奇异线性方程组三步交替迭代格式的收敛性和半收敛性补充结果

VaibhavShekhar[a]，Punit Shar
ma[b]印度理工学院德里分校数学系，印度。电
子邮箱[a]：vaibhavshekhar29@gmail.com 电
子邮箱[b]：punit.sharma@maths.iitd.ac.in

arXiv:2305.04569v1 [math.NA] 8 May 2023

摘要

Nandi 等人最近提出了一种三步交替迭代格式，用于更快速地求解奇异（非奇异）线性方程组的迭代解 [Numer. Algorithms; 84 (2) (2020) 457-483],。随后，作者给出了该格式在一类称为 I 型适当 G-弱正则分裂的矩阵分裂下的收敛判据。在本文中，我们进一步分析了同一格式的收敛判据。为此，我们获得了另一类称为 II 型适当 G-弱正则分裂的矩阵分裂下该格式收敛的充分条件。随后，我们证明，即使对于这一类分裂，该格式也比两步交替迭代格式和常规迭代格式收敛得更快。作为一个特例，我们还建立了非奇异矩阵情形下三步格式的快速收敛判据。研究表明，为了比三步交替迭代法更高效地求解非奇异线性方程组，单步和两步交替迭代法需要消耗大量的计算时间和内存。最后，我们证明了三步交替迭代格式的半收敛性。通过考虑一个源于马尔可夫过程的奇异线性方程组，展示了该格式更快的半收敛速度。

关键词：线性方程组、三步交替迭代法、群逆、收敛定理、半收敛性 数学主题分类：15A09

1. 引言

形式为.....的奇异线性方程组

$$Ax = b, \tag{1.1}$$

其中 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$、 $x \in \mathbb{R}^n$和 $b \in \mathbb{R}^n$出现在许多数学问题中，例如马尔可夫过程的研究（见 [5]）以及用于求解某些偏微分方程的有限差分法，例如球面上的诺伊曼问题和泊松方程预印本提交至 XYZ 2023年5月9日

（见 [21]）。我们首先考虑 A 的指标为 1 的情形，即若 rank(A)=rank(A^2)。满足矩阵方程 $AXA = A$、 $XAX = X$ 和$AX = XA$ 的唯一矩阵 $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 称为矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$的群逆，记为 $A^{\#}$。它并不总是存在，而仅对指标为 1 的矩阵存在。利用矩阵分裂，可以使用这一广义逆求得（1.1）的解。若 U 是非奇异的，则表达式 $A = U - V$称为 A 的分裂。 [1] 的作者提出了一类称为适当分裂的分裂，用于求解矩形/奇异线性方程组。若 $\mathcal{R}(U) = \mathcal{R}(A)$ 且 $\mathcal{N}(U) = \mathcal{N}(A)$，则分裂$A = U-V$称为适当分裂 [1]，其中 $\mathcal{R}(B)$ 和 $\mathcal{N}(B)$ 分别表示矩阵 B的值域空间和零空间。Mishra 和 Mishra [20]证明了在适当的充分条件下适当分裂的唯一性。利用适当分裂 $A = U - V$，Wei [23] 证明了（通常的）迭代格式

$$x^{k+1} = U^{\#}Vx^k + U^{\#}b, \quad k = 0, 1, 2, \cdots \tag{1.2}$$

当且仅当 $\rho(U^{\#}V) < 1$时，它收敛到 $A^{\#}b$（称为最小 P 范数解），用于求解形式为 (1.1) 的指标1线性系统。作者还针对适当分裂的不同子类，建立了迭代格式 (1.2) 的若干收敛判据。若适当分裂 $A = U - V$ of $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 满足以下条件，则称其为

1. 若 $U^{\#}$ 存在， $U_{\#} \geq 0$ 且 $V \geq 0$[3]，则称为适当 G-正则分裂；2. 若 $U^{\#}$ 存在，$U_{\#} \geq 0$ 且 $U_{\#}V \geq 0$[3]，则称为适当 G-弱正则分裂（I 型）；3. 若 $U_{\#}$存在，$U^{\#} \geq 0$ 且 $VU_{\#} \geq 0$[6]，则称为 II 型适当 G-弱正则分裂。

这里， $B \geq 0$ 表示 B 的所有元素均非负。若 $n \times n$ 实矩阵 A 满足 $Ax \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$，则称其为单调矩阵。Collatz [14] 证明了， A 是单调矩阵当且仅当 A^{-1}存在且 $A^{-1} \geq 0$。关于单调矩阵在求解椭圆型偏微分方程的有限差分近似方法中的自然出现，参见 [14], ；关于单调性概念的不同推广及其刻画，参见 [2], 。下面回顾其中一种刻画。若实 $n \times n$ 矩阵 A满足 $A^{\#}$存在且 $A^{\#} \geq 0$，则称其为群单调矩阵。下面给出一个关于群单调矩阵的刻画，该刻画基于 I 型适当 G-弱正则分裂。设 $A = U - V$ 是一个 I 型适当 G-弱正则分裂。那么， A 是群单调矩阵当且仅当 $\rho(U^{\#}V) < 1$ [4]。这一刻画还给出了迭代格式 (1.2) 收敛的充分条件。文献中也有关于 II 型适当 G-弱正则分裂的群单调矩阵的类似刻画（详情见第2节）。在许多实际情形中，通常迭代格式 (1.2) 收敛非常缓慢。因此，文献中建立了不同的比较结果（参见 [7], [15], [16], [17]和 [24]）。这些结果有助于我们找到一种分裂

使其对应的迭代格式比其他迭代格式收敛更快。然而，当一个矩阵有许多适当分裂时，寻找最佳分裂（即收敛速度最快的分裂）是一个复杂且耗时的过程。为避免这种情况，Nandi 等人[4]提出了三步交替迭代格式：

$$x^{k+1} = X^{\#}YU^{\#}VK^{\#}Lx^{k} + X^{\#}(YU^{\#}VK^{\#} + YU^{\#} + I)b, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1.3}$$

采用适当分裂 $A = K - L = U - V = X - Y$，其思路源自 Mishra 的工作[9]。类似地，可以构造相应的两步交替格式

$$x^{k+1} = X^{\#}YU^{\#}Vx^{k} + X^{\#}(YU^{\#} + I)b, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1.4}$$

对应于适当分裂 $A = U - V = X - Y$，即 [9] 的交替迭代格式 (7) 的群逆版本。[4] 的作者随后证明，在满足某些条件的假设下，三步交替格式对于 I 型适当 G-弱正则分裂是收敛的。然而，对于 II 型适当 G-弱正则分裂，迭代格式 (1.3) 和 (1.4) 的收敛理论尚未得到研究。

接下来讨论 (1.1) 中的系数矩阵指标不一定为 1 的情形。众所周知，当矩阵 U 非奇异时，(1.2) 可化为

$$x^{k+1} = U^{-1}Vx^{k} + U^{-1}b. \tag{1.5}$$

对于任意 x^0，(1.2) 收敛的充要条件是 $\rho(U^{-1}V) < 1$（在此情形下 $U^{-1}V$ 零收敛）[22]。然而，如果 A 奇异，那么此时 $U^{-1}V$ 的特征值 1 会导致 (1.5) 不收敛，即 $U^{-1}V$ 不零收敛。因此，我们寻求一些充要条件，使得 (1.5) 收敛到 (1.1) 的一个解。如果这一情形成立，则称格式 (1.5) 是半收敛的。关于三步交替迭代格式的半收敛判据，文献中也尚无相关结果。

本文的目的有两个。首先，我们建立 II 型适当 G-弱正则分裂下三步交替迭代格式的收敛理论。其次，对于 I 型或 II 型准弱正则分裂，我们给出三步迭代格式半收敛的充分判据。本文其余部分安排如下。第2节介绍推导主要结果时经常用到的符号、定义及若干预备结果。第3节研究求解指标一线性方程组的问题，并给出一些结果，提出三步交替迭代格式 (1.3) 的另一组收敛判据。本节还讨论比较结果，表明三步交替迭代格式

比两步交替迭代格式和通常迭代格式收敛得更快。第4节讨论系数矩阵为奇异矩阵或奇异 M-矩阵时三步交替迭代格式的半收敛问题。

2. 预备知识

令 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 表示所有 $n\times n$阶实矩阵的集合。 $\mathbb{R}^n$ 表示一个 n维欧几里得空间。 A^t 表示矩阵 A的转置。设 L 和 M 是 $\mathbb{R}^n$ 的互补子空间（即 $L\oplus M=\mathbb{R}^n$），则$P_{L,M}$是沿着 M在 L 上的投影算子。因此，$P_{L,M}A=A$当且仅当 $\mathcal{R}(A)\subseteq L$，且$AP_{L,M}=A$当且仅当 $\mathcal{N}(A)\supseteq M$。$r(A)$表示矩阵 A的秩。群逆的一些有用性质如下：$\mathcal{R}(A)=\mathcal{R}(A^{\#})$; $\mathcal{N}(A)=\mathcal{N}(A^{\#})$; $AA^{\#}=P_{\mathcal{R}(A),\mathcal{N}(A)}=A^{\#}A$。特别地，若 $x\in\mathcal{R}(A)$，则 $x=A^{\#}Ax$。设 $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$。那么 $A\geq B$ 表示 $A-B\geq 0$。对于 $x\in\mathbb{R}^n$ 也有类似的记号，因为它可视为一个 $n\times 1$ 矩阵。 A 的谱半径记为 $\rho(A)=\max\{|\lambda|:\ \lambda是\ A\}$ 的一个特征值，且其谱记为$\sigma(A)$。我们定义 $\gamma(A)=\max\{|\lambda|:\ \lambda\in\sigma(A)\ \lambda\neq 1\}$。若矩阵 A 满足 $\lim\limits_{k\to\infty}A^k=0$，则称其为收敛矩阵（或零收敛矩阵）；若 $\lim\limits_{k\to\infty}A^k$ 存在，则称其为半收敛矩阵，尽管其极限不一定是零矩阵。若存在 $A=sI-B$ 使得 $s>0$ 且 $s\geq\rho(B)$，则称 A 为一个 M-矩阵。若 $s>\rho(B)$，则它是非奇异 M-矩阵；若 $s=\rho(B)$，则它是奇异 M-矩阵。若存在某个 s使得 $s^{-1}B$ 半收敛，则称 M-矩阵 A 具有性质 c。下面三个结果讨论非负矩阵及其谱半径。

定理2.1. ([22,定理2.20])
设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 和 $A\geq 0$。则 (i) A 有一个实特征值，且该特征值等于其谱半径。(ii) 存在一个对应于其谱半径的非负特征向量。

定理2.2. ([2,定理2.1.11])
设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $A\geq 0$, $x\geq 0$ $(x\neq 0)$，且 α 为正标量。(i) 若 $\alpha x\leq Ax$，则 $\alpha\leq\rho(A)$。(ii) 若 $Ax\leq\alpha x$, $x>0$，则 $\rho(A)\leq\alpha$。

定理 2.3. ([22,定理 3.15])
设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 和 $A\geq 0$。则 $\rho(A)<1$ 当且仅当 $(I-A)^{-1}$ 存在且 $(I-A)^{-1}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}A^k\geq 0.$

[4, 定理 4] 汇总了适当分裂 $A=U-V$的一些性质，现介绍如下。

定理 2.4. ([4,定理 4])
设 $A = U - V$是 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$的一个适当分裂。假设 $A^{\#}$ 存在。那么 (i) $U^{\#}$ 存在，(ii) $AA^{\#} = UU^{\#}$; $A^{\#}A = U_{\#}U$，(iii) $A = U(I - U_{\#}V) = (I - VU^{\#})U$，$(iv)$ $I - U_{\#}V$和 $I - VU^{\#}$非奇异，(v) $A^{\#} = (I - U^{\#}V)^{-1}U_{\#} = U_{\#}(I - VU_{\#})^{-1}$。

以下结果是 [6, 定理 10]的一个特例，并给出了迭代格式 (1.2) 的收敛判据。

定理 2.5. 设 $A = U - V$ 是 A 的 II 型适当 G-弱正则分裂。那么 $A^{\#} \geq 0$ 当且仅当 $\rho(U^{\#}V) < 1$。

众所周知，能够使迭代矩阵的谱半径更小的矩阵分裂具有更快的收敛速度。下面的结果比较了由不同类型的矩阵分裂产生的不同迭代矩阵的收敛速度，是 [6,定理 11]的一个特例。

定理 2.6. 设 $A = U - V$ 是群单调矩阵 A 的 II 型适当 G-弱正则分裂，$A = X - Y$是 I 型适当 G-弱正则分裂。若 $U_{\#} \geq X^{\#}$，则 $\rho(U^{\#}V) \leq \rho(X^{\#}Y) < 1$。

3. II 型 G-弱正规分裂下三步交替迭代格式的收敛性

本节给出 II 型适当 G-弱正则分裂下三步交替迭代格式的收敛判据。除非另有明确说明，本节假设 A 的指标为 1。除非另有说明，我们常用 $\mathcal{H}$ 表示相应迭代格式的迭代矩阵。例如，若考虑 II 型适当 G-弱正则分裂 $A = K - L = U - V = X - Y$，则 $\mathcal{H} = X^{\#}YU^{\#}VK^{\#}L$，且 $\mathcal{S} = YX^{\#}VU_{\#}{}_{LK^{\#}}$是非负矩阵。同样，对于 II 型适当 G-弱正则分裂 $A = U - V = X - Y$， $\mathcal{H} = X^{\#}YU^{\#}V$，且 $\mathcal{S} = YX^{\#}VU_{\#}$。以下两个结果有助于推导给定矩阵分裂为 II 型适当 G-弱正则分裂时，三步迭代格式 (1.3) 的收敛判据。

引理 3.1. 设 $A = K - L = U - V = X - Y$ 是 A 的三个适当分裂。如果$B = K(K + X - A + YU_{\#}L)^{\#}X$, $\mathcal{R}(K + X - A + YU^{\#}L) = \mathcal{R}(A)$ 和 $\mathcal{N}(K + X -$

$A + YU_{\#}L) = \mathcal{N}(A)$, 则 $B^{\#} = X^{\#}(K + X - A + YU^{\#}L)K^{\#}$, $\mathcal{R}(B) = \mathcal{R}(A)$ 和$\mathcal{N}(B) = \mathcal{N}(A)$。

证明。令 $Z = X^{\#}(K + X - A + YU^{\#}L)K^{\#}$. 由于 $\mathcal{R}(K + X - A + YU^{\#}L) = \mathcal{R}(A)$、$\mathcal{N}(K+X-A+YU^{\#}L) = \mathcal{N}(A)$ 和 $A = K-L = U-V = X-Y$均为适当分裂, 因此有 $(K+X-A+YU^{\#}L)(K+X-A+YU_{\#}L)^{\#} = AA^{\#} = KK^{\#} = UU_{\#}= XX^{\#}$。于是,

$$\begin{aligned} ZB &= X^{\#}(K + X - A + YU^{\#}L)K^{\#}K(K + X - A + YU^{\#}L)^{\#}X \\ &= X^{\#}(K + X - A + YU^{\#}L)(K + X - A + YU^{\#}L)^{\#}X \\ &= X^{\#}X = XX^{\#} = KK^{\#} \\ &= K(K + X - A + YU^{\#}L)^{\#}(K + X - A + YU^{\#}L)K^{\#} \\ &= K(K + X - A + YU^{\#}L)^{\#}XX^{\#}(K + X - A + YU^{\#}L)K^{\#} \\ &= BZ. \end{aligned}$$

现在, $ZB = X^{\#}X$和 $Z = X^{\#}(K + X - A + YU^{\#}L)K^{\#}$ 得到 $ZBZ = X^{\#}XX^{\#}(K +X - A + YU_{\#}L)K^{\#} = X^{\#}(K + X - A + YU^{\#}L)K^{\#} = Z$。类似地, 利用 $BZ = KK^{\#}$和 $B = K(K+X-A+YU_{\#}L)^{\#}X$, 有 $BZB = KK^{\#}K(K+X-A+YU^{\#}L)^{\#}X =K(K + X - A + YU^{\#}L)^{\#}X = B$。因此, $Z = B^{\#}$.

为了证明 $\mathcal{R}(B) = \mathcal{R}(A)$ 和 $\mathcal{N}(B) = \mathcal{N}(A)$, 我们首先证明由 $A = X - Y$ 是适当分裂可知, 当 $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(X)$ 时, $\mathcal{N}(X) =\mathcal{N}(B)$。显然, $\mathcal{N}(X) \subseteq \mathcal{N}(B)$。令 $Bx = 0$。左乘 $K^{\#}$, 并利用 $K^{\#}K =(K + X - A + YU^{\#}L)^{\#}(K + X - A + YU\#L)$, 可得 $(K + X - A + YU\#L)^{\#}Xx = 0$。再次左乘 $(K + X - A + YU\#L)$, 并利用 $(K + X - A + YU^{\#}L)(K +X - A + YU^{\#}L)^{\#} = XX^{\#}$, 可得 $Xx = 0$。因此, $\mathcal{N}(X) = \mathcal{N}(B)$。接下来, 我们需要证明 $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(B)$, 这等价于 $\mathcal{N}(A^T) = \mathcal{N}(B^T)$。同样, 由 $A = K - L$ 是适当分裂可得 $\mathcal{N}(A^T) = \mathcal{N}(K^T)$。因此, 需要证明 $\mathcal{N}(K^T) = \mathcal{N}(B^T)$。显然, $\mathcal{N}(K^T) \subseteq \mathcal{N}(B^T)$。令 $B^Tx = 0$。左乘 $(X^{\#})^T$, 可得 $(X^{\#})^TX^T((K + X - A + YU^{\#}L)^{\#})^TK^T = 0$, 即 $(K(K + X - A +YU\#L)^{\#}XX^{\#})^Tx = 0$。由于 $XX^{\#} =(K + X - A + YU^{\#}L)(K + X - A + YU\#L)^{\#}$, 因此有 $((K+X-A+YU\#L)^{\#})^TK^Tx = 0$。再次左乘 $(K+X-A+YU^{\#}L)^T$, 并利用 $K^{\#}K =(K + X - A + YU^{\#}L)^{\#}(K + X - A + YU\#L)$, 可得 $K^Tx = 0$。因此$\mathcal{N}(B^T) = \mathcal{N}(K^T) = \mathcal{N}(A^T)$。由此, $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(B)$。

□

在引理 3.1 中， $B^{\#}$ 也可以表示为

$$\begin{aligned} B^{\#} &= X^{\#}(K+X-A+YU^{\#}L)K^{\#} \\ &= X^{\#}KK^{\#}+X^{\#}XK^{\#}-X^{\#}AK^{\#}+X^{\#}YU^{\#}LK^{\#} \\ &= X^{\#}+X^{\#}YK^{\#}+X^{\#}YU^{\#}LK^{\#} \end{aligned} \tag{3.1}$$

and

$$B^{\#} = K^{\#}+X^{\#}LK^{\#}+X^{\#}YU^{\#}LK^{\#}. \tag{3.2}$$

对于两步交替迭代，我们有如下结果：引理 4.3] 的群版本 [8, 。

推论 3.2. 设 $A = U-V = X-Y$是 A的两个适当分裂。若 $B = U(U+X-A)^{\#}X$, $\mathcal{R}(U+X-A) = \mathcal{R}(A)$ 且 $\mathcal{N}(U+X-A) = \mathcal{N}(A)$，则 $B^{\#} = X^{\#}(U+X-A)U^{\#}$,$\mathcal{R}(B) = \mathcal{R}(A)$ 且 $\mathcal{N}(B) = \mathcal{N}(A)$。

对于 II 型适当 G-弱正则分裂，建立迭代格式 (1.3) 的收敛判据似乎并不简单。因此，我们借助矩阵 $\mathcal{S} = YX^{\#}VU^{\#}LK^{\#}$。下一个结果涉及 $\mathcal{H} = X^{\#}YU^{\#}VK^{\#}L$ 和 $\mathcal{S}$ 所具有的一些重要关系。

定理 3.3. 设 $A = K-L = U-V = X-Y$ 是 A 和 $\mathcal{S} = YX^{\#}VU^{\#}LK^{\#}.$ 的三个适当分裂，则，
(i) $AA^{\#}\mathcal{S} = \mathcal{S} = \mathcal{S}AA^{\#}$ 和 $A^{\#}A\mathcal{H} = \mathcal{H} = \mathcal{H}A^{\#}A$，其中 $\mathcal{H}$ 是迭代格式 (1.3) 的迭代矩阵。
(ii) $\mathcal{S} = A\mathcal{H}A^{\#}$, $\mathcal{H} = A^{\#}\mathcal{S}A$ 和 $\rho(\mathcal{S}) = \rho(\mathcal{H})$。
(iii) $I-\mathcal{S}$和 $I-\mathcal{H}$可逆，当且仅当 $\mathcal{R}(K+X-A+YU^{\#}L) = \mathcal{R}(A)$ 且 $\mathcal{N}(K+X-A+YU^{\#}L) = \mathcal{N}(A)$。

证明。(i) 显然，我们有 $\mathcal{R}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{R}(Y)$。但是，由于 $A = X-Y$ 是一个适当分裂，$\mathcal{R}(Y) \subseteq \mathcal{R}(A)$。因此， $\mathcal{R}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{R}(Y) \subseteq \mathcal{R}(A)$。于是， $AA^{\#}\mathcal{S} = \mathcal{S}$。类似地，由于 $A = X-Y$ 是一个适当分裂，很容易看出 $\mathcal{S}AA^{\#} = YX^{\#}VU^{\#}LK^{\#}AA^{\#} = YX^{\#}VU^{\#}LK^{\#}KK^{\#} = \mathcal{S}$。通过类似的论证，我们得到另一个等式。
(ii) 由于 $AA^{\#} = XX^{\#}$，我们得到 $X^{\#}YA^{\#} = X^{\#}(X-A)A^{\#} = X^{\#}XA^{\#}-X^{\#}AA^{\#} = A^{\#}AA^{\#}-X^{\#}XX^{\#} = A^{\#}XX^{\#}-A^{\#}AX^{\#} = A^{\#}(X-A)X^{\#} = A^{\#}YX^{\#}$。类似地，

$U_{\#}VA^{\#} = A^{\#}VU^{\#}$和 $K^{\#}LA^{\#} = A^{\#}LK^{\#}$。因此,

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= AA^{\#}\mathcal{S} \\ &= AA^{\#}YX^{\#}VU^{\#}LK^{\#} \\ &= AX^{\#}YA^{\#}VU^{\#}LK^{\#} \\ &= AX^{\#}YU^{\#}VA^{\#}LK^{\#} \\ &= AX^{\#}YU^{\#}VK^{\#}LA^{\#} \\ &= A\mathcal{H}A^{\#}.\end{aligned}$$

于是，我们有 $A^{\#}\mathcal{S} = A^{\#}A\mathcal{H}A^{\#} = \mathcal{H}A^{\#}$。现在，在右乘 A 后，得到 $\mathcal{H} = A^{\#}\mathcal{S}A$。为了证明 $\rho(\mathcal{S}) = \rho(\mathcal{H})$，考虑特征值问题 $\mathcal{S}x = \lambda x$，其中 λ 是 $\mathcal{S}$的任意一个非零特征值， x是对应的特征向量。于是， $x \in \mathcal{R}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{R}(A)$。现在， $\lambda x = \mathcal{S}x = A\mathcal{H}A^{\#}x$。左乘 $A^{\#}$，得到 $\lambda y = \mathcal{H}y$，其中$y = A^{\#}x.$ 。因此，当且仅当 $y \neq 0$ 时， λ是 $\mathcal{H}$ 的一个特征值。假设 $y = A^{\#}x = 0$。那么， $x \in \mathcal{N}(A^{\#}) = \mathcal{N}(A)$。因此，我们有 $x \in \mathcal{R}(A) \cap \mathcal{N}(A)$。由于 $index(A) = 1$，我们有 $\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{N}(A) = \{0\}$。这意味着 $x = 0$ ，矛盾。因此， $y \neq 0$。由此， $\sigma(\mathcal{S}) \subseteq \sigma(\mathcal{H})$。反过来，考虑 $\mathcal{H}y = \mu y$，其中 μ 是 $\mathcal{H}$的任意一个非零特征值， y 是其对应的特征向量。于是， $y \in \mathcal{R}(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{R}(A)$。由于$\mathcal{H} = A^{\#}\mathcal{S}A$，我们有， $\mu y = A^{\#}\mathcal{S}Ay$。现在，左乘 A，得到 $\mu z = \mathcal{S}z$，其中 $z = Ay$。如果 $z = 0$，那么 $y \in \mathcal{N}(A)$，这意味着 $y \in \mathcal{R}(A) \cap \mathcal{N}(A)$，进而得到$y = 0$，矛盾。因此， $\sigma(\mathcal{H}) \subseteq \sigma(\mathcal{S})$。由此， $\rho(\mathcal{S}) = \rho(\mathcal{H})$。

(*iii*) 我们将通过反证法证明这一点。假设 $I - \mathcal{S}$ 是奇异的。那么，1 是 $\mathcal{S}$的一个特征值。因此，存在 $x \neq 0$ 使得 $x = \mathcal{S}x$ 这意味着 $x \in \mathcal{R}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{R}(Y) \subseteq \mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(U) = \mathcal{R}(K)$，从而 $x = AA^{\#}x = XX^{\#}x = UU^{\#}x = KK^{\#}x$。于是,

$$\begin{aligned}x = \mathcal{S}x &= YX^{\#}VU^{\#}LK^{\#}x \\ &= (X - A)X^{\#}(U - A)U^{\#}(K - A)K^{\#}x \\ &= (XX^{\#} - AX^{\#})(UU^{\#} - AU^{\#})(KK^{\#} - AK^{\#})x \\ &= (AA^{\#} - AX^{\#})(AA^{\#} - AU^{\#})(AA^{\#} - AK^{\#})x \\ &= (AA^{\#} - AX^{\#})(AA^{\#} - AU^{\#})(AA^{\#}x - AK^{\#}x) \\ &= (AA^{\#} - AX^{\#})(AA^{\#} - AU^{\#})(x - AK^{\#}x) \\ &= (AA^{\#} - AX^{\#})(AA^{\#}x - AA^{\#}AK^{\#}x - AU^{\#}x + AU^{\#}AK^{\#}x) \\ &= (AA^{\#} - AX^{\#})(x - AK^{\#}x - AU^{\#}x + AU^{\#}AK^{\#}x) \\ &= (x - AK^{\#}x - AU^{\#}x + AU^{\#}AK^{\#}x - AX^{\#}x + AX^{\#}AK^{\#}x + AX^{\#}AU^{\#}x \\ &\quad -AX^{\#}AU^{\#}AK^{\#}x)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= x - A(K^{\#} + U^{\#} - U^{\#}AK^{\#} + X^{\#} - X^{\#}AK^{\#} - X^{\#}AU^{\#} \\
&\quad + X^{\#}AU^{\#}AK^{\#})x \\
&= x - A(K^{\#}KK^{\#} + U^{\#}UU^{\#} + X^{\#} - U^{\#}AK^{\#} - X^{\#}AK^{\#} - X^{\#}AU^{\#} \\
&\quad + X^{\#}AU^{\#}AK^{\#})x \\
&= x - A(X^{\#}XK^{\#} + X^{\#}XU^{\#} + X^{\#} - U^{\#}AK^{\#} - X^{\#}AK^{\#} - X^{\#}AU^{\#} \\
&\quad + X^{\#}AU^{\#}AK^{\#})x \\
&= x - A(X^{\#}XK^{\#} + X^{\#}XU^{\#}UU^{\#} + X^{\#}XX^{\#} - U^{\#}UU^{\#}AK^{\#} - X^{\#}AK^{\#} \\
&\quad - X^{\#}AU^{\#}UU^{\#} + X^{\#}AU^{\#}AK^{\#})x \\
&= x - A(X^{\#}XK^{\#} + X^{\#}XU^{\#}KK^{\#} + X^{\#}KK^{\#} - X^{\#}XU^{\#}AK^{\#} - X^{\#}AK^{\#} \\
&\quad - X^{\#}AU^{\#}KK^{\#} + X^{\#}AU^{\#}AK^{\#})x \\
&= x - A(X^{\#}(X + K - A + XU^{\#}K - XU^{\#}A - AU^{\#}K + AU^{\#}A)K^{\#})x \\
&= x - A(X^{\#}(X + K - A + YU^{\#}L)K^{\#})x \\
&= x - AB^{\#}x,
\end{aligned}
$$

其中 $B = K(X+K-A+YU^{\#}L)^{\#}X$。根据引理 3.1，给定 $\mathcal{R}(K+X-A+YU\#L) = \mathcal{R}(A)$ 和 $\mathcal{N}(K+X-A+YU^{\#}L) = \mathcal{N}(A)$，我们有 $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(B)$ 以及 $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(B)$。现在，$AB^{\#}x = 0$ 意味着 $B^{\#}x \in \mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(B)$，从而 $BB^{\#}x = 0$. 再次，$x \in \mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(B)$ 导出 $x = BB^{\#}x = 0$，矛盾。因此，$I - \mathcal{S}$ 是可逆的。现在，为证明另一部分，假设 $I - \mathcal{H}$ 是奇异的，则存在 $x \neq 0$ 使得 $x = \mathcal{H}x$. 因此，$x \in \mathcal{R}(X^{\#}) = \mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(A)$。将 $Y = X - A$、$V = U - A$ 和 $L = K - A$ 代入 $x = \mathcal{H}x$，并如第一部分一样化简，我们得到 $B^{\#}Ax = 0$. 左乘 B并利用 $\mathcal{R}(B) = \mathcal{R}(A)$ 这一事实，可得 $Ax = 0$ 这意味着 $x \in \mathcal{N}(A) \cap \mathcal{R}(A)$。因此，$x = 0$，矛盾。所以 $I - \mathcal{H}$ 是可逆的。

□

When 中有两个适当分裂时，上述结果可化为以下形式 .

推论 3.4. 设 $A = U - V = X - Y$是 A和 $\mathcal{S} = YX^{\#}VU^{\#}$.的两个适当分裂。则，$(i)$ $AA^{\#}\mathcal{S} = \mathcal{S} = \mathcal{S}AA^{\#}$ 和 $A^{\#}A\mathcal{H} = \mathcal{H} = \mathcal{H}A^{\#}A$，其中 $\mathcal{H}$ 是迭代格式 (1.4) 的迭代矩阵。(ii) $\mathcal{S} = A\mathcal{H}A^{\#}$、$\mathcal{H} = A^{\#}\mathcal{S}A$ 和 $\rho(\mathcal{S}) = \rho(\mathcal{H})$。$(iii)$ $I - \mathcal{S}$和 $I - \mathcal{H}$可逆，当且仅当 $\mathcal{R}(U+X-A) = \mathcal{R}(A)$ 且 $\mathcal{N}(U+X-A) = \mathcal{N}(A)$。

现在，我们给出当给定的分裂为 II 型适当 G-弱正则分裂时，迭代格式 (1.3) 的收敛性结果。

定理 3.5. 设 $A = K - L = U - V = X - Y$ 是群单调矩阵 A 和 $\mathcal{S} = YX^{\#}VU^{\#}LK^{\#}$ 的三个 II 型适当 G-弱正则分裂。则 $\rho(\mathcal{H}) = \rho(X^{\#}YU^{\#}VK^{\#}L) < 1$。

证明。由于 $A = K - L = U - V = X - Y$ 是 II 型适当 G-弱正则分裂，我们有

$$\begin{aligned}
0 \leq \mathcal{S} &= YX^{\#}VU^{\#}LK^{\#} \\
&= (X - A)X^{\#}(U - A)U^{\#}(K - A)K^{\#} \\
&= (XX^{\#} - AX^{\#})(UU^{\#} - AU^{\#})(KK^{\#} - AK^{\#}) \\
&= (AA^{\#} - AX^{\#})(AA^{\#} - AU^{\#})(AA^{\#} - AK^{\#}) \\
&= AA^{\#} - AK^{\#} - AU^{\#} - AX^{\#} + AU^{\#}AK^{\#} + AX^{\#}AK^{\#} + AX^{\#}AU^{\#} \\
&\quad -AX^{\#}AU^{\#}AK^{\#}.
\end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned}
A^{\#}(I - \mathcal{S}) &= A^{\#} - A^{\#}\mathcal{S} \\
&= A^{\#}AA^{\#} - A^{\#}\mathcal{S} \\
&= A^{\#}(AA^{\#} - \mathcal{S}) \\
&= A^{\#}(AA^{\#} - AA^{\#} + AK^{\#} + AU^{\#} + AX^{\#} - AU^{\#}AK^{\#} - AX^{\#}AK^{\#} \\
&\quad -AX^{\#}AU^{\#} + AX^{\#}AU^{\#}AK^{\#}) \\
&= A^{\#}AK^{\#} + A^{\#}AU^{\#} + A^{\#}AX^{\#} - A^{\#}AU^{\#}AK^{\#} - A^{\#}AX^{\#}AK^{\#} \\
&\quad -A^{\#}AX^{\#}AU^{\#} + A^{\#}AX^{\#}AU^{\#}AK^{\#} \\
&= K^{\#} + U^{\#} + X^{\#} - U^{\#}AK^{\#} - X^{\#}AK^{\#} - X^{\#}AU^{\#} + X^{\#}AU^{\#}AK^{\#} \\
&= K^{\#} + U^{\#}(K - A)K^{\#} + X^{\#}(U - A)U^{\#} + X^{\#}(AU^{\#}A - A)K^{\#} \\
&= K^{\#} + U^{\#}LK^{\#} + X^{\#}VU^{\#} + X^{\#}(AU^{\#}A - UU^{\#}A)K^{\#} \\
&= K^{\#} + U^{\#}LK^{\#} + X^{\#}VU^{\#} - X^{\#}(U - A)U^{\#}AK^{\#} \\
&= K^{\#} + U^{\#}LK^{\#} + X^{\#}VU^{\#} - X^{\#}VU^{\#}(K - L)K^{\#} \\
&= K^{\#} + U^{\#}LK^{\#} + X^{\#}VU^{\#}LK^{\#} \geq 0.
\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
0 &\leq A^{\#}(I - \mathcal{S})(I + \mathcal{S} + \mathcal{S}^2 + \mathcal{S}^3 + ... + \mathcal{S}^m) \\
&= A^{\#}(I - \mathcal{S}^{m+1}) \\
&\leq A^{\#},
\end{aligned}$$

对于每个整数 m，由此可知，当 $m \to \infty$ 时，矩阵 $I + \mathcal{S} + \mathcal{S}^2 + \cdots + \mathcal{S}^m$ 的各个元素保持有界。由于 $\mathcal{S} \geq 0$，因此，级数 $\sum \mathcal{S}^m$ 的部分和数列$_\infty$收敛，从而 $\lim_{m\to\infty} \mathcal{S}^m = 0$。因此，根据定理 3.3，$\rho(\mathcal{S}) < 1$ resulting$_{m=0}\rho(\mathcal{H}) < 1$ 。

□

对于非奇异矩阵 A，有如下结果。

推论 3.6. 设 $A = K - L = U - V = X - Y$是单调矩阵 A和 $\mathcal{S} = YX^{-1}VU^{-1}LK^{-1}$的两个 II 型弱正则分裂，则 $\rho(\mathcal{H}) = \rho(X^{-1}YU^{-1}VK^{-1}L) <1$。

类似地，当给定的两个分裂是 II 型适当 G-弱正则分裂时，可以得到迭代格式 (1.4) 的收敛性结果。

推论 3.7. 设 $A = U - V = X - Y$是群单调矩阵 A的两个 II 型适当 G-弱正则分裂，则 $\rho(\mathcal{H}) = \rho(X^{\#}YU^{\#}V) < 1$。

下面的结果是推论 3.7 的非奇异矩阵版本。

推论 3.8.（定理 3, [12]）
设 $A = U - V = X - Y$ 是单调矩阵 A 的两个 II型弱正则分裂，则 $\rho(\mathcal{H}) = \rho(X^{-1}YU^{-1}V) < 1.$

下面这个简单例子表明，定理 3.5 的逆命题不成立。

Example 3.1. Let $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Then, $A^{\#} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0.25 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0$. Clearly,

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 \\ -6 & 12 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & -0.5 \\ -4 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = K - L$$

$$= \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 \\ -8 & 16 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & -0.5 \\ -6 & 12 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U - V$$

$$= \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0.8 \\ -4 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.2 & 0 & -0.2 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = X - Y$$

是 A 和 $\mathcal{H}$ 的 $X^{\#}YU^{\#}VK^{\#}L$ $\rho(\mathcal{H}) = 0.25 < 1$ 的其他设置。但是,

$$U^{\#} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0.0833 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0 \text{ and } VU^{\#} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0.6667 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ngeq 0,$$

$$K^{\#} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0.0625 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0 \text{ and } LK^{\#} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0.75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ngeq 0,$$

$$X^{\#} = \begin{bmatrix} 1.25 & 0 & 1.25 \\ 0.625 & 0.125 & 0.625 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0 \text{ and } YX^{\#} = \begin{bmatrix} -0.25 & 0 & -0.25 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ngeq 0.$$ Hence, the individual splittings of A are not proper G-weak regular splittings of type II.

接下来的结果阐述了当给定的分裂为 II 型适当 G-弱正则分裂时，迭代格式 (1.3) 的迭代矩阵所继承的性质。

引理 3.9. 设 $A = K - L = U - V = X - Y$ 是 A 的三个 II 型适当 G-弱正则分裂，且 $\rho(\mathcal{H}) < 1$。若 $\mathcal{R}(K + U - A + YU^{\#}L) = \mathcal{R}(A)$ 且 $\mathcal{N}(K + U - A + YU^{\#}L) = \mathcal{N}(A)$，则由 $\mathcal{H}$ 诱导的唯一分裂 $A = B - C$ 是一个适当分裂，使得 $\mathcal{H} = B^{\#}C$，其中 $B = A(I - \mathcal{H})^{-1}$.

证明。令 $Z = (I - \mathcal{H})A^{\#}$. 那么

$$\begin{aligned} ZB &= (I - \mathcal{H})A^{\#}A(I - \mathcal{H})^{-1} \\ &= (A^{\#}A - \mathcal{H}A^{\#}A)(I - \mathcal{H})^{-1} \\ &= (A^{\#}A - A^{\#}A\mathcal{H})(I - \mathcal{H})^{-1} \\ &= A^{\#}A = AA^{\#} \\ &= A(I - \mathcal{H})^{-1}(I - \mathcal{H})A^{\#} \\ &= BZ, \end{aligned}$$

进而得到 $BZB = AA^{\#}A(I - \mathcal{H})^{-1} = A(I - \mathcal{H})^{-1} = B$ 和 $ZBZ = A^{\#}A(I - \mathcal{H})A^{\#} = (I - \mathcal{H})A^{\#}AA^{\#} = Z$.

因此，我们有

$$\begin{aligned}
B^{\#} &= (I-\mathcal{H})A^{\#} \\
&= A^{\#} - X^{\#}YU^{\#}VK^{\#}LA^{\#} \\
&= A^{\#} - (X^{\#}(X-A)U^{\#}(U-A)K^{\#}(K-A)A^{\#}) \\
&= A^{\#} - (U^{\#} - X^{\#}AU^{\#})(UK^{\#} - AK^{\#})(KA^{\#} - AA^{\#}) \\
&= A^{\#} - (K^{\#} - U^{\#}AK^{\#} - X^{\#}AK^{\#} + X^{\#}AU^{\#}AK^{\#})(KA^{\#} - AA^{\#}) \\
&= K^{\#} + U^{\#} - U^{\#}AK^{\#} + X^{\#} - X^{\#}AK^{\#} - X^{\#}AU^{\#} + X^{\#}AU^{\#}AK^{\#} \\
&= K^{\#} + X^{\#} - X^{\#}AK^{\#} + U^{\#} - U^{\#}(U-V)K^{\#} - X^{\#}(X-Y)U^{\#} \\
&\quad + X^{\#}(X-Y)U^{\#}(K-L)K^{\#} \\
&= K^{\#} + X^{\#} - X^{\#}AK^{\#} + X^{\#}YU^{\#}LK^{\#} \\
&= X^{\#}(K+X-A+YU^{\#}L)K^{\#}.
\end{aligned}$$

由于 $\mathcal{R}(K+U-A+YU^{\#}L) = \mathcal{R}(A)$ 且 $\mathcal{N}(K+U-A+YU_{\#}L) = \mathcal{N}(A)$，由引理 3.1 可知，$A = B - C$ 是一个适当分裂。现在，

$$\begin{aligned}
B^{\#}C &= B^{\#}(B-A) \\
&= B^{\#}B - B^{\#}A \\
&= B^{\#}B - (I-\mathcal{H})A^{\#}A \\
&= B^{\#}B - A^{\#}A + \mathcal{H}A^{\#}A \\
&= A^{\#}A - A^{\#}A + \mathcal{H}A^{\#}A \\
&= \mathcal{H}.
\end{aligned}$$

接下来，我们需要证明 $A = B - C$ 是唯一的。假设存在另一个诱导分裂 $A = \overline{B} - \overline{C}$，使得 $\mathcal{H} = \overline{B}^{\#}\overline{C}$. 那么 $\overline{B}\mathcal{H} = \overline{B}\ \overline{B}^{\#}\ \overline{C} = \overline{C} = \overline{B} - A$.因此，$\overline{B}(I-\mathcal{H}) = A$. 由此 $\overline{B} = A(I-\mathcal{H})^{-1} = B$. 因此，$\mathcal{H}$ 诱导出唯一的适当分裂 $A = B - C$.

□

对于两个 II 型适当 G-弱正则分裂，有如下结论。

推论 3.10. 设 $A = U - V = X - Y$ 是 A 的 II 型适当 G-弱正则分裂，且满足 $\rho(\mathcal{H}) < 1$。若 $\mathcal{R}(U+X-A) = \mathcal{R}(A)$ 且 $\mathcal{N}(U+X-A) = \mathcal{N}(A)$，则由 $\mathcal{H}$ 诱导的唯一分裂 $A = B - C$ 是一个适当分裂，满足 $\mathcal{H} = B^{\#}C$，其中 $B = A(I-\mathcal{H})^{-1}$.

下一个结果表明，$\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{S}$ 诱导相同的分裂。

定理 3.11. 设 $A = K - L = U - V = X - Y$ 是群单调矩阵 A 和 $\mathcal{S} = YX^{\#}VU^{\#}LK^{\#}$的三个 II 型适当 G-弱正则分裂。若 $\mathcal{R}(K + X - A + YU_{\#}L) = \mathcal{R}(A)$，且 $\mathcal{N}(K + U - A + YU^{\#}L) = \mathcal{N}(A)$，则 $\mathcal{H}$和 $\mathcal{S}$诱导相同的适当分裂 $A = B - C$。此外，由矩阵 $\mathcal{S}$ 诱导的唯一适当分裂 $A = \overline{B} - \overline{C}$也是 II 型适当 G-弱正则分裂。

证明。由引理 3.9，得到 $B = A(I - \mathcal{H})^{-1}$。考虑 $\overline{B} = (I - \mathcal{S})^{-1}A$ 和$\overline{C} = \overline{B} - A.$。我们的目标是证明矩阵 $\mathcal{H}$和 $\mathcal{S}$诱导相同的适当分裂$A = B - C.$。由于 $\mathcal{H} = \mathcal{H}A^{\#}A$ 和 $\mathcal{S} = A\mathcal{H}A^{\#}$，因此对任意整数 k，都有 $\mathcal{S}^k = A\mathcal{H}^kA^{\#}$。由于$\mathcal{S} \geq 0$，由定理 3.3 和定理 3.5，得到 $\rho(\mathcal{S}) < 1.$。再次应用定理 2.3，得到

$$\begin{aligned}
\overline{B} &= (I - \mathcal{S})^{-1}A \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{S}^k A \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} A\mathcal{H}^k A^{\#}A \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} A\mathcal{H}^k \\
&= A(I - \mathcal{H})^{-1} \\
&= B.
\end{aligned}$$

于是，$\mathcal{R}(\overline{B}) = \mathcal{R}(B) = \mathcal{R}(A)$，且 $\mathcal{N}(\overline{B}) = \mathcal{N}(B) = \mathcal{N}(A)$。因此，$A = \overline{B} - \overline{C}$ 是一个适当分裂。接下来，我们证明$A = \overline{B} - \overline{C}$ 是一个 II 型适当 G-弱正则分裂。令 $Z = A^{\#}(I - \mathcal{S})$。于是，$Z\overline{B} = A^{\#}(I - \mathcal{S})(I - \mathcal{S})^{-1}A = A^{\#}A.$ 因此$Z\overline{B}Z = A^{\#}AA^{\#}(I - \mathcal{S}) = A^{\#}(I - \mathcal{S}) = Z.$ 利用性质 $AA^{\#}\mathcal{S} = \mathcal{S} = \mathcal{S}AA^{\#}$，我们得到

$$\begin{aligned}
\overline{B}Z &= (I - \mathcal{S})^{-1}AA^{\#}(I - \mathcal{S}) \\
&= (I - \mathcal{S})^{-1}(AA^{\#} - AA^{\#}\mathcal{S}) \\
&= (I - \mathcal{S})^{-1}(AA^{\#} - \mathcal{S}AA^{\#}) \\
&= (I - \mathcal{S})^{-1}(I - \mathcal{S})AA^{\#} \\
&= AA^{\#} = A^{\#}A \\
&= Z\overline{B}.
\end{aligned}$$

因此， $\overline{B}Z = Z\overline{B}$。现在，

$$\begin{aligned}\overline{B}Z\overline{B} &= AA^{\#}(I-\mathcal{S})^{-1}A \\ &= AA^{\#}\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{S}^k A \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{S}^k A = (I-\mathcal{S})^{-1}A \\ &= \overline{B}.\end{aligned}$$

因此，根据定理 3.5 的证明，我们有 $\overline{B}^{\#} = A^{\#}(I-\mathcal{S}) \geq 0$. 因此， $\overline{CB}^{\#} = (\overline{B}-A)\overline{B}^{\#} = \overline{B}\,\overline{B}^{\#} - A\overline{B}^{\#} = \overline{B}\,\overline{B}^{\#} - AA^{\#}(I-\mathcal{S}) = AA^{\#} - AA^{\#}(I-\mathcal{S}) = AA^{\#} - AA^{\#} + AA^{\#}\mathcal{S} = \mathcal{S} \geq 0$。由此，$A = \overline{B} - \overline{C}$ 是由 $\mathcal{S}$诱导的 II 型适当 G-弱正则分裂。设$A = \overline{B}_1 - \overline{C}_1$ 是由 $\mathcal{S}$ 诱导的另一个分裂，且$\mathcal{S} = \overline{C}_1\overline{B}_1^{\#}$. 那么，$\mathcal{S}\overline{B}_1 = \overline{C}_1\overline{B}_1^{\#}\overline{B}_1 = \overline{C}_1 = \overline{B}_1 - A$. 因此， $A = \overline{B}_1 - \mathcal{S}\overline{B}_1 = (I-\mathcal{S})\overline{B}_1$这进一步推出 $\overline{B}_1 = (I-\mathcal{S})^{-1}A = \overline{B}$. 因此， $A = \overline{B} - \overline{C}$ 是由 S 诱导的唯一 II 型适当 G-弱正则分裂。

□

下面的推论将引理 3(ii) 和定理 3 推广至 [12] 中的非奇异矩阵情形。

推论 3.12. 设 $A = K - L = U - V = X - Y$ 是单调矩阵 A 和 $\mathcal{S} = YX^{-1}VU^{-1}LK^{-1}$ 的三个 II 型弱正则分裂。则 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{S}$ 诱导相同的分裂 $A = B - C$。此外，由矩阵 $\mathcal{S}$ 诱导的唯一分裂 $A = \overline{B} - \overline{C}$ 也是一个 II 型弱正则分裂。

当我们有两个适当的 II 型 G-弱正则分裂时，定理 3.11 可化简为以下形式。

推论 3.13. 设 $A = U - V = X - Y$ 是群单调矩阵 A 和 $\mathcal{S} = YX^{\#}VU^{\#}$ 的两个 II 型适当 G-弱正则分裂。若 $\mathcal{R}(U+X-A) = \mathcal{R}(A)$ 且 $\mathcal{N}(U+X-A) = \mathcal{N}(A)$，则 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{S}$ 诱导相同的适当分裂 $A = B - C$。此外，由矩阵 $\mathcal{S}$ 诱导的唯一适当分裂 $A = \overline{B} - \overline{C}$ 也是一个 II 型适当 G-弱正则分裂。

当矩阵 A 非奇异时，上述结果化简为以下形式，这是 [12, 定理 3]的一部分。

推论 3.14. 设 $A = U - V = X - Y$ 是单调矩阵 A 和 $\mathcal{S} = YX^{-1}VU^{-1}$ 的两个 II 型弱正则分裂。那么 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{S}$ 诱导相同的分裂 $A = B - C$。此外，由矩阵 $\mathcal{S}$ 诱导的唯一分裂 $A = \overline{B} - \overline{C}$ 也是 II 型弱正则分裂。

下一个结果表明，在某些适当的假设下，三步交替格式比通常迭代格式 (1.2) 收敛得更快。

定理3.15. 设 $A = K - L = U - V = X - Y$ 是群单调矩阵 A 的三个 II 型适当 G-弱正则分裂，满足 $\mathcal{R}(K + X - A + YU^{\#}L) = \mathcal{R}(A)$ 和 $\mathcal{N}(K + X - A + YU^{\#}L) = \mathcal{N}(A)$。设 $A = B - C$ 是由 $\mathcal{S}$ 诱导的 II 型适当 G-弱正则分裂。若 $KB^{\#} \geq I$、$UB^{\#} \geq I$ 和 $XB^{\#} \geq I$，则

$$\rho(\mathcal{H}) \leq \min\{\rho(K^{\#}L), \rho(U^{\#}V), \rho(X^{\#}Y)\} < 1.$$

证明。由于 $A = K - L = U - V = X - Y$ 是群单调矩阵 A 的三个 II 型适当 G-弱正则分裂，因此由定理 2.5，得到 $\rho(K^{\#}L) < 1$、$\rho(U^{\#}V) < 1$ 和 $\rho(X^{\#}Y) < 1$。考虑分裂 $A = B - C$ 和 $A = K - L$，并利用定理 2.4（v），得到

$$B^{\#}(I - CB^{\#})^{-1} = K^{\#}(I - LK^{\#})^{-1}. \tag{3.3}$$

将（3.3）左乘 K，得到

$$KB^{\#}(I - CB^{\#})^{-1} = KK^{\#}(I - LK^{\#})^{-1}. \tag{3.4}$$

由于 $CB^{\#} \geq 0$，根据定理2.1，存在特征向量 $x \geq 0$ $(x \neq 0)$，使得 $CB^{\#}x = \rho(CB^{\#})x$。将（3.4）右乘 x，并利用 $KK^{\#}x = x$和 $KK^{\#}L = L$，得到$KB^{\#}(I - CB^{\#})^{-1}x = KK^{\#}(I - LK^{\#})^{-1}x$，即 $\frac{KB^{\#}}{1-\rho}(B^{\#}C)^{x} = KK^{\#}\sum_{i=0}(LK^{\#})^{i}x = KK^{\#}(I + LK^{\#} + \ldots)$

$x = KK^{\#}x + KK^{\#}LK^{\#}x + \cdots = x + LK^{\#}x + \cdots = (I - LK^{\#})^{-1}x$。由于 $KB^{\#} \geq I$，我们有 $\frac{x}{1-\rho}(B^{\#}C) \leq (I - LK^{\#})^{-1}x.$。因此，根据定理2.2，$\rho(B^{\#}C) = \rho(\mathcal{H}) \leq \rho(K^{\#}L)$。类似地，对分裂对 $A = B - C$ 和 $A = U - V$ 以及 $A = B - C$ 和 $A = X - Y$ 应用相同的步骤，分别得到 $\rho(\mathcal{H}) \leq \rho(U^{\#}V) < 1$ 和 $\rho(\mathcal{H}) \leq \rho(X^{\#}Y) < 1$。因此，$\rho(\mathcal{H}) \leq \min\{\rho(K^{\#}L)\ \rho(U^{\#}V)\ \rho(X^{\#}Y)\} < 1$。

□

下一个结果表明，在满足若干假设的情况下，两步交替迭代格式也比通常迭代格式 (1.2) 收敛得更快。

推论 3.16. 设 $A = U - V = X - Y$ 是群单调矩阵 A 的两个 II 型适当 G-弱正则分裂，其中 $\mathcal{R}(U + X - A) = \mathcal{R}(A)$ 且 $\mathcal{N}(U + X - A) = \mathcal{N}(A)$。设 $A = B - C$ 是由矩阵 $X^{\#}YU^{\#}V$ 诱导的 II 型适当 G-弱正则分裂。若 $UB^{\#} \geq I$ 且 $XB^{\#} \geq I$，则 $\rho(U_{\#}VX^{\#}Y) \leq \min\{\rho(U_{\#}V)\ \rho(X^{\#}Y)\} < 1$。

如果给定的分裂同时是两种类型的适当 G-弱正则分裂，则条件 $KB^{\#} \geq I$、$UB^{\#} \geq I$ 和 $XB^{\#} \geq I$ 可以省略。下文将对此进行说明。

定理 3.17. 设 $A = K - L = U - V = X - Y$ 是群单调矩阵 A 的两种类型的三个适当的 G-弱正则分裂，且 $\mathcal{R}(K + X - A + YU^{\#}L) = \mathcal{R}(A)$ 和 $\mathcal{N}(K + X - A + YU^{\#}L) = \mathcal{N}(A)$。那么

$$\rho(\mathcal{H}) \leq \min\{\rho(K^{\#}L), \rho(U^{\#}V), \rho(X^{\#}Y)\} < 1.$$

证明. 令 $A = B - C$ 是由 S 诱导的分裂。由于 $A = K - L = U - V = X - Y$ 是 II 型适当 G-弱分裂，因此根据引理 3.9，$A = B - C$ 是 II 型适当 G-弱正则分裂。由 (3.1) 和 (3.2)，我们有

$$B^{\#} = X^{\#} + X^{\#}YK^{\#} + X^{\#}YK^{\#}LU^{\#} \geq X^{\#}$$

and

$$B^{\#} = K^{\#} + X^{\#}LK^{\#} + X^{\#}YU^{\#}LK^{\#} \geq K^{\#}.$$

将定理 2.6 应用于分裂对 $A = B - C$and $A = X - Y$，以及 $A = B - C$and $A = K - L$，分别得到 $\rho(\mathcal{H}) \leq \rho(X^{\#}Y)$ 和 $\rho(\mathcal{H}) \leq \rho(K^{\#}L)$。再次，

$$\begin{aligned} B^{\#} &= X^{\#}(YU^{\#}VK^{\#} + YU^{\#} + I) \\ &= X^{\#}YU^{\#}VK^{\#} + X^{\#}XU^{\#} - X^{\#}AU^{\#} + X^{\#}UU^{\#} \\ &= X^{\#}YU^{\#}VK^{\#} + U^{\#} + X^{\#}(U - A)U^{\#} \\ &= X^{\#}YU^{\#}VK^{\#} + U^{\#} + X^{\#}VU^{\#} \\ &\geq U^{\#}. \end{aligned}$$

因此，根据定理 2.6，我们有 $\rho(\mathcal{H}) = \rho(B^{\#}C) \leq \rho(U^{\#}V)$。因此

$$\rho(\mathcal{H}) \leq \min\{\rho(K^{\#}L), \rho(U^{\#}V), \ \rho(X^{\#}Y)\} < 1.$$

□

适用于两步交替迭代格式（1.4）的 [8, 定理 4.13], 的群逆版本如下推论所示。

推论 3.18. 设 $A = U - V = X - Y$ 是群单调矩阵 A 的两种类型的两个适当的 G-弱正则分裂，且 $\mathcal{R}(U + X - A) = \mathcal{R}(A)$ 和 $\mathcal{N}(U + X - A) = \mathcal{N}(A)$。那么

$$\rho(U^{\#}VK^{\#}L) \leq \min\{\rho(U^{\#}V), \rho(X^{\#}Y)\} < 1.$$

接下来，我们将在若干假设下证明，对于 II 型适当 G-弱正则分裂，三步交替迭代格式对应的迭代矩阵比两步交替迭代格式对应的迭代矩阵收敛得更快。

定理3.19. 设 $A = K - L = U - V = X - Y$ 是群单调矩阵 A 的三个 II 型适当 G-弱正则分裂，满足 $\mathcal{R}(K + X - A + YU^{\#}L) = \mathcal{R}(A)$ 且 $\mathcal{N}(K + X - A + YU^{\#}L) = \mathcal{N}(A)$。设 $A = B - C$、 $A = B_{12} - C_{12}$、 $A = B_{13} - C_{13}$ 和 $A = B_{23} - C_{23}$ 分别是由矩阵 $\mathcal{S}$、 $U_{\#}VK^{\#}L$、 $X^{\#}YK^{\#}L$ 和 $X^{\#}YU^{\#}V$ 诱导的 II 型适当 G-弱正则分裂。若 $B_{12}B^{\#} \geq I$、 $B_{13}B^{\#} \geq I$ 和 $B_{23}B^{\#} \geq I$，则

$$\rho(\mathcal{H}) \leq \min\{\rho(K^{\#}LU^{\#}V), \rho(X^{\#}YK^{\#}L), \rho(X^{\#}YU^{\#}V)\} < 1.$$

证明. 对分裂 $A = B - C$ 和 $A = B_{12} - C_{12}$、 $A = B - C$ 和 $A = B_{13} - C_{13}$，以及 $A = B - C$ 和 $A = B_{23} - C_{23}$，采用定理3.15中的相同论证，可得

$$\rho(\mathcal{H}) \leq \min\{\rho(K^{\#}LU^{\#}V), \rho(X^{\#}YK^{\#}L), \rho(X^{\#}YU^{\#}V)\} < 1.$$

□

下面给出定理 3.19 的非奇异版本。

推论3.20. 设 $A = K - L = U - V = X - Y$ 是单调矩阵 A 的三个 II型弱正则分裂。设 $A = B - C$、 $A = B_{12} - C_{12}$、 $A = B_{13} - C_{13}$ 和 $A = B_{23} - C_{23}$ 分别是由矩阵 $\mathcal{S}$、$U^{-1}VK^{-1}L$、$X^{-1}YK^{-1}L$ 和 $X^{-1}YU^{-1}V$ 诱导的 II型弱正则分裂。若 $B_{12}B^{-1} \geq I$、$B_{13}B^{-1} \geq I$ 和 $B_{23}B^{-1} \geq I$，则

$$\rho(\mathcal{H}) \leq \min\{\rho(K^{-1}LU^{-1}V), \rho(X^{-1}YK^{-1}L), \rho(X^{-1}YU^{-1}V)\} < 1.$$

例3.2. 考虑二维拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 \tag{3.5}$$

其边界条件为

$$u(x, y)|_{\partial R} = x + y + xy.$$

设正方形区域 $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$ 由一个网格覆盖，该网格的边平行于坐标轴，且网格间距均为 $h = \Delta x = \Delta y$。如果 $Nh = 1$，则内部网格点的数量为 $(N - 1)^2$。采用均匀网格上的 $\mathcal{O}(h^2)$ 中心差分离散的有限差分法可生成线性方程组

$Ax = b$，其中 A 的阶数为 $(N-1)^2 \times (N-1)^2$，且 b 是由狄利克雷边界条件导出的右端向量。系数矩阵 A 具有如下形式：$A = I \otimes J + J \otimes I.$。这里，$\otimes$ 表示克罗内克积，I 是阶数为 $(N-1) \times (N-1)$ 的单位矩阵，而 $J = tridiagonal(-1, 4, -1)$ 的阶数为 $(N-1) \times (N-1)$。令 $K = diag(A)$、$U = 1.5diag(A)$ 和 $X = 1.75diag(A)$，我们得到单调矩阵 A 的三个 II 型弱正则分裂 $A = K - L = U - V = X - Y$。利用这些分裂，我们在表1中比较了三步、两步和单步迭代格式的计算特性。

表1：对比表

阶数	分裂	IT	$\|\|b - Ax_n\|\|_2$	$\|\|A^{-1}b - x_n\|\|_2$	Time	ρ
400	三步 p	672	4.4511e-08	9.9629e-07	0.02	0.9752
	两步 p	902	4.4374e-08	9.9323e-07	0.03	0.9815
	单步 p	1502	4.4629e-08	9.9893e-07	0.12	0.9888
1600	三步 p	2669	1.1661e-08	9.9350e-07	5.83	0.9934
	两步 p	3583	1.1688e-08	9.9583e-07	8.19	0.9951
	单步 yakwe p	5970	1.1717e-08	9.9831e-07	16.28	0.9971
4900	三步交替迭代法 p	8256	3.9092e-09	9.9849e-07	177.05	0.9978
	两步 p	11086	3.9092e-09	9.9848e-07	244.08	0.9984
	单步 p	18475	3.9123e-09	9.9929e-07	515.14	0.9990
6400	三步 p	10824	3.0051e-09	9.9896e-07	386.60	0.9983
	两步 p	14534	3.0067e-09	9.9952e-07	567.94	0.9987
	单步 p	24222	3.0078e-09	9.9989e-07	1041.26	0.9992
10000	三步 p	17034	1.9329e-09	9.9896e-07	1509.86	0.9989
	两步式 p	22873	1.9338e-09	9.9943e-07	2261.70	0.9992
	单步- p	38120	1.9345e-09	9.9981e-07	4043.28	0.9995
12100	三步 p	20679	1.6014e-09	9.9966e-07	3041.72	0.9991
	两步 p	27768	1.6017e-09	9.9986e-07	3674.84	0.9993
	单步天天爱彩票 p	46279	1.6018e-09	9.9991e-07	6965.13	0.9996

4. 三步交替迭代格式的半收敛性

本节分为两个小节。在第4.1小节中，我们讨论系数矩阵 A 为奇异 M-矩阵时，三步交替迭代格式的半收敛性，其中分裂为正则型（即 $U^{-1} \geq 0$ 和 $V \geq 0$）或弱

正则I型（即 $U^{-1} \geq 0$ 和 $U^{-1}V \geq 0$）或弱正则II型（即 $U^{-1} \geq 0$ 和 $VU^{-1} \geq 0$）。在第4.2小节中，系数矩阵 A 仅为奇异矩阵，分裂为拟正则型或拟弱正则I型（或II型）。

4.1. 当 A 是奇异 M-矩阵时

下面的结果给出了半收敛矩阵的一种刻画。

定理 4.1. ([19])
设 $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 满足 $\rho(T) = 1$。那么， T 是半收敛的，当且仅当以下陈述成立：

(i) $1 \in \sigma(T)$ 和 $\gamma(T) < 1$;

(ii) $\mathcal{N}(I-T) \oplus \mathcal{R}(I-T) = \mathbb{R}^n$。

回顾一下，最后一个条件（ii）等价于矩阵（$I-T$）的群逆存在。

Alefeld [10] 得到了以下关于具有正对角元的非负矩阵半收敛性的结果。

定理 4.2。（[10,定理 2]）
设 $T \geq 0$、 $diag(T) > 0$。那么，若 $\rho(T) \leq 1$ 且 $\mathcal{N}(I-T) \oplus \mathcal{R}(I-T) = \mathbb{R}^n$，则 T 半收敛。

下一个结果给出了具有性质 c 的 M-矩阵的一个刻画，其中 A 具有正则分裂。

定理 4.3。（[19]& [11, 定理 10]）
设 $A = U - V$ 是正则分裂。那么， A 是具有性质 c 的 M-矩阵，当且仅当 $\rho(T) \leq 1$ 且 $\mathcal{N}(I-T) \oplus \mathcal{R}(I-T) = \mathbb{R}^n$，其中 $T = U^{-1}V$。

考虑奇异矩阵 A 的三个正则分裂，即 $A = K - L = U - V = X - Y$，则将 (1.3) 重写后，我们有

$$x^{k+1} = X^{-1}YU^{-1}VK^{-1}Lx^k + X^{-1}(YU^{-1}VK^{-1} + YU^{-1} + I)b, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad (4.1)$$

若 $\mathcal{H} = X^{-1}YU^{-1}VK^{-1}L$，则 $I - \mathcal{H} = K^{-1}(K + X - A + YU^{-1}L)X^{-1}A$。因此，为了满足 $\mathcal{N}(I-\mathcal{H}) = \mathcal{N}(A)$，我们必须使 $(K + X - A + YU^{-1}L)$ 为非奇异矩阵。下面的定理是对 [18, 定理 3.4]的直接推广，并且对于证明本节的主要结果至关重要。

定理 4.4。设 $A = K - L = U - V = X - Y$ 是奇异矩阵 A 的三个正则分裂。如果 $(K + X - A + YU^{-1}L)$ 是非奇异的，则存在一个正则分裂 $A = B - C$ 使得 $B^{-1}C = X^{-1}YU^{-1}VK^{-1}L$。

现在，我们给出（4.1）半收敛性的充分条件。

定理 4.5. 设 A 是具有性质 c 的 M-矩阵，且 $A = K - L = U - V = X - Y$ 是 A 的三个正则分裂。如果 $(K + X - A + YU^{-1}L)$ 是非奇异的，且 $diag(X^{-1}YU^{-1}VK^{-1}L) > 0$，那么矩阵 $X^{-1}YU^{-1}VK^{-1}L$ 是半收敛的。

证明。由定理 4.4，存在一个正则分裂 $A = B - C$ 使得 $B^{-1}C = X^{-1}YU^{-1}VK^{-1}L$。应用定理 4.3，得到 $\rho(B^{-1}C) \leq 1$ 且 $\mathcal{N}(I - B^{-1}C) \oplus \mathcal{R}(I - B^{-1}C) = \mathbb{R}^n$。由于 $B^{-1}C \geq 0$ 且 $diag(B^{-1}C) > 0$，由定理 4.2，$B^{-1}C = K^{-1}LU^{-1}VX^{-1}Y$ 是半收敛的。

□

注 4.1. 假设 $diag(K^{-1}LU^{-1}VX^{-1}Y) > 0$ 在某些矩阵分裂中未必成立，因此，为了确保单位圆上只有特征值 1，我们寻求一种称为矩阵平移的标准方法的帮助。下面的结果正是沿着这一方向展开的。

定理 4.6. 设 A 是具有性质 c 的 M-矩阵，且 $A = K - L = U - V = X - Y$ 是 A 的三个正则分裂。假设 $(K + X - A + YU^{-1}L)$ 是非奇异的。那么，对于每个 $\delta \in (0, 1)$，矩阵 $\mathcal{H}_\delta = \delta\mathcal{H} + (1 - \delta)I$ 是半收敛的。

证明. 显然，根据定理 4.3 和定理 4.4，有 $\rho(\mathcal{H}_\delta) \leq 1$ 以及 $\mathcal{N}(I - \mathcal{H}_\delta) \oplus \mathcal{R}(I - \mathcal{H}_\delta) = \mathbb{R}^n$，其中 $\delta \in (0, 1)$。因此，$\mathcal{H}_\delta$ 在单位圆上只有特征值 1。现在，应用定理 4.1，可得 $\mathcal{H}_\delta$ 对于所有 $\delta \in (0, 1)$ 都是半收敛的。

□

如有需要，我们可以将（参见 [11]）（4.1）替换为

$$x^{k+1} = \delta(\mathcal{H}x^k + \hat{b}) + (1 - \delta)x^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4.2}$$

其中 $\mathcal{H} = X^{-1}YU^{-1}VK^{-1}L$ 且 $\hat{b} = X^{-1}(YU^{-1}VK^{-1} + YU^{-1} + I)b$。

定理 4.7. 设 A 是具有性质 c 的 M-矩阵，且 $A = K - L = U - V = X - Y$ 是 A 的三个正则分裂，并且 $(K + X - A + YU^{-1}L)$ 非奇异。则下列条件成立：

(i) 若 $diag(\mathcal{H}) > 0$，则对于任意初始向量 x^0，三步交替迭代格式 (4.1) 收敛到相容线性方程组 $Ax = b$ 的一个解，

(ii) 对于任意初始向量 x^0，修正的三步交替格式 (4.2) 收敛到相容线性方程组 $Ax = b$ 的一个解。

证明。(i) 设 x^* 是 $Ax = b$ 的一个解，e_{k+1} 是经过 $(k+1)^{th}$ 次迭代后的误差向量，则 $e_{k+1} = \mathcal{H}e_k = \mathcal{H}^k e_0$。根据定理 4.5，$\mathcal{H}$ 是半收敛的，因此，$\lim_{k\to 0} e_{k+1} = \lim_{k\to 0} \mathcal{H}^k e_0 = (I - (I - \mathcal{H})(I - \mathcal{H})^{\#})e^0$.

(ii) 由定理 4.6 可知，这一点显然成立。 □

例 4.1. ([2,例 8.2.3])
考虑一个 n 状态的粒子随机游走，该粒子沿直线以单位步长移动。假设粒子向左或向右移动一步的概率相等，但在边界点处，粒子始终以概率 1 向后移动一步。如果粒子向右移动的概率为 p，向左移动的概率为 q，那么此处 $p = q$。与该马尔可夫链相关的转移矩阵为 $n \times n$ 矩阵 $\mathcal{T}$，其形式如下。

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

平稳概率向量 x （记为）满足 $x = \mathcal{T}^t x$，或者等价地，我们需要求解齐次系统（$I - \mathcal{T}^t$）$x = 0$。显然，$I - \mathcal{T}^t$ 是一个奇异的 M矩阵，具有性质 c 且列和为零。为计算 x，我们应用上述讨论的三步交替迭代法半收敛理论，并将其与单步法和两步法进行比较。为此，我们改变系数矩阵$I - \mathcal{T}^t$的阶数 n。令 $K = 2diag$（A）、$U = 2.5diag$（A）和 $X = 3diag$（A），可得到奇异 M矩阵 A 的三个正则分裂 $A = K - L = U - V = X - Y$，其具有性质$c$。表 2 显示，与单步法和两步交替法相比，三步交替迭代法所需的计算时间和迭代次数都少得多。这里，容差为 $\epsilon = 10e - 8$。

表 2：对比表

Size	分裂	IT	Time	γ
10×10	三步	166	0.000421	0.9274
	两步	228	0.000867	0.9465
	单步	409	0.001413	0.9698
30×30	三步	1330	0.008085	0.9928
	两步	1822	0.010165	0.9947
	单步	3279	0.013322	0.9971
90×90	三步	8894	0.086668	0.9992
	两步	12188	0.106848	0.9994
	单步	21937	0.186011	0.9997

4.2. 当 A 是奇异矩阵

Wu [13] 在 I 型准弱正则分裂（或 II 型）的情况下，证明了两步交替迭代格式的半收敛性。本小节将在系数矩阵A 奇异且分裂为准正则分裂和 I 型（或 II 型）准弱正则分裂时，建立三步交替迭代格式的半收敛性。不过，首先我们回顾这些分裂类别的定义。

定义 4.1. ([13,定义 2.3])
设 $A = U - V$ 是 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的分裂。假设 $index(I - U^{-1}V) \leq 1$ 且$index(I - VU^{-1}) \leq 1$。设 $K_1 =(I - U^{-1}V)(I - U^{-1}V)^{\#}$ 和 $K_2 =(I - VU^{-1})^{\#}(I - VU^{-1})$。那么， $A = U - V$ 被称为

1. 若 U^{-1}、 $U^{-1} \geq 0$ 和 $VK_1 \geq 0$ 存在，则为拟正则分裂；2. 若 U^{-1}、 $U^{-1} \geq 0$ 和 $U^{-1}VK_1 \geq 0$ 存在，则为 I 型拟弱正则分裂；3. 若 U^{-1} 、 $U^{-1} \geq 0$ 和 $K_2VU^{-1} \geq 0$ 存在，则为 II型拟弱正则分裂。

Wu [13] 在 I 型（或 II 型）准弱正则分裂的情况下，得到了以下关于两步交替迭代格式半收敛性的结果，且无需满足条件“A 是一个 M-矩阵”。

定理 4.8. ([13,定理 3.1])
设 $A = K - L = U - V$ 为奇异矩阵 A 的两个 I 型（或 II 型）准弱正则分裂，使得任意一对分裂 $A = K - L = U - V$ 关于 $index(K^{-1}L) \leq 1$、 $index(U^{-1}V) \leq 1$和 $index(U^{-1}VK^{-1}L) \leq 1$均为半收敛。则 $\mathcal{H} =U^{-1}VK^{-1}L$ 是半收敛的。此外，由 $\mathcal{H}$ 诱导的分裂 $A = B - C$ 是同类型的准弱正则分裂。

与上述结果类似，当有三个 I 型（或 II 型）准弱正则分裂时，我们可以得到三步交替迭代格式 (4.1) 的半收敛性。如果将 I 型（或 II 型）准弱正则分裂替换为拟正则分裂，同样的结果仍然成立。

定理 4.9. 设 $A = K - L = U - V = X - Y$ 是奇异矩阵 A 的三个 I 型拟弱正则分裂（或 II 型拟弱正则分裂），且任意一对分裂 $A = K - L = U - V$ 都是半收敛的，其中 $index(K^{-1}L) \leq 1$、$index(U^{-1}V) \leq 1$、$index(X^{-1}Y) \leq 1$、$index(I-U^{-1}VK^{-1}L) \leq 1$ 以及 $index(X^{-1}YU^{-1}VK^{-1}L) \leq 1$。那么，$\mathcal{H} = X^{-1}YU^{-1}VK^{-1}L$ 是半收敛的。此外，由 $\mathcal{H}$ 诱导的分裂 $A = B - C$ 是同一类型的拟弱正则分裂。

证明. 我们将针对 I 型拟弱正则分裂证明这一结果。II 型的情形可类似证明。由于 $A = K - L = U - V$ 中任意一个分裂都是半收敛的 I 型拟弱正则分裂，并且 $index(K^{-1}L) \leq 1$、$index(U^{-1}V) \leq 1$ 以及 $index(I - U^{-1}VK^{-1}L) \leq 1$，由定理 4.8 可知 $T = U^{-1}VK^{-1}L$ 是半收敛的，而由 T 诱导的分裂 $A = B_{12} - C_{12}$（记作此）也是半收敛的 I 型拟弱正则分裂。现在，若考虑分裂 $A = B_{12} - C_{12} = X - Y$ 并应用定理 4.8，则矩阵 $\mathcal{H} = X^{-1}YB_{12}^{-1}C_{12} = X^{-1}YU^{-1}VK^{-1}L$ 是半收敛的。此外，按照前面给出的相同论证，由 $\mathcal{H}$ 诱导的分裂 $A = B - C$ 也是 I 型拟弱正则分裂。

□

Wu [13]随后得到了以下比较结果。

定理 4.10. ([13,定理 4.1])
设 $A = K - L$ 是一个半收敛拟正则分裂，$A = U - V$ 是奇异矩阵 A 的一个拟正则分裂，且满足 $index(I - K^{-1}L) \leq 1$, $index(I - U^{-1}V) \leq 1$以及 $index(I - \mathcal{H}) \leq 1$，其中 $\mathcal{H} = U^{-1}VK^{-1}L$。那么，

$$\gamma(\mathcal{H}) \leq min\{\gamma(U^{-1}V), \gamma(K^{-1}L))\} < 1.$$

下面的结果受上述定理启发。

定理 4.11. 设 $A = K - L$ 是一个半收敛拟正则分裂，且 $A = U - V = X - Y$ 是奇异矩阵 A的一个 I 型拟弱正则分裂，满足 $index(I - K^{-1}L) \leq 1$, $index(I - U^{-1}V) \leq 1$, $index(I - X^{-1}Y) \leq 1$ 以及$index(I - \mathcal{H}) \leq 1$，其中 $\mathcal{H} = X^{-1}YU^{-1}VK^{-1}L$。那么，$\gamma(\mathcal{H}) \leq \gamma(X^{-1}Y) < 1.$

证明。由于 $A = K - L = U - V$ 是拟正则分裂，因此，由 $U^{-1}VK^{-1}L$ 诱导的分裂 $A = B_{12} - C_{12}$ 也是拟正则分裂。现在，考虑

正则分裂 $A = B_{12} - C_{12} = X - Y$，那么 $X^{-1}YB_{12}^{-1}C_{12} = X^{-1}YU^{-1}VK^{-1}L$ 的诱导分裂 $A = B - C$ 也是正则分裂。现在，根据定理 4.10，我们有 $\gamma(\mathcal{H}) = \gamma(B^{-1}C) \leq \gamma(X^{-1}Y) < 1$. □

现在，我们将下一个结果作为推论给出。

推论 4.12. 设 $A = K - L = U - V = X - Y$ 是奇异矩阵 A 的三个半收敛拟正则分裂，使得 $index(I - K^{-1}L) \leq 1$、$index(I - U^{-1}V) \leq 1$、$index(I - X^{-1}Y) \leq 1$ 以及 $index(I - \mathcal{H}) \leq 1$，其中 $\mathcal{H} = X^{-1}YU^{-1}VK^{-1}L$。则，$\gamma(\mathcal{H}) \leq min\{\gamma(U^{-1}V)\ \gamma(X^{-1}Y)\ \gamma(K^{-1}L)\} < 1$.

证明. 根据定理 4.11，我们有 $\gamma(H) \leq \gamma(X^{-1}Y)$。类似地，考虑其他分裂对，并重复定理 4.11 中的步骤，我们可以得出 $\gamma(\mathcal{H}) \leq min\{\gamma(U^{-1}V)\ \gamma(X^{-1}Y)\ \gamma(K^{-1}L)\} < 1$.

□

下面的结果给出了一些充分条件，使得三步交替迭代格式的半收敛性快于两步交替迭代格式。

定理 4.13. 设 $A = K - L = U - V = X - Y$ 是奇异矩阵 A 的三个半收敛拟正则分裂。设 $A = B - C = B_{12} - C_{12} = B_{13} - C_{13} = B_{23} - C_{23}$ 分别是由矩阵 $\mathcal{H} = X^{-1}YU^{-1}VK^{-1}L$、$U^{-1}VK^{-1}L$、$X^{-1}YK^{-1}L$ 和 $X^{-1}YU^{-1}V$ 诱导的拟正则分裂。假设 $index(I - K^{-1}L) \leq 1$，$index(I - U^{-1}V) \leq 1$，$index(I - X^{-1}Y) \leq 1$，$index(I - B_{12}^{-1}C_{12}) \leq 1$，$index(I - B_{13}^{-1}C_{13}) \leq 1$，$index(I - B_{23}^{-1}C_{23}) \leq 1$ 且 $index(I - \mathcal{H}) \leq 1$。则，

$$\gamma(\mathcal{H}) \leq min\{\gamma(U^{-1}VK^{-1}L), \gamma(X^{-1}YU^{-1}V), \gamma(X^{-1}YK^{-1}L))\} < 1.$$

证明。考虑分裂对 $A = B_{12} - C_{12} = X - Y$ 并应用推论 4.12，可得 $\gamma(\mathcal{H}) \leq \gamma(B_{12}^{-1}C_{12}) = \gamma(U^{-1}VK^{-1}L)$。类似地，取分裂对 $A = B_{13} - C_{13} = U - V$ 和 $A = B_{23} - C_{23} = K - L$，分别可得 $\gamma(\mathcal{H}) \leq \gamma(B_{13}^{-1}C_{13}) = \gamma(X^{-1}YK^{-1}L)$ 和 $\gamma(\mathcal{H}) \leq \gamma(B_{23}^{-1}C_{23}) = \gamma(X^{-1}YU^{-1}V)$。因此，$\gamma(\mathcal{H}) \leq min\{\gamma(U^{-1}VK^{-1}L)\ \gamma(X^{-1}YU^{-1}V)\ \gamma(X^{-1}YK^{-1}L))\} < 1$.

□

5. 结论

我们建立了针对 II 型适当 G-弱正则分裂的三步交替迭代格式的收敛理论，用以求解指标1线性系统的迭代解。特别地，我们在定理 3.5 中给出了三步交替迭代格式收敛的充分条件。

接下来，定理 3.11 证明了由 S 诱导的适当分裂的唯一性。最后，我们在某些假设下证明了定理 3.19 中的三步交替迭代格式比常用迭代格式和两步交替迭代格式收敛更快。表1 展示了采用三步交替迭代格式的计算优势。接下来，我们建立了三步交替迭代格式在正则分裂、I 型弱正则分裂（定理 4.5 和 4.7）以及拟正则分裂（定理 4.9）下的半收敛性。此外，研究表明，三步交替迭代格式的半收敛速率优于两步和单步迭代格式（定理 4.13 和 4.11）。该理论非常适用于求解由马尔可夫过程产生的线性方程组。表 2 表明，三步迭代格式在计算存储量、计算时间和迭代步数方面均表现有效。提出这一方法旨在向研究人员和从业者介绍一种易于理解、实现且计算效率高的替代方案。

参考文献

[1] A. Berman and R. J. Plemmons, 线性方程组最优最小二乘解的锥与迭代法，SIAM 数值分析杂志 11, (1974), 145–154.[2] A. Berman and R. J. Plemmons, 数学科学中的非负矩阵，SIAM, 费城，1994年.[3] A. K. Baliarsingh and L. Jena, 关于矩阵指标适当多重分裂的一则注记, Banach 数学分析杂志 9, (2015), 384–394.[4] A. K. Nandi, J. K. Sahoo and D. Mishra, 指标 1 矩阵与非奇异矩阵的三步交替迭代，Numer. Algorithms 84, (2020), 457–483.[5] C. D. Meyer, 群广义逆在有限马尔可夫链理论中的作用，SIAM 评论 17, (1975), 443–464.[6] C. K. Giri, A. K. Baliarsingh, R. B. Dash and S. Das, 关于奇异矩阵指标适当分裂不同子类的一则注记, 国际应用计算数学杂志 5, (2019), 96.[7] C. K. Giri, 矩阵的指标适当非负分裂，数值代数、控制与优化 6, (2016), 103-113.[8] C. K. Giri and D. Mishra, 关于涉及矩形矩阵的交替迭代收敛性的补充结果, 数值函数分析与优化 38, (2017), 160–180.[9] D. Mishra, 适当弱正则分裂及其在交替迭代收敛性中的应用，Filomat, 32, (2018), 6563–6573.[10] G. Alefeld and N. Schneider, 关于 M-矩阵的平方根, 线性代数及其应用 42, (1982), 119–132.[11] H. Migallón, V. Migallón and J. Penadés,相容线性方程组的交替两阶段方法及其在马尔可夫链并行求解中的应用，高级工程软件 41, 1 (2010), 13–21.

[12] J.-J. Climent and C. Perea, 广义交替迭代法的收敛与比较定理，Appl. Math. Comput. 143, (2003), 1–14.[13] J. Wu, 奇异线性方程组交替迭代法的半收敛性，Int. J. Math. Comput. Sci. 7, 3 (2013), 414–418.[14] L. Collatz, 泛函分析与数值数学，Academic Press，纽约—伦敦，1966年.
[15] L. Jena, 正则分裂与弱正则分裂理论向奇异矩阵的推广，Adv.Oper. Theory 3, (2018), 411-422.
[16] L. Jena and D. Mishra, B_D-矩阵分裂，线性代数及其应用 437, (2012), 1162–1173.
[17] L. Jena and D. Mishra, 矩阵的 B_{row}-分裂与 B_{ran}-分裂的比较，Linear Multilinear Algebra 61, (2013), 35–48.[18] M. Benzi, D. B. Szyld, 定常迭代法分裂的存在性与唯一性及其在交替法中的应用，Numer. Math. 76, 3 (1997), 309-321.[19] M. Neumann and R. J. Plemmons, M-矩阵并行多分裂迭代法的收敛性，线性代数及其应用 88/89, (1987), 559–73.[20] N. Mishra and M. Mishra, 基于复合分裂的矩形线性系统两阶段迭代，Comput. Math. Appl. 75, (2018), 2746-2756.
[21] R. J. Plemmons, 正则分裂与离散诺伊曼问题，Numer. Math. 25, (1976), 153-161.
[22] R. S. Varga, 矩阵迭代分析，Springer-Verlag，纽约，柏林，海德堡，2000年.[23] Y. Wei, Drazin逆与奇异线性方程组的指标分裂，Appl. Math. Comput. 95, (1998), 115–124.
[24] Y. Wei and H. Wu, 奇异线性方程组 Drazin逆解指标分裂的补充结果，Electron. J. Linear Algebra 8, (2001), 83–93.