arXiv:2305.04560v3 [stat.ML] 5 Jun 2023

构建神经　　在矩阵流形上构建神经网络：陀螺向量空间方法

Xuan Son Nguyen [1] **Shuo Yang** [1]

摘要

矩阵流形，例如对称正定（SPD）矩阵流形和格拉斯曼流形，出现在许多应用中。近年来，一些研究将陀螺群与陀螺向量空间理论应用于矩阵流形，尝试在这些流形上构建欧几里得神经网络的系统化推广；该理论是研究双曲几何的有力框架。然而，由于针对这些流形的陀螺向量空间中缺少许多概念（例如内积和陀螺角），这些研究所提供的技术和数学工具，与用于研究双曲几何的工具相比仍然有限。本文将陀螺向量空间中的一些概念推广至对称正定流形和格拉斯曼流形，并提出了用于在这些流形上构建神经网络的新模型和层。我们在人体动作识别和知识图谱补全这两项应用中展示了该方法的有效性。

1. 引言

深度神经网络通常假设其计算是在欧几里得几何中进行的。然而，在许多应用中，数据呈现出强烈的非欧几里得潜在结构，例如位于黎曼流形上的数据（Bronstein 等人，2017年）。因此，近年来人们投入了大量精力来构建黎曼流形上的深度神经网络。最常见的表示空间是具有非零常曲率的黎曼流形，例如球面空间和双曲空间（Ganea 等人，2018年；Skopek 等人，2020）。除了距离函数、指数映射、对数映射和平行移动均具有便于学习参数化模型的闭式表达式外，这类空间还具有优良的陀螺向量代数结构空间（Ungar，2014）使得能够有原则地将 DNN 推广到流形场景中（Ganea 等人，2018）。另一类称为矩阵流形（Absil 等人，2007）的黎曼流形也广泛应用于表示学习，其中的元素可以表示为矩阵数组。典型示例包括对称正定流形和格拉斯曼流形。与 Ganea 等 (2018)；Skopek 等人 (2020) 的工作不同，（Huang 与 Gool，2017；Dong 等人，2017；Huang 等人，2018；Nguyen 等人，2019a；b；2020；Nguyen，2021；Wang 等人，2021）的工作以缺乏原则的方式处理将 DNN 推广到所考虑流形的问题。这使得它们难以将广泛类别的 DNN 推广到这些流形上。另一条研究路线（Chakraborty 等人，2018；Chakraborty 等人，2020；Weiler 等人，2021；Banerjee 等人，2022；Xu 等人，2022）提出了黎曼流形上的卷积神经网络（CNN）类比，其依据是等变神经网络的概念（Bronstein 等人，2017）。然而，这些工作主要专注于构建 CNN，缺少解决广泛问题所需的许多 DNN 基本构建模块。

近年来，一些研究（Kim，2020；Nguyen，2022b）尝试探究对称正定流形和格拉斯曼流形与欧几里得空间和双曲空间之间的相似性。尽管这些研究展示了如何从所研究流形的黎曼几何中构造一些基本运算，例如二元运算和数乘，但即便指数映射、对数映射和平行移动都存在闭式表达式，这些运算也可能难以获得闭式表达式。对于从正交归一基（ONB）视角研究的格拉斯曼流形（Edelman 等人，1998；Bendokat 等人，2020），情况正是如此：指数映射和平行移动的表达式基于奇异值分解（SVD）。在某些应用中，使用正交矩阵（ONB 视角）而非投影矩阵来表示格拉斯曼流形上的点更具优势（Bendokat 等人，2020）。此外，由于所研究的矩阵流形上的陀螺向量空间缺少某些概念，例如内积和陀螺角（Ungar，2014），这些研究难以将许多传统机器学习模型（例如多项逻辑回归（MLR））推广到所研究的流形上。

[1]ETIS，UMR 8051，CY Cergy Paris Universit´e，ENSEA，CNRS，法国塞尔吉。通信作者：Xuan Son Nguyen <xuan-son.nguyen@ensea.fr>。

《40th 国际机器学习大会论文集，美国夏威夷州檀香山。PMLR 202，2023。版权所有 © 2023 作者。

本文提出一种新方法，用于从 ONB 视角构造格拉斯曼流形上的基本运算和陀螺自同构。我们还通过将陀螺向量空间中的一些概念推广到对称正定流形和格拉斯曼流形，改进了现有研究。这促成了对称正定流形上的 MLR，以及对称正定流形和格拉斯曼流形上的等距模型的发展；我们将后者称为对称正定流形和格拉斯曼流形的陀螺等距变换。它们分别是定义在对称正定流形和格拉斯曼流形上的欧几里得等距变换的对应形式。我们研究这类等距变换的动机在于，它们可以视为一种在不改变流形局部结构的情况下使流形发生形变的变换。在流形上的几何深度学习（GDL）背景下（Bronstein 等人，2017年），研究目标之一是构造作用于流形上定义的信号、且对等距变换保持不变的函数。这种不变性称为几何稳定性，是几何深度学习中用于学习高维数据稳定表示的几何原则之一。因此，刻画对称正定流形和格拉斯曼流形上的陀螺等距变换，是在这些流形上构建此类函数（例如神经网络）的初步步骤之一。

2. 提出的方法

2.1. 符号说明

我们采用 Nguyen（2022b）中使用的符号。设 $\mathcal{M}$ 是一个齐性黎曼流形，$T_{\mathbf{P}}\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{M}$ 在 $\mathrm{P} \in \mathcal{M}$ 处的切空间。记 exp(P) 和 log(P) 分别为 P 的通常矩阵指数和矩阵对数，$\mathrm{Exp}_{\mathrm{P}}(\mathrm{W})$ 为 P 处的指数映射，它将切向量 $\mathrm{W} \in T_{\mathbf{P}}\mathcal{M}$ 映射到 $\mathcal{M}$ 中的一个点；$\mathrm{Log}_{\mathrm{P}}(\mathrm{Q})$ 为 $\mathrm{Q} \in \mathcal{M}$ 在 P 处的对数映射；$\mathcal{T}_{\mathbf{P}\to\mathbf{Q}}(\mathrm{W})$ 为沿连接 P 和 Q 的测地线将 W 从 P 平行移动至 Q；$D\phi_{\mathbf{P}}(\mathrm{W})$ 为映射 ϕ 在点 P 沿方向 W 的方向导数。记 $\mathrm{M}_{n,m}$ 为 $n \times m$ 矩阵空间，Sym_n^+ 为 $n \times n$ 对称正定矩阵空间，Sym_n 为 $n \times n$ 对称矩阵空间，$\mathrm{Gr}_{n,p}$ 为从投影矩阵视角表示的 $\mathbb{R}^n$ 的 p 维子空间（Bendokat 等，2020）。为便于表述，令 $\mathrm{Gr}_{n,p}$ 表示从正交归一基视角表示的 $\mathbb{R}^n$ 的 p 维子空间。我们将使用指数映射、对数映射和平行移动的上标，以标明其对应的黎曼度量（对于对称正定流形）或所考虑的流形（对于格拉斯曼流形）。其他符号将在论文相应段落中引入。

2.2. 等距变换诱导的陀螺向量空间

本节将研究两个由等距变换关联的齐性黎曼流形之间基本运算与陀螺自同构的联系。附录B中对陀螺群和陀螺向量空间进行了回顾。

设 M 和 N 是两个齐性黎曼流形。假设这两个流形之间存在一个双射等距映射

$$\phi : M \to N.$$

此外，假设可以根据下列方程为这两个满足陀螺向量空间公理的流形构造二元运算、数乘和陀螺自同构（Nguyen，2022b）：

$$\mathbf{P} \oplus \mathbf{Q} = \mathrm{Exp}_{\mathbf{P}}(\mathcal{T}_{\mathbf{I}\to\mathbf{P}}(\mathrm{Log}_{\mathbf{I}}(\mathbf{Q}))), \tag{1}$$

$$t \otimes \mathbf{P} = \mathrm{Exp}_{\mathbf{I}}(t\,\mathrm{Log}_{\mathbf{I}}(\mathbf{P})), \tag{2}$$

$$\mathrm{gyr}[\mathbf{P},\mathbf{Q}]\mathbf{R} = \big(\ominus(\mathbf{P}\oplus\mathbf{Q})\big)\oplus\big(\mathbf{P}\oplus(\mathbf{Q}\oplus\mathbf{R})\big), \tag{3}$$

其中，$\mathbf{P}$、$\mathbf{Q}$ 和 $\mathbf{R}$ 是所考虑流形上的三个点，$\mathbf{I}$ 是该流形的单位元，$t \in \mathbb{R}$、$\oplus$、$\otimes$ 和 $\mathrm{gyr}[.,.]$ 分别表示该流形上的二元运算、数乘和陀螺自同构；$\ominus\mathbf{Y}$ 表示流形上任意点 $\mathbf{Y}$ 的左逆元，使得 $\ominus\mathbf{Y} \oplus \mathbf{Y} = e$；$e$ 是相应陀螺向量空间的左单位元。

稍微宽泛地使用这一术语，我们将流形称为陀螺向量空间 M 和 N。最后，假设 $\bar{\mathbf{I}}$ 和 $\phi(\mathbf{I})$ 分别是流形的单位元 $\bar{\mathbf{I}}$ 和 M，并且 N，同时 $\mathbf{I}$ 和 $\phi(\mathbf{I})$ 分别是陀螺向量空间 M 和 N的左单位元。我们将研究这两个陀螺向量空间的基本运算与陀螺自同构之间的联系。引理2.1 给出了二元运算之间的这种联系。

引理 2.1。 设 $\mathbf{P}$、$\mathbf{Q} \in M$。分别以 $\oplus_m$ 和 $\oplus_n$ 表示陀螺向量空间 M 和 N上的二元运算。则

$$\mathbf{P} \oplus_m \mathbf{Q} = \phi^{-1}(\phi(\mathbf{P}) \oplus_n \phi(\mathbf{Q})). \tag{4}$$

证明 见附录 E。

引理 2.1 指出，二元运算 $\oplus_m$ 可以这样执行：首先通过映射 $\phi(.)$将其运算对象映射到陀螺向量空间 N，然后在陀螺向量空间 N中对映射所得的两个点执行二元运算 $\oplus_n$，最后通过 $\phi^{-1}(.)$ 对 $\phi(.)$的逆映射，返回原陀螺向量空间 M。类似地，引理 2.2和 2.3 给出了数乘和陀螺自同构之间的联系。

引理 2.2。 设 $\mathbf{P} \in M$ 和 $t \in \mathbb{R}$。分别以 $\otimes_m$ 和$\otimes_n$ 表示陀螺向量空间 M 和N上的数乘。则

$$t \otimes_m \mathbf{P} = \phi^{-1}(t \otimes_n \phi(\mathbf{P})). \tag{5}$$

证明见附录F。

引理 2.3。 设$\mathbf{P}$、$\mathbf{Q}$、$\mathbf{R} \in M$。分别用$\mathrm{gyr}_m[.,.]$和$\mathrm{gyr}_n[.,.]$ 表示陀螺向量空间 M 和 N 的陀螺自同构。则

$$\mathrm{gyr}_m[\mathbf{P},\mathbf{Q}]\mathbf{R} = \phi^{-1}(\mathrm{gyr}_n[\phi(\mathbf{P}),\phi(\mathbf{Q})]\phi(\mathbf{R})). \tag{6}$$

证明 见附录G。

引理的结果2.1、2.2、2.3提出了一种有效方法，可用于推导某些矩阵流形上基本运算和陀螺自同构的闭式表达式（参见第2.3.1节和附录C）。该方法得到了定理2.4和2.5的支持。

定理 2.4。 设 $(G_n, \oplus_n, \otimes_n)$ 为一个陀螺向量空间。设$\oplus_m$, $\otimes_m$和 $\mathrm{gyr}_m[.,.]$ 分别为由方程 *(4)*、*(5)* 和 *(6*定义的二元运算、数乘和陀螺自同构，其中 $\phi(.)$ 是一个双射等距映射。那么，$(G_m, \oplus_m, \otimes_m)$ 构成一个陀螺向量空间。

证明 参见附录H。

定理的直接推论2.4如下。

定理 2.5。 设 $(G, \oplus_n)$ 是一个陀螺交换且陀螺非约化的陀螺群。设 $\oplus_m$ 和 $\mathrm{gyr}_m[.,.]$ 分别是由方程 *(4)* 和 *(6)* 定义的二元运算和陀螺自同构，其中 $\phi(.)$ 是一个双射等距变换。那么$(G, \oplus_m)$ 构成一个陀螺交换且陀螺非约化的陀螺群。

2.3. 格拉斯曼流形

我们将在 2.3.1 节中从正交归一基视角介绍如何构造格拉斯曼流形上的基本运算和旋转自同构。在 2.3.2 节中，我们将研究格拉斯曼流形关于典范度量的一些等距变换（Edelman 等人，1998）。

2.3.1. Grassmann陀螺交換與陀螺非約化陀螺群：正交归一基视角

在Nguyen(2022b)中，已经推导出$\mathrm{Gr}_{n,\ p}$ 的基本运算和陀螺自同构的闭式表达式。由于指数映射、对数映射和平行移动均具有闭式形式，因此可由方程（1）、（2）和（3）得到这些表达式。然而，同样的方法无法应用于ONB视角下的格拉斯曼流形。这是因为在这种情况下，指数映射和平行移动都基于奇异值分解运算。

我们利用以下 $\mathrm{Gr}_{n,\ p}$ 与 $\mathrm{Gr}_{n,\ p}$之间的微分同胚（Helmke & Moore，1994）来处理上述问题：

$$\tau : \widetilde{\mathrm{Gr}}_{n,p} \to \mathrm{Gr}_{n,p},\ \mathbf{U} \mapsto \mathbf{U}\mathbf{U}^T,$$

~其中$\mathbf{U} \in \mathrm{Gr}_{n,\ p}$。由此得到以下定义。

~**定义 2.6.** 对于$\mathbf{U},\mathbf{V} \in \mathrm{Gr}_{n,p}$，假设$\mathbf{I}_{n,p}$ 和$\mathbf{U}\mathbf{U}^T$不在彼此的割迹中，则二元运算~$\mathbf{U} \oplus_{gr} \mathbf{V}$ 可定义为

$$\mathbf{U} \widetilde{\oplus}_{gr} \mathbf{V} = \exp([\overline{\mathbf{P}}, \mathbf{I}_{n,p}])\mathbf{V}, \tag{7}$$

其中$\mathbf{I}_{n,p} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{n,n}$ 是 $\mathrm{Gr}_{n,p}$ 的单位元，$[.,.]$ 表示矩阵交换子，而$\mathbf{P} = \mathrm{Log}^{gr}{}_{\mathbf{I}_{n,p}}(\mathbf{U}\mathbf{U}^T)$ 是$\mathbf{U}\mathbf{U}^T \in \mathrm{Gr}_{n,p}$ 在$\mathbf{I}_{n,p}$处的对数映射。

~**定义 2.7**。 对于 $\mathbf{U} \in \mathrm{Gr}_{n,\ p}$ 和 $t \in \mathbb{R}$，假设$\mathbf{I}_{n,\ p}$ 与 $\mathbf{U}\mathbf{U}^T$ 互不位于对方的割迹中，则可将 ~数乘 $t \otimes_{gr} \mathbf{U}$ 定义为

$$t \widetilde{\otimes}_{gr} \mathbf{U} = \exp([t\overline{\mathbf{P}}, \mathbf{I}_{n,p}])\widetilde{\mathbf{I}}_{n,p}, \tag{8}$$

where $\widetilde{\mathbf{I}}_{n,p} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_p \\ 0 \end{bmatrix} \in M_{n,p}$, and $\overline{\mathbf{P}} = \mathrm{Log}^{gr}_{\mathbf{I}_{n,p}}(\mathbf{U}\mathbf{U}^T)$.

~定义 2.8。分别由方程 (7) 和 (8) 定义二元运算 $\oplus_{gr}$ 和 ~数乘 $\otimes_{gr}$。对于 U、V、W $\in$ ~$\mathrm{Gr}_{n,\ p}$，假设 $\mathrm{I}_{n,\ p}$ 与 $\mathrm{U}\mathrm{U}^T$ 互不位于对方的割迹中，$\mathrm{I}_{n,\ p}$ 与 $\mathrm{V}\mathrm{V}^T$ 互不位于对方的割迹中，$\mathrm{I}_{n,\ p}$ 与 $\mathrm{U}\mathrm{U}^T \oplus_{gr} \mathrm{V}\mathrm{V}^T$ 互不位于对方的割迹中，其中 $\oplus_{gr}$ 是 $\mathrm{Gr}_{n,\ p}$上的二元运算（Nguyen, 2022b），则由 U 和 V 生成的陀螺自同构可定义为

$$\widetilde{\mathrm{gyr}}_{gr}[\mathbf{U}, \mathbf{V}]\mathbf{W} = \widetilde{F}_{gr}(\mathbf{U}, \mathbf{V})\mathbf{W},$$

~其中 F_{gr}(U、V) 由下式给出

$$\widetilde{F}_{gr}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \exp(-[\overline{\mathbf{P} \oplus_{gr} \mathbf{Q}}, \mathbf{I}_{n,p}]) \exp([\overline{\mathbf{P}}, \mathbf{I}_{n,p}]) \exp([\overline{\mathbf{Q}}, \mathbf{I}_{n,p}]),$$

其中 $\mathbf{P} = \mathrm{Log}^{gr}{}_{\mathbf{I}_{n,\ p}}(\mathbf{U}\mathbf{U}^T)$，$\mathbf{Q} = \mathrm{Log}^{gr}{}_{\mathbf{I}_{n,\ p}}(\mathbf{V}\mathbf{V}^T)$，且$\mathbf{P} \oplus_{gr} \mathbf{Q} = \mathrm{Log}^{gr}{}_{\mathbf{I}_{n,\ p}}(\mathbf{U}\mathbf{U}^T \oplus_{gr} \mathbf{V}\mathbf{V}^T)$。

2.3.2. 格拉斯曼陀螺等距变换——格拉斯曼流形的等距变换

令 $\ominus_{gr}$ and $\mathrm{gyr}_{gr}[.,.]$ 分别表示 $\mathrm{Gr}_{n,\ p}$ 上的逆运算和陀螺自同构。受欧几里得空间和双曲几何之间类比的启发，本节研究格拉斯曼流形上的一些等距变换。首先，我们需要定义这些流形上的内积。

定义 2.9 (格拉斯曼内积)。令$\mathbf{P}$，$\mathbf{Q} \in \mathrm{Gr}_{n,\ p_0}$。则$\mathbf{P}$与$\mathbf{Q}$的格拉斯曼内积定义为

$$\langle \mathbf{P}, \mathbf{Q} \rangle = \langle \mathrm{Log}^{gr}_{\mathbf{I}_{n,p}}(\mathbf{P}), \mathrm{Log}^{gr}_{\mathbf{I}_{n,p}}(\mathbf{Q}) \rangle_{\mathbf{I}_{n,p}},$$

其中 $\langle ., . \rangle_{\mathbf{I}_{n,\ p}}$ 表示由 $\mathrm{Gr}_{n,\ p}$ 的典范度量给出的$\mathbf{I}_{n,\ p}$ 处的内积。请注意，我们使用不带下标的记号$\langle .,\ . \rangle$ 表示直接定义在格拉斯曼流形上的内积，并使用带下标的记号$\langle .,\ . \rangle$ 表示格拉斯曼流形切空间上的内积。

$\mathrm{Gr}_{n,p}$ 上欧几里得空间距离函数的对应函数定义如下。

定义 2.10 (Grassmann 陀螺距离函数。)设 $\mathbf{P},\mathbf{Q} \in \mathrm{Gr}_{n,p}$。则 Grassmann 陀螺距离函- 数 $d(\mathbf{P},\mathbf{Q})$ 定义为

$$d(\mathbf{P},\mathbf{Q}) = \| \ominus_{gr} \mathbf{P} \oplus_{gr} \mathbf{Q}\|,$$

其中 $\|.\|$ 表示由定义中给出的格拉斯曼内积所诱导的格拉斯曼范数2.9。

因此，格拉斯曼陀螺等距变换现在可以定义如下。

定义 2.11 (格拉斯曼陀螺等距变换)。设$\mathbf{P}$、$\mathbf{Q} \in \mathrm{Gr}_{n,p}$。那么，映射 $\omega : \mathrm{Gr}_{n,p} \to \mathrm{Gr}_{n,p}$ 称为格拉斯曼陀螺等距变换，如果它保持$\mathbf{P}$与$\mathbf{Q}$之间的格拉斯曼陀螺距离不变，即，

$$d(\omega(\mathbf{P}),\omega(\mathbf{Q})) = d(\mathbf{P},\mathbf{Q}).$$

格拉斯曼陀螺距离函数和格拉斯曼陀螺等距变换的定义与双曲陀螺距离函数和双曲等距变换的定义一致（Un-gar，2014）。定理 2.12、2.13和 2.14刻画了一些格拉斯曼陀螺等距变换。

定理 2.12。对于任意 $\mathbf{P} \in \mathrm{Gr}_{n,p}$，由 $\mathbf{P}$ 定义的左 *Grassmann* 陀螺平移是映射 $\psi_{\mathbf{P}} : \mathrm{Gr}_{n,p} \to \mathrm{Gr}_{n,p}$，其定义为

$$\psi_{\mathbf{P}}(\mathbf{Q}) = \mathbf{P} \oplus_{gr} \mathbf{Q},$$

其中$\mathbf{Q} \in$ 格拉斯曼$_{n,p}$。因此，左格拉斯曼陀螺平移是格拉斯曼陀螺等距变换。

证明 见附录I。

定理 2.13。陀螺自同构$\mathrm{gyr}_{gr}[.,.]$ 是 *Grassmann* 陀螺等距变换。

证明 参见附录J。

定理 2.14。*Grassmann* 逆映射是映射 $\lambda : \mathrm{Gr}_{n,p} \to \mathrm{Gr}_{n,p}$ 定义为

$$\lambda(\mathbf{P}) = \ominus_{gr}\mathbf{P},$$

其中$\mathbf{P} \in \mathrm{Gr}_{n,p}$。因此 *Grassmann* 逆映射是格拉斯曼陀螺等距变换。

证明 参见附录K。

我们注意到，关于不同度量下格拉斯曼流形的等距变换，已有研究探讨了 Botelho 等人 (2013年)；Geh´er 和 Semrl (2016；2018年)；Qian 等人(2021)。然而，这些研究仅展示了这些等距变换的一般形式，而我们的工作则借助左格拉斯曼陀螺平移、陀螺自同构和格拉斯曼逆映射的闭式表达式，给出了关于格拉斯曼陀螺距离函数的一些格拉斯曼陀螺等距变换的具体表达式。据我们所知，这些格拉斯曼陀螺等距变换的表达式此前尚未见于相关研究。

2.4. 对称正定流形

本节考察第 2.3.2 节中针对对称正定流形讨论的类似概念。第 2.4.1节介绍了对称正定流形在对数欧几里得（Ar- signy 等人，2005年）、对数 Cholesky（Lin，2019）和仿射不变（Pennec 等人，2004）度量下的一些等距变换。第 2.4.2节定义了对称正定流形上的超平面，并引入了从对称正定矩阵或对称正定矩阵集合到对称正定流形上某个超平面的对称正定伪陀螺距离这一概念。这些定义使我们能够将 MLR 推广到对称正定流形上。

2.4.1. 对称正定陀螺等距变换——对称正定流形的等距变换

在 Nguyen（2022a;b）中，作者已证明，具有对数欧几里得、对数 Cholesky 和仿射不变度量的对称正定流形分别构成称为 LE、LC 和 AI 陀螺向量空间的陀螺向量空间。我们采用这些文献中的记号，并考虑 $r = 1$ 的情形（见 Nguyen（2022b），定义 3.1）。令 $\oplus_{le}$、$\oplus_{lc}$ 和 $\oplus_{ai}$ 分别表示 LE、LC 和 AI 陀螺向量空间中的二元运算。令 $\otimes_{le}$、$\otimes_{lc}$ 和 $\otimes_{ai}$ 分别表示 LE、LC 和 AI 陀螺向量空间中的数乘。令 $\mathrm{gyr}_{le}[.,.]$、$\mathrm{gyr}_{lc}[.,.]$和 $\mathrm{gyr}_{ai}[.,.]$ 分别表示 LE、LC 和 AI 陀螺向量空间中的陀螺自同构。为方便表述，除非另有说明，我们在记号的下标和上标中使用字母 g，以指明所考虑的对称正定流形的黎曼度量，其中 $g \in \{le, lc, ai\}$。用 I_n 表示 $n \times n$ 单位矩阵。我们对对称正定流形重复第2.3.2节中所用的方法。这些流形上的内积如下所示。

定义 2.15 (SPD内积)。设 $\mathbf{P},\mathbf{Q} \in \mathrm{Sym}_n^+$。则$\mathbf{P}$ 与 $\mathbf{Q}$ 的SPD内积定义为

$$\langle \mathbf{P},\mathbf{Q}\rangle = \langle \mathrm{Log}^g_{\mathbf{I}_n}(\mathbf{P}), \mathrm{Log}^g_{\mathbf{I}_n}(\mathbf{Q})\rangle_{\mathbf{I}_n},$$

其中，$\langle .,\ .\rangle_{\mathbf{I}_n}$ 表示由所考虑流形的黎曼度量在$\mathbf{I}_n$ 处给出的内积。

<escape>对称正定范数、对称正定陀螺距离函数、对称正定陀螺等距变换、左SPD陀螺平移和SPD逆映射的定义方式[1] 与格拉斯曼流形上的定义方式相同。定理2.16 和2.17刻画了LE、LC和AI陀螺向量空间的一些对称正定陀螺等距变换，这些变换与格拉斯曼陀螺等距变换完全类似。</escape>

定理 2.16. *左SPD*陀螺平移是对称正定陀螺等距变换。

证明 参见附录 L。

[1]为简洁起见，我们对 SPD内积、SPD范数和 SPD陀螺距离函数采用与格拉斯曼流形上相同的记号，因为上下文应能清楚地表明其含义。

定理 2.17. 陀螺自同构 $\mathrm{gyr}_g[.,.]$ 是对称正定陀螺等距变换。

证明 参见附录M。

定理 2.18. *SPD* 逆映射是 *SPD* 陀螺等距变换。

证明 见附录N。

定理 2.16、2.17 和 2.18中给出的对称正定陀螺等距变换属于一类对称正定流形上的等距变换，这类变换在 Moln´ar (2015）Moln´ar &Szokol (2015）中进行了讨论。这些研究与我们的工作的区别在于，我们的对称正定陀螺等距变换是从陀螺向量空间视角得到的。此外，只要与该度量相关的基本运算和陀螺自同构满足 Nguyen (2022b）中所考虑的陀螺向量空间公理，我们的方法就可以应用于对称正定流形上的任意度量。

2.4.2. 对称正定流形上的多类逻辑回归

受到Lebanon 和 Lafferty (2004)；Ganea 等人 (2018年) 将 MLR 推广到多项式和双曲几何的相关研究启发，本文旨在将 MLR 推广到对称正定流形。

给定 K 个类别，MLR 计算每个输出类别的概率，其计算方式为

$$p(y=k|x)=\frac{\exp(w_k^T x+b_k)}{\sum_{i=1}^{K}\exp(w_i^T x+b_i)}\propto\exp(w_k^T x+b_k), \tag{9}$$

其中 x 是一个输入样本，$b_k\in\mathbb{R}$、x，$w_k\in\mathbb{R}^n$，k =1，.....，K。

如Lebanon 和 Lafferty (2004年所示）；Ganea 等人 (2018年)，公式 (9) 可以改写为

$$p(y=k|x)\propto\exp(\mathrm{sign}(w_k^T x+b_k)\|w_k\|d(x,\mathcal{H}_{w_k,b_k})),$$

其中，$d(x,\ \mathcal{H}_{w_k,\ b_k})$ 表示点 x 到超平面 $\mathcal{H}_{w_k,\ b_k}$ 的间隔距离。

因此，将 MLR 推广到对称正定流形，需要在此类流形中定义超平面和间隔距离。受双曲几何类比的启发（Ungar，2014；Ganea 等人，2018年），对称正定流形上的超平面可定义如下。

定义 2.19 (SPD 超陀螺平面)。 对于 $\mathbf{P}\in\mathrm{Sym}_n^+$,$\mathbf{W}\in\mathcal{T}_{\mathbf{P}}\mathrm{Sym}_n^+$，SPD 超陀螺平面定义为

$$\mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}=\{\mathbf{Q}\in\mathrm{Sym}_n^+:\langle\mathrm{Log}_{\mathbf{P}}^g(\mathbf{Q}),\mathbf{W}\rangle_{\mathbf{P}}=0\}. \tag{10}$$

为了定义从 SPD 矩阵到 SPD 双曲陀螺超平面的间隔距离，我们需要推广对称正定流形上的陀螺角概念，如下所示。

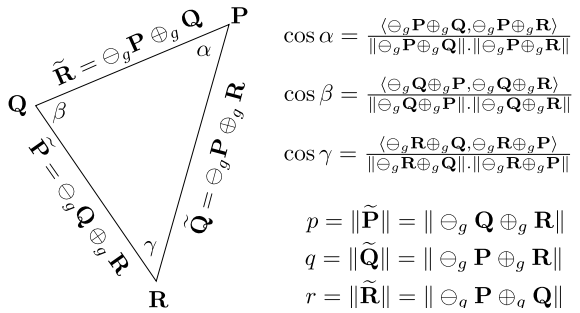

图 *1.* 陀螺向量空间 $(\mathrm{Sym}_n^+,\oplus_g,\otimes_g)$ 中 SPD 陀螺三角形、SPD 陀螺角和 SPD 陀螺边的示意图。

定义 2.20 (SPD 陀螺余弦函数与 SPD 陀螺角）。 设 $\mathbf{P}$，$\mathbf{Q}$ 和 $\mathbf{R}$ 是陀螺向量空间 $(\mathrm{Sym}_n^+,\ \oplus_g,\ \otimes_g)$ 中三个不同的 SPD 陀螺点（对称正定矩阵）。$\ominus_g\mathbf{P}\oplus_g\mathbf{Q}$ 与$\ominus_g\mathbf{P}\oplus_g\mathbf{R}$ 之间 SPD 陀螺角 $\alpha,0\leq\alpha\leq\pi$ 的度量的 SPD 陀螺余弦由下式给出。

$$\cos\alpha=\frac{\langle\ominus_g\mathbf{P}\oplus_g\mathbf{Q},\ominus_g\mathbf{P}\oplus_g\mathbf{R}\rangle}{\|\ominus_g\mathbf{P}\oplus_g\mathbf{Q}\|.\|\ominus_g\mathbf{P}\oplus_g\mathbf{R}\|}.$$

SPD 陀螺角 α 记作 $\alpha=\angle\mathbf{QPR}$。

请注意，我们对 SPD 陀螺角的 SPD 陀螺余弦的定义并非基于单位陀螺向量（Ungar，2014），因此与双曲空间中陀螺角的陀螺余弦定义不同。与欧几里得空间和双曲空间类似，我们可以给出 SPD 陀螺余弦定律。稍后介绍从 SPD 矩阵到 SPD 双曲陀螺超平面的 SPD 伪陀螺距离概念时，这一定律将会派上用场。

定理 *2.21*（*SPD* 陀螺余弦定律）。设 *P*、*Q* 和 *R* 是陀螺向量空间 $(Sym_n^+,\oplus_g,\otimes_g)$ 中三个互不相同的 *SPD* 陀螺点，其中 $g\in\{le,lc\}$。设 $\widetilde{P}=\sim\ominus_g Q\oplus_g R$、$\widetilde{Q}=\ominus_g P\oplus_g R$ 和 $\widetilde{R}=\ominus_g P\oplus_g Q$ 是由这三个 *SPD* 陀螺点构成的 *SPD* 陀螺三角形的 *SPD* 陀螺边。设 $p=\|P\|$、$q=\|Q\|$ 和 $r=\|R\|$。设 $\alpha=\angle QPR$、$\beta=\angle PQR$ 和 $\gamma=\angle PRQ$ 是该 *SPD* 陀螺三角形的 *SPD* 陀螺角。那么

$$p^2=q^2+r^2-2qr\cos\alpha.$$
$$q^2=p^2+r^2-2pr\cos\beta.$$
$$r^2=p^2+q^2-2pq\cos\gamma.$$

证明 参见附录 O。

图。1 阐释了定理 2.21中给出的概念。该定理指出，当已知与某一 SPD 陀螺边相对的 SPD 陀螺角以及另外两条 SPD 陀螺边时，可以计算出该 SPD 陀螺边。这一结果完全

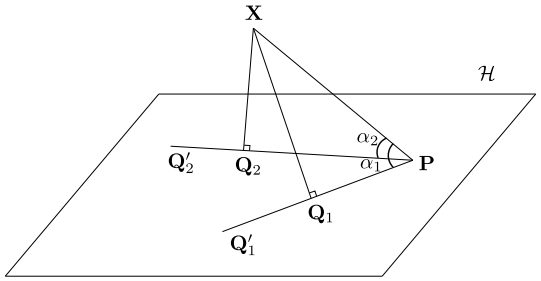

图 2. 点 X 到超平面 $\mathcal{H}$ in $\mathbb{R}^n$ 的距离示意图。这里，$\mathrm{P} \in \mathcal{H}$、$\mathrm{Q}_1'$ 和 Q_2' 是两个不同的点，满足 $\mathrm{Q}_1', \mathrm{Q}_2' \in \mathcal{H} \setminus \{\mathrm{P}\}$；$\mathrm{Q}_1$ 和 Q_2 分别是 X 在直线 PQ_1' 和 PQ_2' 上的投影，且假设它们分别位于这些直线上；α_1 和 α_2 分别是直线 PQ_1' 和 PQ_2' 与直线 PX 所成的角。若 $\cos(\alpha_2) \geq \cos(\alpha_1)$，则 $\|\mathrm{XQ}_2\|_F \leq \|\mathrm{XQ}_1\|_F$。当 $\cos(\alpha)$ 时，可得到 X 到超平面$\mathcal{H}$ 的距离；此时，α 是直线 PX 与 PQ 所成的角，$\mathrm{Q} \in \mathcal{H} \setminus \{\mathrm{P}\}$ 取最大值。

与欧几里得空间和双曲空间中的情况类似。SPD陀螺正弦定律见附录D。

现在，我们引入 SPD 矩阵到 SPD 双曲陀螺超平面的 SPD 伪陀螺距离这一概念。其灵感来源于点在 $\mathbb{R}^n$ 中到超平面的距离这一性质，$\mathbb{R}^n$。其核心思想如图 2 所示。

定义 2.22(从 SPD 矩阵到 SPD 双曲陀螺超平面的 SPD 伪陀螺距离)。设 $\mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}$ 为 SPD 双曲陀螺超平面，且 $\mathbf{X} \in \mathrm{Sym}_n^+$。$\mathbf{X}$ 到$\mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}$ 的 SPD 伪陀螺距离定义为

$$\bar{d}(\mathbf{X}, \mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}) = \sin(\angle \mathbf{X}\mathbf{P}\bar{\mathbf{Q}}) d(\mathbf{X}, \mathbf{P}),$$

其中 $\bar{\mathbf{Q}}$由下式给出

$$\bar{\mathbf{Q}} = \underset{\mathbf{Q} \in \mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}} \setminus \{\mathbf{P}\}}{\arg\max} \left(\frac{\langle \ominus_g \mathbf{P} \oplus_g \mathbf{Q}, \ominus_g \mathbf{P} \oplus_g \mathbf{X} \rangle}{\| \ominus_g \mathbf{P} \oplus_g \mathbf{Q}\| . \| \ominus_g \mathbf{P} \oplus_g \mathbf{X}\|} \right).$$

按照约定，对于任意 $\mathbf{X}$，$\mathbf{Q} \in \mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}$，$\sin(\angle \mathbf{XPQ}) = 0$。

$\mathbf{X}$ 到$\mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}$ 的 SPD 陀螺距离定义为

$$d(\mathbf{X}, \mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}) = \min_{\mathbf{Q} \in \mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}} d(\mathbf{X}, \mathbf{Q}).$$

根据定理 2.21，SPD 伪陀螺距离在某些情况下与 SPD 陀螺距离一致。具体而言，我们有以下结果。

定理2.23 (LE 陀螺向量空间中从对称正定矩阵到对称正定双曲陀螺超平面的 SPD 陀螺距离）。设 $\mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}$ 是陀螺向量空间$(\mathrm{Sym}_n^+, \oplus_{le}, \otimes_{le})$中的一个 *SPD* 双曲陀螺超平面，且$\mathbf{X} \in \mathrm{Sym}_n^+$。则从$\mathbf{X}$到$\mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}$ 的 *SPD* 伪陀螺距离等于从 $\mathbf{X}$ 到$\mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}$ 的 *SPD* 陀螺距离，且其表达式为

$$d(\mathbf{X}, \mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}) = \frac{|\langle \log(\mathbf{X}) - \log(\mathbf{P}), D\log_{\mathbf{P}}(\mathbf{W}) \rangle_F|}{\|D\log_{\mathbf{P}}(\mathbf{W})\|_F}.$$

证明 见附录 P。

定理2.24 (LC 陀螺向量空间中从对称正定矩阵到对称正定双曲陀螺超平面的 SPD 陀螺距离）。设 $\mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}$ 是陀螺向量空间$(\mathrm{Sym}_n^+, \oplus_{lc}, \otimes_{lc})$中的一个 *SPD* 双曲陀螺超平面，且$\mathbf{X} \in \mathrm{Sym}_n^+$。则从$\mathbf{X}$ 到$\mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}$ 的 *SPD* 伪陀螺距离等于从$\mathbf{X}$到$\mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}$ 的 *SPD* 陀螺距离，且其表达式为

$$d(\mathbf{X}, \mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}) = \frac{|\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle_F|}{\|\mathbf{B}\|_F},$$

其中

$$\mathbf{A} = -\lfloor \varphi(\mathbf{P}) \rfloor + \lfloor \varphi(\mathbf{X}) \rfloor + \log(\mathbb{D}(\varphi(\mathbf{P}))^{-1} \mathbb{D}(\varphi(\mathbf{X}))),$$

$$\mathbf{B} = \lfloor \widetilde{\mathbf{W}} \rfloor + \mathbb{D}(\varphi(\mathbf{P}))^{-1} \mathbb{D}(\widetilde{\mathbf{W}}),$$

$$\widetilde{\mathbf{W}} = \varphi(\mathbf{P}) \Big(\varphi(\mathbf{P})^{-1} \mathbf{W} (\varphi(\mathbf{P})^{-1})^T \Big)_{\frac{1}{2}},$$

其中，$\lfloor Y \rfloor$ 是一个与矩阵 $Y \in M_n$大小相同的矩阵，n其第 $(i,\ j)$ 个元素在 $i > j$ 时为 Y_{ij}，否则为零；$\mathbb{D}(Y)$ 是一个与矩阵 Y 大小相同的对角矩阵，其第 $(i,\ i)$ 个元素为 Y_{ii}；Y_2^1 是 Y 的下三角部分，其对角元素减半；$\varphi(Q)$ 表示 $Q \in Sym_n^+$的 *Cholesky*因子，即 $\varphi(Q)$ 是一个具有正对角元素的下三角矩阵，满足 $Q = \varphi(Q)\varphi(Q)^T$。

证明 见附录 Q。

对于 AI陀螺向量空间，我们无法建立等价的结果。不过，在这种情况下，仍然可以得到 SPD 伪陀螺距离的闭式表达式。

定理 2.25 （AI 陀螺向量空间中从 SPD 矩阵到 SPD 双曲陀螺超平面的 SPD 伪陀螺距离）。令$\mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}$ 为陀螺向量空间 $(\mathrm{Sym}_n^+, \oplus_{ai}, \otimes_{ai})$ 中的一个 *SPD* 双曲陀螺超平面，且 $\mathbf{X} \in \mathrm{Sym}_n^+$。则从 $\mathbf{X}$ 到 $\mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}$ 的 *SPD* 伪陀螺距离为

$$\bar{d}(\mathbf{X}, \mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}) = \frac{|\langle \log(\mathbf{P}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{X} \mathbf{P}^{-\frac{1}{2}}), \mathbf{P}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{W} \mathbf{P}^{-\frac{1}{2}} \rangle_F|}{\|\mathbf{P}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{W} \mathbf{P}^{-\frac{1}{2}}\|_F}.$$

证明 见附录 R。

定理 2.23、2.24和 2.25 推出了关于从一组对称正定矩阵到一个 SPD 双曲陀螺超平面的 SPD 陀螺距离和伪陀螺距离的推论2.26。

推论 2.26。设 $\mathbf{P}_1$、...、$\mathbf{P}_N$、$\mathbf{Q}_1$、...、$\mathbf{Q}_N$ 以及$\mathbf{X}_1$、...、$\mathbf{X}_N \in \mathrm{Sym}_n^+$。设 $\mathbf{W}_1$、...、$\mathbf{W}_N \in \mathrm{Sym}_n$。用 $\mathrm{diag}(\mathbf{P}_1$、...、$\mathbf{P}_N)$ 表示以下矩阵：

$$\mathrm{diag}(\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_N) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \cdots\cdots \\ \cdots \mathbf{P}_2 \cdots \\ \cdots\cdots \mathbf{P}_N \end{bmatrix},$$

数据集	SPDNet	SPDNetBN	GyroLE	GyroLC	GyroAI
HDM05	72.83	**76.42**	72.64	63.78	73.34
#HDM05	6.58	6.68	6.53	6.53	6.53
FPHA	89.25	91.34	**94.61**	82.43	93.39
#FPHA	0.99	1.03	0.95	0.95	0.95
NTU60	77.82	79.61	81.68	72.26	**82.75**
#NTU60	1.80	2.06	1.49	1.49	1.49

表 *1.* 在模型大小（MB）相当的情况下，我们的对称正定模型与 SPDNet 和 SPDNetBN 的准确率（%）比较。

其中，P_i、$i = 1$、...、N 的对角线元素属于 *diag(P1*、...、P_N*)* 的对角线元素。令 P =*diag(P1*、...、P_N*)*，Q = *diag(Q1*、...、Q_N*)*，X =*diag(X1*、...、X_N*)*，以及 W = *diag(W1*、...、W_N*)*。

(1) 将陀螺向量空间$(\mathrm{Sym}_n^+, \oplus_{le}, \otimes_{le})$中的一个对称正定双曲陀螺超平面记为 $\mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}$。那么$\mathbf{X}$ 到$\mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}$ 的对称正定陀螺距离为

$$d(\mathbf{X}, \mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}) = \frac{|\sum_{i=1}^N \langle \log(\mathbf{X}_i) - \log(\mathbf{P}_i), D\log_{\mathbf{P}_i}(\mathbf{W}_i)\rangle_F|}{\sqrt{\sum_{i=1}^N \|D\log_{\mathbf{P}_i}(\mathbf{W}_i)\|_F^2}} \tag{11}$$

(2) 设 $\mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}$ 为陀螺向量空间 $(\mathrm{Sym}_n^+, \oplus_{lc}, \otimes_{lc})$中的一个 *SPD* 双曲陀螺超平面。那么从$\mathbf{X}$ 到$\mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}$ 的 *SPD* 陀螺距离由下式给出。

$$d(\mathbf{X}, \mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}) = \frac{|\sum_{i=1}^N \langle \mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i\rangle_F|}{\sqrt{\sum_{i=1}^N \|\mathbf{B}_i\|_F^2}}, \tag{12}$$

其中

$$\mathbf{A}_i = -\lfloor \varphi(\mathbf{P}_i)\rfloor + \lfloor \varphi(\mathbf{X}_i)\rfloor + \log(\mathbb{D}(\varphi(\mathbf{P}_i))^{-1}\mathbb{D}(\varphi(\mathbf{X}_i))),$$
$$\mathbf{B}_i = \lfloor \widetilde{\mathbf{W}}_i\rfloor + \mathbb{D}(\varphi(\mathbf{P}_i))^{-1}\mathbb{D}(\widetilde{\mathbf{W}}_i),$$
$$\widetilde{\mathbf{W}}_i = \varphi(\mathbf{P}_i)\Big(\varphi(\mathbf{P}_i)^{-1}\mathbf{W}_i(\varphi(\mathbf{P}_i)^{-1})^T\Big)_{\frac{1}{2}}.$$

(3) 用 $\mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}$ 表示陀螺向量空间 $(\mathrm{Sym}_n^+, \oplus_{ai}, \otimes_{ai})$ 中的 *SPD* 双曲陀螺超平面。那么，从 $\mathbf{X}$ 到 $\mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}$ 的 *SPD* 伪陀螺距离为

$$\bar{d}(\mathbf{X}, \mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}) = \frac{|\sum_{i=1}^N \langle \log(\mathbf{P}_i^{-\frac{1}{2}}\mathbf{X}_i\mathbf{P}_i^{-\frac{1}{2}}), \mathbf{P}_i^{-\frac{1}{2}}\mathbf{W}_i\mathbf{P}_i^{-\frac{1}{2}}\rangle_F|}{\sqrt{\sum_{i=1}^N \|\mathbf{P}_i^{-\frac{1}{2}}\mathbf{W}_i\mathbf{P}_i^{-\frac{1}{2}}\|_F^2}}. \tag{13}$$

证明 参见附录S。

3. 实验

本节报告我们在两项应用上的实验结果，即人体动作识别和知识图谱补全。有关数据集和实验设置的详细信息见附录A。

数据集	GyroAI-HAUNet	MLR-LE	MLR-LC	MLR-AI
HDM05	78.14	77.62	71.35	**79.84**
#HDM05	0.31	0.60	0.60	0.60
FPHA	96.00	**96.44**	88.62	96.26
#FPHA	0.11	0.21	0.21	0.21
NTU60	94.72	95.87	88.24	**96.48**
#NTU60	0.02	0.05	0.05	0.05

表 *2.* 我们的对称正定模型与 GyroAI-HAUNet 的准确率（%）对比。

3.1. 人体动作识别

我们使用三个数据集，即 HDM05（M¨uller 等，2007年）、FPHA（Garcia-Hernando 等，2018年）和 NTU60（Shahroudy 等，2016）。

3.1.1. 对称正定神经网络

我们设计了三个网络，每个网络均由一个基于仿射不变平移模型的层和一个 MLR（对数欧几里得、对数 Cholesky 和仿射不变，参见第 2.4.2节）组成。这些网络与 SPDNet（Huang 与 Gool，2017年）[2] 以及 SPDNetBN（Brooks 等人，2019）[3]进行比较。与 Nguyen(2022b) 一样，我们采用时间金字塔表示。随后，每个序列都表示为一组对称正定矩阵。我们使用方程（11）、（12）和（13）来计算 MLR 的 SPD 陀螺距离和伪陀螺距离。五个网络的结果见表 1。在 HDM05 数据集上，GyroLE 的表现与 SPDNet 相当，而 GyroAI 优于 SPDNet。在 FPHA 和 NTU60 数据集上，GyroLE 和 GyroAI 均优于 SPDNet 和 SPDNetBN。

我们还将 GyroAI-HAUNet 与 Nguyen（2022b）进行比较，并与另外三个网络进行对比：分别将 GyroAI-HAUNet 的分类层替换为基于对数欧几里得、对数 Cholesky 和仿射不变度量的 MLR。四个网络的结果见表2。我们的 MLR-AI 或 MLR-LE 模型取得了最佳结果。不过，这些模型的参数量是 GyroAI-HAUNet 的两倍。

表 3 报告了我们的对称正定模型以及来自四类神经网络的若干最先进模型的结果：循环神经网络（即长短期记忆网络）、双曲神经网络（即 HypGRU（Ganea 等人，2018年））、图神经网络（即 ST-GCN（Yan 等人，2018年）和 Shift-GCN（Cheng 等人，2020））， 以及 Transformer（即 ST-TR（Plizzari 等人，2021））。在 FPHA 和 NTU60 数据集上，MLR-LE 和 MLR-AI 的表现优于其他网络。

[2]https://github.com/zhiwu-huang/SPDNet[3] https://papers.nips.cc/paper/2019/hash/6e69ebbfad976d4637bb4b39de261bf7-Abstract. html

数据集	LSTM	ST-TR	HypGRU	ST-GCN	Shift-GCN	MLR-LE	MLR-LC	MLR-AI
HDM05	72.82	76.12	58.50	76.58	**80.28**	77.62	71.35	79.84
#HDM05	0.54	27.73	0.61	17.73	4.20	0.60	0.60	0.60
FPHA	81.22	91.34	61.42	78.78	91.08	96.44	88.62	96.26
#FPHA	0.41	27.55	0.47	17.60	3.84	0.21	0.21	0.21
NTU60	87.27	93.78	88.03	91.75	95.01	95.87	88.24	96.48
#NTU60	0.035	27.50	0.039	17.66	3.90	0.05	0.05	0.05

表3。 我们的对称正定模型与最先进模型的准确率（%）对比。

方法	HDM05	FPHA	NTU60
GrNet	52.71	81.91	65.45
GyroGr	**56.32**	**84.70**	**67.60**

表4。 GyroGr与GrNet的准确率（%）对比。

方法	HDM05	FPHA	NTU60
GyroGr-Scaling	45.69	65.74	55.26
GyroGr	**56.32**	**84.70**	**67.60**

表5。Nguyen（2022b）中，GyroGr 与 Grassmann 缩放模型的准确率（%）比较。

此外，我们的网络使用的参数远少于 Transformer 和图神经网络。

3.1.2. Grassmann神经网络

Huang 等人（Huang 等人，2018年）提出了一种称为 GrNet 的判别式 Grassmann 神经网络。该网络采用 FRmap 层来降低输入矩阵的维度。随后，通过 ReOrth 层执行 QR分解，从 FRmap 层的输出中获得正交矩阵。这在 ReOrth 层的反向传播过程中引发了一个问题，即必须计算上三角矩阵的逆矩阵。在实际应用中，这些矩阵通常条件不良，且无法由 Tensorflow[4] 和 Pytorch 等流行的深度学习框架返回。我们通过使用基于 Grassmann平移模型的层（见第 2.3.2 节）替换 FRmap 层和 ReOrth 层来解决这一问题。将得到的网络 GyroGr 与基于其官方Matlab代码实现的 GrNet 进行比较[5]。两个网络的结果如表 4 所示。在 HDM05、FPHA 和 NTU60 数据集上，GyroGr 分别比 GrNet 高出 3.60%、2.79% 和 2.14%。这些结果清楚地证明了 Grassmann平移模型在 GrNet 这类判别式 Grassmann 神经网络中的有效性。

我们还进行了一项实验，以比较 GrNet 框架下Nguyen（2022b）中的 Grassmann平移模型和 Grassmann缩放模型。为此，我们通过将 Grassmann 平移层替换为 Grassmann缩放层，从 GyroGr 设计了一个新网络。两个网络的结果见表 5。在所有数据集上，GyroGr 的表现都显著优于 GyroGr-Scaling，这表明在 GrNet 框架下，Grassmann 平移操作比矩阵缩放有效得多。

[4] https://github.com/master/tensorflow-riemopt/tree/master/examples/grnet.

[5] https://github.com/zhiwu-huang/GrNet.

3.2. 知识图谱补全

<escape>本实验旨在比较基于 Nguyen (2022b) 中投影算子视角的 Grassmann模型与基于正交归一基视角的模型。我们使用两个数据集，即 WN18RR (Miller,1995) 和 FB15k-237 (Toutanova 等,2015)。</escape>

沿用Balažević 等人(2019);Nguyen(2022b)，我们设计了一种能够学习评分函数的模型

$$\phi_{kgc}(e_s, r, e_o) = -d((\mathbf{A}\widetilde{\otimes}\mathbf{S})\widetilde{\oplus}_{gr}\mathbf{R}, \mathbf{O})^2 + b_s + b_o,$$

其中，$\mathbf{S}$ 和$\mathbf{O}$ 分别是主语和宾语实体的嵌入，$\mathbf{R}$和 $\mathbf{A}$ 是与关系 r、 b_s、 $b_o \in \mathbb{R}$ 相关联的矩阵，分别是主语和~宾语实体的标量偏置。运算 $\otimes$ 定义为

$$\mathbf{A}\widetilde{\oplus}_{gr}\mathbf{P} = \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{A}*\mathbf{B} \\ -(\mathbf{A}*\mathbf{B})^T & 0 \end{bmatrix}\right)\widetilde{\mathbf{I}}_{n,p},$$

其中$\mathbf{A} \in \mathbf{M}_{p,\ n-p}$，且$\mathbf{P}$ 由下式给出

$$\mathbf{P} = \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{B} \\ -\mathbf{B}^T & 0 \end{bmatrix}\right)\widetilde{\mathbf{I}}_{n,p}.$$

~二元运算 $\oplus_{gr}$ 定义见公式（7）。我们使用距离函数（Edelman 等人，1998）

$$d(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \|\theta\|_2, \tag{14}$$

其中， θ_i、 $i = 1$、.....、 p 是由$\mathbf{P}$ 和$\mathbf{Q}$的列向量张成的两个子空间之间的主角，即$\mathbf{U}\,\mathrm{diag}(\cos(\theta_1)$.....、$\cos(\theta_p))\mathbf{V}^T$是$\mathbf{P}^T\mathbf{Q}$的奇异值分解。

自由度	模型	平均倒数排名	H@1	H@3	H@10
144	GyroGr-KGC$^{proj+sca}$	44.2	38.5	46.8	54.6
	GyroGr-KGC$^{onb+sca}$	**44.9**	**39.5**	**47.2**	54.6

表6. 将我们的 Grassmann模型与 Nguyen(2022b) 在 WN18RR 数据集验证集上提出的 Grass- mann 模型进行比较。GyroGr-KGC$_{onb+sca}$ 在 $\widetilde{\mathrm{Gr}}^{24,12}$ 中学习嵌入。GyroGr-KGC$^{proj+sca}$ 在 $\mathrm{Gr}^{24,12}$ (DOF 表示自由度)。

自由度	模型	平均倒数排名	H@1	H@3	H@10
144	GyroGr-KGC$^{proj+sca}$	29.3	20.5	32.4	46.8
	GyroGr-KGC$^{onb+sca}$	**29.9**	**20.8**	**33.2**	**48.2**

表 7. 我们的 Grassmann 模型与 Nguyen (2022b) 中的 Grassmann 模型在 FB15k-237 数据集验证集上的比较。GyroGr-KGC$_{onb+sca}$ 在 $\widetilde{\mathrm{Gr}}^{24,12}$ 中学习嵌入$^{proj+sca}$ 在 $\mathrm{Gr}^{24,12}$中学习嵌入。

我们模型与Grassmann模型在Nguyen（2022b）在WN18RR和FB15k-237数据集验证集上的结果如表所示。6和7，分别。我们的模型GyroGr-KGC$^{onb+sca}$ 在所有情况下的表现均与GyroGr-KGC$^{proj+sca}$ 相当或更好。特别是在WN18RR数据集上，GyroGr-KGC$^{onb+sca}$ 的表现优于GyroGr-KGC$^{proj+sca}$，H@1指标高出1%。在FB15k-237数据集上，GyroGr-KGC$^{onb+sca}$ 的表现优于GyroGr-KGC$^{proj+sca}$，H@10指标高出1.4%。

3.3. 复杂度分析

设 n 为输入矩阵（对称正定矩阵或投影矩阵）的大小，n_c 为动作类别的数量，n_s 为 GyroAI 和 MLR-AI 用于表示一个动作序列的对称正定矩阵数量，n_t 和 n_p 分别为 GyroGr 中 W-ProjPooling 层的变换矩阵数量和投影矩阵数量。为简化起见，我们分析模型在一个训练样本和一次迭代下的复杂度。

- GyroAI：二元运算的时间复杂度为$O(n^3)$，空间复杂度为 $O(n^2)$。MLR 的时间复杂度为 $O(n_c n_s n^3)$，空间复杂度为$O(n_c n_s n^2)$。
- MLR-AI：循环神经网络单元的时间复杂度为 $O(n^3)$，空间复杂度为 $O(n^2)$。MLR 的时间复杂度为 $O(n_c n_s n^3)$，空间复杂度为$O(n_c n_s n^2)$。
- GyroGr：GrNet 的 Grassmann 平移层和 Or-thMap 层的时间复杂度为 $O(n_t n^3)$ 以及内存复杂度 $O(n_t n^2)$。W-ProjPooling 层（在一个投影矩阵内进行池化）的时间复杂度为 $O(n_p n^2)$，内存复杂度为$O(n_p n^2)$。分类层的时间复杂度为$O(n_t n_c n^2)$，内存复杂度为 $O(n_t n_c n^2)$。
- GyroGr-KGC：评分函数的计算时间复杂度为 $O(n^3)$，空间复杂度为$O(n^2)$。

4. 局限性

正如 Shimizu 等（2021）所指出的，双曲多项逻辑回归（Ganea 等人，2018）由于将公式 (9) 中的标量项 b_k 重新参数化为向量 $\mathrm{p}_k \in \mathrm{R}^n$，因此存在参数过多的问题。由于我们对 SPD 双曲陀螺超平面的定义遵循庞加莱超平面（Ganea 等人，2018）的定义，因此我们的 MLR 也存在相同的问题。更具体地说，为了参数化一个 SPD 双曲陀螺超平面，我们为每个类别使用两个对称矩阵，即 P 和 W（见公式 (10)）。因此，我们的 MLR 需要 $n(n+1)K$个参数，而输入为相同尺寸的对称正定矩阵的线性层仅需要 $(n(n+1)/2+1)K$ 个参数。未来的研究应解决这一问题。

5. 结论

我们将陀螺向量空间中的内积和陀螺角概念推广到了对称正定流形和 Grassmann 流形。我们研究了对称正定流形和 Grassmann 流形上的一些等距模型，并重新表述了对称正定流形上的 MLR。我们针对人体动作识别和知识图谱补全任务，将我们的模型与最先进的模型进行了比较。

参考文献

Absil, P.-A.、Mahony, R. 和 Sepulchre, R. 矩阵流形上的优化算法。普林斯顿大学出版社，2007年。

Arsigny, V.、Fillard, P.、Pennec, X. 和 Ayache, N. 基于对数欧几里得度量的张量快速简易计算。技术报告 RR-5584，法国国家信息与自动化研究所，2005年。Bala˘zevi´c, I.、Allen, C. 和 Hospedales, T. 多关系庞加莱图嵌入。发表于*NeurIPS*，第 4465–4475 页，2019年。

Banerjee, M., Chakraborty, R., Bouza, J. 和 Vemuri, B. C. VolterraNet：一种用于齐性流形、具有群等变性的高阶卷积网络。*IEEE*模式分析与机器智能汇刊，44(2):823–833，2022。

Bendokat, T., Zimmermann, R. 和 Absil, P. A.《Grassmann流形手册：基本几何与计算方面》。*CoRR*, abs/2011.13699，2020。

Bollacker, K.、Evans, C.、Paritosh, P.、Sturge, T. 和 Taylor, J. Freebase：一个协作创建的图数据库，用于构建人类知识。载于*2008*年*ACM SIGMOD*数据管理国际会议论文集，第1247–1250页，2008年。

Bordes, A.、Usunier, N.、Garcia-Dur´an, A.、Weston, J. 和 Yakhnenko, O. 用于多关系数据建模的嵌入平移。载于*NIPS*，第2787–2795页，2013年。

Botelho, F.、Jamison, J. 和 Moln´ar, L. 格拉斯曼空间上的满射等距变换。泛函分析杂志，265(10):2226–2238，2013年。

Bronstein, M. M., Bruna, J., LeCun, Y., Szlam, A., 和 Van- dergheynst, P. 几何深度学习：超越欧几里得数据。《*IEEE*信号处理杂志》，34 (4):18–42, 2017年。Brooks, D. A., Schwander, O., Barbaresco, F., Schneider, J.-Y., 和 Cord, M. 面向对称正定神经网络的黎曼批归一化。发表于 *NeurIPS*, 第 15463–15474 页，2019。Chakraborty, R., Yang, C.-H., Zhen, X., Banerjee, M., Archer, D., Vaillancourt, D. E., Singh, V., 和 Vemuri, B. C. 对称正定矩阵流形上的统计循环模型。发表于 *NeurIPS*, 第 8897–8908 页，2018年。Chakraborty, R., Bouza, J., Manton, J., 和 Vemuri, B. C. ManifoldNet：一种用于流形值数据的深度神经网络及其应用。*TPAMI*，44(2):799–810，2020。Cheng, K., Zhang, Y., He, X., Chen, W., Cheng, J., 和 Lu, H. 基于移位图卷积网络的动作识别。发表于*CVPR*, 第 180–189 页，2020。Dong, Z., Jia, S., Zhang, C., Pei, M., 和 Wu, Y. 对称正定矩阵的深度流形学习及其在人脸识别中的应用。发表于 *AAAI*，第 4009–4015 页，2017年。Edelman, A., Arias, T. A., 和 Smith, S. T. 带正交约束的算法几何。《*SIAM*矩阵分析与应用杂志》，20(2):303–353，1998。Gallier, J. 和 Quaintance, J. 微分几何与李群。施普林格国际出版，2020。Ganea, O., Becigneul, G., 和 Hofmann, T. 双曲神经网络。发表于*NeurIPS*，第 5350–5360 页，2018年。

Garcia-Hernando, G., Yuan, S., Baek, S., 和 Kim, T.-K. 第一人称手部动作基准：含 RGB-D 视频和 3D 手部姿态标注。发表于 *CVPR*，第 409–419 页，2018年。

Geh´er, G. P. 和 Semrl, P. 格拉斯曼空间上的等距变换。《泛函分析杂志》，270(4):1585–1601，2016。

Geh´er, G. P. 和 Semrl, P. 格拉斯曼空间的等距变换，II。数学进展，332:287–310，2018年。

Harandi, M.、Salzmann, M. 和 Hartley, R. 对称正定流形上的降维：几何感知方法的兴起。*TPAMI*，40：48–62, 2018年。

Helmke, U. 和 Moore, J. B. 优化与动力系统。施普林格伦敦，1994 年。

Huang, Z. 和 Gool, L. V. 用于 SPD 矩阵学习的黎曼网络。发表于*AAAI*，第 2036–2042 页，2017年。

Huang, Z.、Wu, J. 和 Gool, L. V. 在格拉斯曼流形上构建深度网络。发表于 *AAAI*，第 3279–3286 页，2018年。Kim, S. 有序陀螺向量空间。对称性，12(6)，2020。Lebanon, G. 和 Lafferty, J. 多项式流形上的超平面间隔分类器。发表于*ICML*，第 66 页，2004。Lin, Z. 通过 Cholesky 分解研究对称正定矩阵的黎曼几何。《*SIAM*矩阵分析与应用杂志》，40(4):1353–1370，2019。L´opez, F.、Pozzetti, B.、Trettel, S.、Strube, M. 和 Wienhard, A. 对称正定矩阵空间上的向量值距离与陀螺微积分。发表于 *NeurIPS*，第 18350–18366 页，2021。Miller, G. A. WordNet：英语词汇数据库。《*ACM*通讯》，38(11):39–41，1995。Moln´ar, L. 正定矩阵空间的 Jordan 三重态端同态与等距变换。线性与多重线性代数，63(1):12–33，2015。Moln´ar, L. 和 Szokol, P. 保持广义距离度量的正定矩阵变换。线性代数及其应用，466:141–159，2015。M¨uller, M.、R¨oder, T.、Clausen, M.、Eberhardt, B.、Kr¨uger, B. 和 Weber, A. Mocap 数据库 HDM05 文档。技术报告 CG-2007-2，波恩大学，2007年6月。Nguyen, X. S. GeomNet：一种基于 SPD 矩阵空间与 Cholesky 空间的黎曼几何、用于基于 3D 骨架的交互识别的神经网络。发表于*ICCV*，第 13379–13389 页，2021。

Nguyen, X. S. 对称半正定矩阵学习的陀螺向量空间方法。载于 欧洲计算机视觉会议，第 52–68 页，2022a。

Nguyen, X. S. 某些矩阵流形的陀螺结构。载于*NeurIPS*，2022b。

Nguyen, X. S.、Brun, L.、L´ezoray, O. 和 Bougleux, S. 一种基于对称正定流形学习的神经网络，用于基于骨架的手势识别。载于*CVPR*，第12036–12045页，2019a。

Nguyen, X. S.、Brun, L.、L´ezoray, O. 和 Bougleux, S. 通过神经网络学习对称正定矩阵进行基于骨架的手势识别。载于自动人脸与手势识别国际会议，第1–5页，2019b。

Nguyen, X. S., Brun, L., L´ezoray, O., 和 Bougleux, S. 为基于骨架的手势识别学习循环高阶统计。在国际模式识别会议，第 975–982 页，2020。Pennec, X. 流形上的统计计算与计算解剖学。研究指导资格论文，尼斯-索菲亚·安蒂波利斯大学，2006。Pennec, X., Fillard, P., 和 Ayache, N. 张量计算的黎曼框架。技术报告 RR-5255，法国国家信息与自动化研究所，2004。Plizzari, C., Cannici, M., 和 Matteucci, M. 通过时空变换器网络进行基于骨架的动作识别。《计算机视觉与图像理解》，208:103219，2021。Qian, W., Shen, J., Shi, W., Wu, W., 和 Yuan, W. 格拉斯曼空间的满射等距变换。《CoRR》，abs/2104.07027，2021。Shahroudy, A., Liu, J., Ng, T.-T., 和 Wang, G. NTU RGB+D：用于三维人体活动分析的大规模数据集。在 *CVPR*，第 1010–1019 页，2016。Shimizu, R., Mukuta, Y., 和 Harada, T. 双曲神经网络++。在国际学习表征会议，2021。Skopek, O., Ganea, O.-E., 和 B´ecigneul, G. 混合曲率变分自编码器。在国际学习表征会议，2020。Toutanova, K., Chen, D., Pantel, P., Poon, H., Choudhury, P., 和 Gamon, M. 用于文本与知识库联合嵌入的文本表示。在《自然语言处理实证方法会议》，第 1499–1509 页，2015。Ungar, A. A. 超越爱因斯坦加法定律及其陀螺托马斯进动：陀螺群与陀螺向量空间理论。《物理学基础理论》第 117 卷，施普林格，荷兰，2002年。

Ungar, A. A. 解析双曲几何：数学基础与应用。World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.，新泽西州哈肯萨克，2005年。

Ungar, A. A. *N*维解析双曲几何：导论。CRC出版社，2014。

Wang, R.、Wu, X.-J. 和 Kittler, J. SymNet：一种用于图像集分类的简单对称正定流形深度学习方法。*IEEE*神经网络与学习系统汇刊，第 1–15 页，2021 年。Weiler, M.、Forr´e, P.、Verlinde, E. 和 Welling, M. 坐标无关卷积网络——黎曼流形上的等距变换与规范等变卷积。*CoRR*，abs/2106.06020，2021 年。Xu, Y.、Lei, J.、Dobriban, E. 和 Daniilidis, K. 齐性空间上等变网络的统一基于傅里叶的核与非线性设计。载于*ICML*，第 24596–24614 页，2022。Yan, S.、Xiong, Y. 和 Lin, D. 用于基于骨架的动作识别的时空图卷积网络。载于*AAAI*，第 7444–7452 页，2018年。

A. 实验详情

A.1. 人体动作识别

HDM05（M¨uller 等，2007）该数据集包含 2337 个三维骨架数据序列，分为130 个类别。每一帧都包含31 个身体关节的三维坐标。我们使用所有动作类别，并遵循Harandi 等人（2018）的实验方案：使用 2 名受试者进行训练，其余 3 名受试者用于测试。

FPHA（Garcia-Hernando 等人，2018年）包含 1175 个三维骨架数据序列，分为 45 个类别。每帧包含 21 个手部关节的三维坐标。我们遵循 Garcia-Hernando 等人（2018年）的实验协议，其中 600个序列用于训练，575 个序列用于测试。

NTU60（Shahroudy 等人，2018年）包含 56880 个三维骨架数据序列，分为 60 个类别。每帧包含 25 个或 50 个身体关节的三维坐标。我们采用相互动作数据，并遵循 Shahroudy 等人（2018年）的跨受试者实验协议，其中 20 名受试者的数据用于训练，另外 20 名受试者的数据用于测试。

对称正定神经网络 与Huang 与 Gool (2017年); Brooks 等人 (2019); Nguyen(2022b) 一样，每个序列都用一个协方差矩阵表示。HDM05、FPHA 和 NTU60 数据集的协方差矩阵大小分别为 93×93， 60×60 和 150×150。对于 SPDNet，采用与Huang 与 Gool(2017年)相同的架构，并使用三个 Bimap 层。对于 SPDNetBN，采用与 Brooks 等人 (2019)相同的架构，并使用三个 Bimap 层。对于所有网络，HDM05、FPHA 和 NTU60 数据集实验中的变换矩阵大小分别设为 93×93， 60×60 和 150×150。

Grassmann 神经网络 按照Huang 等人 (2018年) 的方法，动作序列表示为阶数为 10 的线性子空间，在 HDM05、FPHA 和 NTU 数据集上的实验中，这些子空间分别属于 $\mathrm{Gr}^{93,10}$，$\mathrm{Gr}^{60,10}$，和 $\mathrm{Gr}^{150,10}$。对于 GrNet，连接权重的大小在 HDM05、FPHA 和 NTU 数据集实验中分别设为 93×93， 60×60 和 150×150。

我们的网络采用 Pytorch 框架实现。使用交叉熵损失和 Adadelta 优化器训练 2000 个 epoch。学习率设为 10^{-3}。HDM05 和 FPHA 数据集的批量大小设为 32，NTU60 数据集的批量大小设为 256。每个模型运行三次，并报告这三次运行中准确率最高的结果（Ganea 等人，2018年；Nguyen，2022b）。

A.2. 知识图谱补全

WN18RR（Miller，1995）它是 WordNet（Miller，1995）的一个子集。WordNet 是由词语之间的关系构成的层级集合；WN18RR 是从 WN18（Bordes 等人，2013年）构建而来，方法是从验证集和测试集中移除许多关系的逆关系。它包含 40,943 个实体和 11 种关系。

FB15k-237（Toutanova 等人，2015）它是 Freebase（Bollacker 等人，2008年）的一个子集。Freebase 是真实世界事实的集合，FB15k-237 按照与 WN18RR 相同的方式从 FB15k（Bordes 等人，2013年）构建而来。它包含 14,541 个实体和 237 种关系。

网络采用 PyTorch 框架实现。使用二元交叉熵损失和 SGD 优化器训练 2000 个 epoch。学习率设为 10^{-3}，权重衰减设为 10^{-5}。批量大小设为 4096。负样本数量设为 10。这些设置取自 L´opez 等人（2021）。我们在 $\mathrm{Gr}_{n,p}$ and $\widetilde{\mathrm{Gr}}_{n,p}$ 嵌入上进行测试，其中 $(n,p) \in \{(2k,k)\}, k = 5, 6, \ldots, 14$。模型在 $(n,p) = (24, 12)$ 时取得最佳结果。采用 MRR 和 K 时的命中率（H@K， $K = 1$、3、10）作为评估指标（Bala˘zevi´c 等人，2019）。如果模型在验证集上的 MRR 分数连续 500 个 epoch 未提升，则提前停止训练。在所有实验中，均使用在验证集上取得最佳 MRR 分数的模型进行测试。

B. 陀螺群与陀螺向量空间

陀螺向量空间构成了双曲几何的基础，正如向量空间构成了欧几里得几何的基础（Ungar，2002年；2005年；2014）。我们回顾所提出的陀螺群和陀螺交换陀螺群的定义

在（Ungar，2002年；2005年；2014）。关于更多数学细节和深入讨论，感兴趣的读者可参阅这些论文。

定义 B.1（陀螺群（Ungar，2014））。一对 $(G, \oplus)$ 是一个广群，即它是一个非空集合，G，配备了一个二元运算，$\oplus$。如果广群 $(G, \oplus)$ 的二元运算满足以下公理，则称其为陀螺群：$a, b, c \in G$:

(G1) 至少存在一个元素 $e \in G$，称为左单位元，使得 $e \oplus a = a$。

(G2) 存在一个元素 $\ominus a \in G$，称为 a 的左逆元，使得 $\ominus a \oplus a = e$。

(G3) 对每个 a，都存在一个自同构 $\mathrm{gyr}[a, b]: G \to G, b \in G$，使得

$$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus \mathrm{gyr}[a, b]c \quad \text{(Left Gyroassociative Law)}.$$

自同构 $\mathrm{gyr}[a, b]$ 称为陀螺自同构，或称为由 a, b 生成的 G 的陀螺变换。

(G4) $\mathrm{gyr}[a, b] = \mathrm{gyr}[a \oplus b, b]$ (左约化性质)。

定义 B.2(陀螺可沟通性 交换陀螺群（Ungar，2014）。陀螺群 $(G, \oplus)$ 是陀螺交换的，当且仅当其满足

$$a \oplus b = \mathrm{gyr}[a, b](b \oplus a) \quad \text{(Gyrocommutative Law)}.$$

以下陀螺向量空间的定义与（Ungar，2014）中的定义 3.2 略有不同。

定义 B.3（Gyr 陀螺向量空间）。一个配备数乘的陀螺交换陀螺群 $(G, \oplus)$

$$(t, x) \to t \odot x : \mathbb{R} \times G \to G$$

若满足以下公理，则称其为陀螺向量空间：$s, t \in \mathbb{R}$ 和 $a, b, c \in G$:

(V1) $1 \odot a = a$，$0 \odot a = t \odot e = e$，和 $(-1) \odot a = \ominus a$。

(V2) $(s + t) \odot a = s \odot a \oplus t \odot a$.

（V3）$(st) \odot a = s \odot$ ({v3).（V4）

$\mathrm{gyr}[a, b](t \odot c) = t \odot \mathrm{gyr}[a, b]c$.

(V5) $\mathrm{gyr}[s \odot a, t \odot a] = \mathrm{Id}$，其中 Id 是恒等映射。

C. 具有对数-乔列斯基几何的对称正定矩阵陀螺向量空间

近期的研究（Nguyen，2022a）表明，具有对数-乔列斯基几何的对称正定流形具有陀螺结构（Lin，2019）。这里，我们基于引理 2.1、2.2和 2.3 介绍另一种方法，用于推导这些流形的基本运算和陀螺自同构的闭式表达式。

利用方程（1）、（2）和（3），我们首先推导出 L_n^+（即由具有正对角元素的 $n \times n$ 下三角矩阵构成的空间）的基本运算和陀螺自同构的闭式表达式。

设 $\mathbf{U}$、$\mathbf{V}$、$\mathbf{W} \in \mathrm{L}_n^+$ 以及 $t \in \mathbb{R}$。则

$$\mathbf{U} \oplus_{lt} \mathbf{V} = \lfloor \mathbf{U} \rfloor + \lfloor \mathbf{V} \rfloor + \mathbb{D}(\mathbf{U})\mathbb{D}(\mathbf{V}),$$
$$t \otimes_{lt} \mathbf{U} = t \lfloor \mathbf{U} \rfloor + \mathbb{D}(\mathbf{U})^t,$$
$$\mathrm{gyr}_{lt}[\mathbf{U}, \mathbf{V}]\mathbf{W} = Id,$$

其中 $\oplus_{lt}$，$\otimes_{lt}$和 $\mathrm{gyr}_{lt}[.,.]$ 分别表示 L_n^+上的二元运算、数乘和陀螺自同构。如 Lin （2019）所示，L_n^+ 与 Sym_n^+ 之间存在一个微分同胚，其定义如下：

$$\xi : \mathrm{Sym}_n^+ \to \mathrm{L}_n^+, \quad \mathbf{P} \to \mathbf{U}, \mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{P}.$$

这个微分同胚为我们提供了一种简单的方法，可以为具有对数-乔列斯基几何的对称正定流形推导出基本运算和陀螺自同构的闭式表达式，也就是说，

$$\mathbf{P} \oplus_{lc} \mathbf{Q} = (\lfloor \varphi(\mathbf{P}) \rfloor + \lfloor \varphi(\mathbf{Q}) \rfloor + \mathbb{D}(\varphi(\mathbf{P}))\mathbb{D}(\varphi(\mathbf{Q}))).(\lfloor \varphi(\mathbf{P}) \rfloor + \lfloor \varphi(\mathbf{Q}) \rfloor + \mathbb{D}(\varphi(\mathbf{P}))\mathbb{D}(\varphi(\mathbf{Q})))^T,$$

$$t \otimes_{lc} \mathbf{P} = (t\lfloor\varphi(\mathbf{P})\rfloor + \mathbb{D}(\varphi(\mathbf{P}))^t).(t\lfloor\varphi(\mathbf{P})\rfloor + \mathbb{D}(\varphi(\mathbf{P}))^t)^T,$$

$$\mathrm{gyr}_{lc}[\mathbf{P}, \mathbf{Q}]\mathbf{R} = Id,$$

其中 $\mathbf{P}$，$\mathbf{Q}$，$\mathbf{R}$ $\in$ 对称$_n^+$和 $t \in \mathbb{R}$。

D. SPD陀螺正弦定律

定理 *D.1*（*SPD*陀螺正弦定律）。设 *P*、*Q* 和 *R* 是陀螺向量空间 $(Sym_n^+, \oplus_g, \otimes_g)$ 中三个互不相同的 *SPD* 陀螺点，其中 $g \in \{le, lc\}$。设 $\widetilde{P} = \ominus_g Q \oplus_g R$、$\widetilde{Q} = \ominus_g P \oplus_g R$ 和 $\widetilde{R} = \ominus_g P \oplus_g Q$ 是由这三个 *SPD* 陀螺点构成的 *SPD* 陀螺三角形的 *SPD* 陀螺边$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$。设 $p = \|P\|$、$q = \|Q\|$ 和 $r = \|R\|$。设 $\alpha = \angle QPR$、$\beta = \angle PQR$ 和 $\gamma = \angle PRQ$ 是该 *SPD* 陀螺三角形的 *SPD* 陀螺角。那么

$$\frac{\sin(\alpha)}{p} = \frac{\sin(\beta)}{q} = \frac{\sin(\gamma)}{r}.$$

证明。 这是 SPD 陀螺余弦定律的直接推论。 □

E. 引理的证明 2.1

證明。 我們首先回顧以下一些結果，這些結果來自Gallier 与 Quaintance (2020)。

命题 E.1 ((Gallier 与 Quaintance, 2020))。 设 M 和 N 是两个黎曼流形。若 ϕ： $M \to N$ 是局部等距映射，则以下概念保持不变：

(1) 沿曲线平行移动。如果 $\mathcal{T}_\delta$ 表示沿曲线 δ 的平行移动，而 $\mathcal{T}_{\phi\circ\delta}$ 表示沿曲线 $\phi \circ \delta$ 的平行移动，那么

$$D\phi_{\delta(1)} \circ \mathcal{T}_\delta = \mathcal{T}_{\phi\circ\delta} \circ D\phi_{\delta(0)}. \tag{15}$$

(2) 指数映射。我们有

$$\phi \circ \mathrm{Exp}_{\mathbf{P}} = \mathrm{Exp}_{\phi(\mathbf{P})} \circ D\phi_{\mathbf{P}}. \tag{16}$$

我们还需要证明以下结果。

命题 E.2。 ϕ： $M \to N$ 是一个等距变换。因此

$$\mathrm{Log}_{\mathbf{P}}(\mathbf{Q}) = (D\phi^{-1}_{\phi(\mathbf{P})})(\mathrm{Log}_{\phi(\mathbf{P})}(\phi(\mathbf{Q}))). \tag{17}$$

证明。 由于 ϕ 是一个等距变换，其逆变换 ϕ^{-1} 也是一个等距变换。因此，由式（16）可得

$$\begin{aligned}\phi^{-1} \circ \mathrm{Exp}_{\phi(\mathbf{P})}(\mathrm{Log}_{\phi(\mathbf{P})}(\phi(\mathbf{Q}))) &= \mathrm{Exp}_{\phi^{-1}(\phi(\mathbf{P}))} \circ (D\phi^{-1}_{\phi(\mathbf{P})})(\mathrm{Log}_{\phi(\mathbf{P})}(\phi(\mathbf{Q}))) \\ &= \mathrm{Exp}_{\mathbf{P}} \circ (D\phi^{-1}_{\phi(\mathbf{P})})(\mathrm{Log}_{\phi(\mathbf{P})}(\phi(\mathbf{Q}))).\end{aligned}$$

因此

$$\phi^{-1} \circ \phi(\mathbf{Q}) = \mathrm{Exp}_{\mathbf{P}} \circ (D\phi^{-1}_{\phi(\mathbf{P})})(\mathrm{Log}_{\phi(\mathbf{P})}(\phi(\mathbf{Q}))),$$

这等价于

$$\mathbf{Q} = \mathrm{Exp}_{\mathbf{P}} \circ (D\phi^{-1}_{\phi(\mathbf{P})})(\mathrm{Log}_{\phi(\mathbf{P})}(\phi(\mathbf{Q}))).$$

因此

$$\mathrm{Log}_{\mathbf{P}}(\mathbf{Q}) = (D\phi^{-1}_{\phi(\mathbf{P})})(\mathrm{Log}_{\phi(\mathbf{P})}(\phi(\mathbf{Q}))).$$

□

根据二元运算的定义 $\oplus_m$ 在公式（1）中,

$$\begin{aligned}\mathbf{P} \oplus_m \mathbf{Q} &= \operatorname{Exp}_{\mathbf{P}}(\mathcal{T}_{\bar{\mathbf{I}}\to\mathbf{P}}(\operatorname{Log}_{\bar{\mathbf{I}}}(\mathbf{Q}))) \\ &\overset{(1)}{=} \operatorname{Exp}_{\mathbf{P}}(\mathcal{T}_{\bar{\mathbf{I}}\to\mathbf{P}}((D\phi^{-1}_{\phi(\bar{\mathbf{I}})})(\operatorname{Log}_{\phi(\bar{\mathbf{I}})}(\phi(\mathbf{Q}))))) \\ &\overset{(2)}{=} \operatorname{Exp}_{\mathbf{P}}\Big((D\phi^{-1}_{\phi(\mathbf{P})})\big(\mathcal{T}_{\phi(\bar{\mathbf{I}})\to\phi(\mathbf{P})}(\operatorname{Log}_{\phi(\bar{\mathbf{I}})}(\phi(\mathbf{Q})))\big)\Big) \\ &\overset{(3)}{=} \phi^{-1}\Big(\operatorname{Exp}_{\phi(\mathbf{P})}\big(\mathcal{T}_{\phi(\bar{\mathbf{I}})\to\phi(\mathbf{P})}(\operatorname{Log}_{\phi(\bar{\mathbf{I}})}(\phi(\mathbf{Q})))\big)\Big) \\ &\overset{(4)}{=} \phi^{-1}(\phi(\mathbf{P}) \oplus_n \phi(\mathbf{Q})).\end{aligned} \tag{18}$$

式（18）的推导如下。

（1）由命题E.2得出。（2）由式（15）得出。（3）由式（16）得出。（4）由二元运算 $\oplus_n$的定义得出。

□

F. 引理2.2的证明

证明。根据式（ $\otimes_m$ 2）中数乘的定义,

$$\begin{aligned}t \otimes_m \mathbf{P} &= \operatorname{Exp}_{\bar{\mathbf{I}}}(t \operatorname{Log}_{\bar{\mathbf{I}}}(\mathbf{P})) \\ &\overset{(1)}{=} \operatorname{Exp}_{\bar{\mathbf{I}}}\big(t(D\phi^{-1}_{\phi(\bar{\mathbf{I}})})(\operatorname{Log}_{\phi(\bar{\mathbf{I}})}(\phi(\mathbf{P})))\big) \\ &\overset{(2)}{=} \operatorname{Exp}_{\bar{\mathbf{I}}}\big((D\phi^{-1}_{\phi(\bar{\mathbf{I}})})(t \operatorname{Log}_{\phi(\bar{\mathbf{I}})}(\phi(\mathbf{P})))\big) \\ &\overset{(3)}{=} \phi^{-1}\big(\operatorname{Exp}_{\phi(\bar{\mathbf{I}})}(t \operatorname{Log}_{\phi(\bar{\mathbf{I}})}(\phi(\mathbf{P})))\big) \\ &\overset{(4)}{=} \phi^{-1}(t \otimes_n \phi(\mathbf{P})).\end{aligned} \tag{19}$$

式（19）的推导如下。

<escape>(1) 由命题E.2得出。(2) 源于 $D\phi^{-1}$ 是一个线性算子。(3) 由公式 (16得出。(4) 由数乘的定义 $\otimes_n$得出。
</escape>

□

G. 引理证明 2.3

证明。 对于任意 $\mathbf{Y} \in M$，我们有

$$\begin{aligned}\phi(\bar{\mathbf{I}}) &= \phi(\ominus_m \mathbf{Y} \oplus_m \mathbf{Y}) \\ &\overset{(1)}{=} \phi(\ominus_m \mathbf{Y}) \oplus_n \phi(\mathbf{Y}),\end{aligned} \tag{20}$$

其中，(1) 式由方程（4）推导得出。

注意

$$\begin{aligned}
\mathrm{gyr}_m[\mathbf{P},\mathbf{Q}]\mathbf{R} &\overset{(1)}{=} \big(\ominus_m(\mathbf{P}\oplus_m\mathbf{Q})\big)\oplus_m\big(\mathbf{P}\oplus_m(\mathbf{Q}\oplus_m\mathbf{R})\big)\\
&\overset{(2)}{=} \phi^{-1}\Big(\phi\big(\ominus_m(\mathbf{P}\oplus_m\mathbf{Q})\big)\oplus_n\phi\big(\mathbf{P}\oplus_m(\mathbf{Q}\oplus_m\mathbf{R})\big)\Big)\\
&\overset{(3)}{=} \phi^{-1}\Big(\ominus_n\big(\phi(\mathbf{P}\oplus_m\mathbf{Q})\big)\oplus_n\phi\big(\mathbf{P}\oplus_m(\mathbf{Q}\oplus_m\mathbf{R})\big)\Big)\\
&\overset{(4)}{=} \phi^{-1}\Big(\ominus_n\big(\phi(\mathbf{P})\oplus_n\phi(\mathbf{Q})\big)\oplus_n\phi\big(\mathbf{P}\oplus_m(\mathbf{Q}\oplus_m\mathbf{R})\big)\Big)\\
&\overset{(5)}{=} \phi^{-1}\Big(\ominus_n\big(\phi(\mathbf{P})\oplus_n\phi(\mathbf{Q})\big)\oplus_n\big(\phi(\mathbf{P})\oplus_n\phi(\mathbf{Q}\oplus_m\mathbf{R})\big)\Big)\\
&\overset{(6)}{=} \phi^{-1}\Big(\ominus_n\big(\phi(\mathbf{P})\oplus_n\phi(\mathbf{Q})\big)\oplus_n\big(\phi(\mathbf{P})\oplus_n(\phi(\mathbf{Q})\oplus_n\phi(\mathbf{R}))\big)\Big)\\
&\overset{(7)}{=} \phi^{-1}(\mathrm{gyr}_n[\phi(\mathbf{P}),\phi(\mathbf{Q})]\phi(\mathbf{R})).
\end{aligned} \tag{21}$$

方程（21）的推导如下。

（1）由式（3）得出。（2）由式（4）得出。（3）由式（20）得出。（4）、（5）和（6）由式（4）得出。（7）由式（3）得出。

□

H. 定理2.4的证明

公理（G1）

证明。设 $\phi(\mathbf{I})$ 是 G_n 中的左单位元，其中 $\mathbf{I}\in G_m$。那么对于 $\mathbf{P}\in G_m$，有

$$\phi(\mathbf{P})=\phi(\bar{\mathbf{I}})\oplus_n\phi(\mathbf{P})=\phi(\bar{\mathbf{I}}\oplus_m\mathbf{P}),$$

这表明 $\mathbf{P}=\mathbf{I}\oplus_m\mathbf{P}$，因此 $\mathbf{I}$ 是 G_m 中的左单位元。

□

公理（G2）

证明。对于 $\mathbf{P}\in G_m$，根据假设（$G_n,\oplus_n,\otimes_n$）是一个陀螺向量空间，存在 $\mathbf{P}$ 的左逆元 $\ominus_n\phi(\mathbf{P})$，使得

$$\ominus_n\phi(\mathbf{P})\oplus_n\phi(\mathbf{P})=\phi(\bar{\mathbf{I}}).$$

因此

$$\bar{\mathbf{I}}=\phi^{-1}(\ominus_n\phi(\mathbf{P})\oplus_n\phi(\mathbf{P}))=\phi^{-1}(\ominus_n\phi(\mathbf{P}))\oplus_m\mathbf{P},$$

这表明 $\phi^{-1}(\ominus_n\phi(\mathbf{P}))\in G_m$ 是$\mathbf{P}$的左逆元。

□

公理（G3）

证明。 对于$\mathbf{P}$,$\mathbf{Q}$,$\mathbf{R}$ $\in G_m$，我们有

$$\begin{aligned}
\mathbf{P} \oplus_m (\mathbf{Q} \oplus_m \mathbf{R}) &\overset{(1)}{=} \mathbf{P} \oplus_m \phi^{-1}(\phi(\mathbf{Q}) \oplus_n \phi(\mathbf{R})) \\
&\overset{(2)}{=} \phi^{-1}\big(\phi(\mathbf{P}) \oplus_n (\phi(\mathbf{Q}) \oplus_n \phi(\mathbf{R}))\big) \\
&\overset{(3)}{=} \phi^{-1}\big((\phi(\mathbf{P}) \oplus_n \phi(\mathbf{Q})) \oplus_n \mathrm{gyr}_n[\phi(\mathbf{P}), \phi(\mathbf{Q})]\phi(\mathbf{R})\big) \\
&\overset{(4)}{=} \phi^{-1}\big((\phi(\mathbf{P}) \oplus_n \phi(\mathbf{Q})) \oplus_n \phi(\mathrm{gyr}_m[\mathbf{P}, \mathbf{Q}]\mathbf{R})\big) \\
&\overset{(5)}{=} \phi^{-1}(\phi(\mathbf{P}) \oplus_n \phi(\mathbf{Q})) \oplus_m \mathrm{gyr}_m[\mathbf{P}, \mathbf{Q}]\mathbf{R} \\
&\overset{(6)}{=} (\mathbf{P} \oplus_m \mathbf{Q}) \oplus_m \mathrm{gyr}_m[\mathbf{P}, \mathbf{Q}]\mathbf{R}.
\end{aligned} \tag{22}$$

方程（22）的推导如下。

（1）由二元运算的定义 $\oplus_m$得出。（2）由二元运算的定义 $\oplus_m$得出。（3）由陀螺向量空间 $(G_n, \oplus_n, \otimes_n)$ 验证的公理（G3）得出。（4）由陀螺自同构 $\mathrm{gyr}_m[.,.]$ 的定义得出。（5）由二元运算的定义 $\oplus_m$得出。（6）由二元运算的定义 $\oplus_m$得出。

□

公理（G4）

证明。 对于 $\mathbf{P}$,$\mathbf{Q}$,$\mathbf{R}$ $\in G_m$，我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{gyr}_m[\mathbf{P}, \mathbf{Q}]\mathbf{R} &\overset{(1)}{=} \phi^{-1}\big(\mathrm{gyr}_n[\phi(\mathbf{P}), \phi(\mathbf{Q})]\phi(\mathbf{R})\big) \\
&\overset{(2)}{=} \phi^{-1}\big(\mathrm{gyr}_n[\phi(\mathbf{P}) \oplus_n \phi(\mathbf{Q}), \phi(\mathbf{Q})]\phi(\mathbf{R})\big) \\
&\overset{(3)}{=} \phi^{-1}\big(\mathrm{gyr}_n[\phi(\mathbf{P} \oplus_m \mathbf{Q}), \phi(\mathbf{Q})]\phi(\mathbf{R})\big) \\
&\overset{(4)}{=} \phi^{-1}\big(\phi(\mathrm{gyr}_m[\mathbf{P} \oplus_m \mathbf{Q}, \mathbf{Q}]\mathbf{R})\big) \\
&\overset{(5)}{=} \mathrm{gyr}_m[\mathbf{P} \oplus_m \mathbf{Q}, \mathbf{Q}]\mathbf{R}.
\end{aligned} \tag{23}$$

方程（23）的推导如下。

(1) 根据陀螺自同构 $\mathrm{gyr}_m[.,.]$ 的定义得出。(2) 根据陀螺向量空间 $(G_n, \oplus_n, \otimes_n)$ 验证的公理 (G4) 得出。(3) 根据二元运算 $\oplus_m$ 的定义得出。(4) 根据陀螺自同构 $\mathrm{gyr}_m[.,.]$ 的定义得出。

□

陀螺交换律

证明。 对于 $\mathbf{P},\mathbf{Q} \in G_m$，我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{P} \oplus_m \mathbf{Q} &\overset{(1)}{=} \phi^{-1}\big(\phi(\mathbf{P}) \oplus_n \phi(\mathbf{Q})\big) \\ &\overset{(2)}{=} \phi^{-1}\big(\operatorname{gyr}_n[\phi(\mathbf{P}), \phi(\mathbf{Q})](\phi(\mathbf{Q}) \oplus_n \phi(\mathbf{P}))\big) \\ &\overset{(3)}{=} \phi^{-1}\big(\operatorname{gyr}_n[\phi(\mathbf{P}), \phi(\mathbf{Q})]\phi(\mathbf{Q} \oplus_m \mathbf{P})\big) \\ &\overset{(4)}{=} \operatorname{gyr}_m[\mathbf{P}, \mathbf{Q}](\mathbf{Q} \oplus_m \mathbf{P}).\end{aligned} \tag{24}$$

方程（24）的推导如下。

(1) 根据二元运算的定义 $\oplus_m$得出。(2) 根据陀螺向量空间（G_n， $\oplus_n$， $\otimes_n$）所满足的陀螺交换律得出。(3) 根据二元运算的定义 $\oplus_m$得出。(4) 根据陀螺自同构 $\operatorname{gyr}_m[.,.]$的定义得出。

□

公理（V1）

证明。 对于 $t \in \mathbb{R}$ 和 $\mathbf{P} \in G_m$，根据 $(G_n, \oplus_n, \otimes_n)$ 是陀螺向量空间这一假设以及方程（5）和（20），可得

$$1 \otimes_m \mathbf{P} = \phi^{-1}(1 \otimes_n \phi(\mathbf{P})) = \phi^{-1}(\phi(\mathbf{P})) = \mathbf{P}.$$

$$0 \otimes_m \mathbf{P} = \phi^{-1}(0 \otimes_n \phi(\mathbf{P})) = \phi^{-1}(\phi(\bar{\mathbf{I}})) = \bar{\mathbf{I}}.$$

$$t \otimes_m \bar{\mathbf{I}} = \phi^{-1}(t \otimes_n \phi(\bar{\mathbf{I}})) = \phi^{-1}(\phi(\bar{\mathbf{I}})) = \bar{\mathbf{I}}.$$

$$(-1) \otimes_m \mathbf{P} = \phi^{-1}((-1) \otimes_n \phi(\mathbf{P})) = \phi^{-1}(\ominus_n \phi(\mathbf{P})) = \phi^{-1}(\phi(\ominus_m \mathbf{P})) = \ominus_m \mathbf{P}.$$

□

公理（V2）

证明。对于 s， $t \in \mathbb{R}$ 和 $\mathbf{P} \in G_m$，我们有

$$\begin{aligned}(s+t) \otimes_m \mathbf{P} &\overset{(1)}{=} \phi^{-1}((s+t) \otimes_n \phi(\mathbf{P})) \\ &\overset{(2)}{=} \phi^{-1}(s \otimes_n \phi(\mathbf{P}) \oplus_n t \otimes_n \phi(\mathbf{P})) \\ &\overset{(3)}{=} \phi^{-1}(\phi(\phi^{-1}(s \otimes_n \phi(\mathbf{P}))) \oplus_n \phi(\phi^{-1}(t \otimes_n \phi(\mathbf{P})))) \\ &\overset{(4)}{=} \phi^{-1}(s \otimes_n \phi(\mathbf{P})) \oplus_m \phi^{-1}(t \otimes_n \phi(\mathbf{P})) \\ &\overset{(5)}{=} s \otimes_m \mathbf{P} \oplus_m t \otimes_m \mathbf{P}.\end{aligned} \tag{25}$$

式（25）的推导如下。

(1) 根据数乘的定义 $\otimes_m$得出。

(2)由陀螺向量空间（G_n、 $\oplus_n$、 $\otimes_n$）验证的公理（V2）得出。

(3) 由 ϕ 是等距变换这一事实得出。

（4）由二元运算的定义 $\oplus_m$得出。

（5）由数乘的定义 $\otimes_m$得出。

□

公理（V3）

证明。 对于 $s,\ t \in \mathbb{R}$ 和 $\mathbf{P} \in G_m$，我们有

$$\begin{aligned}(st) \otimes_m \mathbf{P} &\overset{(1)}{=} \phi^{-1}((st) \otimes_n \phi(\mathbf{P})) \\ &\overset{(2)}{=} \phi^{-1}(s \otimes_n (t \otimes_n \phi(\mathbf{P}))) \\ &\overset{(3)}{=} \phi^{-1}(s \otimes_n \phi(\phi^{-1}(t \otimes_n \phi(\mathbf{P})))) \\ &\overset{(4)}{=} s \otimes_m \phi^{-1}(t \otimes_n \phi(\mathbf{P})) \\ &\overset{(5)}{=} s \otimes_m (t \otimes_m \mathbf{P}).\end{aligned} \tag{26}$$

下面给出式（26）的推导。

（1）由数乘的定义 $\otimes_m$得出。（2）由陀螺向量空间 $(G_n,\ \oplus_n,\ \otimes_n)$ 满足公理（ V3 ）得出。（ 3 ）由 ϕ 是等距变换这一事实得出。

（4）由数乘的定义 $\otimes_m$得出。（5）由数乘的定义 $\otimes_m$得出。

□

公理（V4）

证明。对于 $t \in \mathbb{R}$ 以及 $\mathbf{P},\ \mathbf{Q},\ \mathbf{R} \in G_m$，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{gyr}_m[\mathbf{P}, \mathbf{Q}](t \otimes_m \mathbf{R}) &\overset{(1)}{=} \phi^{-1}(\mathrm{gyr}_n[\phi(\mathbf{P}), \phi(\mathbf{Q})]\phi(t \otimes_m \mathbf{R})) \\ &\overset{(2)}{=} \phi^{-1}(\mathrm{gyr}_n[\phi(\mathbf{P}), \phi(\mathbf{Q})]\phi(\phi^{-1}(t \otimes_n \phi(\mathbf{R})))) \\ &\overset{(3)}{=} \phi^{-1}(\mathrm{gyr}_n[\phi(\mathbf{P}), \phi(\mathbf{Q})](t \otimes_n \phi(\mathbf{R}))) \\ &\overset{(4)}{=} \phi^{-1}(t \otimes_n \mathrm{gyr}_n[\phi(\mathbf{P}), \phi(\mathbf{Q})]\phi(\mathbf{R})) \\ &\overset{(5)}{=} \phi^{-1}(t \otimes_n \phi(\phi^{-1}(\mathrm{gyr}_n[\phi(\mathbf{P}), \phi(\mathbf{Q})]\phi(\mathbf{R})))) \\ &\overset{(6)}{=} t \otimes_m \phi^{-1}(\mathrm{gyr}_n[\phi(\mathbf{P}), \phi(\mathbf{Q})]\phi(\mathbf{R})) \\ &\overset{(7)}{=} t \otimes_m \mathrm{gyr}_m[\mathbf{P}, \mathbf{Q}]\mathbf{R}.\end{aligned} \tag{27}$$

式（27）的推导如下。

(1) 根据陀螺自同构 $\mathrm{gyr}_m[.,.]$ 的定义可得。(2) 根据数乘 $\otimes_m$的定义可得。(3) 根据 ϕ 是等距变换这一事实可得。(4) 根据陀螺向量空间（$G_n,\ \oplus_n,\ \otimes_n$）所验证的公理（V4）可得。

(5) 根据 ϕ 是等距变换这一事实可得。

(6) 根据数乘的定义 $\otimes_m$得出。

(7) 根据陀螺自同构 $\mathrm{gyr}_m[.,.]$ 的定义得出。

□

公理（V5）

证明。对于 $s,\ t \in \mathbb{R}$ 以及 $\mathbf{P},\ \mathbf{Q} \in G_m$，我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{gyr}_m[s \otimes_m \mathbf{P}, t \otimes_m \mathbf{P}]\mathbf{Q} &\overset{(1)}{=} \phi^{-1}(\mathrm{gyr}_n[\phi(s \otimes_m \mathbf{P}), \phi(t \otimes_m \mathbf{P})]\phi(\mathbf{Q})) \\
&\overset{(2)}{=} \phi^{-1}(\mathrm{gyr}_n[\phi(\phi^{-1}(s \otimes_n \phi(\mathbf{P}))), \phi(\phi^{-1}(t \otimes_n \phi(\mathbf{P})))]\phi(\mathbf{Q})) \\
&\overset{(3)}{=} \phi^{-1}(\mathrm{gyr}_n[s \otimes_n \phi(\mathbf{P}), t \otimes_n \phi(\mathbf{P})]\phi(\mathbf{Q})) \\
&\overset{(4)}{=} \phi^{-1}(\phi(\mathbf{Q})) \\
&\overset{(5)}{=} \mathbf{Q}.
\end{aligned} \tag{28}$$

下面给出式（28）的推导。

（1）由陀螺自同构 $\mathrm{gyr}_m[.,.]$ 的定义可得。（2）由数乘 $\otimes_m$的定义可得。（3）由 ϕ 是等距变换这一事实可得。（4）由陀螺向量空间（$G_n,\ \oplus_n,\ \otimes_n$）所验证的公理（V5）可得。（5）由 ϕ 是等距变换这一事实可得。

□

一、定理2.12 的证明

证明。 我们首先证明以下引理:

引理 I.1。 陀螺群 $(\mathrm{Gr}_{n,\ p},\ \oplus_{gr})$ 满足左陀螺平移律（*Ungar*，*2014*），即

$$\ominus_{gr}(\mathbf{P} \oplus_{gr} \mathbf{Q}) \oplus_{gr} (\mathbf{P} \oplus_{gr} \mathbf{R}) = \mathrm{gyr}[\mathbf{P}, \mathbf{Q}](\ominus_{gr}\mathbf{Q} \oplus_{gr} \mathbf{R}),$$

其中 $\mathbf{P}$、$\mathbf{Q}$、$\mathbf{R} \in \mathrm{Gr}_{n,\ p}$。

Proof。 首先，注意到陀螺群 $(\mathrm{Gr}_{n,\ p},\ \oplus_{gr})$ 满足左消去律（Ungar，2014），即 .,

$$\ominus_{gr}\mathbf{P} \oplus_{gr} (\mathbf{P} \oplus_{gr} \mathbf{Q}) = \mathbf{Q},$$

其中 $\mathbf{P}$,$\mathbf{Q} \in \mathrm{Gr}_{n,p}$。

我们有

$$\begin{aligned}
(\mathbf{P} \oplus_{gr} \mathbf{Q}) \oplus_{gr} \mathrm{gyr}[\mathbf{P}, \mathbf{Q}](\ominus_{gr}\mathbf{Q} \oplus_{gr} \mathbf{R}) &\overset{(1)}{=} \mathbf{P} \oplus_{gr} (\mathbf{Q} \oplus_{gr} (\ominus_{gr}\mathbf{Q} \oplus_{gr} \mathbf{R})) \\
&\overset{(2)}{=} \mathbf{P} \oplus_{gr} \mathbf{R},
\end{aligned}$$

其中 (1) 由左陀螺结合律得出，(2) 由左消去律得出。因此

$$\begin{aligned}
\ominus_{gr}(\mathbf{P} \oplus_{gr} \mathbf{Q}) \oplus_{gr} (\mathbf{P} \oplus_{gr} \mathbf{R}) &= \ominus_{gr}(\mathbf{P} \oplus_{gr} \mathbf{Q}) \oplus_{gr} ((\mathbf{P} \oplus_{gr} \mathbf{Q}) \oplus_{gr} \mathrm{gyr}[\mathbf{P}, \mathbf{Q}](\ominus_{gr}\mathbf{Q} \oplus_{gr} \mathbf{R})) \\
&\overset{(1)}{=} \mathrm{gyr}[\mathbf{P}, \mathbf{Q}](\ominus_{gr}\mathbf{Q} \oplus_{gr} \mathbf{R}),
\end{aligned}$$

其中，（1）是根据左消去律得出的。 □

我们还需要证明以下引理：

引理 I.2。 陀螺自同构 $\mathrm{gyr}_{gr}[.,.]$ 保持范数。

证明。 记 O_n 为 $n \times n$ 正交矩阵构成的空间，$\langle . \rangle_F$ 为弗罗贝尼乌斯内积，$\|.\|_F$ 为弗罗贝尼乌斯范数。令 $\mathbf{P}$,$\mathbf{Q}$,$\mathbf{R} \in \mathrm{Gr}_{n,p}$。注意到。

$$\mathrm{gyr}_{gr}[\mathbf{P},\mathbf{Q}]\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{O}_2 \end{bmatrix} \mathbf{R} \begin{bmatrix} \mathbf{O}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{O}_2 \end{bmatrix}^T,$$

其中 $\mathbf{O}_1 \in \mathrm{O}_p$,$\mathbf{O}_2 \in \mathrm{O}_{n-p}$。令 $\mathbf{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{O}_2 \end{bmatrix}$。则

$$\begin{aligned} \|\mathrm{gyr}_{gr}[\mathbf{P},\mathbf{Q}]\mathbf{R}\| &= \|\mathrm{Log}^{gr}_{\mathbf{I}_{n,p}}(\mathrm{gyr}_{gr}[\mathbf{P},\mathbf{Q}]\mathbf{R})\|_F \\ &\overset{(1)}{=} \|\mathrm{Log}^{gr}_{\mathbf{O}\mathbf{I}_{n,p}\mathbf{O}^T}(\mathbf{O}\mathbf{R}\mathbf{O}^T)\|_F \\ &\overset{(2)}{=} \|\mathbf{O}\,\mathrm{Log}^{gr}_{\mathbf{I}_{n,p}}(\mathbf{R})\mathbf{O}^T\|_F \\ &= \|\mathrm{Log}^{gr}_{\mathbf{I}_{n,p}}(\mathbf{R})\|_F \\ &= \|\mathbf{R}\|. \end{aligned} \tag{29}$$

公式（29）的推导如下。

(1) 由以下事实得出：$\mathbf{I}_{n,p} = \mathbf{O}\mathbf{I}_{n,p}\mathbf{O}^T$.

(2) 可由 Nguyen(2022b) 得出（参见引理 3.19）。

□

现在我们得到以下方程链：

$$\begin{aligned} \|\ominus_{gr}\,(\mathbf{A} \oplus_{gr} \mathbf{P}) \oplus_{gr} (\mathbf{A} \oplus_{gr} \mathbf{Q})\| &\overset{(1)}{=} \|\mathrm{gyr}[\mathbf{A},\mathbf{P}](\ominus_{gr}\mathbf{P} \oplus_{gr} \mathbf{Q})\| \\ &\overset{(2)}{=} \|\ominus_{gr} \mathbf{P} \oplus_{gr} \mathbf{Q}\|, \end{aligned}$$

其中，(1) 根据左陀螺平移律得出，(2) 根据范数在陀螺自同构下的不变性得出（引理 I.2）。

□

J. 定理的证明 2.13

证明。 令 $\mathbf{P}$、$\mathbf{Q}$、$\mathbf{R}$、$\mathbf{S} \in \mathrm{Gr}_{n,\ p}$。于是，根据左陀螺结合律和左消去律，

$$\mathrm{gyr}[\mathbf{P},\mathbf{Q}]\mathbf{R} = \ominus_{gr}(\mathbf{P} \oplus_{gr} \mathbf{Q}) \oplus_{gr} (\mathbf{P} \oplus_{gr} (\mathbf{Q} \oplus_{gr} \mathbf{R})),$$

$$\mathrm{gyr}[\mathbf{P},\mathbf{Q}]\mathbf{S} = \ominus_{gr}(\mathbf{P} \oplus_{gr} \mathbf{Q}) \oplus_{gr} (\mathbf{P} \oplus_{gr} (\mathbf{Q} \oplus_{gr} \mathbf{S})).$$

设$\mathbf{X} = \ominus_{gr}(\mathbf{P} \oplus_{gr} \mathbf{Q})$、$\mathbf{Y} = \mathbf{P} \oplus_{gr} (\mathbf{Q} \oplus_{gr} \mathbf{R})$，以及$\mathbf{Z} = \mathbf{P} \oplus_{gr} (\mathbf{Q} \oplus_{gr} \mathbf{S})$。那么我们有以下链式关系。

方程:

$$
\begin{aligned}
d(\mathrm{gyr}[\mathbf{P},\mathbf{Q}]\mathbf{R},\mathrm{gyr}[\mathbf{P},\mathbf{Q}]\mathbf{S}) &= \| \ominus_{gr} \mathrm{gyr}[\mathbf{P},\mathbf{Q}]\mathbf{R} \oplus_{gr} \mathrm{gyr}[\mathbf{P},\mathbf{Q}]\mathbf{S}\| \\
&= \| \ominus_{gr} (\mathbf{X} \oplus_{gr} \mathbf{Y}) \oplus_{gr} (\mathbf{X} \oplus_{gr} \mathbf{Z})\| \\
&\overset{(1)}{=} \| \mathrm{gyr}[\mathbf{X},\mathbf{Y}](\ominus_{gr}\mathbf{Y} \oplus_{gr} \mathbf{Z})\| \\
&\overset{(2)}{=} \| \ominus_{gr} \mathbf{Y} \oplus_{gr} \mathbf{Z}\| \\
&= \| \ominus_{gr} (\mathbf{P} \oplus_{gr} (\mathbf{Q} \oplus_{gr} \mathbf{R})) \oplus_{gr} (\mathbf{P} \oplus_{gr} (\mathbf{Q} \oplus_{gr} \mathbf{S}))\| \\
&\overset{(3)}{=} \| \mathrm{gyr}[\mathbf{P}, \mathbf{Q} \oplus_{gr} \mathbf{R}](\ominus_{gr}(\mathbf{Q} \oplus_{gr} \mathbf{R}) \oplus_{gr} (\mathbf{Q} \oplus_{gr} \mathbf{S}))\| \\
&\overset{(4)}{=} \| \ominus_{gr} (\mathbf{Q} \oplus_{gr} \mathbf{R}) \oplus_{gr} (\mathbf{Q} \oplus_{gr} \mathbf{S})\| \\
&\overset{(5)}{=} \| \mathrm{gyr}[\mathbf{Q},\mathbf{R}](\ominus_{gr}\mathbf{R} \oplus_{gr} \mathbf{S})\| \\
&\overset{(6)}{=} \| \ominus_{gr} \mathbf{R} \oplus_{gr} \mathbf{S}\| \\
&= d(\mathbf{R},\mathbf{S}).
\end{aligned}
\tag{30}
$$

下面推导公式（30）。

(1) 根据左陀螺平移律得出。(2) 根据引理I.2得出。(3) 根据左陀螺平移律得出。(4) 根据引理I.2得出。(5) 根据左陀螺平移律得出。(6) 根据引理I.2得出。

□

K. 定理 2.14 的证明

证明。我们首先证明以下引理:

引理 K.1。*Grassmann* 逆映射保持范数。

证明。 对于$\mathbf{P} \in \mathrm{Gr}_{n,p}$, 我们有

$$
\begin{aligned}
\| \ominus_{gr} \mathbf{P}\| &= \| \mathrm{Log}^{gr}_{\mathbf{I}_{n,p}}(\ominus_{gr}\mathbf{P})\|_F \\
&= \| - \mathrm{Log}^{gr}_{\mathbf{I}_{n,p}}(\mathbf{P})\|_F \\
&= \| \mathrm{Log}^{gr}_{\mathbf{I}_{n,p}}(\mathbf{P})\|_F \\
&= \|\mathbf{P}\|.
\end{aligned}
$$

□

对于 $\mathbf{P}$,$\mathbf{Q} \in \mathrm{Gr}_{n,p}$, 我们有

$$
\begin{aligned}
\| \ominus_{gr} \mathbf{P} \oplus_{gr} \mathbf{Q} \| &\overset{(1)}{=} \| \ominus_{gr} (\ominus\mathbf{P} \oplus_{gr} \mathbf{Q}) \| \\
&= \| \ominus_{gr} (\ominus_{gr}\mathbf{P} \oplus_{gr} \mathbf{Q}) \oplus_{gr} (\ominus_{gr}\mathbf{P} \oplus_{gr} \mathbf{P}) \| \\
&\overset{(2)}{=} \| \mathrm{gyr}[\ominus_{gr}\mathbf{P}, \mathbf{Q}](\ominus_{gr}\mathbf{Q} \oplus_{gr} \mathbf{P})\| \\
&\overset{(3)}{=} \| \ominus_{gr} \mathbf{Q} \oplus_{gr} \mathbf{P}\|.
\end{aligned}
\tag{31}
$$

式（31）的推导如下。

（1）由引理推出K.1。

（2）由左陀螺平移律推出。

（3）由引理推出I.2。

注意，

$$\begin{aligned}\|\mathbf{P}\oplus_{gr}(\ominus_{gr}\mathbf{Q})\| &\overset{(1)}{=} \|\operatorname{gyr}[\mathbf{P},\ominus_{gr}\mathbf{Q}](\ominus_{gr}\mathbf{Q}\oplus_{gr}\mathbf{P})\| \\ &\overset{(2)}{=} \|\ominus_{gr}\mathbf{Q}\oplus_{gr}\mathbf{P}\|,\end{aligned} \tag{32}$$

其中（1）由陀螺交换律推出，（2）由引理 I.2。

结合方程 (31) 和 (32) 可得

$$\begin{aligned}\|\ominus_{gr}\mathbf{P}\oplus_{gr}\mathbf{Q}\| &= \|\mathbf{P}\oplus_{gr}(\ominus_{gr}\mathbf{Q})\| \\ &= \|\ominus_{gr}(\ominus_{gr}\mathbf{P})\oplus_{gr}(\ominus\mathbf{Q})\|,\end{aligned}$$

由此得出该定理的结论。

□

L. 定理 2.16 的证明

证明。 我们需要证明以下引理：

引理 L.1。 陀螺向量空间 $(\mathrm{Sym}_n^+,\oplus_g,\otimes_g)$ 满足左陀螺平移律，即

$$\ominus_g(\mathbf{P}\oplus_g\mathbf{Q})\oplus_g(\mathbf{P}\oplus_g\mathbf{R})=\operatorname{gyr}[\mathbf{P},\mathbf{Q}](\ominus_g\mathbf{Q}\oplus_g\mathbf{R}),$$

其中 $\mathbf{P}$、$\mathbf{Q}$、$\mathbf{R}\in\mathrm{Gr}_{n,p}$。

证明。 注意，陀螺向量空间 $(\mathrm{Sym}_n^+,\oplus_g,\otimes_g)$ 满足左消去律和左陀螺结合律。因此，可以采用引理 I.1 的证明中相同的论证来证明该引理。

□

引理 L.2. 陀螺自同构$\operatorname{gyr}_g[.,.]$ 保持范数。

证明。利用陀螺自同构 $\operatorname{gyr}_g[.,.]$ 的表达式即可轻松证明该引理。

□

我们现在得到以下方程链：

$$\begin{aligned}\|\ominus_g(\mathbf{A}\oplus_g\mathbf{P})\oplus_g(\mathbf{A}\oplus_g\mathbf{Q})\| &\overset{(1)}{=} \|\operatorname{gyr}[\mathbf{A},\mathbf{P}](\ominus_g\mathbf{P}\oplus_g\mathbf{Q})\| \\ &\overset{(2)}{=} \|\ominus_g\mathbf{P}\oplus_g\mathbf{Q}\|,\end{aligned}$$

其中，(1) 由左陀螺平移律（引理L.1）得出，(2) 由范数在陀螺自同构下的不变性（引理L.2）得出。

□

M. 定理证明2.17

证明。注意，陀螺向量空间 $(\mathrm{Sym}_n^+,\ \oplus_g,\ \otimes_g)$ 满足左陀螺结合律、左消去律和左陀螺平移律（引理 L.1），且陀螺自同构 $\operatorname{gyr}_g[.,.]$ 保持范数（引理 L.2）。于是，可以采用定理 2.13证明中的相同论证来证明该引理。

□

N. 定理证明 2.18

证明。以下 <escape>以下引理可以使用与引理证明中相同的论证来证明 K.</escape> 1.

引理 N.1. 对称正定逆映射保持范数。

注意，陀螺向量空间 $(\mathrm{Sym}_n^+, \oplus_g, \otimes_g)$ 满足陀螺交换律和左陀螺平移律（引理 L.1）。还需注意，SPD 逆映射保持范数（引理 N.1），且陀螺自同构 $\mathrm{gyr}_g[.,.]$ 保持范数（引理 L.2）。因此，可以采用定理 2.14 证明中相同的论证来证明该引理。

□

O. 定理的证明 2.21

LC 陀螺向量空间

证明。 我们只需证明第一个恒等式。对于 $\mathbf{P}$、$\mathbf{Q}$、$\mathbf{R} \in \mathrm{Sym}_n^+$，根据左陀螺平移律，

$$\ominus_g(\ominus_g\mathbf{P} \oplus_g \mathbf{Q}) \oplus_g (\ominus_g\mathbf{P} \oplus_g \mathbf{R}) = \mathrm{gyr}[\ominus_g\mathbf{P}, \mathbf{Q}](\ominus_g\mathbf{Q} \oplus_g \mathbf{R}).$$

由于陀螺自同构保持范数不变，我们有

$$\| \ominus_g (\ominus_g\mathbf{P} \oplus_g \mathbf{Q}) \oplus_g (\ominus_g\mathbf{P} \oplus_g \mathbf{R})\| = \| \mathrm{gyr}[\ominus_g\mathbf{P}, \mathbf{Q}](\ominus_g\mathbf{Q} \oplus_g \mathbf{R})\| = \| \ominus_g \mathbf{Q} \oplus_g \mathbf{R}\|,$$

从而得到

$$\| \ominus_g \widetilde{\mathbf{R}} \oplus_g \widetilde{\mathbf{Q}}\| = \|\widetilde{\mathbf{P}}\|. \tag{33}$$

因此

$$\begin{aligned} p^2 = \|\widetilde{\mathbf{P}}\|^2 &= \| \ominus_{lc} \widetilde{\mathbf{R}} \oplus_{lc} \widetilde{\mathbf{Q}}\|^2 \\ &= \langle \lfloor\varphi(\widetilde{\mathbf{Q}})\rfloor - \lfloor\varphi(\widetilde{\mathbf{R}})\rfloor + \log(\mathbb{D}(\varphi(\widetilde{\mathbf{R}}))^{-1}\mathbb{D}(\varphi(\widetilde{\mathbf{Q}}))), \lfloor\varphi(\widetilde{\mathbf{Q}})\rfloor - \lfloor\varphi(\widetilde{\mathbf{R}})\rfloor + \log(\mathbb{D}(\varphi(\widetilde{\mathbf{R}}))^{-1}\mathbb{D}(\varphi(\widetilde{\mathbf{Q}})))\rangle_F \\ &= \|\lfloor\varphi(\widetilde{\mathbf{Q}})\rfloor\|_F^2 + \|\lfloor\varphi(\widetilde{\mathbf{R}})\rfloor\|_F^2 - 2\langle\lfloor\varphi(\widetilde{\mathbf{Q}})\rfloor, \lfloor\varphi(\widetilde{\mathbf{R}})\rfloor\rangle_F + \\ &\| \log(\mathbb{D}(\varphi(\widetilde{\mathbf{Q}})))\|_F^2 + \| \log(\mathbb{D}(\varphi(\widetilde{\mathbf{R}})))\|_F^2 - 2\langle \log(\mathbb{D}(\varphi(\widetilde{\mathbf{Q}}))), \log(\mathbb{D}(\varphi(\widetilde{\mathbf{R}})))\rangle_F. \end{aligned} \tag{34}$$

注意到

$$q^2 + r^2 = \|\widetilde{\mathbf{Q}}\|^2 + \|\widetilde{\mathbf{R}}\|^2 = \|\lfloor\varphi(\widetilde{\mathbf{Q}})\rfloor\|_F^2 + \|\lfloor\varphi(\widetilde{\mathbf{R}})\rfloor\|_F^2 + \| \log(\mathbb{D}(\varphi(\widetilde{\mathbf{Q}})))\|_F^2 + \| \log(\mathbb{D}(\varphi(\widetilde{\mathbf{R}})))\|_F^2, \tag{35}$$

and

$$2\langle\widetilde{\mathbf{Q}}, \widetilde{\mathbf{R}}\rangle = 2\langle\lfloor\varphi(\widetilde{\mathbf{Q}})\rfloor, \lfloor\varphi(\widetilde{\mathbf{R}})\rfloor\rangle_F + 2\langle \log(\mathbb{D}(\varphi(\widetilde{\mathbf{Q}}))), \log(\mathbb{D}(\varphi(\widetilde{\mathbf{R}})))\rangle_F. \tag{36}$$

结合方程（34）、（35）和（36），我们得到

$$p^2 = q^2 + r^2 - 2\langle\widetilde{\mathbf{Q}}, \widetilde{\mathbf{R}}\rangle = q^2 + r^2 - 2qr\cos\alpha.$$

□

LE 陀螺向量空间

证明。 由式（33），

$$\begin{aligned} p^2 = \|\widetilde{\mathbf{P}}\|^2 &= \| \ominus_{le} \widetilde{\mathbf{R}} \oplus_{le} \widetilde{\mathbf{Q}}\|^2 \\ &= \| \log(\widetilde{\mathbf{Q}}) - \log(\widetilde{\mathbf{R}})\|_F^2 \\ &= \| \log(\widetilde{\mathbf{Q}})\|_F^2 + \| \log(\widetilde{\mathbf{R}})\|_F^2 - 2\langle \log(\widetilde{\mathbf{Q}}), \log(\widetilde{\mathbf{R}})\rangle_F \\ &= \|\widetilde{\mathbf{Q}}\|^2 + \|\widetilde{\mathbf{R}}\|^2 - 2\langle \widetilde{\mathbf{Q}}, \widetilde{\mathbf{R}}\rangle \\ &= q^2 + r^2 - 2qr\cos\alpha. \end{aligned}$$

□

<escape>P. 定理的证明
2.23</escape>
证明。 我们需要证明以下引理:

引理 P.1. 设 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{Q}$ 是陀螺向量空间 $(\mathrm{Sym}_n^+, \oplus_g, \otimes_g)$中的两个不同的点。那么，连接 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{Q}$ 的测地线 $\delta_{\mathbf{P}\to\mathbf{Q}}(t)\ 0 \leq t \leq 1$，在 $t = 0$时经过 $\mathbf{P}$，在 $t = 1$时经过 $\mathbf{Q}$，其表达式为

$$\delta_{\mathbf{P}\to\mathbf{Q}}(t) = \mathbf{P} \oplus_g t \otimes_g (\ominus_g \mathbf{P} \oplus_g \mathbf{Q}).$$

证明。 该引理可利用 LE、LC 和 AI 陀螺向量空间中的二元运算、逆运算和数乘表达式来证明，这些表达式见 Nguyen (2022a;b)。 □

引理 P.2. 设$\mathbf{P}$ 和$\mathbf{Q}$ 是陀螺向量空间$(\mathrm{Sym}_n^+, \oplus_g, \otimes_g)$中的两个不同点。设$\mathbf{S}$ 是连接$\mathbf{P}$ 和$\mathbf{Q}$的测地线$\delta_{\mathbf{P}\to\mathbf{Q}}(t)\ 0 \leq t \leq 1$ 上的一个点，且$\mathbf{R} \notin \delta_{\mathbf{P}\to\mathbf{Q}}(t)$。那么

$$\angle\mathbf{RPS} = \angle\mathbf{RPQ}.$$

证明。 根据引理 P.1， $\delta_{\mathbf{P}\to\mathbf{Q}}(t)$ 可表示为

$$\delta_{\mathbf{P}\to\mathbf{Q}}(t) = \mathbf{P} \oplus_g t \otimes_g (\ominus_g \mathbf{P} \oplus_g \mathbf{Q}). \tag{37}$$

根据数乘的定义,

$$t \otimes_g \mathbf{P} = \mathrm{Exp}_{\mathbf{I}_n}^g (t \,\mathrm{Log}_{\mathbf{I}_n}^g (\mathbf{P})),$$

其中 $t \in \mathbb{R}$，结果为

$$\mathrm{Log}_{\mathbf{I}_n}(t \otimes_g \mathbf{P}) = t \,\mathrm{Log}_{\mathbf{I}_n}^g (\mathbf{P}). \tag{38}$$

由式（38），我们得到

$$\|\,\mathrm{Log}_{\mathbf{I}_n}(t \otimes_g \mathbf{P})\|_F = \|t \,\mathrm{Log}_{\mathbf{I}_n}^g (\mathbf{P})\|_F = t\|\,\mathrm{Log}_{\mathbf{I}_n}^g (\mathbf{P})\|_F,$$

由此得到

$$\|t \otimes_g \mathbf{P}\| = t\|\mathbf{P}\|. \tag{39}$$

根据对称正定内积的定义和式（38），我们还可以得到

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{P}, t \otimes_g \mathbf{Q}\rangle &= \langle \mathrm{Log}_{\mathbf{I}_n}(\mathbf{P}), \mathrm{Log}_{\mathbf{I}_n}(t \otimes_g \mathbf{Q})\rangle_F \\ &= \langle \mathrm{Log}_{\mathbf{I}_n}(\mathbf{P}), t \,\mathrm{Log}_{\mathbf{I}_n}(\mathbf{Q})\rangle_F \\ &= t\langle \mathrm{Log}_{\mathbf{I}_n}(\mathbf{P}), \mathrm{Log}_{\mathbf{I}_n}(\mathbf{Q})\rangle_F \\ &= t\langle \mathbf{P}, \mathbf{Q}\rangle. \end{aligned} \tag{40}$$

因此

$$\begin{aligned}\cos(\angle \mathbf{RPS}) &\overset{(1)}{=} \frac{\langle \ominus_g \mathbf{P} \oplus_g \mathbf{R}, \ominus_g \mathbf{P} \oplus_g \mathbf{S}\rangle}{\| \ominus_g \mathbf{P} \oplus_g \mathbf{R}\|.\| \ominus_g \mathbf{P} \oplus_g \mathbf{S}\|} \\ &\overset{(2)}{=} \frac{\langle \ominus_g \mathbf{P} \oplus_g \mathbf{R}, \ominus_g \mathbf{P} \oplus_g (\mathbf{P} \oplus_g t \otimes_g (\ominus_g \mathbf{P} \oplus_g \mathbf{Q}))\rangle}{\| \ominus_g \mathbf{P} \oplus_g \mathbf{R}\|.\| \ominus_g \mathbf{P} \oplus_g (\mathbf{P} \oplus_g t \otimes_g (\ominus_g \mathbf{P} \oplus_g \mathbf{Q}))\|} \\ &\overset{(3)}{=} \frac{\langle \ominus_g \mathbf{P} \oplus_g \mathbf{R}, t \otimes_g (\ominus_g \mathbf{P} \oplus_g \mathbf{Q})\rangle}{\| \ominus_g \mathbf{P} \oplus_g \mathbf{R}\|.\|t \otimes_g (\ominus_g \mathbf{P} \oplus_g \mathbf{Q})\|} \\ &\overset{(4)}{=} \frac{t\langle \ominus_g \mathbf{P} \oplus_g \mathbf{R}, \ominus_g \mathbf{P} \oplus_g \mathbf{Q}\rangle}{t\| \ominus_g \mathbf{P} \oplus_g \mathbf{R}\|.\| \ominus_g \mathbf{P} \oplus_g \mathbf{Q}\|} \\ &\overset{(5)}{=} \cos(\angle \mathbf{RPQ}).\end{aligned} \tag{41}$$

方程 (41) 的推导如下。

(1) 根据 SPD 陀螺角的定义得出。(2) 根据方程 (37) 得出。(3) 根据左消去律得出。(4) 根据方程 (39) 和 (40) 得出。(5) 根据 SPD 陀螺角的定义得出。

由此得出引理的结论。

□

引理 *P.3.* 设 P 和 Q 是陀螺向量空间 $(Sym_n^+, \oplus_g, \otimes_g)$ 中两个不同的点，$g \in \{le, lc\}$。记 $\delta_{\mathbf{P}\to\mathbf{Q}}(t)$ $0 \le t \le 1$ 为连接 P 和 Q 的测地线，$P' = \delta_{\mathbf{P}\to\mathbf{Q}}(-\infty)$，$Q' = \delta_{\mathbf{P}\to\mathbf{Q}}(\infty)$，并设 $R \in (Sym_n^+, \oplus_g, \otimes_g)$ 满足 $R \notin \delta_{\mathbf{P}\to\mathbf{Q}}(t)$ $t \in \mathbb{R}$。则存在唯一的 $S \in \delta_{\mathbf{P}\to\mathbf{Q}}(t)$ $t \in \mathbb{R}$，使得 $\angle RSQ' = \frac{\pi}{2}$。

LE 陀螺向量空间

证明。 首先，容易看出，任意满足 $\mathbf{P}'$，$\mathbf{Q}'$ 的点$\mathbf{Q} \in \delta_{\mathbf{P}\to\mathbf{Q}'}(t)$ 以及$\mathbf{P} \in \delta_{\mathbf{P}'\to\mathbf{Q}}(t)$ $0 \le t \le 1$ 的点，均可写成 $\delta_{\mathbf{P}\to\mathbf{Q}}(t)$，如式（37）所示，其中 $t \in \mathbb{R}$。我们有

$$\begin{aligned}\cos(\angle \mathbf{RSQ}') &\overset{(1)}{=} \frac{\langle \ominus_{le} \mathbf{S} \oplus_{le} \mathbf{R}, \ominus_{le} \mathbf{S} \oplus_{le} \mathbf{Q}'\rangle}{\| \ominus_{le} \mathbf{S} \oplus_{le} \mathbf{R}\|.\| \ominus_{le} \mathbf{S} \oplus_{le} \mathbf{Q}'\|} \\ &= \frac{\langle \log(\mathbf{R}) - \log(\mathbf{S}), \log(\mathbf{Q}') - \log(\mathbf{S})\rangle_F}{\| \log(\mathbf{R}) - \log(\mathbf{S})\|_F.\| \log(\mathbf{Q}') - \log(\mathbf{S})\|_F} \\ &\overset{(2)}{=} \frac{\langle \log(\mathbf{R}) - (1-t)\log(\mathbf{P}') - t\log(\mathbf{Q}'), \log(\mathbf{Q}') - (1-t)\log(\mathbf{P}') - t\log(\mathbf{Q}')\rangle_F}{\| \log(\mathbf{R}) - (1-t)\log(\mathbf{P}') - t\log(\mathbf{Q}')\|_F.\| \log(\mathbf{Q}') - (1-t)\log(\mathbf{P}') - t\log(\mathbf{Q}')\|_F} \\ &= \frac{\langle \log(\mathbf{R}) - \log(\mathbf{P}') - t(\log(\mathbf{Q}') - \log(\mathbf{P}')), \log(\mathbf{Q}') - \log(\mathbf{P}')\rangle_F}{\| \log(\mathbf{R}) - \log(\mathbf{P}') - t(\log(\mathbf{Q}') - \log(\mathbf{P}'))\|_F.\| \log(\mathbf{Q}') - \log(\mathbf{P}')\|_F},\end{aligned}$$

其中，(1) 根据对称正定陀螺角的定义得出，(2) 根据 LE 陀螺向量空间中的测地线方程得出。

可以看出，存在 $t \in \mathbb{R}$，使得 $\langle \log(\mathrm{R}) - \log(\mathrm{P}') - t(\log(\mathrm{Q}') - \log(\mathrm{P}')), \log(\mathrm{Q}') - \log(\mathrm{P}')\rangle_F = 0$，因此 $\cos(\angle \mathrm{RSQ}') = 0$，或者等价地，$\angle \mathrm{RSQ}' = \frac{\pi}{2}$。现在，假设存在两个不同的点 S、$\mathrm{S}' \in \delta_{\mathbf{P}\to\mathbf{Q}}(t)$ $t \in \mathbb{R}$，使得 $\angle \mathrm{RSQ}' = \angle \mathrm{RS}'\mathrm{Q}' = \frac{\pi}{2}$。令 $p = \| \ominus_{le} \mathrm{S}' \oplus_{le} \mathrm{R}\|$、$q = \| \ominus_{le} \mathrm{S} \oplus_{le} \mathrm{R}\|$，以及 $r = \| \ominus_{le} \mathrm{S} \oplus_{le} \mathrm{S}'\|$。根据对称正定陀螺余弦定律（见定理 2.21），

$$p^2 = q^2 + r^2,$$

and

$$q^2 = p^2 + r^2,$$

这会导致矛盾的是　ction as $r > 0$。我们得出结论，存在唯一的 $\mathbf{S}$，满足引理 P　.3.

□

LC 陀螺向量空间

请注意，连接$\mathbf{P}$ 和$\mathbf{Q}$ 的测地线 $\delta_{\mathbf{P}\to\mathbf{Q}}(t)$ $0 \le t \le 1$ 可以写成

$$\delta_{\mathbf{P}\to\mathbf{Q}}(t) = \big(\varphi(\mathbf{P}) \oplus_{lc} t \otimes_{lc} (\ominus_{lc}\varphi(\mathbf{P}) \oplus_{lc} \varphi(\mathbf{Q}))\big)\big(\varphi(\mathbf{P}) \oplus_{lc} t \otimes_{lc} (\ominus_{lc}\varphi(\mathbf{P}) \oplus_{lc} \varphi(\mathbf{Q}))\big)^T.$$

一些运算会得到

$$\cos(\angle \mathbf{RSQ}') = \frac{\langle \mathbf{A}, \mathbf{B}\rangle_F}{\|\mathbf{A}\|_F.\|\mathbf{B}\|_F},$$

其中

$$\mathbf{A} = (\lfloor\varphi(\mathbf{R})\rfloor - \lfloor\varphi(\mathbf{P})\rfloor) + \log(\mathbb{D}(\varphi(\mathbf{R}))) - \log(\mathbb{D}(\varphi(\mathbf{P}))) + t(\lfloor\varphi(\mathbf{P})\rfloor - \lfloor\varphi(\mathbf{Q}')\rfloor) + t\big(\log(\mathbb{D}(\varphi(\mathbf{P}))) - \log(\mathbb{D}(\varphi(\mathbf{Q}')))\big),$$

$$\mathbf{B} = \lfloor\varphi(\mathbf{P})\rfloor - \lfloor\varphi(\mathbf{Q}')\rfloor + \log(\mathbb{D}(\varphi(\mathbf{P}))) - \log(\mathbb{D}(\varphi(\mathbf{Q}'))).$$

可以看出，存在 $t \in \mathbb{R}$ 使得 $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B}\rangle_F = 0$，因此 $\cos(\angle \mathbf{RSQ}') = 0$，或者等价地，$\angle \mathbf{RSQ}' = \frac{\pi}{2}$。利用与 LE 陀螺向量空间相同的论证，可以证明 $\mathbf{S}$ 的唯一性。

引理 P.4. 设 $\mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}$ 是陀螺向量空间 $(\mathrm{Sym}_n^+, \oplus_g, \oplus_g)$ 中的一个对称正定双曲陀螺超平面，并且 $\mathbf{Q} \in \mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}} \setminus \{\mathbf{P}\}$。那么，测地线 $\delta_{\mathbf{P}\to\mathbf{Q}}(t)$ 上的所有点都属于 $\mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}$。

证明。我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{Log}_{\mathbf{P}}(\delta_{\mathbf{P}\to\mathbf{Q}}(t)) &\overset{(1)}{=} \mathrm{Log}_{\mathbf{P}}(\mathbf{P} \oplus_g t \otimes_g (\ominus_g \mathbf{P} \oplus_g \mathbf{Q})) \\
&\overset{(2)}{=} \mathrm{Log}_{\mathbf{P}}\left(\mathrm{Exp}_{\mathbf{P}}(\mathcal{T}_{\mathbf{I}_n\to\mathbf{P}}(\mathrm{Log}_{\mathbf{I}_n}(t \otimes_g (\ominus_g \mathbf{P} \oplus_g \mathbf{Q}))))\right) \\
&= \mathcal{T}_{\mathbf{I}_n\to\mathbf{P}}(\mathrm{Log}_{\mathbf{I}_n}(t \otimes_g (\ominus_g \mathbf{P} \oplus_g \mathbf{Q}))) \\
&\overset{(3)}{=} \mathcal{T}_{\mathbf{I}_n\to\mathbf{P}}(t\,\mathrm{Log}_{\mathbf{I}_n}(\ominus_g \mathbf{P} \oplus_g \mathbf{Q})) \\
&= t\mathcal{T}_{\mathbf{I}_n\to\mathbf{P}}(\mathrm{Log}_{\mathbf{I}_n}(\ominus_g \mathbf{P} \oplus_g \mathbf{Q})) \\
&= t\,\mathrm{Log}_{\mathbf{P}}\left(\mathrm{Exp}_{\mathbf{P}}\left(\mathcal{T}_{\mathbf{I}_n\to\mathbf{P}}(\mathrm{Log}_{\mathbf{I}_n}(\ominus_g \mathbf{P} \oplus_g \mathbf{Q}))\right)\right) \\
&\overset{(4)}{=} t\,\mathrm{Log}_{\mathbf{P}}(\mathbf{P} \oplus_g (\ominus_g \mathbf{P} \oplus_g \mathbf{Q})) \\
&\overset{(5)}{=} t\,\mathrm{Log}_{\mathbf{P}}(\mathbf{Q}).
\end{aligned} \tag{42}$$

公式（42）的推导如下。

（1）由公式（37）得出。

（2）由公式（1）中二元运算的定义得出。

（3）由公式（38）得出。

（4）由公式（1）中二元运算的定义得出。

（5）由左消去律可得。

因此

$$\langle \mathrm{Log}_{\mathbf{P}}(\delta_{\mathbf{P}\to\mathbf{Q}}(t)), \mathbf{W}\rangle_{\mathbf{P}} = \langle t\,\mathrm{Log}_{\mathbf{P}}(\mathbf{Q}), \mathbf{W}\rangle_{\mathbf{P}},$$

由此得到 $\langle \mathrm{Log}_{\mathbf{P}}(\delta_{\mathbf{P}\to\mathbf{Q}}(t)), \mathbf{W}\rangle_{\mathbf{P}} = 0$。这表明，测地线 $\delta_{\mathbf{P}\to\mathbf{Q}}(t)$ 上的所有点都属于 SPD 双曲陀螺超平面 $\mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}$。

□

令 $\mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}$ 为一个对称正定的 hy 陀螺向量空间 $(\mathrm{Sym}_n^+, \oplus_{le}, \otimes_{le})$ 中的超平面，$\mathbf{X} \notin \mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}$ 和 $\mathbf{Q}^* \in \mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}$，使得 t

$$d(\mathbf{X}, \mathbf{Q}^*) = \min_{\mathbf{Q} \in \mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}} d(\mathbf{X}, \mathbf{Q}) = d(\mathbf{X}, \mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}). \tag{43}$$

我们证明定理的第一部分，即，

$$\bar{d}(\mathbf{X}, \mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}) = d(\mathbf{X}, \mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}).$$

我们考虑两种情况：

情况 *1*：$\mathbf{Q}^* \neq \mathbf{P}$。

如果 $\angle \mathrm{XQ^*P} \neq \frac{\pi}{2}$，那么根据引理 P.3，存在唯一的 $\mathrm{Q}^{**} \in \delta_{\mathbf{P} \to \mathbf{Q}^*}(t)\ t \in \mathrm{R}$，$\mathrm{Q}^{**} \neq \mathrm{Q}^*$，使得 $\angle \mathrm{XQ^{**}Q'} = \frac{\pi}{2}$，其中 $\mathrm{Q}' = \delta_{\mathbf{P} \to \mathbf{Q}^*}(\infty)$。根据引理 P.2，$\angle \mathrm{XQ^{**}Q^*} = \frac{\pi}{2}$。根据 SPD陀螺正弦定律，

$$d(\mathbf{X}, \mathbf{Q}^{**}) = \sin(\angle \mathbf{X}\mathbf{Q}^*\mathbf{Q}^{**}) d(\mathbf{X}, \mathbf{Q}^*),$$

这意味着 $d(\mathbf{X},\mathbf{Q}^{**}) < d(\mathbf{X},\mathbf{Q}^*)$。根据引理 P.4，$\mathbf{Q}^{**} \in \mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}$。这与$\mathbf{Q}^*$的定义相矛盾。因此，必有 $\angle \mathbf{X}\mathbf{Q}^*\mathbf{P} = \frac{\pi}{2}$。现在，根据SPD陀螺正弦定律，

$$d(\mathbf{X}, \mathbf{Q}^*) = \sin(\angle \mathbf{X}\mathbf{P}\mathbf{Q}^*) d(\mathbf{X}, \mathbf{P}).$$

因此，我们可以推断：

$$\sin(\angle \mathbf{X}\mathbf{P}\mathbf{Q}^*) = \min_{\mathbf{Q} \in \mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}} \setminus \{\mathbf{P}\}} \sin(\angle \mathbf{X}\mathbf{P}\mathbf{Q}),$$

或者等价地，

$$\cos(\angle \mathbf{X}\mathbf{P}\mathbf{Q}^*) = \max_{\mathbf{Q} \in \mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}} \setminus \{\mathbf{P}\}} \cos(\angle \mathbf{X}\mathbf{P}\mathbf{Q}),$$

因此

$$d(\mathbf{X}, \mathbf{Q}^*) = \bar{d}(\mathbf{X}, \mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}). \tag{44}$$

结合方程 (43) 和 (44) 可得

$$\bar{d}(\mathbf{X}, \mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}) = d(\mathbf{X}, \mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}).$$

情形 *2*：$\mathbf{Q}^* = \mathbf{P}$。

对于任意 $\mathbf{Q} \in \mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}} \setminus \{\ \mathbf{P}\ \}$，根据上述相同的论证，我们必有 $\angle \mathbf{X}\mathbf{P}\mathbf{Q} = \frac{\pi}{2}$，因此

$$\bar{d}(\mathbf{X}, \mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}) = \sin(\angle \mathbf{X}\mathbf{P}\mathbf{Q}) d(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = d(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = d(\mathbf{X}, \mathbf{Q}^*) = d(\mathbf{X}, \mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}),$$

由此得证该定理的第一部分。

现在我们证明定理的第二部分，即，

$$d(\mathbf{X}, \mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}) = \frac{|\langle \log(\mathbf{X}) - \log(\mathbf{P}), D \log_{\mathbf{P}}(\mathbf{W}) \rangle_F|}{\|D \log_{\mathbf{P}}(\mathbf{W})\|_F}.$$

同样，我们考虑两种情况：

情况 *1*：$\mathbf{Q}^* \neq \mathbf{P}$.

对于 $\mathbf{Q} \in \mathrm{Sym}_n^+$，注意到。

$$\mathbf{Q} = \exp_{\mathbf{P}}(\mathrm{Log}_{\mathbf{P}}^{le}(\mathbf{Q})) \overset{(1)}{=} \exp(\log(\mathbf{P}) + D \log_{\mathbf{P}}(\mathrm{Log}_{\mathbf{P}}^{le}(\mathbf{Q}))),$$

其中，(1) 根据与对数欧几里得度量相关联的指数映射表达式得出。

因此

$$D\log_{\mathbf{P}}(\mathrm{Log}^{le}_{\mathbf{P}}(\mathbf{Q})) = \log(\mathbf{Q}) - \log(\mathbf{P}). \tag{45}$$

于是我们有

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{Log}^{le}_{\mathbf{P}}(\mathbf{Q}), \mathbf{W}\rangle_{\mathbf{P}} &\overset{(1)}{=} \langle D\log_{\mathbf{P}}(\mathrm{Log}^{le}_{\mathbf{P}}(\mathbf{Q})), D\log_{\mathbf{P}}(\mathbf{W})\rangle_F \\ &\overset{(2)}{=} \langle \log(\mathbf{Q}) - \log(\mathbf{P}), D\log_{\mathbf{P}}(\mathbf{W})\rangle_F,\end{aligned}$$

其中，(1) 是由 LE度量具有双不变性得出的，而 (2) 则由式 (45) 得出。因此，对于 $\mathbf{Q} \in \mathcal{H}_{\mathbf{W},\,\mathbf{P}}$，我们有

$$\langle \log(\mathbf{Q}) - \log(\mathbf{P}), D\log_{\mathbf{P}}(\mathbf{W})\rangle_F = 0. \tag{46}$$

我们需要找到 $\mathbf{Q}^* \in \mathcal{H}_{\mathbf{W},\,\mathbf{P}} \setminus \{\mathbf{P}\}$，使得

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}^* &= \underset{\mathbf{Q}\in\mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}\setminus\{\mathbf{P}\}}{\arg\max} \frac{\langle \ominus_{le}\mathbf{P} \oplus_{le} \mathbf{Q}, \ominus_{le}\mathbf{P} \oplus_{le} \mathbf{X}\rangle}{\| \ominus_{le} \mathbf{P} \oplus_{le} \mathbf{Q}\|.\| \ominus_{le} \mathbf{P} \oplus_{le} \mathbf{X}\|} \\ &\overset{(1)}{=} \underset{\mathbf{Q}\in\mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}\setminus\{\mathbf{P}\}}{\arg\max} \frac{\langle \mathrm{Log}^{le}_{\mathbf{I}_n}(\ominus_{le}\mathbf{P} \oplus_{le} \mathbf{Q}), \mathrm{Log}^{le}_{\mathbf{I}_n}(\ominus_{le}\mathbf{P} \oplus_{le} \mathbf{X})\rangle_F}{\| \mathrm{Log}^{le}_{\mathbf{I}_n}(\ominus_{le}\mathbf{P} \oplus_{le} \mathbf{Q})\|_F.\| \mathrm{Log}^{le}_{\mathbf{I}_n}(\ominus_{le}\mathbf{P} \oplus_{le} \mathbf{X})\|_F} \\ &\overset{(2)}{=} \underset{\mathbf{Q}\in\mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}\setminus\{\mathbf{P}\}}{\arg\max} \frac{\langle \log(\mathbf{Q}) - \log(\mathbf{P}), \log(\mathbf{X}) - \log(\mathbf{P})\rangle_F}{\| \log(\mathbf{Q}) - \log(\mathbf{P})\|_F.\| \log(\mathbf{X}) - \log(\mathbf{P})\|_F},\end{aligned}$$

其中，(1) 根据 SPD内积的定义得出，而 (2) 根据二元运算$\oplus_{le}$ 和逆运算 $\ominus_{le}$的表达式得出。

我们的问题归结为求向量 log(X) –log(P) 与式 (46) 所描述的欧氏超平面之间的最小角度。因此，SPD 陀螺距离 d $(\mathbf{X}\mathcal{H}_{\mathbf{W},\,\mathbf{P}})$ 可表示为

$$\begin{aligned}d(\mathbf{X}, \mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}) &= \frac{|\langle \log(\mathbf{X}) - \log(\mathbf{P}), \frac{D\log_{\mathbf{P}}(\mathbf{W})}{\|D\log_{\mathbf{P}}(\mathbf{W})\|_F}\rangle_F|}{\| \log(\mathbf{X}) - \log(\mathbf{P})\|_F}.\| \log(\mathbf{X}) - \log(\mathbf{P})\|_F \\ &= \frac{|\langle \log(\mathbf{X}) - \log(\mathbf{P}), D\log_{\mathbf{P}}(\mathbf{W})\rangle_F|}{\|D\log_{\mathbf{P}}(\mathbf{W})\|_F}.\end{aligned}$$

情况 *2*：$\mathbf{Q}^* = \mathbf{P}$.

这种情况显而易见。

□

Q. 定理证明2.24

证明。 设 $\mathcal{H}_{\mathbf{W},\,\mathbf{P}}$ 为陀螺向量空间 $(\mathrm{Sym}^+_n,\ \oplus_{lc},\ \otimes_{lc})$ 中的一个对称正定双曲陀螺超平面，$\mathbf{X} \notin \mathcal{H}_{\mathbf{W},\,\mathbf{P}}$，以及 $\mathbf{Q}^* \in \mathcal{H}_{\mathbf{W},\,\mathbf{P}}$ 满足

$$d(\mathbf{X}, \mathbf{Q}^*) = \min_{\mathbf{Q}\in\mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}} d(\mathbf{X}, \mathbf{Q}) = d(\mathbf{X}, \mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}).$$

定理的第一部分可以用与附录 P 中相同的论证来证明。对于第二部分，我们只考虑$\mathbf{Q}^* \neq \mathbf{P}$的情形，因为 $\mathbf{Q}^* = \mathbf{P}$ 的情形是平凡的（见附录 P）。我们有

$$\mathbf{Q}^* = \underset{\mathbf{Q}\in\mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}\setminus\{\mathbf{P}\}}{\arg\max} \frac{\langle \ominus_{lc}\mathbf{P} \oplus_{lc} \mathbf{Q}, \ominus_{lc}\mathbf{P} \oplus_{lc} \mathbf{X}\rangle}{\| \ominus_{lc} \mathbf{P} \oplus_{lc} \mathbf{Q}\|.\| \ominus_{lc} \mathbf{P} \oplus_{lc} \mathbf{X}\|}.$$

~ ~设$\mathbf{Q} = \ominus_{lc}\mathbf{P} \oplus_{lc} \mathbf{Q}$，$\mathbf{X} = \ominus_{lc}\mathbf{P} \oplus_{lc} \mathbf{X}$。则

$$\widetilde{\mathbf{Q}} = \big(-\lfloor\varphi(\mathbf{P})\rfloor + \lfloor\varphi(\mathbf{Q})\rfloor + \mathbb{D}(\varphi(\mathbf{P}))^{-1}\mathbb{D}(\varphi(\mathbf{Q}))\big)\big(-\lfloor\varphi(\mathbf{P})\rfloor + \lfloor\varphi(\mathbf{Q})\rfloor + \mathbb{D}(\varphi(\mathbf{P}))^{-1}\mathbb{D}(\varphi(\mathbf{Q}))\big)^T,$$

$$\widetilde{\mathbf{X}} = \big(-\lfloor\varphi(\mathbf{P})\rfloor + \lfloor\varphi(\mathbf{X})\rfloor + \mathbb{D}(\varphi(\mathbf{P}))^{-1}\mathbb{D}(\varphi(\mathbf{X}))\big)\big(-\lfloor\varphi(\mathbf{P})\rfloor + \lfloor\varphi(\mathbf{X})\rfloor + \mathbb{D}(\varphi(\mathbf{P}))^{-1}\mathbb{D}(\varphi(\mathbf{X}))\big)^{T}.$$

根据对称正定内积的定义，我们得到

$$\langle\widetilde{\mathbf{Q}},\widetilde{\mathbf{X}}\rangle = \langle -\lfloor\varphi(\mathbf{P})\rfloor + \lfloor\varphi(\mathbf{Q})\rfloor + \log(\mathbb{D}(\varphi(\mathbf{P}))^{-1}\mathbb{D}(\varphi(\mathbf{Q}))), -\lfloor\varphi(\mathbf{P})\rfloor + \lfloor\varphi(\mathbf{X})\rfloor + \log(\mathbb{D}(\varphi(\mathbf{P}))^{-1}\mathbb{D}(\varphi(\mathbf{X})))\rangle_F$$

因此

$$\mathbf{Q}^* = \underset{\mathbf{Q}\in\mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}\setminus\{\mathbf{P}\}}{\arg\max} \frac{\langle\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2\rangle_F}{\|\mathbf{Z}_1\|_F.\|\mathbf{Z}_2\|_F},$$

其中$\mathbf{Z}_1 = -\lfloor\varphi(\mathbf{P})\rfloor + \lfloor\varphi(\mathbf{Q})\rfloor + \log(\mathbb{D}(\varphi(\mathbf{P}))^{-1}\mathbb{D}(\varphi(\mathbf{Q})))$，以及$\mathbf{Z}_2 = -\lfloor\varphi(\mathbf{P})\rfloor + \lfloor\varphi(\mathbf{X})\rfloor + \log(\mathbb{D}(\varphi(\mathbf{P}))^{-1}\mathbb{D}(\varphi(\mathbf{X})))$。根据对数-乔列斯基度量的定义，

$$\langle \mathrm{Log}^{lc}_{\mathbf{P}}(\mathbf{Q}), \mathbf{W}\rangle_{\mathbf{P}} = \langle \varphi(\mathbf{P})\big(\varphi(\mathbf{P})^{-1}\,\mathrm{Log}^{lc}_{\mathbf{P}}(\mathbf{Q})(\varphi(\mathbf{P})^{-1})^T\big)_{\frac{1}{2}}, \varphi(\mathbf{P})\big(\varphi(\mathbf{P})^{-1}\mathbf{W}(\varphi(\mathbf{P})^{-1})^T\big)_{\frac{1}{2}}\rangle_{\varphi(\mathbf{P})}.$$

注意

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{P})^{-1}\,\mathrm{Log}^{lc}_{\mathbf{P}}(\mathbf{Q})(\varphi(\mathbf{P})^{-1})^T &= \varphi(\mathbf{P})^{-1}\Big(\varphi(\mathbf{P})\big(\widetilde{\mathrm{Log}}_{\varphi(\mathbf{P})}(\varphi(\mathbf{Q}))\big)^T + \widetilde{\mathrm{Log}}_{\varphi(\mathbf{P})}(\varphi(\mathbf{Q}))\varphi(\mathbf{P})^T\Big)(\varphi(\mathbf{P})^{-1})^T\\ &= \big(\widetilde{\mathrm{Log}}_{\varphi(\mathbf{P})}(\varphi(\mathbf{Q}))\big)^T(\varphi(\mathbf{P})^{-1})^T + \varphi(\mathbf{P})^{-1}\widetilde{\mathrm{Log}}_{\varphi(\mathbf{P})}(\varphi(\mathbf{Q})),\end{aligned}$$

其中 $\widetilde{\mathrm{Log}}_{\mathbf{L}}(\mathbf{K}) = \lfloor\mathbf{K}\rfloor - \lfloor\mathbf{L}\rfloor + \mathbb{D}(\mathbf{L})\log(\mathbb{D}(\mathbf{L})^{-1}\mathbb{D}(\mathbf{K}))$ 表示定义在具有正对角元素的下三角矩阵空间上的指数映射（Lin，2019）。

因此

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{Log}^{lc}_{\mathbf{P}}(\mathbf{Q}), \mathbf{W}\rangle_{\mathbf{P}} = \langle \varphi(\mathbf{P})\Big(&\big(\widetilde{\mathrm{Log}}_{\varphi(\mathbf{P})}(\varphi(\mathbf{Q}))\big)^T(\varphi(\mathbf{P})^{-1})^T + \varphi(\mathbf{P})^{-1}\widetilde{\mathrm{Log}}_{\varphi(\mathbf{P})}(\varphi(\mathbf{Q}))\Big)_{\frac{1}{2}},\\ &\varphi(\mathbf{P})\big(\varphi(\mathbf{P})^{-1}\mathbf{W}(\varphi(\mathbf{P})^{-1})^T\big)_{\frac{1}{2}}\rangle_{\varphi(\mathbf{P})}\\ &= \langle \varphi(\mathbf{P})\varphi(\mathbf{P})^{-1}\widetilde{\mathrm{Log}}_{\varphi(\mathbf{P})}(\varphi(\mathbf{Q})), \varphi(\mathbf{P})\big(\varphi(\mathbf{P})^{-1}\mathbf{W}(\varphi(\mathbf{P})^{-1})^T\big)_{\frac{1}{2}}\rangle_{\varphi(\mathbf{P})}\\ &= \langle \widetilde{\mathrm{Log}}_{\varphi(\mathbf{P})}(\varphi(\mathbf{Q})), \varphi(\mathbf{P})\big(\varphi(\mathbf{P})^{-1}\mathbf{W}(\varphi(\mathbf{P})^{-1})^T\big)_{\frac{1}{2}}\rangle_{\varphi(\mathbf{P})}.\end{aligned}$$

令 $\widetilde{\mathbf{W}} = \varphi(\mathbf{P})\big(\varphi(\mathbf{P})^{-1}\mathbf{W}(\varphi(\mathbf{P})^{-1})^T\big)_{\frac{1}{2}}\circ$。那么

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{Log}^{lc}_{\mathbf{P}}(\mathbf{Q}), \mathbf{W}\rangle_{\mathbf{P}} &= \langle \widetilde{\mathrm{Log}}_{\varphi(\mathbf{P})}(\varphi(\mathbf{Q})), \widetilde{\mathbf{W}}\rangle_{\varphi(\mathbf{P})}\\ &= \langle \lfloor\varphi(\mathbf{Q})\rfloor - \lfloor\varphi(\mathbf{P})\rfloor + \mathbb{D}(\varphi(\mathbf{P}))\log(\mathbb{D}(\varphi(\mathbf{P}))^{-1}\mathbb{D}(\varphi(\mathbf{Q}))), \widetilde{\mathbf{W}}\rangle_{\varphi(\mathbf{P})}\\ &= \langle \lfloor\varphi(\mathbf{Q})\rfloor - \lfloor\varphi(\mathbf{P})\rfloor + \log(\mathbb{D}(\varphi(\mathbf{P}))^{-1}\mathbb{D}(\varphi(\mathbf{Q}))), \lfloor\widetilde{\mathbf{W}}\rfloor + \mathbb{D}(\varphi(\mathbf{P}))^{-1}\mathbb{D}(\widetilde{\mathbf{W}})\rangle_F.\end{aligned}$$

因此，对于$\mathbf{Q}\in\mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}$，我们有

$$\langle \lfloor\varphi(\mathbf{Q})\rfloor - \lfloor\varphi(\mathbf{P})\rfloor + \log(\mathbb{D}(\varphi(\mathbf{P}))^{-1}\mathbb{D}(\varphi(\mathbf{Q}))), \lfloor\widetilde{\mathbf{W}}\rfloor + \mathbb{D}(\varphi(\mathbf{P}))^{-1}\mathbb{D}(\widetilde{\mathbf{W}})\rangle_F = 0.$$

因此，SPD 陀螺距离 $d(\mathbf{X}\mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}})$ 由下式给出

$$d(\mathbf{X},\mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}) = \frac{|\langle -\lfloor\varphi(\mathbf{P})\rfloor + \lfloor\varphi(\mathbf{X})\rfloor + \log(\mathbb{D}(\varphi(\mathbf{P}))^{-1}\mathbb{D}(\varphi(\mathbf{X}))), \lfloor\widetilde{\mathbf{W}}\rfloor + \mathbb{D}(\varphi(\mathbf{P}))^{-1}\mathbb{D}(\widetilde{\mathbf{W}})\rangle_F|}{\|\lfloor\widetilde{\mathbf{W}}\rfloor + \mathbb{D}(\varphi(\mathbf{P}))^{-1}\mathbb{D}(\widetilde{\mathbf{W}})\|_F},$$

其中 $\widetilde{\mathbf{W}} = \varphi(\mathbf{P})\big(\varphi(\mathbf{P})^{-1}\mathbf{W}(\varphi(\mathbf{P})^{-1})^T\big)_{\frac{1}{2}}\circ$

□

R. 定理 2.25 的证明

证明。 注意到

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{Log}^{ai}_{\mathbf{P}}(\mathbf{Q}), \mathbf{W}\rangle_{\mathbf{P}} &\overset{(1)}{=} \langle \mathbf{P}^{-\frac{1}{2}} \mathrm{Log}^{ai}_{\mathbf{P}}(\mathbf{Q})\mathbf{P}^{-\frac{1}{2}}, \mathbf{P}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{W}\mathbf{P}^{-\frac{1}{2}}\rangle_F \\ &\overset{(2)}{=} \langle \mathbf{P}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \log(\mathbf{P}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{Q}\mathbf{P}^{-\frac{1}{2}})\mathbf{P}^{\frac{1}{2}}\mathbf{P}^{-\frac{1}{2}}, \mathbf{P}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{W}\mathbf{P}^{-\frac{1}{2}}\rangle_F \\ &= \langle \log(\mathbf{P}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{Q}\mathbf{P}^{-\frac{1}{2}}), \mathbf{P}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{W}\mathbf{P}^{-\frac{1}{2}}\rangle_F,\end{aligned} \tag{47}$$

其中，(1) 根据仿射不变度量的定义得出，(2) 则根据仿射不变度量所对应的指数映射表达式得出。

因此，对于 $\mathbf{Q} \in \mathcal{H}_{\mathbf{W},\,\mathbf{P}}$，有

$$\langle \log(\mathbf{P}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{Q}\mathbf{P}^{-\frac{1}{2}}), \mathbf{P}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{W}\mathbf{P}^{-\frac{1}{2}}\rangle_F = 0. \tag{48}$$

根据 SPD 伪陀螺距离的定义，

$$\bar{d}(\mathbf{X}, \mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}) = \sin(\angle \mathbf{X}\mathbf{P}\bar{\mathbf{Q}}) d(\mathbf{X}, \mathbf{P}),$$

其中

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{Q}} &= \underset{\mathbf{Q}\in\mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}\setminus\{\mathbf{P}\}}{\arg\max} \frac{\langle \ominus_{ai}\mathbf{P} \oplus_{ai} \mathbf{Q}, \ominus_{ai}\mathbf{P} \oplus_{ai} \mathbf{X}\rangle}{\| \ominus_{ai} \mathbf{P} \oplus_{ai} \mathbf{Q}\|.\| \ominus_{ai} \mathbf{P} \oplus_{ai} \mathbf{X}\|} \\ &\overset{(1)}{=} \underset{\mathbf{Q}\in\mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}\setminus\{\mathbf{P}\}}{\arg\max} \frac{\langle \mathrm{Log}^{ai}_{\mathbf{I}_n}(\ominus_{ai}\mathbf{P} \oplus_{ai} \mathbf{Q}), \mathrm{Log}^{ai}_{\mathbf{I}_n}(\ominus_{ai}\mathbf{P} \oplus_{ai} \mathbf{X})\rangle_F}{\| \mathrm{Log}^{ai}_{\mathbf{I}_n}(\ominus_{ai}\mathbf{P} \oplus_{ai} \mathbf{Q})\|_F.\| \mathrm{Log}^{ai}_{\mathbf{I}_n}(\ominus_{ai}\mathbf{P} \oplus_{ai} \mathbf{X})\|_F} \\ &= \underset{\mathbf{Q}\in\mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}\setminus\{\mathbf{P}\}}{\arg\max} \frac{\langle \log(\mathbf{P}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{Q}\mathbf{P}^{-\frac{1}{2}}), \log(\mathbf{P}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{X}\mathbf{P}^{-\frac{1}{2}})\rangle_F}{\| \log(\mathbf{P}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{Q}\mathbf{P}^{-\frac{1}{2}})\|_F.\| \log(\mathbf{P}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{X}\mathbf{P}^{-\frac{1}{2}})\mathbf{X}\|_F}\end{aligned}$$

我们的问题转化为求向量 $\log(\mathbf{P}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{X}\mathbf{P}^{-\frac{1}{2}})$ 与式（48）所描述的欧几里得空间¯超平面之间的最小角度。因此，SPD 伪陀螺距离 $d(\mathbf{X}\mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}})$ 为

$$\bar{d}(\mathbf{X}, \mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}) = \frac{|\langle \log(\mathbf{P}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{X}\mathbf{P}^{-\frac{1}{2}}), \mathbf{P}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{W}\mathbf{P}^{-\frac{1}{2}}\rangle_F|}{\|\mathbf{P}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{W}\mathbf{P}^{-\frac{1}{2}}\|_F}.$$

□

S. 推论 2.26 的证明

证明。 我们先回顾一下Pennec(2006) 中的一个结果。

命题 S.1. 设 $\mathbf{P} \in \mathrm{Sym}^+_n$ 且 $\mathbf{W} \in \mathcal{T}_{\mathbf{P}}\,\mathrm{Sym}^+_n$。则

$$D\log_{\mathbf{P}}(\mathbf{W}) = \mathbf{O}(D\log_{\mathbf{\Sigma}}(\mathbf{O}^T\mathbf{W}\mathbf{O}))\mathbf{O}^T,$$

其中 $\mathbf{P} = \mathbf{O}\mathbf{\Sigma}\mathbf{O}^T$ 是$\mathbf{P}$的特征值分解。

首先，很容易看出

$$\log(\mathbf{X}) = \mathrm{diag}(\log(\mathbf{X}_1), \ldots, \log(\mathbf{X}_N))\ ,\ \log(\mathbf{P}) = \mathrm{diag}(\log(\mathbf{P}_1), \ldots, \log(\mathbf{P}_N)).$$

设$\mathbf{P}_i = \mathbf{O}_i\mathbf{\Sigma}_i\mathbf{O}_i^T$为$\mathbf{P}_i, i = 1, \ldots, N$的特征值分解。那么$\mathbf{P} = \mathbf{O}\mathbf{\Sigma}\mathbf{O}^T$其中$\mathbf{O} =$

$\mathrm{diag}(\mathbf{O}_1,\ldots,\mathbf{O}_N)$，且 $\mathbf{\Sigma}=\mathrm{diag}(\mathbf{\Sigma}_1,\ldots,\mathbf{\Sigma}_N)$。注意，

$$\begin{aligned}
D\log_{\mathbf{P}}(\mathbf{W}) &\overset{(1)}{=} \mathbf{O}(D\log_{\mathbf{\Sigma}}(\mathbf{O}^T\mathbf{W}\mathbf{O}))\mathbf{O}^T \\
&= \mathbf{O}\Big(D\log_{\mathbf{\Sigma}}\big(\mathrm{diag}(\mathbf{O}_1^T\mathbf{W}_1\mathbf{O}_1,\ldots,\mathbf{O}_N^T\mathbf{W}_N\mathbf{O}_N)\big)\Big)\mathbf{O}^T \\
&\overset{(2)}{=} \mathbf{O}\Big(\mathrm{diag}\big(D\log_{\mathbf{\Sigma}_1}(\mathbf{O}_1^T\mathbf{W}_1\mathbf{O}_1),\ldots,D\log_{\mathbf{\Sigma}_N}(\mathbf{O}_N^T\mathbf{W}_N\mathbf{O}_N)\big)\Big)\mathbf{O}^T \\
&= \mathrm{diag}\Big(\mathbf{O}_1\big(D\log_{\mathbf{\Sigma}_1}(\mathbf{O}_1^T\mathbf{W}_1\mathbf{O}_1)\big)\mathbf{O}_1^T,\ldots,\mathbf{O}_N\big(D\log_{\mathbf{\Sigma}_N}(\mathbf{O}_N^T\mathbf{W}_N\mathbf{O}_N)\big)\mathbf{O}_N^T\Big) \\
&\overset{(3)}{=} \mathrm{diag}\big(D\log_{\mathbf{P}_1}(\mathbf{W}_1),\ldots,D\log_{\mathbf{P}_N}(\mathbf{W}_N)\big).
\end{aligned} \tag{49}$$

方程（49）的推导如下。

（1）由命题得出S.1。

(2) 由 $D\log_{\mathbf{\Sigma}}(.)$ 的性质得出。

（3）由命题 S.1推出。

根据定理 2.23，在陀螺向量空间 $(\mathrm{Sym}^+_{n\times N},\oplus_{le},\otimes_{le})$ 中，$\mathbf{X}$ 到超平面 $\mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}$ 的 SPD 陀螺距离由下式给出

$$\begin{aligned}
d(\mathbf{X},\mathcal{H}_{\mathbf{W},\mathbf{P}}) &= \frac{|\langle\log(\mathbf{X})-\log(\mathbf{P}),D\log_{\mathbf{P}}(\mathbf{W})\rangle_F|}{\|D\log_{\mathbf{P}}(\mathbf{W})\|_F} \\
&= \frac{|\sum_{i=1}^N\langle\log(\mathbf{X}_i)-\log(\mathbf{P}_i),D\log_{\mathbf{P}_i}(\mathbf{W}_i)\rangle_F|}{\sqrt{\sum_{i=1}^N\|D\log_{\mathbf{P}_i}(\mathbf{W}_i)\|_F^2}}.
\end{aligned}$$

注意，定理 2.24 和 2.25 中给出的对称正定陀螺距离和伪陀螺距离表达式中的每一项，都是由推论 $\mathrm{diag}(.)$ 中定义的运算构成的，该推论为 2.26。由此可轻易证明 LC 和 AI陀螺向量空间的相关结果。

□