arXiv:2305.04565v1 [math.FA] 8 May 2023

CO不可数离散扩张的紧线 S

MACIEJ KORPALSKI 和 GRZEGORZ PLEBANEK

Abstract. 我们研究一个可分紧线 K 及其扩张 L，该扩张由K 和可数个孤立点组成。我们主要研究有界扩张算子 $E\colon C(K) \to C(L)$是否存在。我们证明，如果存在这样的算子，那么就存在一个满足 $\|E\|$ 为奇自然数的算子。我们证明，如果 K 的拓扑权大于或等于集合 $X \subseteq [0,1]$的最小基数，而该集合不能被零测度闭集的一个序列覆盖，那么 K 存在一个不允许有界扩张算子的扩张 L。

1. Introduction

紧线是这样一种紧空间，其拓扑由线性序定义。双箭头空间

$$\mathbb{S} = \big((0,1] \times \{0\}\big) \cup \big([0,1) \times \{1\}\big),$$

按字典序排列，是紧线的一个熟知例子。空间 $\mathbb{S}$ 不可度量化，但可分且第一可数，参见 [10, 习题 3.10.C]。双箭头空间有一个自然的推广：我们可以考虑单位区间的任意闭子集 F、任意集合 $X \subseteq F$，并定义

$$F_X = \big(F \times \{0\}\big) \cup \big(X \times \{1\}\big).$$

与前面一样，空间 F_X按字典序排列，是可分紧线；当且仅当 X 不可数时，它不可度量化。事实上，对于无限集合 X，空间 F_X的拓扑权为 $|X|$；更多信息见 [16]。结果表明，形如 F_X 的空间穷尽了可分紧线性序空间这一类：

定理 1.1（Ostaszewski, [20]）。空间 K 是可分紧线性序空间，当且仅当 K 同胚于某个闭集 $F \subseteq [0,1]$ 与子集$X \subseteq F$所对应的 F_X。

给定一对紧空间 $K \subseteq L$，我们将延拓算子 $E\colon C(K) \to C(L)$ 定义为一个（连续函数巴拿赫空间之间的）有界线性算子，满足 $Ef|K = f$ 对每个 $f \in C(K)$ 都成立。根据经典的 Borsuk-Dugundji 扩张定理

2020年数学主题分类。主要分类号：54F05、46B03、O6E15；次要分类号：03E05。关键词和短语：紧线、延拓算子、连续函数空间。第一作者获得了波兰国家科学中心资助的项目 2018/29/B/ST1/00223 的部分支持。第二作者获得了波兰国家科学中心（NCN）在 Weave 项目下 Weave-UNISONO 计划（2021/03/Y/ST1/00124）的资助。

只要 K 可度量化，这样的范数为一的算子就存在，参见 [21] 或 [15, II.4.14]。沿用 [6] 的记法，我们用 $\eta(K,L)$ 表示所有可能的延拓算子 $E\colon C(K) \to C(L)$ 的范数下确界（如果存在此类算子）；因此 $\eta(K,L) = \infty$ 表示不存在有界延拓算子。许多不可度量化的紧空间$K \subseteq L$ 满足 $\eta(K,L) < \infty$；然而，计算 $\eta(K,L)$ 可能相当复杂，参见例如 [2]。

如果 K 是任意紧空间，我们称超空间 $L \supseteq K$ 为 K 的可数离散扩张，并记作 $L \in \mathrm{CDE}(K)$，如果 L 是紧空间且集合 $L \setminus K$ 是可数无限离散集。本文的主要研究对象是可分紧线性序空间的可数离散扩张的两个性质。从某种意义上说，这些性质衡量了向初始空间添加孤立点的方式有多复杂。

定义 1.2. 给定一个固定的紧空间 K 和 $L \in \mathrm{CDE}(K)$,

(i) L 具有性质（$\mathcal{R}$），当且仅当存在一个从 L 到 K的连续收缩;

(ii) L具有性质（$\mathcal{E}$），当且仅当 $\eta(K,L) < \infty$。

性质 $(\mathcal{R})$ 和 $(\mathcal{E})$ 曾在一系列论文 [9], [19], [3] 中结合巴拿赫空间的扭和加以研究，更多信息请见最后一节。我们将尝试让读者相信，我们的研究主题本身就相当微妙且有趣。还要指出的是，目前有一股蓬勃的研究趋势，致力于考察紧线上的连续函数巴拿赫空间的性质，例如参见 [16], [13], [7] 和 [18]。

这里我们给出关于拓扑权为 $w(K)$ 的可分紧线 K 的以下结果（事实上，前两个结果并不需要可分性）。

(a) 对每个 $L \in \mathrm{CDE}(K)$，要么 L 具有性质（$\mathcal{R}$）（因此 $\eta(K,L) = 1$），要么 $\eta(K,L) \geq 3$。(b) 对每个 $L \in \mathrm{CDE}(K)$，若 $\eta(K,L) < 5$，则 $\eta(K,L) \leq 3$。我们还概述了证明 $\eta(K,L)$ 要么是无限的，要么等于一个奇自然数的论证。(c) 若 $w(K) \geq \omega_1$，则存在 $L \in \mathrm{CDE}(K)$，使得 $\eta(K,L) = 3$。(d) 若 $w(K) \geq \mathrm{non(I)}$，则存在一个不具有性质（$\mathcal{E}$）的 $L \in \mathrm{CDE}(K)$。

这里 non(I) 表示无法由可数个闭零测集组成的族覆盖的集合的最小基数 $X \subseteq [0,1]$。为了构造上文提到的例子，我们发现，将零维紧线视为由某个可数集中的近链生成的代数的 Stone 空间，会比较方便。我们不知道是否相对一致的是：对于上述可分的 K，若 $w(K) = \omega_1$，则 K 的每个可数离散扩张 L 都具有性质（$\mathcal{E}$）。正如第 7 节所述，对每个不可分紧线序空间，这一事实都成立。

我们谨向 Witold Marciszewski 致谢，感谢他就这一主题与我们进行了富有成果的讨论；特别是，我们在第 5 节介绍了他私下告知我们的结果。

2. Preliminaries

我们所考虑的所有拓扑空间都是豪斯多夫的。下文中，K 和 L 始终表示紧空间。对于空间 K，我们用 $C(K)$表示连续

函数 $f\colon\ K \to \mathbb{R}$，其赋有上确界范数，记为 $\|\cdot\|$。根据里斯表示定理，我们可以将对偶空间 $C(K)^*$ 与有界变差的符号正则博雷尔测度空间等同，记为 $M(K)$。对于测度 $\mu \in M(K)$，我们可以运用若尔当分解定理将其写为 $\mu = \mu^+ - \mu^-$，其中 μ^+、μ^-是非负且互相正交的测度。于是，μ 的全变差为$\|\mu\| = \mu^+(K) + \mu^-(K)$。给定 $x \in K$，δ_x 是集中于点 x的概率狄拉克测度。

下文中，我们用 ω 表示赋予离散拓扑的自然数集。我们常将给定紧空间 K的可数离散扩张视为 $K \cup \omega$的形式，并默认假设 $K \cap \omega = \emptyset$。如上所述，我们用$L \in \mathrm{CDE}(K)$表示 L 是 K的可数离散扩张。

注 2.1. 若 $r\colon L \to K$ 是连续收缩，则 $C(K) \ni f \to f \circ r \in C(L)$定义了一个范数为一的延拓算子。这证明了每个具有性质（$\mathcal{R}$）的可数离散扩张都具有性质（$\mathcal{E}$）。

具有性质（$\mathcal{R}$）的扩张在某种意义上是平凡的。许多简单的可数离散扩张构造都具有这一性质。请记住，有些空间不存在不具有性质（$\mathcal{R}$）的扩张。

例 2.2. 若空间 K 可度量化，则每个 $L \in \mathrm{CDE}(K)$都具有性质（$\mathcal{R}$）。

证明。由于 K 是紧致且可度量化的，因此它是可分的 [10, 定理 4.1。18] 并且有一个可数基。由此可知，空间 L 也有一个可数基，因此它是可度量化的 [10, 定理 4.2。8]。我们固定 L上的一个相容度量 d。我们可以定义一个收缩映射 $r\colon$ 将 L 中的每个元素映射到 K 中距离最近的元素（如果有多个，则映射到其中任意一个）。由于 K 是紧致的，最近的元素总是存在，因此这样的函数是良定义的。

验证 r 的连续性，只需验证：每当序列 $(x_n)_{n\in\omega}$在 ω 中收敛到 $x \in K$时，$r(x_n) \to r(x) = x$。
给定 $\varepsilon > 0$，我们有 $d(x_n, x) < \varepsilon$，对几乎所有 n 都成立，因此

$$d(r(x_n), x_n) \le d(x, x_n) < \varepsilon \text{ and } d(r(x_n), x) < 2\varepsilon,$$

当 n足够大时，由三角不等式可得。 △

下面回顾性质（$\mathcal{R}$）和（$\mathcal{E}$）的有用刻画。证明见 [19, 引理 2.7]，证明过程相当标准；另见 [21] 和 [22]。

引理 2.3. 设 K 是任意紧空间，并设 $L \in$CDE(K)。
(a) L 具有性质（$\mathcal{R}$）当且仅当存在点序列 $(x_n)_{n\in\omega}$，其中 K，使得对于每个函数 $f \in C(L)$，我们都有

$$\lim_{n\to\infty} (f(x_n) - f(n)) = 0.$$

(b) L 具有性质（$\mathcal{E}$）当且仅当存在一个有界的有符号测度序列（μ_n）$_{n\in\omega}$ 定义在 K 上，使得 $\mu_n - \delta_n \to 0$ 在 C（L）的 $weak^*$ 拓扑下收敛，即对于每个$f \in C$（L），我们都有

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\int_K f\,\mathrm{d}\mu_n - f(n)\Big) = 0.$$

注2.4. 关于引理 2.3(b)，延拓算子的范数 E 满足$\|E\| = \sup_{n\in\omega}\|\mu_n\|$。

回想一下，存在权任意大的空间，它们不具有满足性质 ($\mathcal{R}$) 的可数离散扩张。事实上，取任意一个基数 κ ，并考虑康托立方体 2^κ。那么， 2^κ 是紧零维空间类中的一个绝对收缩，因此，特别地，每个 $L \in CDE(2^\kappa)$ 都具有性质 ($\mathcal{R}$)。这一点可以通过以下方式直接证明。

空间 2^κ 有一个由集合组成的子基

$$C^i_\alpha = \{x \in 2^\kappa : x(\alpha) = i\},$$

$\widetilde{\ }$对于 $\alpha < \kappa$ 和 $i = 0$，1。对于每个 α， L 都可以划分为既开又闭集 C^i_α ，使得 $\sim C^i_\alpha \cap K = C^i_\alpha$。因此，我们可以通过 $r|K = id_K$ 定义一个连续收缩 r ，并且对于 $n \in L \setminus 2^\kappa$，令 $r(n)$ 为其中唯一的点。

$$\bigcap_{\alpha\in\kappa, i\in\{0,1\}} \{C^i_\alpha : n \in \widetilde{C^i_\alpha}\}.$$

3. Calculating $\eta(K, L)$

Corson 和 Lindenstrauss [6]证明，若 K 是不可数离散空间的单点紧化，那么对于每个紧致上空间 $L \supseteq K$，如果 $\eta(K.L) <\infty$ ，则 $\eta(K, L)$ 是一个奇自然数。本节将证明，在我们的情形中也存在同样的现象。

在本节中，我们始终假设 K 是任意的（不一定可分的）紧线，而 $L = K \cup \omega$ 是它的可数离散扩张。我们将 K 上的线性序 $<$简记为 , 例如，记 $[s, t] = \{x \in K :$ $s \le x \le t\}$ 表示 $s, t \in K$。分别用 α 和 β 表示 K中的最小元和最大元。

我们首先给出一个非常技术性但实用的判据，用于判断 $L = K \cup \omega$上的测度收敛。

引理3.1. 设 $(\nu_n)_n$ 是 $M(K)$ 中的一个有界序列，且对每个n，都有 $\nu_n(K) = 1$ 。假设只要 $s, t \in K$, $s < t$ 以及 $L = K \cup \omega$的闭子集 F, H 满足$F \cap K \subseteq [\alpha, s]$和 $H \cap K \subseteq [t, \beta]$，就有

(i) 对几乎所有 $n \in F \cap \omega$， $\nu_n[t, \beta] = 0$;

(ii) 对几乎所有 $n \in H \cap \omega$， $\nu_n[\alpha, s] = 0$ 。那么

$\nu_n - \delta_n \to 0$ 在 $M(L)$ 的 $weak^*$ 拓扑中。

证明。首先回忆，若 $(t_n)_{n\in\omega}$ 是紧致拓扑空间 T 中的一个序列，且 $\mathcal{U}$ 是 ω 上任意一个非主超滤子，则存在唯一的元素 $T \ni t = \lim_{n\to\mathcal{U}} t_n$，使得 $\{n \in \omega :$ 对于每个包含 t 的开集 V，都有 $t_n \in V\} \in \mathcal{U}$。

为证明该引理，假设断言不成立；则测度序列 $\nu_n - \delta_n$ 有一个非零聚点 μ。取一个超滤子 $\mathcal{U}$ 使得

$$\mu = \lim_{n\to\mathcal{U}}(\nu_n - \delta_n) = \lim_{n\to\mathcal{U}} \nu_n - \lim_{n\to\mathcal{U}} \delta_n \neq 0.$$

当然，对于某个 $s \in K$，$\lim_{n\to\mathcal{U}} \delta_n = \delta_s$，因此记 $\nu = \lim_{n\to\mathcal{U}} \nu_n$，我们有 $\nu \neq \delta_s$。由于 $\nu(K) = 1$，我们得出结论：要么 $|\nu|[\alpha, s) > 0$，要么 $|\nu|(s, \beta] > 0$；例如，假设后者成立（前一种情况可通过对称论证得出）。

于是存在 $K \ni t_1 > s$ 使得 $|\nu|[t_1, \beta] > 0$。将 L 的正规性应用于集合 $[\alpha, s] \subseteq L \setminus [t_1, \beta]$，可找到一个开集 $V \subseteq L$ 使得

$$[\alpha, s] \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq L \setminus [t_1, \beta],$$

并令 $t_0 = \sup(\overline{V} \cap K)$。注意到 $t_0 < t_1$。现在，由 (i)，对每个 $t \in [t_1, \beta]$，我们有 $\nu_n[t, \beta] \to 0$，对于 $n \in V$（注意集合 $V \cap \omega$ 是无限的）。

注意，任何在 $[\alpha, t_1]$ 上为零的 $g \in C(K)$，都可以用定义在区间 $[t, t')$ 上的阶梯函数一致逼近，其中这些区间包含于 $(t_1, \beta]$，因此我们得出 $\int_K g \,\mathrm{d}\nu_n \to 0$，对于 $n \in V$，由此得到 $|\nu|[t_1, \beta] = 0$，矛盾。△

定理3.2. 若 $\eta(K, L) < 3$，则 L 具有性质 $(\mathcal{R})$。

证明。由引理2.3和注2.4，存在一个定义在 K 上的测度序列 μ_n，使得 $c = \sup_n \|\mu_n\| < 3$，且 $\mu_n - \delta_n \to 0$ 在 $weak^*$ 拓扑下收敛。固定 $\delta > 0$ 使得$c + 3\delta < 3$，并对任意 $x \in K$ 取集合

$$A_x = \{n \in \omega : \mu_n^+[\alpha, x] \geq 1 - \delta\}.$$

然后，对于每个 $n \in \omega$，我们定义

$$x_n = \inf\{x \in K : n \in A_x\}.$$

注意，$\mu_n(K) \to 1$，因此对几乎所有 $n \in \omega$，x_n 都有定义。

Claim. 设 $s, t \in K$ 满足 $s < t$；令 F, H 为 L 的闭子集，使得$F \cap K \subseteq [\alpha, s]$ 且 $H \cap K \subseteq [t, \beta]$。那么以下集合是有限的

$$I = \{n \in F : x_n \geq t\}, \quad J = \{n \in H : x_n \leq s\}.$$

为了检验断言，考虑一个连续函数 $f\colon L \to [0, 1]$，满足 $f(x) = 1$ 对于$x \leq s$ 以及 $f(x) = 0$ 对于 $x \geq t$，并定义函数 $g\colon L \to [0, 1]$ 为 $g = 1 - f$。

如果我们假设 I 是无限的，那么对于 $n \in I$，只要 $x < t$，就有 $\mu_n^+[\alpha, x] < 1 - \delta$，因此

$$\int_K f \,\mathrm{d}\mu_n \leq \int_K f \,\mathrm{d}\mu_n^+ < 1 - \delta;$$

另一方面，$\lim_{n\in I} f(n) = 1$，这与 $\mu_n - \delta_n \to 0$ 矛盾。

现在假设 J 是无限的。于是，由于 $\lim_{n\in J} \int_K g\,\mathrm{d}\mu_n - g(n) = 0$ 且 g 在 H 上恒等于 1，我们有

$$\int_K g\,\mathrm{d}\mu_n \geq 1-\delta \text{ and } \int_K f\,\mathrm{d}\mu_n < \delta,$$

对几乎所有的 $n \in J$ 都成立。同时，$\mu_n^+[\alpha, s] \geq 1-\delta$，因此考察上面右侧的积分，$\mu_n^-[\alpha, s] \geq 1-\delta$ 最终必定对 $n \in J$ 成立。由此可得

$$|\mu_n|(K) \geq |\mu_n|[\alpha, s] + |\mu_n|[t, \beta] \geq 2(1-\delta) + 1 - \delta = 3 - 3\delta > c,$$

这与我们的假设 $\|\mu_n\| \leq c$ 相矛盾。

验证断言后，由引理3.1可知，对于每个 $f \in C(L)$，都有 $f(x_n) - f(n) \to 0$，证毕。△

定理 3.3。若 $\eta(K, L) < 5$，则存在一个延拓算子 $E\colon C(K) \to C(L)$，且满足 $\|E\| \leq 3$。

证明。由引理 2.3 和注2.4，存在一列测度 μ_n on K，使得 $c = \sup_n \|\mu_n\| < 5$ 且 $\mu_n - \delta_n \to 0$ 在 $weak^*$ 拓扑下。固定 $\delta > 0$ 使得$c + 3\delta < 5$。

我们将定义一个范数至多为 3 的测度序列 ν_n，使其满足 $\mu_n - \delta_n \xrightarrow{weak^*} 0$。在证明的其余部分，我们假设对于每个 n，都有 $\|\mu_n\| > 3 - \delta/4$；对于其他测度，我们只需令 $\nu_n = \mu_n$。对于任意 $x \in K$，我们定义

$$\begin{aligned} A_x^0 &= \{n \in \omega : \mu_n^+[\alpha, x] \geq 1 - \delta/4\}, & x_n^0 &= \inf\{x \in K : n \in A_x^0\};\\ A_x^1 &= \{n \in A_x^0 : \mu_n^-[\alpha, x] \geq 1 - \delta/2\}, & x_n^1 &= \inf\{x \in K : n \in A_x^1\};\\ A_x^2 &= \{n \in A_x^1 : \mu_n^+[\alpha, x] \geq 2 - \delta\}, & x_n^2 &= \inf\{x \in K : n \in A_x^2\}. \end{aligned}$$

注意，由于对于每个 n 和 n，$|\mu_n|(K) > 3 - \delta/4$ 且 $\mu_n(K) \to 1$，我们可以并且确实假设上面右侧的三个集合均非空，因此 x_n^i 有定义且 $x_n^0 \leq x_n^1 \leq x_n^2$。

我们考虑测度序列

$$\nu_n = \delta_{x_n^0} - \delta_{x_n^1} + \delta_{x_n^2},$$

并证明 $\nu_n - \delta_n \xrightarrow{weak^*} 0$，参见引理3.1。固定 s、$t \in K$，其中 $s < t$，并假设 F 和 H 是 L 中满足 $F \cap K \subseteq [\alpha, s]$ 和 $H \cap K \subseteq [t, \beta]$ 的闭集。取一个连续函数 $f\colon L \to [0, 1]$，使得 $f|[\alpha, s] = 1$ 和 $f|[t, \beta] = 0$；再令函数 $g = 1 - f$。现在分几步检查引理3.1的假设。

Step 1: 集合 $I = \{n \in F \cap \omega\colon s < t \leq x_n^0 \leq x_n^1 \leq x_n^2\}$ 是有限的。

我们知道，$\mu_n - \delta_n \xrightarrow{w^*} 0$ 且 $\lim_{n\in F} f(n) = 1$（如果 $F \cap \omega$ 是无限的），因此该陈述由对于无限 $I \subseteq F$ 有 $\lim_{n\in I} \int_K f\,\mathrm{d}\mu_n = 1$ 这一事实得出。

Step 2: 集合 $I=\{n\in H\cap\omega:\ x_n^0\le s<t\le x_n^1\le x_n^2\}$ 是有限的。
如果 I 是无限的，那么我们就有 $\lim_{n\in I}\int_K f\,\mathrm{d}\mu_n=0$，而对于 $n\in I$

$$\int_K f\,\mathrm{d}\mu_n\ge\int_{[\alpha,s]} f\,\mathrm{d}\mu_n^+-\int_{[\alpha,t]} f\,\mathrm{d}\mu_n^-\ge 1-\delta/4+\delta/2-1=\delta/2.$$

Step 3: 集合 $I=\{n\in F\cap\omega:\ \ x_n^0\le x_n^1\le s<t\le x_n^2\}$ 是有限的。
事实上，对于无限的 I，我们将有 $\lim_{n\in I}\int_K f\,\mathrm{d}\mu_n=1$，而对于 $n\in I$

$$\int_K f\,\mathrm{d}\mu_n\le\int_{[\alpha,t]} f\,\mathrm{d}\mu_n^+-\int_{[\alpha,s]} f\,\mathrm{d}\mu_n^-\le 2-\delta+\delta/2-1=1-\delta/2.$$

Step 4: 集合 $I=\{n\in H\cap\omega:\ x_n^0\le x_n^1\le x_n^2\le s<t\}$ 是有限的。
对于无限的 I，我们又会有 $\lim_{n\in I}\int_K f\,\mathrm{d}\mu_n=0$。这与 $x_n^2\le s$ 的含义 $\mu_n^+[\alpha,s]\ge 2-\delta$ 一起，意味着对于较大的 $n\in I$，有 $\mu_n^-[\alpha,s]\ge 2-\delta$。因此，对于 $n\in I$，$|\mu_n|[\alpha,s]\ge 4-2\delta$ 最终必然成立。另一方面，$\lim_{n\in I}\int_K g\,\mathrm{d}\mu_n=1$ 意味着对于几乎所有的 $n\in I$，都有 $|\mu_n|[s,\beta]\ge 1-\delta$，这与 $\|\mu_n\|\le c<5-3\delta$ 矛盾。

Step 5: 其他会违背引理3.1假设的情形也已排除。

例如，假设集合 $I=\{n\in F\cap\omega:\ x_n^0\le s\le x_n^1\le t\le x_n^2\}$ 是无限的，那么我们可以将其分成两部分，并应用上述情形之一。

现在，根据引理3.1，$\nu_n-\delta_n\xrightarrow{weak^*}0$，得证。 △

考察定理3.2和定理3.3的证明后，可以得出结论：这一论证还可以进一步推广。检查其中的细节似乎颇为繁琐，因此我们仅对基本思路作简要说明。

定理 3.4. 若 $\eta(K,L)<\infty$，则 $\eta(K,L)$ 是奇自然数 .

证明。对于该证明，可以考虑一个满足 $2k-1\le\eta(K,L)<2k+1$ 且 $\delta>0$ 足够小的自然数 k。通过归纳法，我们可以假设 $\|\mu_n\|\ge 2k-1-\delta$，其中测度 μ_n 与一个范数为 $<2k+1$ 的延拓算子相关。然后，对于 $x\in K$，我们可以定义集合 A_x^0、.....、A_x^{2k-2}，其定义如下:

$$\begin{aligned}A_x^0&=\{n\in\omega:\mu_n^+[\alpha,x]\ge 1-\delta/2^k\},\\ A_x^{2j+1}&=\{n\in A_x^{2j}:\mu_n^-[\alpha,x]\ge j+1-\delta/2^{k-2(j+1)}\},\\ A_x^{2j}&=\{n\in A_x^{2j-1}:\mu_n^+[\alpha,x]\ge j+1-\delta/2^{k-2j}\}.\end{aligned}$$

然后，在设定 $x_n^i=\inf\{x\in K:\ n\in A_x^i\}$ for $i=0,\ldots,2k-2$ 之后，我们考虑这些测度。

$$\nu_n=\sum_{i=0}^{2k-2}(-1)^i\delta_{x_n^i};$$

显然， $\|\nu_n\| \leq 2k-1$ 因此只需验证 $\nu_n - \delta_n \xrightarrow{weak^*} 0$。 △

4. Countable discrete extensions and Boolean algebras

在本节中，我们将介绍一种通过 ω 的子集所构成的布尔代数的 Stone 空间来构造可分紧线的可数离散扩张的方法。这里我们使用经典的 Stone 对偶，必要时参见 [14] 。给定一个布尔代数 $\mathfrak{A}$，ult($\mathfrak{A}$) 表示 $\mathfrak{A}$ 上超滤子的 Stone 空间，它是一个紧零维空间，其基由所有形如以下形式的闭开集组成

$$\widehat{A} = \{\mathcal{U} \in \mathrm{ult}(\mathfrak{A}) : A \in \mathcal{U}\},$$

对于 $A \in \mathfrak{A}$。

基本思路很简单：如果代数 $\mathfrak{A} \subseteq P(\omega)$ 包含 fin，即 ω 的有限子集理想，那么通过将主超滤子与自然数对应起来，ult($\mathfrak{A}$) 就成为 ω 的紧化。因此，一旦我们能够将基本的紧零维空间 K 表示为 $K = \mathrm{ult}(\mathfrak{A}/\mathrm{fin})$，其中 $\mathfrak{A}$ 是 ω （或任何其他可数集）的子集构成的某个布尔代数，那么 $L =$ult($\mathfrak{A}$) 就是 $K = \mathrm{ult}(\mathfrak{A}/\mathrm{fin})$ 的可数离散扩张。我们的首要目标是用布尔语言理解性质 ($\mathcal{R}$) 和 ($\mathcal{E}$)。

引理 4.1. 假设对于某个包含 fin 的子集代数 $\mathfrak{A}$， $K =$ult($\mathfrak{A}$/fin)。那么 $L =$ult($\mathfrak{A}$) 具有性质（$\mathcal{R}$）当且仅当存在一个提升 $\theta : \mathfrak{A}/\mathrm{fin} \to \mathfrak{A}$。

这里，如果 $\mathfrak{A}/\mathrm{fin} \to \mathfrak{A}$ 是一个提升，则称 $\theta : \mathfrak{A}/\mathrm{fin} \to \mathfrak{A}$ 为提升；它是一个布尔代数单态，并且满足 $\pi \circ \theta = id_{\mathfrak{A}/\mathrm{fin}}$。上述引理的证明是标准的，参见例如 [9]。

为了给出关于（$\mathcal{E}$）的类似引理，回忆一下：如果对于任意布尔代数 $\mathfrak{B} \subseteq P(\omega)$ 都有 $K = \mathrm{ult}(\mathfrak{B})$，那么我们可以认为 $M(K)$ 与 $M(\mathfrak{B})$ 相同，即 $\mathfrak{B}$ 上具有有界变差的带符号有限可加测度空间。在此情形下，测度 $\mu \in M(\mathfrak{A})$ 的范数由 $\|\mu\| = |\mu|(\omega)$ 给出，其中变差 $|\mu|$ 对于 $A \in \mathfrak{B}$ 定义为

$$|\mu|(A) = \sup_{B \in \mathfrak{A},\, B \subseteq A} \big(|\mu(B)| + |\mu(A \setminus B)|\big).$$

引理 4.2。在引理 4.1 的设定下， $L \in \mathrm{CDE}(K)$ 具有性质 ($\mathcal{E}$) 当且仅当存在一个 $M(\mathfrak{A})$ 中的有界序列 $(\mu_n)_{n\in\omega}$ ，使得

(i) 对每个 $I \in \mathfrak{f}$ 和每个 n， $\mu_n(I) = 0$ ；

(ii) 对每个 $A \in \mathfrak{A}$， $\lim_{n\to\infty}(\mu_n(A) - \delta_n(A)) = 0$ 。

证明。这由引理 2.3(b) 以及以下观察可得。

$\mathfrak{A}/\mathrm{fin}$ 上的有限可加测度与在有限集上消失的 $\mathfrak{A}$ vanishing 上的有限可加测度之间存在显然的对应关系。另请注意，对于任意零维紧空间 L 以及 $M(L)$ 中的序列 ν_n ，当且仅当对于每个既开又闭的 $C \subseteq L$， $\nu_n(C) \to 0$ 时， $\nu_n \to 0$ 在 $weak^*$ 拓扑中收敛；我们可以将这一观察应用于 $\nu_n = \mu_n - \delta_n \in M(\mathfrak{A})$。△

回顾一下，对于 $A, B \subseteq \omega$, $A \subseteq^* B$ 表示几乎包含关系，意味着集合 $A \setminus B$ 是有限的；同样，$A =^* B$ 意味着集合 $A \triangle B$ 是有限的。

众所周知，根据 Stone 对偶，零维紧线对应于链代数；链代数是指其生成元集合具有线性序的代数。以下引理基本上是已知结果，参见 [19, 定理 8.7]。

引理 4.3. 设 $X \subseteq [0,1]$，并假设 $\mathcal{A} = \{A_x : x \in X\}$ 是 ω 的一个几乎链，即当 x、$y \in X$ 且 $x < y$ 时，$A_x \subseteq^* A_y$。记由 $\mathcal{A} \cup$fin 生成的布尔代数为 $\mathfrak{A}$。

那么，$K = \mathrm{ult}(\mathfrak{A}/\mathrm{fin})$ 是一个可分紧线，且 $w(K) = |X|$；而 $L = \mathrm{ult}(\mathfrak{A})$ 是 K 的一个可数离散扩张。

证明. 我们已经说明，L 可以看作 $K = \mathrm{ult}(\mathfrak{A}/\mathrm{fin})$ 的一个可数离散扩张。由于 $\mathfrak{A}/\mathrm{fin}$ 由一条链生成，K 是一条紧线，参见例如 [14,定理 15.7]。回想一下，这是因为每个超滤子 $\mathcal{U} \in \mathrm{ult}(\mathfrak{A}/\mathrm{fin})$ 都由集合 $X(\mathcal{U}) = \{x \in X : A_x/\mathrm{fin} \in \mathcal{U}\}$ 唯一确定；通过规定当 $X(\mathcal{V}) \subseteq X(\mathcal{U})$ 时 $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$，我们可以适当地对 $\mathrm{ult}(\mathfrak{A}/\mathrm{fin})$ 赋予序。

最后，K 是可分的：取一个可数集 $D \subseteq X$，使得对每个 $x \in X$ 和 $\delta > 0$，都存在 $d \in D$，使得 $x - \delta < d \leq x$。对于任意 $x \in X$，若记 $\mathcal{U}_x$ 为 K 中满足 x 是 $X(\mathcal{U})$ 的首个元素的唯一超滤子，则易见，$\{\mathcal{U}_d : d \in D\}$ 在 K 中稠密。△

我们还可以按以下方式反向得到这一刻画。

引理 4.4. 设 K 是一个零维可分紧线，且令 $L \in \mathrm{CDE}(K)$。那么存在 $X \subseteq [0,1]$ 以及一个几乎链 $\mathcal{A} = \{A_x : x \in X\}$，其元素是某个可数集 N 的子集，并且满足

(i) K 与 $\mathrm{ult}(\mathfrak{A}/\mathrm{fin})$ 同胚，且 (ii) L 与 $\mathrm{ult}(\mathfrak{A})$ 同胚，

其中 $\mathfrak{A}$ 是由 $\mathcal{A} \cup \mathrm{fin}(N)$ 生成的代数。

证明。根据定理 1.1，我们知道，对于某个闭集 $F \subseteq [0,1]$ 和子集 $X \subseteq F$，K 与空间 F_X 同胚，因此在证明中我们考虑 $K = F_X$。注意，由于 K 是零维的，X 必须在 F 中稠密（相对于自然拓扑）。由于 $L \in \mathrm{CDE}(F_X)$，我们有 $L = F_X \cup N$，其中 N 是一个可数无限的孤立点集。对于每个 $x \in X$，集合

$$C_x = \{(y,i) \in F \times \{0,1\} : (y,i) <_{lex} (x,1)\}$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$在 F_X 中既开又闭，因此存在一个 L 中的既开又闭集 C_x，使得 $C_x \cap F_X = C_x$。考虑$\sim A_x = C_x \cap N$。

对于 $x < y$ in F，$A_x \setminus A_y$ 的闭包与 F_X 不相交，因此该集合本身必定是有限的。换言之，$\mathcal{A} = \{A_x : x \in X\}$ 是 N的子集构成的几乎链。检查 (i) 和 (ii) 是否成立并不困难。△

引理 4.1 中通过提升对 $(\mathcal{R})$ 的刻画，很容易推广到 ω 的子集构成的近链，从而得到以下结果。

命题 4.5. 设 K =ult($\mathfrak{A}$/fin)，其中 $\mathfrak{A}$ 由几乎链 $\mathcal{A}$ ={A_x 生成： $x \in X$} 是 ω 的子集族，其中某个 $X \subseteq$ (0,1)。 K 的可数离散扩张$\sim$ $\sim L =$ ult($\mathfrak{A}$)具有性质 $(\mathcal{R})$，当且仅当存在一个族 $\mathcal{A} = \{A_x \subseteq \omega : x \in X\}$，使得

(i) 对每个 $x \in X$都有 $A_x =^* A_x$; $\widetilde{}$ $\widetilde{}$
(ii) 当 x、$y \in X$ 和 $x < y$时，有 $A_x \subseteq A_y$。

证明. 我们使用引理 4.1：为验证这些条件是充分的，注意我们可以$\widetilde{}$令 $\theta(A_x/\text{fin}) = A_x$ ，并将 θ 扩展为一个提升 $\mathfrak{A}/\text{fin} \to \mathfrak{A}$ ，因为每个 $b \in \mathfrak{A}/\text{fin}$ 都可以表示为形如 $A_y/\text{fin} - A_x/\text{fin}$ 的元素的有限并。必要性源于$\widetilde{}$这一事实：给定一个提升 θ： $\mathfrak{A}/\text{fin} \to \mathfrak{A}$，集合 $A_x = \theta(A_x/\text{fin})$ 正是所需的集合。△

5. Between $(\mathcal{R})$ and $(\mathcal{E})$

本节介绍一种构造：构造权为 ω_1 、不具有性质 $(\mathcal{R})$ 的紧线的可数离散扩张，但该扩张具有范数为 3 的延拓算子。本节末尾我们还将把这一结果应用于不一定是零维的空间。

下面的构造和定理 5.2 归功于 Witold Marciszewski。方便起见，我们考虑康托集 2^ω 的子集 X ，而不是 $[0,1]$ 的子集，并用 $2^{<\omega}$ 替换 ω 。我们可以这样做，因为空间 2^ω 可以看作区间 $[0,1]$ 的子集。

构造 5.1（Marciszewski）。考虑全二叉树 $T = 2^{<\omega}$。我们用 4 表示 $2^\omega \cup 2^{<\omega}$ 上的字典序：$x \preccurlyeq y$ 意味着 x 是 y 的初始片段，或者 $x(k) < y(k)$ 对于 $k = \min\{n \in \omega : x(n) \neq y(n)\}$。

取任意集合 $X \subseteq 2^\omega$ ，使得对于每个 $x \in X$ ，集合 $\{n : x(n) = 0\}$ 和 $\{n : x(n) = 1\}$ 都是无限的。对于每个 $x \in X$ ，我们记

$$S_x = \{x|n^\frown 0 : n \in \omega, x(n) = 1\}$$

考虑族 $\mathcal{A}_X = \{A_x : x \in X\}$ ，其中

$$A_x = \{t \in T : t \preccurlyeq x\} \setminus S_x.$$

注意， $\mathcal{A}_X$ 是可数集 T 的子集族，它是一个几乎链，也就是说，只要 x、$y \in X$ 且 $x \preccurlyeq y$，就有 $A_x \subseteq^* A_y$。将由 $\mathcal{A}_X \cup \text{fin}(T)$ 生成的布尔代数记为 $\mathfrak{A}_X$。

定理 5.2（Marciszewski）。在构造 5.1 的设定下，若 X 是不可数的，则空间 ult($\mathfrak{A}_X$/fin(T)) 是一个可分紧线，而空间 ult($\mathfrak{A}_X$) 是它的一个不具有性质 $(\mathcal{R})$ 的可数离散扩张。

证明。鉴于引理 4.3，我们只需证明不具备性质（$\mathcal{R}$）。

反设 $L = \mathbf{ult}(\mathfrak{A}_X)$ 具有性质（$\mathcal{R}$）；那么根据引理 4.5，对于每个$x \in X$，都存在 A_x 的有限修改 C_x，使得集合 C_x 构成一条链。考虑函数 $\varphi\colon X \to \omega$，定义如下:

$$\varphi(x) = \min\{n \in \omega : C_x \triangle A_x \subseteq \bigcup_{j<n} 2^j\}.$$

由于集合 X 不可数，存在某个 $k \in \omega$，使得 $Y = \varphi^{-1}(\{k\})$ 也不可数。因此，Y 有一个左侧聚点 $y \in Y$，所以存在一个序列 $x_n \prec y$，属于 Y，使得 $x_n \to y$。

当 $y(m) = 1$ 无限多次时，存在某个 $m > k$ 和 $x \in Y$，使得

$$x|m = y|m,\ x(m) = 0 \text{ and } y(m) = 1.$$

设 $\sigma = x|(m+1)$。由于 $y(m) = 1$ 和 $\sigma(m) = 0$，我们有 $\sigma \in S_y$，这意味着$\sigma \notin A_y$。我们还有 $m > k$，因此 $\sigma \notin C_y$（因为 $(C_y \triangle A_y) \cap 2^{m+1} = \emptyset$）。

现在，根据 σ 的定义，我们有 $\sigma \prec x$ 和 $\sigma \notin S_x$。这意味着 $\sigma \in A_x$。由于 $m > k$，可得 $\sigma \in C_x$。最后，$\sigma \in C_x \setminus C_y$，这意味着集合 C_x 不构成一条链，矛盾。$\triangle$

不过，我们可以构造如引理 4.2 中所述的测度序列来证明以下结果。

定理 5.3。在构造 5.1 的设定下，如果集合 X 是不可数的，那么空间 $L = \mathbf{ult}(\mathfrak{A}_X)$ 是 $K = \mathbf{ult}(\mathfrak{A}_X/\mathbf{fin}(T))$ 的一个可数离散扩张，满足$\eta(K, L) = 3$。

证明。对于任意 $\sigma \in 2^{<\omega}$，我们用 $p(\sigma) \in \mathbf{ult}(\mathfrak{A}_X)$ 表示满足以下条件的唯一非主超滤子。

$A_x \in p(\sigma)$ 当且仅当 $\sigma \prec x$ 对于 $x \in X$成立

给定 n和 $\sigma \in 2^n$，若 $\sigma(n-1) = 0$，则我们用 σ'表示序列 $\sigma|(n-1)^\frown 1$。此外，若我们能找到最大的数 $m < n-1$，使得 $\sigma(m) = 0$，则令 $\sigma'' = \sigma|m^\frown 1$。现在我们定义

$$\mu_\sigma = \begin{cases} \delta_{p(\sigma)} & \text{if } \sigma(n-1) = 1, \\ \delta_{p(\sigma)} - \delta_{p(\sigma')} + \delta_{p(\sigma'')} & \text{if } \sigma(n-1) = 0 \text{ and } \sigma|(n-1) \neq 1^{n-1}, \\ \delta_{p(\sigma)} - \delta_{p(\sigma')} & \text{if } \sigma(n-1) = 0 \text{ and } \sigma|(n-1) = 1^{n-1}. \end{cases}$$

Claim. 以下结论对每个 $\sigma \in T$和 $x \in X$均成立。
(a) 如果 $\sigma \in A_x$则 $\mu_\sigma(A_x) = 1$,
(b) 如果 $\sigma \notin A_x$则 $\mu_\sigma(A_x) = 0$。

为验证断言的 (a) 部分，取 $\sigma \in A_x \cap 2^n$。我们有 $\sigma \prec x$和 $\sigma \notin S_x$。根据 $p(\sigma)$的定义，我们知道 $\delta_{p(\sigma)}(A_x) = 1$，因为 $A_x \in p(\sigma)$。现在分两种情况讨论。

情况 1： $\sigma(n-1)=1$；那么 $\mu_\sigma=\delta_{p(\sigma)}$ 和 $\mu_\sigma(A_x)=1$。
情况 2： $\sigma(n-1)=0$；那么要么 $\sigma|(n-1)\neq x|(n-1)$，这意味着 $\sigma',\sigma''\prec x$ 或$\sigma|(n-1)=x|(n-1)$ 且 $\sigma',\sigma''\succ x.$。无论哪种情况，$\delta_{p(\sigma')}(A_x)=\delta_{p(\sigma'')}(A_x)$ 并且

$$\mu_\sigma(A_x)=(\delta_{p(\sigma)}-\delta_{p(\sigma')}+\delta_{p(\sigma'')})(A_x)=\delta_{p(\sigma)}(A_x)=1.$$

为验证 (b)，考虑满足 $\sigma\notin A_x$ 的 $\sigma\in 2^n$；那么 $x\prec\sigma$ 或 $\sigma\in S_x$。

在第一种情况下，我们有 $\delta_{p(\sigma)}(A_x)=0$，类似地 $\delta_{p(\sigma')}(A_x)=0$,$\delta_{p(\sigma'')}(A_x)=0$（如果它们有定义，则如 $\sigma\preccurlyeq\sigma',\sigma''$）。由此可得 $\mu_\sigma(A_x)=0$。

如果 $\sigma\in S_x$，那么我们有 $\sigma\preccurlyeq x$ 和 $\sigma'\preccurlyeq x$，因为 $\sigma'=x|n$ 和 $\sigma\prec\sigma'$。此外，如果定义了 σ''，那么它比 x 大 4，因为 $\sigma|(n-1)=x|(n-1)$，且 $\sigma|(n-1)\prec\sigma''$。由此可得

$$\mu_\sigma(A_x)=(\delta_{p(\sigma)}-\delta_{p(\sigma')}+\delta_{p(\sigma'')})(A_x)=1-1+0=0,$$

因此，断言的证明完成。

序列 $(\mu_\sigma)_{\sigma\in T}$ 满足 $\|\mu_\sigma\|\leq 3$，而断言说明 $\mu_\sigma-\delta_\sigma$ 在 $\mathfrak{A}$ 的生成链上的元素处为零。容易看出，集合

$$\{\sigma\in T:(\mu_\sigma-\delta_\sigma)(A)\neq 0\}$$

对每个 $A\in\mathfrak{A}$ 都是有限的，因此我们的测度满足引理 4.2 的条件，这意味着 $\eta(K,L)\leq 3$。另一方面，根据定理3.2和定理 5.2，$\eta(K,L)\geq 3$。△

作为本节的总结，我们将定理 5.3 中的例子推广为一般结果。首先回顾关于紧线 [12, 定理 2.4] 的以下事实。

定理 5.4（Heath 和 Lutzer）。如果 $K'\subseteq K$ 是紧线，那么存在一个范数为一的延拓算子 $C(K')\to C(K)$。

然后回顾以下观察结果——第一个是 [19,引理 8.6] 的（略作修改的）版本。

引理 5.5. 设 K 是具有不可数权 κ的可分紧线。那么 K包含空间 $2^{\omega}{}_X$的一个拓扑副本，其中 X 是 2^ω 的一个稠密子集，且满足 $|X|=\kappa$。

注记 5.6. 如果 $K'\subseteq K$ 是任意紧空间，那么 K'的任意可数扩张 L' 都可以用显而易见的方式定义 $L\in\mathrm{CDE}(K)$：设 $L'=K'\cup\omega$；那么空间 $L=K\cup\omega$可通过对 K 和 $K'\cup\omega$ 取拓扑不交并，并将 K' 中的每个点与其在 K中的对应副本等同而得到。

定理 5.7. 若 K 是不可度量化的可分紧线，则存在满足 $\eta(K,L)=3$ 的 $L\in\mathrm{CDE}(\{v3)$。

证明。由于 K 不可度量化，$\kappa=w(K)\geq\omega_1$。根据引理 5.5，我们可以在 K 中找到一个零维空间 $2^{\omega}{}_X$ 的副本 K'，其中 $|X|=\kappa$。然后，结合定理 5.3 和引理 4.4，我们可以定义 $L'\in\mathrm{CDE}(K')$，使得 $\eta(K',L')=3$。进而，我们得到注记 5.6 中提到的一个“显然的”可数离散扩张 $L=K\cup\omega$。

我们知道存在一个范数 3 的延拓算子 $E' : C(K') \to C(L')$，因此可以定义一个延拓算子 $E\colon C(K) \to C(L)$，其定义为

$$Ef(x) = \begin{cases} f(x) & \text{for } x \in K, \\ E'f|K'(x) & \text{for } x \in L \setminus K = \omega. \end{cases}$$

注意，Ef 在 L 上确实是连续的；显然，$\|E\| = \|E'\| = 3$。另一方面，根据定理 5.4，$\eta(K, L) < 3$ 意味着 $\eta(K', L') < 3$，这不可能成立。△

6. Outside ($\mathcal{E}$)

回想一下，如果 $\mathcal{I}$ 是例如康托集 2^ω 的子集构成的一个真 σ-理想，那么

$$\operatorname{non}(\mathcal{I}) = \min\{|X| : X \notin \mathcal{I}\}.$$

与 [3] 中一样，我们在此考虑由 2^ω 的子集构成的 σ-理想 I，这些子集可被可数个零测度闭集覆盖。Bartoszyński 和 Shelah [4] 讨论了 I 的基数系数；该理想通常记作 $\mathcal{E}$ ——显然有个理由让我们改用了记号。显然，$\mathrm{I} \subseteq \mathcal{N} \cap \mathcal{M}$，其中 $\mathcal{N}$ 表示 2^ω 的 λ-零测度子集族，λ 是标准乘积测度，而 $\mathcal{M}$ 表示 2^ω 中的 σ-第一纲集理想。因此

$$\operatorname{non}(\boldsymbol{\mathcal{I}}) \leq \min\left(\operatorname{non}(\mathcal{N}), \operatorname{non}(\mathcal{M})\right);$$

上述公式中的强不等式是相对一致的，见 [4]。回顾一下，如果将 2^ω 替换为任意不可数波兰空间（并将 λ 替换为其上的任意无原子博雷尔测度），经典 σ-理想的基数系数不会改变，参见 [4] 和 [11]。

本节的主要目的是证明以下定理。

定理 6.1. 设 $\kappa \geq \mathrm{non(I)}$。存在一个权为$\kappa$ 的零维紧线 K，它具有一个不具备性质（$\mathcal{E}$）的可数离散扩张。

我们首先给出一个构造，该构造将得到定理中提到的空间，并回顾证明中使用的一些概念。

构造 6.2. 我们考虑 $\omega^{<\omega}$ 的一个子树 T，定义如下：

$$T = \{\sigma : \sigma(n) \leq n \text{ for every } n\},$$

以及它的树体

$$C = \{0\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1, 2\} \times \dots$$

同样，与 5.1 节中一样，我们可以在集合 $T \cup C$ 上考虑字典序 4。由于空间 ω^ω 可以视为无理数集合，我们可以将 C 看作单位区间 $[0, 1]$ 的子集。

取任意集合 $X \subseteq C$。对于 $x \in X$，我们定义

$$S_x = \{x|n^\frown 0 : x(n) \text{ is odd}\},$$

$$A_x = \{\sigma \in T : \sigma \preccurlyeq x\} \setminus S_x$$

并考虑族 $\mathcal{A}_X = \{A_x : \ x \in X\}$。

如 5.1 中所述，可得 $\mathcal{A}_X$ 是 T 的子集构成的几乎链。因此，若将由 $\mathcal{A}_X \cup \mathsf{fin}(T)$ 生成的布尔代数记为 $\mathfrak{B}_X$，那么 $K = \mathsf{ult}(\mathfrak{B}_X/\mathsf{fin}(T))$ 是一条可分紧线，其中 $w(K) = |X|$，而 $L = \mathsf{ult}(\mathfrak{B}_X)$ 是它的可数离散扩张，见引理 4.3。

为证明下文的结果，我们赋予 C 标准乘积测度 λ；因此，对于每个长度为 n 且满足 $i \leq n$ 的 $\sigma \in T$，我们的测度满足

$$\lambda([\sigma^\frown i]) = \lambda([\sigma])/(n+1), \tag{1}$$

其中 $[\sigma]$ 表示 C 中所有扩张 σ 的元素。于是我们可以认为，I 是空间 C 的子集所构成的 σ-理想，由测度为零的闭子集生成。

我们将利用测度 λ 满足勒贝格密度定理这一事实，即对于每个闭集 $F \subseteq C$，都有

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \frac{\lambda([x|k] \cap F)]}{\lambda([x|k])} = 1,$$

对于几乎所有 $x \in F$（相对于 λ）。例如，参见 [17, 命题 2.10]，其中给出了一个简短证明，说明每个波兰超度量空间上的概率测度都具有这一性质。

证明。（定理 5.2 的证明）由于 $\kappa \geq \mathsf{non(I)}$，我们任取一个基数为 κ 的集合 $X \subseteq C$，且满足 $X \notin \mathrm{I}$。这意味着，每当 $X = \bigcup_n X_n$ 时，对于某个 n，都有 $\lambda(\overline{X_n}) > 0$。

取自构造 6.2 的空间 $L = \mathsf{ult}(\mathfrak{B}_X)$。我们将验证 L 是 $K = \mathsf{ult}(\mathfrak{B}_X/\mathsf{fin}(T))$ 的可数离散扩张，且不具有性质 $(\mathcal{E})$。根据引理 4.2，只需证明：每当 $(\mu_\sigma)_{\sigma \in T}$ 是满足条件的 $\mathfrak{B}_X$ 上的有限可加测度序列时

(i) $\mu_\sigma(I) = 0$ 对于每个 $I \in \mathsf{fin}(T)$ 和每个 σ；(ii) 集合 $\{\sigma \in T : |\mu_\sigma(A) - \delta_\sigma(A)| \geq \varepsilon\}$ 对于每个 $A \in \mathfrak{B}_X$ 和 $\varepsilon > 0$ 都是有限的，

于是 $\sup_\sigma \|\mu_\sigma\| = \infty$.

给定这样一个测度族 μ_σ，对于每个 $x \in X$，我们令

$$B_x = \{\sigma \in T : |\mu_\sigma(A_x) - \delta_\sigma(A_x)| < 1/4\}.$$

由此可知，每个 B_x 都是 A_x 的有限修改，我们可以写成 $X = \bigcup_n X_n$，其中 X_n 是所有满足以下条件的 $x \in X$ 构成的集合：对于所有长度为 $\geq n$的 σ， $\sigma \in B_x$ 与 $\sigma \in A_x$ 等价。

根据准备性说明，存在 n_0，令 $F = \overline{X_{n_0}}$，则有 $\lambda(F) > 0$；进而，存在一点 $y \in F$，使集合 F 的密度为一。

令 p 为一个自然数。取满足以下条件的 $n > n_0$：

$$\frac{\lambda([y|n] \cap F)]}{\lambda([y|n])} > \frac{2p}{2p+1}. \tag{2}$$

当然，我们可以假设对于某个自然数 k， $n+1=2pk$。考虑集合

$$I=\{i\le n: y|n^\frown i=x|(n+1) \text{ for some } x\in F\}.$$

Claim 1. 集合 I 满足

$$|I|\ge \frac{2p}{2p+1}(n+1).$$

事实上， $i\notin I$ 蕴含 $[y|n^\frown i]\cap F=\emptyset$，因此该断言由 (1) 和 (2) 得出。

将 $\{0,\dots,n\}$ 划分为 p 个连续区间 J_0、.....、 J_{p-1}，每个区间都满足 $|J_i|=2k$。

Claim 2. $|I\cap J_i|>k$ 对每个 $i<p$都成立。

事实上，根据断言 1，我们有

$$\frac{2p}{2p+1}(n+1)\le |I|=|I\cap J_i|+|I\setminus J_i|\le |I\cap J_i|+n+1-2k, \text{ so}$$

$$|I\cap J_i|\ge \frac{2p}{2p+1}(n+1)-(n+1)+2k=2k\frac{p+1}{2p+1}>k.$$

由断言 2 可知，对每个 $i\le p$，集合 $I\cap J_i$ 至少包含一个奇数和一个偶数。取一个偶数 $m_0\in I\cap J_0$、一个奇数 $m_1\in I\cap J_1$、一个偶数 $m_2\in I\cap J_2$，依此类推。

令 $\sigma=y|n^\frown 0$。根据 I 的定义以及 $F=\overline{X_{n_0}}$ 这一事实，我们得出存在 $x_0,\dots,x_{p-1}\in X_{n_0}$，使得

$$\sigma\in A_{x_0},\sigma\notin A_{x_1},\sigma\in A_{x_2}\dots$$

因此，由于 A_x 在该层级与 B_x 相符，

$$\mu_\sigma(A_{x_0})>3/4,\mu_\sigma(A_{x_1})<1/4,\mu_\sigma(A_{x_2})>3/4,\dots$$

我们知道 $x_0\preccurlyeq x_1\preccurlyeq\dots$，所以集合 A_{x_i} 构成几乎链。由于测度 μ_σ 在有限集上为零，例如有

$$\mu_\sigma(A_{x_1}\setminus A_{x_0})=\mu_\sigma(A_{x_1})-\mu_\sigma(A_{x_0})<1/4-3/4=-1/2.$$

同理可得 $|\mu_\sigma|(A_{x_i}\setminus A_{x_{i-1}})\ge 1/2$，并得出 $\|\mu_\sigma\|\ge(p-1)/2$。由于 p 是任意自然数，我们得到 $\sup_\sigma\|\mu_\sigma\|=\infty$，如所需。△

推论 6.3. 每个权为 $\ge \mathrm{non(I)}$ 的可分紧线 K 都有一个不具有性质 $(\mathcal{E})$ 的可数离散扩张。

证明。我们可以按照定理 5.7 的证明进行论证：找出 K 和 $L'\in \mathrm{CDE}(K')$ 的一个零维子空间K'，使得 $\eta(K',L')=\infty$，将 L' 与 K 结合起来得到$L\in CDE(K)$，并注意到根据定理 5.4， $\eta(K,L)$ 也是无限的。△

我们还要提及，对定理 5.7 的证明稍作修改，即对其中使用的树进行稀疏化，应能得到 $L \in \mathrm{CDE}(K)$，其中 $\eta(K,L)$ 有限但可任意大。

7. Remarks and problems

这里简要回顾一下：若 K 是任意紧空间，且 L 是 K 的一个不具有性质（$\mathcal{E}$）的可数离散扩张，则可以构造一个非平凡的短正合列

$$0 \to c_0 \to C(L) \to C(K) \to 0,$$

这意味着 c_0 嵌入到 $C(L)$的一个不可补子空间 Z 中，而商空间 $C(L)/Z$ 同构于 $C(K)$；参见 [19, 引理 2.4]。这里， c_0 是经典的趋于 0 的序列巴拿赫空间；它在巴拿赫空间的短正合列中具有特殊作用，这是因为根据 Sobczyk 定理， c_0 在每个可分巴拿赫超空间中都是可补的。此外，文献 [3] 证明了，对于每个非平凡的短正合列

$$0 \to c_0 \to ? \to C(K) \to 0,$$

所涉及的巴拿赫空间都可以在形如 $C(L)$的空间中找到，其中 L是 $M_1(K)$的一个可数离散扩张，且 $C(K)^*$是对偶单位球。巴拿赫空间的扭和，以及更一般地说，巴拿赫空间理论中的同调方法，是近期一部篇幅宏大的专著 [5]的研究主题。

鉴于 [19], [8] 和 [3] 的研究结果，以下问题似乎是一个自然的问题，而且显然仍未得到解决。

问题 7.1. 是否相对一致：对于任意 K ，若其为权为 ω_1 的可分紧空间，则对每个 $L \in \mathrm{CDE}(K)$， $\eta(K,L) < \infty$？

特别是，鉴于上述结果，我们可以进一步探讨：问题 7.1 能否在可分紧线性序空间这一类中得到解决?

回想一下，不难证明每个满足 $w(K) = \omega_1$ 的不可分紧线序空间 K 都具有一个满足 $\eta(K,L) = \infty$的可数离散扩张 L。具体而言，可以构造 $L = K \cup \omega$，使得 L 是集合 $\omega \subseteq K$的闭包。于是，如果我们假设 $\eta(K,L) < \infty$，那么由引理 2.3(b)可知， K 必然支持一个严格正的非负测度 μ。然而，承载这种测度的紧线序空间必然是可分的（详见 [19, 第 8]节）。

References

[1] F. Albiac 和 N.J. Kalton，《巴拿赫空间理论专题》，Springer，纽约（2006）。[2] A. Avil´es 和 W. Marciszewski，《球与有限集空间上的延拓算子》，《数学研究》227（2015），165–182。

[3] A. Avil´es、W. Marciszewski 和 G. Plebanek, 《c_0 与 $C(K)$-空间的扭和：CCKY问题的解》, 《数学进展》369（2020）, 107168。[4] T. Bartoszy´nski、S. Shelah, 《闭测度零集》, 《纯粹与应用逻辑年刊》58（1992）, 93–110。[5] F. Cabello S´anchez、J.M.F. Castillo, 《巴拿赫空间理论中的同调方法》, 《剑桥高等数学研究丛书》第203卷, 剑桥大学出版社, 剑桥（2023）。[6] H.H. Corson 和 J. Lindenstrauss, 《连续函数的同时扩张》, 《美国数学会通报》71（1965）, 258–262。[7] C. Correa、D.V. Tausk, 《紧线与 Sobczyk 性质》, 《泛函分析杂志》266（2014）, 5765–5778。[8] C. Correa、D.V. Tausk, 《有限高度空间的局部扩张性质》, 《数学基础》245（2019）, 149–165。[9] P. Drygier 和 G. Plebanek, 《ω 的紧化与巴拿赫空间 c_0》, 《数学基础》237（2017）, 165–186。[10] R. Engelking, 《一般拓扑学》, Heldermann出版社, 柏林（1989）。[11] D.H. Fremlin, 《测度论》第5卷《集合论测度论》第I部分。2008年原版的修订重印本。Torres Fremlin, 科尔切斯特（2015）。[12] R.W. Heath、D.J. Lutzer, 《线性有序空间的 Dugundji 扩张定理》, 《太平洋数学杂志》55（1974）, 419–425。[13] O.F.K. Kalenda、W. Kubi´s, 《紧线上的连续函数空间的补空间》, 《数学分析与应用杂志》386（2012）, 241–257。[14] S. Koppelberg, 《布尔代数手册》第1卷, 柏林自由大学, 柏林（1989）。[15] J. Lindenstrauss 和 L. Tzafriri, 《经典巴拿赫空间》, 《数学讲义》第338卷, 施普林格出版社, 柏林—纽约（1973）。[16] W. Marciszewski, 《双箭头空间及相关巴拿赫空间 $C(K)$的改造》, 《数学研究》184（2008）, 249–262。[17] B. Miller, 《给定余循环的测度的存在性。I. 无原子、遍历的 σ-有限测度》, 《遍历理论与动力系统》28（2008）, 1599–1613。[18] A. Michalak, 《可分紧线上的连续函数巴拿赫空间的一些几何性质》, 《波兰科学院数学通报》65（2017）, 57–68。[19] W. Marciszewski 和 G. Plebanek, 《c_0 与 $C(K)$空间的延拓算子与扭和》, 《泛函分析杂志》274（2018）, 1491–1529。[20] A.J. Ostaszewski, 《紧致可分有序空间的刻画》, 《伦敦数学会杂志》7（1974）, 758–760。[21] A. Pe lczy´nski, 《线性扩张、线性平均算子及其在线性拓扑分类连续函数空间中的应用》, 《数学论文集》58（1968）。[22] W. A. Veech, 《Sobczyk 定理的简短证明》, 《美国数学会会刊》28（1971）, 627–628。

Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski, pl. Grunwaldzki 2, 50-384 Wroc-law, Poland电子邮件地址：Maciej.Korpalski@math.uni.wroc.pl,
Grzegorz.Plebanek@math.uni.wroc.pl