega)) \leqslant 1$ （引理 7），因此 $\|S_{t,\ h}(\omega)\| \leqslant 1, \forall\omega$。

$$\begin{aligned}\|S_t^{(\gamma)}(\omega){S_t}^{(\gamma)}(\omega)^\top\| &= \|S_{t,0}(\omega)\cdot\ldots\cdot S_{t,\gamma-1}(\omega)^2\cdot\ldots\cdot S_{t,0}(\omega)\| \\ &\leqslant \|S_{t,0}(\omega)\|^2\cdot\ldots\cdot\|S_{t,\gamma-1}(\omega)\|^2 \leqslant 1.\end{aligned} \tag{61}$$

仅当 ω 满足以下条件时等式成立：$\mathcal{L}_{t,\ h}(\omega)$ 不连通，$h = 0, \ldots, \gamma-1$，也就是说，其概率为 $p_d < 1$，因此 $\mathbb{E}[\|S_t^{(\gamma)}(\omega){S_t}^{(\gamma)}(\omega)^\top\|] < 1$。利用 (61) 和引理 2 可知，$\mathbb{E}[S_t^{(\gamma)}(\omega){S_t}^{(\gamma)}(\omega)^\top]$ 是舒尔稳定的。(iii)：

$$\begin{aligned}\|\mathbb{E}[{S_t}^{(\gamma)^{[2]}}]\| =& \|\mathbb{E}[(\Pi_{h=0}^{\gamma-1}S_{t,h})^{[2]}]\| = \|\mathbb{E}[\Pi_{h=0}^{\gamma-1}S_{t,h}^{[2]}]\| \\ =& \|\Pi_{h=0}^{\gamma-1}\mathbb{E}[S_{t,h}^{[2]}]\| \leqslant \prod_{h=0}^{\gamma-1}\|\mathbb{E}[{S_{t,h}}^{[2]}]\| \\ \leqslant& \prod_{h=0}^{\gamma-1}\mathbb{E}[\|S_{t,h}^{[2]}\|] = \mathbb{E}[\rho(S_{t,h}^{[2]})]^\gamma = \mathbb{E}[\rho(S_{t,h})^2]^\gamma\end{aligned}$$

在每个 $(t,\ h)$，图要么以概率 $1-p_d$ 连通，且 $\rho(S_{t,\ h}) \leqslant \theta_{p_\beta}$；要么以概率 p_d 不连通，且 $\rho(S_{t,\ h}) = 1$。由此可得 $\mathbb{E}[\rho(S_{t,\ h})^2] \leqslant \theta_{p_d} < 1$ 以及 iv)。

第 3 点。

$$\begin{aligned}M_t^{(\gamma)}(\omega)v &= M_t^{(\gamma-1)}(\omega)\left(I_N\cdot v - \frac{1}{\delta}\mathcal{L}_{t,h}(\omega)v\right) \\ &= M_t^{(\gamma-1)}(\omega)v = \ldots = v.\end{aligned} \tag{62}$$

第 4 点。如果 $\delta > \rho(\bar{\mathcal{L}})$ $\sigma(\mathbb{E}[M_t^{(\gamma)}(\omega)]) = \sigma(\bar{M}^{(\gamma)}) = \{(1-\frac{p_\beta}{\delta}\lambda_i)^\gamma\} \subset [-1,\ 1]$，其中我们使用了引理 3。回顾 $1 \in \sigma(\bar{M}^{(\gamma)})$，可得 $\lim_{\gamma\to\infty}\sigma(\mathbb{E}[M_t^{(\gamma)}(\omega)]) = \{0, 1\}$。因此，$\mathbb{E}[M_t^{(\gamma)}(\omega)]$ 趋于 1 的自空间上的投影算子，即 $vv^\top$。此外，根据（60）及其性质

$$\mathbb{E}[A(\omega)B(\omega)B^\top(\omega)A^\top(\omega)] = \mathbb{E}[A(\omega)\mathbb{E}[B(\omega)B^\top(\omega)]A^\top(\omega)]$$

对于任何一对维度相容的独立随机矩阵 $A(\omega)$、$B(\omega)$，我们得到

$$\begin{aligned}&\lim_{\gamma\to\infty}\mathbb{E}\left[{M_t^{(\gamma)}}^\top M_t^{(\gamma)}\right] = vv^\top + \lim_{\gamma\to\infty}W\cdot \\ &\cdot\mathbb{E}\Big[S_{t,0}\mathbb{E}\big[S_{t,1}\ldots\mathbb{E}\big[S_{t,\gamma-1}^2\big]\ldots S_{t,1}\big]S_{t,0}\Big]W^\top = vv^\top.\end{aligned}$$

事实上，对于任意 $h = 0$、.....、$\gamma - 1$，$S_{t,\,h}(\omega)^2$ 的所有特征值的绝对值以概率 > 0 小于 1。因此，$\mathbb{E}[S_{t,\,h}(\omega)^2]$ 是舒尔稳定的（引理 2），且分解的第二项随着 $\gamma \to \infty$ 趋于 0。□

A.3 定理 1 的证明

当 $\beta_t^{(ij)} \equiv 1$ 时，式 (16)、(17) 和 (18) 中的递归方程属于以下类型

$$z_i(t+1) = \frac{z_i(t)}{\bar{\nu}^{(i)}} + \sum_{j \in \mathcal{N}^{(i)}} \frac{z_j(t)}{\bar{\nu}^{(j)}}. \tag{63}$$

为证明定理 1，我们证明对于每个节点处的任意初始赋值 $z_i(0) = x_i$，序列 (63) 满足这样的性质：

$$\lim_{t\to\infty} z_i(t) = \frac{\bar{\nu}^{(i)}}{\sum_{j=1}^N \bar{\nu}^{(j)}} \sum_{j=1}^N x_j, \tag{64}$$

由于考虑 $\tilde{C}^{(i)}$、$\tilde{n}^{(i)}$ 和 w_i 的初始赋值即可得到该论点。下面考虑向量情形 $x_i \in \mathbb{R}^n$，矩阵情形是其简单扩展。记 $Z = \mathrm{col}_{i=1}^N(z_i) \in \mathbb{R}^{nN}$ (63) 变为

$$\begin{aligned} Z(t+1) &= \left((I_N + \mathcal{A})(I_N + \mathcal{D})^{-1} \otimes I_n\right) Z(t) \\ &= (\Theta \otimes I_n) Z(t) \end{aligned} \tag{65}$$

其中 $Z(0) = \mathrm{col}_{j=1}^N x_j$。由于 $(\Theta \otimes I_n)^t = \Theta^t \otimes I_n$, $\sigma(\Theta^t \otimes I_n) = \sigma(\Theta^t) = \{\lambda_i^t : \lambda_i \in \sigma(\Theta)\}$。正如引理 5 中所证明的，矩阵 Θ 是非负的、不可约的且本原的，其谱半径为 $\rho(\Theta) = 1$，并且 $\lambda_1 = 1$ 是单位圆上的唯一特征值，进而

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to\infty} (\Theta \otimes I_n)^t Z(0) = \left(\frac{u_1 v_1^\top}{v_1^\top u_1} \otimes I_n\right) \mathrm{col}_{j=1}^N(x_j) \\ &= \mathrm{col}_{i=1}^N \left(\frac{\bar{\nu}^{(i)}}{\sum_{j=1}^N \bar{\nu}^{(j)}} \sum_{j=1}^N x_j\right), \end{aligned} \tag{66}$$

因为 $u_1 = \mathrm{col}_{i=1}^N(\bar{\nu}^{(i)})$ 和 $v_1^\top = \mathbf{1}_N$，因此 $(v_1^\top \otimes I_n)\mathrm{col}_{j=1}^N(x_j) = \sum_{j=1}^N x_j$。□

A.4 定理 2 的证明

我们的目标是证明，性质 (64) 仍然以概率成立。将 (16)、(17) 和 (18) 中的递归方程简洁地写成如下形式：

$$\begin{aligned} Z(t+1) &= \big(((I_N + \mathcal{A}(t,\omega) + \mathcal{D} - \mathcal{D}(t,\omega)) \\ &\quad \cdot (I_N + \mathcal{D})^{-1}) \otimes I_n\big) Z(t) \\ &= \left((I_N - \mathcal{L}(t,\omega)(I + \mathcal{D})^{-1}) \otimes I_n\right) Z(t) \\ &= (\Theta(t,\omega) \otimes I_n) Z(t), \end{aligned} \tag{67}$$

在 (67) 中，矩阵 $\mathcal{A}(t,\omega)$ 和 $\mathcal{D}(t,\omega) = \mathrm{diag}_i(\nu_t^{(i)})$ 分别是随机子图 $\mathcal{G}(t,\omega)$ of $\mathcal{G}$ 的（随机）邻接矩阵和度矩阵，该子图用于对称链路故障建模。随机矩阵 $\Theta(t,\omega) \in \mathbb{R}^{N\times N}$仍具有引理 5 中 Θ 的所有性质，但不再具有不可约性和本原性。当图因链路故障而不连通时，特征值 $\lambda_1 = 1$ 的代数重数可能大于 1；不过， $\Theta(t,\omega) \geqslant 0$, $\Theta(t,\omega)$是列随机矩阵， $\rho(\Theta(t,\omega)) = 1$, $\|\Theta(t,\omega)\|_1 = 1$。后一性质确保 (67) 的解是简单稳定的。此外，当 $p_\beta > 0$ 时，矩阵

$$\mathbb{E}_\Theta = \mathbb{E}\left[\Theta(t,\omega)\right] = I_N - p_\beta \bar{\mathcal{L}}(I_N + D)^{-1} \tag{68}$$

是非负、不可约、原始且列随机的矩阵，其右特征向量和左特征向量 u_1、 $v_1^\top$ 定义于 (48)–(49)。因此，

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_\Theta^t = \frac{u_1 v_1^\top}{v_1^\top u_1} = \mathcal{P}_1, \tag{69}$$

其中，我们用 $\mathcal{P}_1$ 表示在 $\lambda_1 = 1$ 的自空间上的投影算子。 $Z(t)$ 的期望值有极限

$$\lim_{t\to\infty} Z(t) = \lim_{t\to\infty} \left(\mathbb{E}_\Theta^t \otimes I_n\right) Z(0) = \left(\mathcal{P}_1 \otimes I_n\right) Z(0), \tag{70}$$

与确定性情形（66）相同。通过证明 $Z(t)$ 的协方差渐近趋于零，即可完成证明。为简洁起见，假设 $n = 1$。那么，

$$Z(t) = \prod_{\tau=0}^{t-1} \Theta(\tau,\omega) Z(0) \tag{71}$$

$$\begin{aligned}\Psi_Z(t) =& \mathbb{E}\left[\left(\prod_{\tau=0}^{t-1}\Theta(\tau,\omega) - \mathbb{E}_\theta^t\right) Z(0)\right. \\ &\left.\cdot Z^\top(0)\left(\prod_{\tau=0}^{t-1}\Theta^\top(t-1-\tau,\omega) - \mathbb{E}_\theta^{\top t}\right)\right].\end{aligned} \tag{72}$$

利用$\mathrm{stack}(AXA^\top) = A^{[2]}\mathrm{stack}(X)$ 这一性质以及 $\Theta(\tau,\omega)$的时间独立性，令 $\Psi_0 = \mathrm{stack}(Z(0)Z^\top(0)$ ，我们得到

$$\mathrm{stack}(\Psi_Z(t)) = \left(\left(\mathbb{E}\left[\Theta^{[2]}(t,\omega)\right]\right)^t - \left(\mathbb{E}_\Theta^{[2]}\right)^t\right)\Psi_0. \tag{73}$$

由于克罗内克平方的谱由特征值的乘积构成， $\sigma\left(\mathbb{E}\left[\Theta^{[2]}(t,\ \omega)\right]\right) \subset [0,\ 1]$ 且当 $p_\beta > 0$时，单位圆上唯一的特征值是 $\lambda_1^2 = 1$，因此

$$\lim_{t\to\infty}\left(\mathbb{E}\left[\Theta^{[2]}(t,\omega)\right]\right)^t = \lim_{t\to\infty}\left(\mathbb{E}_\Theta^{[2]}\right)^t = \mathcal{P}_1^{[2]}, \tag{74}$$

并且，因此，$\mathrm{stack}(\Psi_Z(t)) \to 0$。当 $n > 1$ 时，只需将$\Theta(\tau,\omega)$ 替换为 $\Theta(\tau,\ \omega)\otimes I_n$ ，并将 $\mathbb{E}_\Theta$ 替换为 $\mathbb{E}_\Theta \otimes I_n$ ，证明便完全相同。

A.5 定理 3 的证明

令 $T=(v\ W)$、$T_v=v\otimes I_n$、$T_w=W\otimes I_n$ 和

$$\mathcal{T}=\begin{pmatrix}T_v & T_w\end{pmatrix},\quad \mathcal{T}^{-1}=\mathcal{T}^\top=\begin{pmatrix}T_v^\top\\ T_W^\top,\end{pmatrix} \tag{75}$$

其中 $v=\frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{1}_N\in\mathbb{R}^{N\times 1}$ 和 $W\in\mathbb{R}^{N\times(N-1)}$ 如引理 7 所述。考虑坐标变换 $\tilde{\mathbf{E}}_t=\mathcal{T}^{-1}\mathbf{E}_t=\mathcal{T}^\top\mathbf{E}_t$。在新坐标下，误差动态为

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{E}}_{t+1}=&H_t(\omega)\widetilde{\mathbf{E}}_t+\tilde{\mathbf{h}}_t &(76)\\ H_t(\omega)=&\begin{pmatrix}T_v^\top A_{\mathcal{G}}^{(\gamma)}(\omega)T_v & T_v^\top A_{\mathcal{G}}^{(\gamma)}(\omega)T_W\\ T_W^\top A_{\mathcal{G}}^{(\gamma)}(\omega)T_v & T_W^\top A_{\mathcal{G}}^{(\gamma)}(\omega)T_W\end{pmatrix}\\ =&\begin{pmatrix}A_C & T_v^\top\mathrm{col}_{i=1}^N(W_i\otimes A_i)\\ (S_t^{(\gamma)}(\omega)\otimes I_n)\mathcal{W}_A^\top T_v & (S_t^{(\gamma)}(\omega)\otimes I_n)\mathcal{W}_A^\top T_W\end{pmatrix}\\ =&\begin{pmatrix}A_C & H_{12}\\ H_{21}^{(\gamma)}(\omega) & H_{22}^{(\gamma)}(\omega)\end{pmatrix} &(77)\end{aligned}$$

其中 $\mathcal{W}_A^\top=$行$_{i=1}^N(W_i^\top\otimes A_i)\in\mathbb{R}^{nN\times n(N-1)}$，且

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{h}}_t=&\begin{pmatrix}(v^\top\otimes I_n)(M_t^{(\gamma)}(\omega)\otimes I_n)\\ (W^\top\otimes I_n)(M_t^{(\gamma)}(\omega)\otimes I_n)\end{pmatrix}\mathrm{col}_{i=1}^N(\mathbf{h}_t^{(i)})\\ =&\begin{pmatrix}T_v^\top\mathbf{h}_t\\ (W^\top M_t^{(\gamma)}(\omega)\otimes I_n)\mathbf{h}_t\end{pmatrix} &(78)\end{aligned}$$

其中 $W_i\in\mathbb{R}^{1\times(N-1)}$ 表示 $W=\mathbf{col}_{i=1}^N(W_i)$的各行，$\mathbf{h}_t=\mathbf{col}_{i=1}^N(\mathbf{h}_t^{(i)})$，$S_t^{(\gamma)}(\omega)$ 由式 (58) 定义，并且我们利用引理 9 推导出

$$\begin{aligned}T_v^\top A_{\mathcal{G}}^{(\gamma)}(\omega)T_v=&\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N A_i=A_C, &(79)\\ T_v^\top A_{\mathcal{G}}^{(\gamma)}(\omega)T_W=&T_v^\top\mathrm{col}_{i=1}^N(W_i\otimes A_i), &(80)\\ T_W^\top A_{\mathcal{G}}^{(\gamma)}(\omega)T_v=&(W^\top M_t^{(\gamma)}(\omega)\otimes I_n)\mathrm{diag}_{i=1}^N(A_i)T_v\\ =&(S_t^{(\gamma)}(\omega)\otimes I_n)\mathrm{row}_{i=1}^N(W_i^\top\otimes A_i)T_v. &(81)\end{aligned}$$

由于 $H_{21}^{(\gamma)}(\omega)$、$H_{22}^{(\gamma)}(\omega)$ 与状态和噪声相互独立，且 $\mathbb{E}[\mathbf{h}_t]=0$，对式 (76) 两边取期望可得，

$$\mathbb{E}[\widetilde{\mathbf{E}}_{t+1}]=\begin{pmatrix}A_C & T_v^\top\mathrm{col}_{i=1}^N(W_i\otimes A_i)\\ (\bar{S}^\gamma\otimes I_n)\mathcal{W}_A^\top T_v & (\bar{S}^\gamma\otimes I_n)\mathcal{W}_A^\top T_W\end{pmatrix}\mathbb{E}[\widetilde{\mathbf{E}}_t], \tag{82}$$

其中，我们使用了引理 9 的第 1 点、引理 8 中的式 (56)，以及将式 (55) 左乘 $W^\top$ 后得到的性质$W^\top\bar{M}^{(\gamma)}=\bar{S}^\gamma W^\top$。我们注意到

$A_C = (I - K_\infty C)A$ 是集中式卡尔曼滤波器的动力学矩阵，¯根据假设2是舒尔稳定的，而 S 是对称且舒尔稳定的（见引理 8）。¯因此，$\lim_{\gamma\to\infty} \|S^\gamma\| = 0$，并且存在充分大的 γ_0，使得对所有$\gamma > \gamma_0$，式 (82) 中的动力学矩阵都是舒尔稳定的。

关于均方有界性，根据引理 10 的 iii)，我们只需证明，对于充分大的 γ，图 2 所示的矩阵 $\mathbb{E}\left[H_t(\omega)^{[2]}\right]$是时不变且舒尔稳定的。$\mathbb{E}\left[H_t(\omega)^{[2]}\right]$ 的时不变性源于块 $H_{21}^{(\gamma)}(\omega)$、$H_{22}^{(\gamma)}(\omega)$ 在时间上的独立性。由 $H_{21}^{(\gamma)}$、$H_{22}^{(\gamma)}$ 的结构以及 $\lim_{\gamma\to\infty} \|\mathbb{E}[S_t^{(\gamma)}(\omega)^{[2]}]\| = 0$ （引理 9，第 2-iv 点）可得

$$\lim_{\gamma\to\infty} \mathbb{E}\left[H_t(\omega)^{[2]}\right] = \begin{pmatrix} A_C^{[2]} & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由于 $A_C^{[2]}$ 是舒尔稳定的，所需性质对 $\gamma \to \infty$ 成立，因此对充分大的 γ 也成立。

A.6 推论1的证明

我们只需证明（29）。事实上，由（29）可得

$$\mathbb{E}[\widetilde{\mathbf{E}}_{t+1}] = \begin{pmatrix} A_C & 0 \\ 0 & \bar{S}^\gamma \otimes A_C \end{pmatrix} \mathbb{E}[\widetilde{\mathbf{E}}_t] \tag{83}$$

¯，并且由于在假设中 A_C 和 S^γ 均为舒尔稳定的，因此可知动态矩阵是舒尔稳定的。由（29）、引理 9 的 2) 以及引理 10 的 iii) 还可˜得 $\mathbf{E}_t$ 是均方有界的。为证明（29），我们注意到，当 $\forall i,\ j\ A_i = A_j$ 时，$A_i = A_C$ 并且

$$H_{12} = T_v^\top \mathrm{col}_{i=1}^N (W_i \otimes A_C) = T_v^\top (W \otimes A_C) = 0,$$

类似地，$H_{21}^{(\gamma)}(\omega) = 0$ 也如此。此外，由于 $\sum_{i=1}^N W_i^\top W_i = I_{N-1}$,

$$H_{22}^{(\gamma)}(\omega) = (S_t^{(\gamma)}(\omega) \otimes I_n)\mathcal{W}_A^\top (W \otimes I_n) = S_t^{(\gamma)}(\omega) \otimes A_C.$$

A.7 引理4的证明

令 $\widetilde{R} = \mathbb{E}[\text{行}_i\text{列}_j(h_t^{(i)} h_t^{(j)\top})]$ 和 $S_t^{(\gamma)}(\omega) = \Pi_{h=0}^{\gamma-1} S_{t,\ h}(\omega)$。由于 $\delta > \rho(\bar{\mathcal{L}})$, $\lim_{\gamma\to\infty} S_t^{(\gamma)}(\omega) S_t^{(\gamma)}(\omega)^\top$ 存在。我们可以应用勒贝格控制收敛定理，得

gence theorem to obtain

$$\begin{aligned}\lim_{\gamma\to\infty}\Psi_{\tilde{\mathbf{h}}} &= \lim_{\gamma\to\infty}\mathbb{E}\left[\mathcal{T}^\top(M_t^{(\gamma)}(\omega)\otimes I_n)\tilde{R}(M_t^{(\gamma)}(\omega)\otimes I_n)^\top\mathcal{T}\right]\\ &= \lim_{\gamma\to\infty}\mathbb{E}\Big[\mathcal{T}^\top((vv^\top + WS_t^{(\gamma)}(\omega)W^\top)\otimes I_n)\tilde{R}\cdot\\ &\quad\cdot(((vv^\top + WS_t^{(\gamma)}(\omega)^\top W^\top)\otimes I_n)\mathcal{T}\Big]\\ &= \mathcal{T}^\top((vv^\top\otimes I_n)\tilde{R}(vv^\top\otimes I_n)\mathcal{T} = \begin{pmatrix}T_v^\top\tilde{R}T_v & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

该论点可通过观察以下事实得出。

$$\begin{aligned}T_v^\top\tilde{R}T_v &= \frac{1}{N}\sum_{i,j}\mathbb{E}\left[h_t^{(i)}{h_t^{(j)}}^\top\right]\\ &= N\left((I_n - K_\infty C)Q(I_n - K_\infty C)^\top + P_\infty C^\top R^{-1}CP_\infty\right).\end{aligned}\tag{84}$$

A.8 定理4的证明

通过证明变换坐标 $\tilde{P}_t = \mathbb{E}[\tilde{\mathbf{E}}_t\tilde{\mathbf{E}}_t^\top]$ 中的误差协方差满足以下条件，即可得到该证明。

$$\lim_{t\to\infty}\lim_{\gamma\to\infty}\tilde{P}_t = \begin{pmatrix}NP_\infty & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\tag{85}$$

这等价于说明，估计误差协方差的渐近（时间）极限（在 γ中）在 N个智能体之间相同，且总和为 NP_∞。令 $\tilde{P}_0 = T^\top\mathbb{E}[\mathbf{E}_0\mathbf{E}_0^\top]T$为变换坐标中估计误差协方差的初始值。通过归纳推理，$\tilde{\lim}_{\gamma\to\infty}P_1$ 等于

$$\begin{aligned}&\lim_{\gamma\to\infty}\mathbb{E}\left[\begin{pmatrix}A_C & H_{12}\\ H_{21}^{(\gamma)}(\omega) & H_{22}^{(\gamma)}(\omega)\end{pmatrix}\tilde{P}_0\begin{pmatrix}A_C^\top & H^{21\top}_\gamma(\omega)\\ {H_{12}}^\top & H_{22}^{(\gamma)}(\omega)\end{pmatrix}\right]\\ &\qquad\qquad + \lim_{\gamma\to\infty}\Psi_{\tilde{\mathbf{h}}}\\ &= \begin{pmatrix}A_C & H_{12}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\tilde{P}_0\begin{pmatrix}A_C^\top & 0\\ {H_{12}}^\top & 0\end{pmatrix} + \lim_{\gamma\to\infty}\Psi_{\tilde{\mathbf{h}}}\\ &= \begin{pmatrix}A_C(\tilde{P}_0)_{1,1}A_C^\top + H_{12}(\tilde{P}_0)_{1,2} + (\tilde{P}_0)_{1,2}^\top{H_{12}}^\top + (\Psi_{\tilde{\mathbf{h}}})_{1,1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\end{aligned}$$

其中$(\Psi_{\tilde{\mathbf{h}}})_{1,1}$ 由（84）给出，即

$$(\Psi_{\tilde{\mathbf{h}}})_{1,1} = N(I_n - K_\infty C)Q(I_n - K_\infty C)^\top + NP_\infty C^\top R^{-1}CP_\infty.$$

~因此，$\lim_{\gamma\to\infty} P_1$ 中只有第一个 $n\times n$ 块不为零，并且对于所有矩阵 $\lim_{\gamma\to\infty}\widetilde{P}_t$，这一性质都保持不变。块 $\frac{1}{N}\widetilde{P}^{1,1}_{t}$ 的演化为 −

$$\frac{1}{N}\widetilde{P}^{1,1}_{t+1} = (I_n - KC)(A\frac{1}{N}\widetilde{P}^{1,1}_{t}A^\top + Q)(I_n - KC)^\top + P_\infty C^\top R^{-1} C P_\infty. \tag{86}$$

由于 P_∞ 满足代数黎卡提方程 (12)，差值 $\Delta_t = P_\infty - \frac{1}{N}\widetilde{P}^{1,1}_{t}$ 按 $\Delta_{t+1} = A_C\Delta_t A_C^\top$ 演化。由于 A_C 是舒尔稳定的，因此这是一个渐近稳定的矩阵函数。因此，$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{N}\widetilde{P}^{1,1}_{t} = P_\infty$。□ −

B 随机矩阵稳定性的一项结果

在概率空间 $(\Omega\ \mathcal{F},\ P)$ 中，具有有限二阶矩的 $\mathcal{F}$-可测向量 $x:\Omega\to\mathbb{R}^n$ 构成一个线性空间；赋予其内积 $[x_1,\ x_2]_{\mathcal{L}_2} = \mathbb{E}[x_1^\top x_2]$ 后，它成为一个希尔伯特空间，记作 $\mathcal{L}_2^n = L_2((\Omega\ \mathcal{F},\ P);\ \mathbb{R}^n)$。若 $x\in\mathcal{L}_2^n$，则 $\mathbb{E}[\|x\|^2] < \infty$。特别地，当 $\mathbb{E}[x] = 0$ 时，$\|x\|^2_{\mathcal{L}_2^n}$ 是随机向量 x 的方差。随机方阵 $A(\omega):\Omega\to\mathbb{R}^{n\times n}$ 是一个从 Ω 到 n 阶方阵集合的 $\mathcal{F}$-可测函数。

引理 10 设 $\{A(t,\omega)\}, t = 0, 1, \ldots$ 是一列独立、$\mathcal{F}$-可测且同分布的矩阵函数 $A(t,\omega):\Omega\to\mathbb{R}^{n\times n}$。给定系统

$$x(t+1) = A(t,\omega)x(t) + f(t,\omega), \tag{87}$$

其中 $x(0)\in\mathcal{L}_2^n$，$f(t,\omega)$ 是 $\mathcal{L}_2^n$ 中一列相互独立的向量，$\mathbb{E}[f(t,\omega)] = 0$ 与 $f(t,\omega)$ 均独立于 x_0（对所有 t），$A(t,\omega)$ 独立于 $x(0)$，且 $f(t,\omega)$，则

i) 若 $\rho(\mathbb{E}[A]) < 1$，则 $\mathbb{E}[x(t)]\to 0$ 指数地。

ii) 若 $\mathbb{E}[\|A\|^2] < 1$，则对所有 t，$\|x(t)\|_{\mathcal{L}_2}$ 一致有界。

iii) 若 $\rho(\mathbb{E}[A^{[2]}]) < 1$，则对所有 t，$\|x(t)\|_{\mathcal{L}_2}$ 一致有界。

证明。 i)：对每个 t $A(t,\ \omega)$ 和 $x(t)$ 相互独立，

$$\mathbb{E}[x(t+1)] = \mathbb{E}[Ax(t)] = \mathbb{E}[A]\mathbb{E}[x(t)] \tag{88}$$

且由于 $\mathbb{E}[A]$ 是舒尔稳定的，$\mathbb{E}[x(t)]\to 0$。

ii):

$$\begin{aligned}\|x(t+1)\|_{\mathcal{L}_2} &= \|A(t,\omega)x(t) + f(t,\omega)\|_{\mathcal{L}_2}\\ &\leqslant \mathbb{E}[\|A\|^2]^{\frac{1}{2}}\|x(t)\|_{\mathcal{L}_2} + \|f(t,\omega)\|_{\mathcal{L}_2}.\end{aligned} \tag{89}$$

iii)：对于任意相容矩阵 A、 B、 C ，有 $\mathrm{stack}(ABC) = (C^\top \otimes A)\cdot \mathrm{stack}(B)$。令 $P(t) = \mathbb{E}[x(t)x(t)^\top]$。(87)意味着

$$P(t+1) = \mathbb{E}\left[A(t,\omega)P(t)A(t,\omega)^\top\right] + \mathbb{E}[f(t,\omega)f(t,\omega)^\top] \tag{90}$$

$$\mathrm{stack}(P(t+1)) = \mathbb{E}\left[A(t,\omega)^{[2]}\right]\mathrm{stack}(P(t)) + \mathrm{stack}(\mathbb{E}[f(t,\omega)f(t,\omega)^\top]). \tag{91}$$

由此可知，如果 $\mathbb{E}[A(t,\ \omega)^{[2]}]$ 是舒尔稳定的，那么 $\mathrm{stack}(P(t))$ 随时间一致有界；对于 $P(t)$同样如此。由于 $\|x(t)\|_{\mathcal{L}_2}^2 = \mathrm{tr}(P(t))$ ，定理得证。

□

参考文献

[1] S. Battilotti、F. Cacace、M. d'Angelo 和 A. Germani。传感器网络中存在未知随机链路故障时的分布式卡尔曼滤波。*IEEE* 控制系统快报，2(4):587–592，2018年。[2] S. Battilotti、F. Cacace 和 M. d'Angelo。离散时间线性系统基于共识的分布式滤波器的稳定性与最优性分析。*Automatica*，129:109589，2021年。[3] S. Battilotti、F. Cacace、M. d'Angelo 和 A. Germani。连续时间线性系统基于共识的渐近最优分布式滤波。*Automatica*，122:109189，2020年。[4] S. Battilotti 和 M. d'Angelo。离散时间高斯系统的随机输出时延辨识。*Automatica*，109:108499，2019年。[5] G. Battistelli 和 L. Chisci。Kullback–Leibler 平均、概率密度共识及具有保证稳定性的分布式状态估计。*Automatica*，50(3):707–718，2014年。[6]G. Battistelli、L. Chisci、G. Mugnai、A. Farina 和 A. Graziano。基于共识的线性与非线性滤波。*IEEE* 自动控制汇刊，60(5):1410–1415，2015年。[7] F.S. Cattivelli 和 A.H. Sayed。用于分布式卡尔曼滤波和平滑的扩散策略。*IEEE* 自动控制汇刊，55(9):2069–2084，2010年。[8] F.R.K. Chung。谱图论，第92卷。美国数学学会，1997年。[9] M. Gao、Y. Niu 和 L. Sheng。存在传感器故障和随机链路故障时，传感器网络上一类非线性系统的分布式容错状态估计。*IEEE* 系统期刊，2022年。

[10] A. Ge、Q.-L. Han、X.-M. Zhang、L. Ding 和 F. Yang。传感器网络中的分布式事件触发估计：综述。*IEEE* 控制论汇刊，50(3):1306–1320，2020年。[11] X. Ge、Q.-L. Han 和 Z. Wang。无线传感器网络中分布式集合成员估计的动态事件触发传输方案。*IEEE* 控制论汇刊，49(1):171–183，2017年。[12] Y. Guan 和 X. Ge。针对虚假数据注入攻击和干扰攻击的网络化信息物理系统分布式攻击检测与安全估计。*IEEE* 网络信号与信息处理汇刊，4(1):48–59，2017年。[13] S. He、H.-S. Shin、S. Xu 和 A. Tsourdos。低成本传感器网络上的分布式估计：最新进展综述。《信息融合》，54:21–43，2020年。[14] R.A. Horn 和 C.R. Johnson。矩阵分析。剑桥大学出版社，2012年。[15] H. Jin 和 S. Sun。存在数据缺失时多传感器系统的分布式滤波。《信息融合》，86:116–135，2022年。[16] A.T. Kamal、J.A. Farrell 和 A.K. Roy-Chowdhury。信息加权一致性滤波器及其在分布式相机网络中的应用。*IEEE* 自动控制汇刊，58(12):3112–3125，2013年。[17] M. Kamgarpour 和 C. Tomlin。去中心化卡尔曼滤波器的收敛特性。见第*47*届 *IEEE* 决策与控制会议论文集，第3205–3210页。IEEE，2008年。[18] D. Kempe、A. Dobra 和 J. Gehrke。基于八卦协议的聚合信息计算。见第*44*届 *IEEE*计算机科学基础研讨会论文集，*2003*年。，第482–491页。IEEE，2003年。[19] W. Li、G. Wei、D.W.C. Ho 和 D. Ding。传感器网络的加权一致可检测性。*IEEE* 神经网络与学习系统汇刊，29(11):5790–5796，2018年。[20] Q. Liu、Z. Wang、X. He 和 D.H. Zhou。传感器网络中存在随机链路故障时的卡尔曼一致性滤波。*IEEE* 自动控制汇刊，63(8):2701–2708，2018年。[21] C.D. Meyer。矩阵分析与应用线性代数，第71卷。工业与应用数学学会，2000年。[22] R. Olfati-Saber。具有嵌入式一致性滤波器的分布式卡尔曼滤波器。见第*44*届 *IEEE* 决策与控制会议论文集，第8179–8184页。IEEE，2005年。

[23] R. Olfati-Saber. 面向传感器网络的分布式卡尔曼滤波。载于第*46*届 *IEEE* 决策与控制会议论文集，第5492–5498页。IEEE，2007年。[24] R. Olfati-Saber. 卡尔曼一致性滤波器：最优性、稳定性和性能。载于第*48*届 *IEEE* 决策与控制会议论文集，第7036–7042页。IEEE，2009年。[25] A.H. Sayed. 网络上的扩散自适应。载于信号处理学术出版社丛书，第3卷，第323–453页。Elsevier，2014年。[26] I. Shames、T. Charalambous、C.N. Hadjicostis 和 M. Johansson. 与有向图同构的网络中的分布式网络规模估计、平均度估计与控制。载于*2012*年第*50*届*Allerton*通信、控制与计算年会（*Allerton*），第1885–1892页。IEEE，2012年。[27]S.P. Talebi 和 S. Werner. 通过嵌入式平均一致性信息融合进行分布式卡尔曼滤波与控制。*IEEE*自动控制汇刊，64(10):4396–4403，2019年。[28] S.P. Talebi、S. Werner、V. Gupta 和 Y.-F. Huang. 关于分布式滤波器的稳定性与收敛性。*IEEE*信号处理快报，28:494–498，2021年。[29] V. Ugrinovskii. 基于估计值一致性的分布式鲁棒滤波。*Automatica*，47(1):1–13，2011年。[30] C. Wan、Y. Gao、X.R. Li 和 E. Song. 使用贪婪谣传的网络分布式滤波。载于*2018*年第*21*届国际信息融合会议，第1968–1975页。IEEE，2018年。[31] S. Wang 和 W. Ren. 关于使用传感器网络进行分布式动态状态估计的收敛条件：统一框架。*IEEE*控制系统技术汇刊，26(4):1300–1316，2017年。[32]G. Wei、W. Li、D. Ding 和 Y. Liu. 时变系统中基于协方差交集的卡尔曼一致性滤波的稳定性分析。*IEEE*系统、人类与控制论汇刊：系统，50(11):4611–4622，2018年。[33] Z. Wu、M. Fu、Y. Xu 和 R. Lu. 一种面向传感器网络、具有快速有限时间收敛特性的分布式卡尔曼滤波算法。*Automatica*，95:63–72，2018年。[34] W. Yang、Y. Zhang、G. Chen、C. Yang 和 L. Shi. 虚假数据注入攻击下的分布式滤波。*Automatica*，102:34–44，2019年。[35] D. Yu、Y. Xia、L. Li 和 C. Zhu. 存在未知输入和随机链路故障时基于分布式一致性的估计。*Automatica*，122:109259，2020年。

[36] P. Zhu、G. Wei 和 J. Li. 关于传感器网络中存在随机链路故障时基于混合一致性的扩展卡尔曼滤波。*Kybernetika*，56(1):189–212，2020年。