arXiv:2305.04584v2 [math.SP] 8 May 2024

随机覆盖和随机酉丛谱的有效下界

Will Hide

摘要

设 X 为一个有限面积非紧双曲曲面。我们研究 X 的随机覆盖曲面以及 X 上随机酉丛的拉普拉斯算子谱。我们证明，存在一个常数 $c>0$，使得当 $n\to\infty$ 时，随着概率趋于 1，X 的一个均匀随机的次数为 n 的黎曼覆盖曲面 X_n 除了 X 的特征值及其相同重数外，不存在低于 $\frac{1}{4}-c^{(\log \text{双对数 } n)^2 \text{双对数 } n}$ 的拉普拉斯特征值。我们还证明，当 $n\to\infty$ 时，随着概率趋于 1，$\overline{X}$ 上一个秩为 n 的随机酉丛 E_ϕ 不存在低于 $\frac{1}{4}-c^{(\log \text{对数 } n)^2 \text{对数 } n}$ 的拉普拉斯特征值。

目录

1 引言 1
1.1 其他相关工作 .3 1.2 关于证明的一点说明 .4 1.3 记号 .5

2 预备 6
2.1 函数空间 .7

3 随机矩阵理论 8

4 参数子的构造 12
4.1 尖点拟参数 .13 4.2 关于 $\mathbb{H}$ .15 4.3 内部拟参数 .16

5 概率论 算子范数界 17
5.1 预备知识 .17 5.2 随机算子界 .22

<escape>6 定理 1.2 和定理 1.4 的证明 25</escape>

1 引言

设 X 为有限面积非紧双曲曲面，即具有常曲率 -1 的黎曼曲面。我们研究 $L^2(X)$ 上的拉普拉斯算子 Δ_X，其谱 spec (Δ_X) 包含于 $[0,\infty)$。低能谱 spec $(\Delta_X)\cap[0,\frac{1}{4})$ 由平凡特征值 0（当且仅当 X 连通时，该特征值为单重）以及可能存在的有限个非零有限重数特征值组成。在 $[\frac{1}{4},\infty)$ 中存在绝对连续谱，其中可能有无穷多个嵌入连续谱的特征值。我们尤为关注谱隙 inf (spec (Δ_X) $\setminus\{0\}$)。

我们研究随机曲面的谱隙大小。我们的模型最早在[MN20, MNP22], 中研究，其做法是固定一个基曲面 X，并考虑 X_n 次数为n的均匀随机覆盖。在此背景下，由于谱（Δ_X）$\subset$包含于谱（Δ_{X_n}），我们将注意力限制在新特征值上，即出现在谱（Δ_{X_n}）中、但未出现在谱（Δ_X）中的特征值。我们的覆盖不必是连通的，但根据 Dixon 的一个结果，它们以高概率连通 [Di69]（见第2节）。若一族事件（依赖于 n）发生的概率在 $n \to \infty$趋于无穷时趋近于 1，我们称这些事件渐近几乎必然发生（a.a.s.）。

在本文 中，我们以 Magee 和作者在 [HM23 中提出的以下定理为基础].

定理 1.1 ([HM23，定理 1.1])。设 X 是一个有限面积非紧双曲曲面X，对于任意 $\epsilon > 0$，一个均匀随机的次数为 n 的黎曼覆盖 X_n 几乎必然满足

$$\operatorname{spec}(\Delta_{X_n}) \cap \left[0, \frac{1}{4} - \epsilon\right) = \operatorname{spec}(\Delta_X) \cap \left[0, \frac{1}{4} - \epsilon\right),$$

其中等式两侧的重数相同。

本文旨在研究函数 $\epsilon = \epsilon(n)$ 在定理 1.1 中可以取何种形式。为此，我们证明可以令 以 (loglog log $n)^2 \log\log n$ 的速率增长。我们证明如下。

定理 1.2. 对于任意有限面积非紧双曲曲面 X，存在一个常数$c > 0$，使得均匀随机的次数为 n 的黎曼覆盖 X_n 几乎必然满足

$$\operatorname{spec}(\Delta_{X_n}) \cap \left[0, \frac{1}{4} - c\frac{(\log\log\log n)^2}{\log\log n}\right) = \operatorname{spec}(\Delta_X) \cap \left[0, \frac{1}{4} - c\frac{(\log\log\log n)^2}{\log\log n}\right),$$

其中两边的重数相同。

作为定理 1.1 的推论， [HM23 第 8] 节证明，存在一列亏格为 $g_i \to \infty$、第一非零特征值为 $\lambda_1(X_i) \to \frac{1}{4}$的闭曲面 $\{X_i\}$，从而解决了 Buser 的一个猜想 [Bu84]（另见 [LM22]，其中给出了另一种证明）。定理 1.2 可以对收敛到 1 4 这一过程进行定量描述。取 X 为例如三孔球面，其满足 $\lambda_1(X) > \frac{1}{4}$，定理 1.2 得到一族欧拉示性数为 $-n$的覆盖 X_n，并且

$$\inf \operatorname{spec}(X_n) \geqslant \frac{1}{4} - c\frac{(\log\log\log n)^2}{\log\log n}.$$

取偶数次覆盖，如 [HM23 第 8], 节所述，随后可以应用 Buser、Burger 和 Dodzuik 的紧化过程 [BBD88]，得到一列闭双曲曲面 X_g，其亏格为 g 且

$$\lambda_1(X_g) \geqslant \frac{1}{4} - c'\frac{(\log\log\log g)^2}{\log\log g},$$

在Buser猜想的证明中给出收敛到1 4 的定量速率[Bu84]。关于这一点，请参阅 [HM23第1节。1] 其中介绍了这一猜想的历史。

我们还对研究随机秩 n 酉丛在 X上的类似问题感兴趣。关于这一情形的定理 1.1 的类比由 Zargar 在 [Za22], 中证明，现介绍如下。由于 X 是一个有限面积非紧双曲曲面， X 可以表示为$X = \Gamma/\mathbb{H}$ 其中 Γ 是 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ 的离散无挠子群，由 $\gamma_1, \ldots, \gamma_d$<style id="">自由生成。

并且任意 $\phi \in$ 同态集 $(\Gamma, \mathrm{U}(n))$ 都由 $\phi(\gamma_1) \ldots, \phi(\gamma_d)$ 确定。我们通过独立地对每个 $\phi(\gamma_i) \in \mathrm{U}(n)$ 进行采样，并使用 Haar 概率，为 $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{U}(n))$ 配备自然的概率测度 $\mathbb{P}_n$。令 $\rho_\phi : \Gamma \to \mathrm{U}(n)$ 为通过 $\mathrm{std}_n \circ \phi$ 得到的随机 $\mathbb{C}^n$ 表示，其中 std_n 是标准表示。我们考虑相应的（随机）酉丛 E_ϕ 以及作用在 E_ϕ截面上的拉普拉斯算子 Δ_ϕ。于是，$\mathrm{spec}(\Delta_\phi) \cap [0, \frac{1}{4})$ 由有限多个具有有限重数的特征值组成。以下结果已在 [Za22] 中证明。

定理 1.3 ([Za22，定理 1.2])。对于任意有限面积非紧双曲曲面 X，对于任意 $\kappa > 0$一个定义在 E_ϕ 之上、秩为 X 的随机酉丛 n 满足

$$\inf \mathrm{spec}\Delta_\phi \geqslant \frac{1}{4} - \kappa,$$

几乎必然地

我们注意到 [Za22，定理 1。2] 还处理了源自 U 的其他不可约表示的平坦丛（n），但须满足关于签名的条件。我们证明了定理1.3的以下定量版本。

定理 1.4。对于任意有限面积非紧双曲曲面 X，存在一个常数$c > 0$，使得秩为 n 的随机酉丛 E_ϕ 在 X 上具有

$$\inf \mathrm{spec}\Delta_\phi \geqslant \frac{1}{4} - c\frac{(\log\log n)^2}{\log n},$$

几乎必然有的（a.a.s.）

1.1 其他相关工作

随机正则图

本文结果的动机可从随机正则图的研究中找到。Friedman 的一项著名定理 [Fr08]，（原为 Alon 猜想）指出，对于任意 $\epsilon > 0$，一个随机 d-正则图，若有 n 个顶点，则满足

$$\lambda_2, |\lambda_n| \leqslant 2\sqrt{d-1} + \epsilon, \tag{1.1}$$

当 $n \to \infty$ 时，该结论以趋近于 1 的概率成立。Bordenave [Bo20] 证明了，上述表达式中的 ϵ可以取为 $c\left(\frac{\log\log n}{n}\right)^{2^{\log}}$。Huang 和 Yau [HY21],的一项出色工作表明，$\epsilon = O(n^{-c})$ 可以取为某个 $c > 0$。

Friedman [Fr03] 猜想，Alon 猜想的某个版本应适用于固定图的随机覆盖。Bordenave 和 Collins [BC19]在一项突破性工作中证明了这一点。

随机覆盖

Schottky 曲面情形下，定理 1.1 的类似结果由 Magee 和 Naud 证明，见 [MN21]，该证明建立在一个中间结果 [MN20]之上。紧曲面的随机覆盖由 Magee、Naud 和 Puder 在[MNP22] 中进行了研究。他们证明，对任意 $\epsilon > 0$，一致随机的次数为 n 的覆盖几乎必然没有低于 $\frac{3}{16} - \epsilon$的新特征值。Naud 也在 [Na22]中研究了随机覆盖的特征值统计。

随机曲面的其他模型

人们对研究各种模型下随机双曲曲面的几何与谱理论抱有浓厚兴趣。在 [BM04] 中，Brooks 和 Makover 提出了随机曲面的组合模型，并证明以高概率存在一个非显式的一致谱隙。关于 Brooks-Makover 模型的其他研究包括 [Ga06、BCP21、SW22A]。

随机曲面的另一个模型是 Weil-Petersson 模型，它通过从模空间中按照归一化的 Weil-Petersson 体积进行抽样而得到。Guth、Parlier 和 Young 研究了该模型中紧曲面的裤子分解长度 [GPY11]。Mirzakhani[Mi13] 率先研究了该模型中的拉普拉斯算子谱，并证明当 g 紧曲面的亏格为 $\frac{1}{4}\left(\frac{\log(2)}{2\pi+\log(2)}\right)^2 \approx 0.0024$ 时，其谱隙至少为该值的概率随着 $g \to \infty$趋于 1。这一结果分别由 Wu 和 Xue $\frac{3}{16}-\epsilon$ 和 Lipnowksi 和 Wright [WX21] 进一步改进为 [LW21], , 随后又由 Anantharaman 和 Monk $\frac{2}{9}-\epsilon$ 最近改进为 [AM23]。

对于体积较大的非紧曲面，尖点数相对于亏格的比例会影响低能谱。Zograf [Zo87]证明，存在一个常数$C>0$，使得任意亏格为 g 且有 n 个尖点的双曲曲面都满足 $\lambda_1 < C\frac{g-1}{n}$。如果尖点数 n 的增长速度慢于 $\sqrt{g}$，那么 Weil-Petersson 随机曲面以高概率具有一致谱隙 [Hi22, SW22]。当尖点数的增长速度快于$\sqrt{g}$ [时，这一结论不再成立22], ；在这种情况下，Weil-Petersson 随机曲面会有任意小的特征值。另一方面，如果亏格固定而尖点数 n 趋于无穷大，那么以高概率，小特征值的数量关于 n 呈多项式增长 [HT22]。关于 Weil-Petersson 随机曲面谱理论的其他研究包括 [GMST21, Mo21, Ru22]。

塞尔伯格特征值猜想

某些算术双曲曲面的谱隙在数论中备受关注，例如参见 [Sa03]。令 $N \geqslant 1$，SL 的主合同子群$_2(\mathbb{Z})$ 的层级为 N 是

$$\Gamma(N) = \{T \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid T \equiv I \mod N\}.$$

考虑商空间 $X(N)_{\text{定义}} = \Gamma(N) \backslash \mathbb{H}$。Selberg 在 [Se65] 证明了

$$\lambda_1(X(N)) \geqslant \frac{3}{16},$$

对于每个 $N \geqslant 1$，并提出猜想，认为 3 16 可以改进为 1 4。在经历了许多中间结果 [GJ78, Iw89, LRS95, Sa95, Iw96, KS02], 之后，目前已知的最佳下界是 Kim 和 Sarnak[Ki03] 给出的 975 4096。在本文的背景下，取 X 为一个非紧致算术曲面，且满足 $\lambda_1(X) \geqslant \frac{1}{4}$，定理 1.2 表明，可以找到一个算术曲面序列（不一定是同余曲面）$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得 Vol (X_n) $= n$Vol (X)，并且

$$\lambda_1(X_n) \geqslant \frac{1}{4} - c\frac{(\log\log\log n)^2}{\log\log n}.$$

1.2 关于证明的一点说明

在 [HM23], 定理1.1 的证明依赖于 Bordenave 和 Collins 在 [BC19]中的工作。 [BC19] 的结果最近在 [BC23] 中得到了定量化推广，这是一项关键的

本文当前研究中的一个重要组成部分。对于酉丛，所采用的方法类似，因此我们在此仅讨论覆盖曲面。

设 $X = \Gamma\backslash\mathbb{H}$ 已给定。第 2 节说明，可以用 $\varphi \in$ 同态集 (Γ, S_n) 对次数为 n的覆盖曲面 X_φ 进行参数化。在 [HM23], 中，禁止覆盖的特征值成为新特征值的问题 X_φ 被归结为以高概率对如下形式的（随机）算子求算子范数上界：

$$\sum_{\gamma\in S} a_\gamma \otimes \rho_\varphi(\gamma), \tag{1.2}$$

其中 $a_\gamma \in M_m(\mathbb{C})$，作用于 $\mathbb{C}^m \otimes V_n^0$，其中 是 $n-1$ 维不可约表示 S_n。这里 m 和 $S \subset \Gamma$ 均为有限且固定的，取决于定理 ϵ 中所选的 1.1。为此，可以使用 [BC19] 的结果。

为了将 $\epsilon(n) \to 0$ 作为 $n \to \infty$ 用于定理 1.2 ，除其他条件外，需要允许集合 S 的大小以及矩阵 m 的维数 a_γ 随着 n增长，具体取决于 ϵ。Bordenave 和 Collins 在 [BC23], 中的工作借助有效的线性化技巧（引理 3.5），恰好能够处理这种情况。定理 1.2 和定理 1.4 的证明依赖于对 [HM23] 中的论证进行有效化，以便应用 [BC23]中的结果。

我们简要讨论定理 1.2 和定理 1.4中得到的收敛速率。考虑一个形式为 (*P*的算子，其中 1.2)。令 $l = \sup_{\gamma\in S} \mathrm{wl}(\gamma)$，其中 wl (γ) 是 Γ 中的字长，而 $S \subset \Gamma$ 是指标集。应用线性化技巧后，为了应用 Bordenave 和 Collins [BC23] 的结果来界定 P的算子范数，我们最终需要

$$l^2 |S|^{\lceil \log_2 l\rceil} l^{(\lceil \log_2 l\rceil - 1)} \ll (\log(n))^{\frac{1}{4}}, \tag{1.3}$$

对于置换（参见推论 3.7）以及

$$l^2 |S|^{\lceil \log_2 l\rceil} l^{(\lceil \log_2 l\rceil - 1)} \ll n^{\frac{1}{32d+160}}, \tag{1.4}$$

对于酉算子（参见推论 3.6）。第 5 节表明，为了排除低于$\frac{1}{4} - \epsilon$（n）的谱，需要考虑一个算子 P，其形式为（1.2），其中 $|S|$，$l \ll \exp\left(\epsilon\, {}^{2}_{n()}\right)$。这与（1.3）和（1.4）共同决定了定理 1.2 和定理 1.4中的收敛速率。

1.3 记号

在证明中会出现不少常数，其中有些需要追踪，有些则不需要。我们选择在全文中使用记号 $C > 0$ 表示某个正的常数，它至多依赖于固定曲面 X，其具体值无关紧要。需要注意的是，C 的值有时会逐行变化。我们确实需要追踪的常数，会按照首次出现的顺序用下标标记，例如 c_1，或者直接给出数值。

对于函数 $f = f(n)$、 $g = g(n)$，我们使用 Vinogradov 记号 $f \ll g$ 表示存在一个常数 $c > 0$和一个 $N \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n \geqslant N$，都有 $f(n) \leqslant cg(n)$。我们也写作 $f = o(1)$，表示当 $n \to \infty$ 时， $f(n) \to 0$ 。

致谢

我们感谢 Michael Magee 和 Charles Bordenave 与我们讨论这项工作。

2 预备

设 X 是一个固定的非紧有限面积双曲曲面。为简化记号，我们假设X 只有一个尖点。这不会影响我们的论证。我们将 X 视为

$$X = \Gamma\backslash\mathbb{H},$$

其中 Γ 是 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ 的一个离散无挠子群，由以下元素自由生成：

$$\gamma_1, \ldots, \gamma_d \in \Gamma.$$

我们令 F 为 X 的一个狄利克雷域。在必要时对 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ 中的 Γ 进行共轭后，可以假设 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma$，其生成尖点的稳定子群，并且 $F \subset \{x + iy \in \mathbb{H} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$。随后我们定义

$$H(L) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{x + iy \in F \mid y > L\}. \tag{2.1}$$

随机覆盖

对于任意 $n \in \mathbb{N}$，令 $[n] \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{1, \ldots, n\}$ 表示 $[n]$ 上的置换群。给定任意 $\varphi \in$ 同态集 (Γ, S_n)，我们定义 Γ 在 $\mathbb{H} \times [n]$ 上的一个作用，其定义为

$$\gamma(z, x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\gamma z, \varphi(\gamma)[x]).$$

我们得到一个次数为 n 的覆盖空间 X_φ，其来源为 X，通过

$$X_\varphi \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Gamma\backslash_\varphi(\mathbb{H} \times [n]). \tag{2.2}$$

抽样 φ 均匀随机地，我们得到一个均匀随机的次数为 n 的覆盖。注意，X_φ 不一定是连通的，事实上，X_φ 连通当且仅当 Γ 通过 $[n]$ 在 φ 上传递作用。根据 Dixon 定理 [Di69]，，在 S_n 中均匀随机选取的两个置换以概率趋近于 1 生成 A_n，因此 S_n 几乎必然（a.a.s.）是连通的均匀随机覆盖 X_φ。

令 $V_n \stackrel{\mathrm{def}}{=} \ell^2([n])$，并令 $V_n^0 \subset V_n$ 零均值函数子空间。则 S_n 通过由 0-1 矩阵给出的标准表示 std_n 作用于 V_n，而 V_n^0 是一个 $n-1$ 维不可约分量。给定一个均匀随机的 $\varphi \in \mathrm{Hom}(\Gamma; S_n)$，我们考虑随机的 V_n^0表示 Γ

$$\rho_\varphi : \Gamma \to \mathrm{End}\left(V_n^0\right),$$

给定为

$$\rho_\varphi \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{std}_n \circ \varphi.$$

随机酉丛

令 $\mathrm{U}(n)$ 表示酉群。那么，同态 $\phi\colon \Gamma \to \mathrm{U}(n)$ 由以下内容唯一确定。

$$\phi(\gamma_1), \ldots, \phi(\gamma_d) \in \mathrm{U}(n).$$

因此，我们可以通过按照 Haar 概率独立地采样每个生成元的像，在 $\mathrm{Hom}(\Gamma; \mathrm{U}(n))$ 上赋予一个概率测度 $\mathbb{P}_n$。给定这样一个随机的 $\phi \in \mathrm{Hom}(\Gamma; \mathrm{U}(n))$，我们考虑 Γ 的随机 $\mathbb{C}^n$ 表示。

$$\rho_\phi : \Gamma \to \mathrm{U}(n),$$

给定为

$$\rho_\phi \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{std}_n \circ \phi,$$

其中，std_n 是 $\mathrm{U}(n)$ 的标准表示。考虑 Γ 对 $\mathbb{H} \times \mathbb{C}^n$ 的作用，按大小规律排列。

$$\gamma\,(z, \mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} (\gamma z, \phi(\gamma)\mathbf{x})\,,$$

并令

$$E_\phi \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma \backslash_\phi (\mathbb{H} \times \mathbb{C}^n)$$

用该作用表示商空间。然后以概率 $\mathbb{P}_n$ 对 $\phi \in \mathrm{Hom}(\Gamma; \mathrm{U}(n))$ 进行抽样，我们得到 X 上的随机秩-n 酉丛。

2.1 函数空间

覆盖

为方便读者，我们回顾以下来自[HM23，第 2 节2]。我们定义 $L^2_{\mathrm{new}}(X_\varphi)$ 为由 L^2 上与 X_φ 的所有提升正交的 L^2 函数所构成的空间 X。那么

$$L^2\,(X_\varphi) \cong L^2_{\mathrm{new}}(X) \oplus L^2\,(X)\,.$$

回顾一下，我们固定了 F 作为 X 的狄利克雷基本域。令 $C^\infty\left(\mathbb{H}; V_n^0\right)$ 表示定义在 $\mathbb{H}$ 上的光滑 V_n^0 值函数。在以下两个空间之间存在一个等距线性同构：

$$C^\infty\,(X_\varphi) \cap L^2_{\mathrm{new}}\,(X_\varphi)\,,$$

以及满足下列条件的定义在 $\mathbb{H}$ 上的光滑 V_n^0 值函数空间：

$$f\,(\gamma z) = \rho_\varphi\,(\gamma)\,f\,(z)\,,$$

对所有 $\gamma \in \Gamma$，且具有有限范数

$$\|f\|^2_{L^2(F)} \stackrel{\text{def}}{=} \int_F \|f(z)\|^2_{V_n^0} d\mu_{\mathbb{H}}\,(z) < \infty.$$

我们将这类函数组成的空间记为 $C^\infty_\varphi\left(\mathbb{H};\ V_n^0\right)$. 关于 $\|\bullet\|_{L^2\,(F)}$ 完备化后的空间记为 $L^2_\varphi\left(\mathbb{H};\ V_n^0\right)$；上述同构可延拓为 $L^2_{\mathrm{new}}\,(X_\varphi)$ 与 $L^2_\varphi\left(\mathbb{H}; V_n^0\right)$ 之间的同构。

令 $C^\infty_{c,\varphi}\left(\mathbb{H}; V_n^0\right)$ 表示 $C^\infty_\varphi\left(\mathbb{H};\ V_n^0\right)$ 中由关于 Γ 紧支撑的函数构成的子集。我们令 $H^2_\varphi\left(\mathbb{H};\ V_n^0\right)$ 表示关于范数完备化后的 $C^\infty_{c,\varphi}\left(\mathbb{H};\ V_n^0\right)$。

$$\|f\|^2_{H^2_\varphi(\mathbb{H}; V_n^0)} \stackrel{\text{def}}{=} \|f\|^2_{L^2(F)} + \|\Delta f\|^2_{L^2(F)}.$$

我们用 $H^2(X_\varphi)$ 表示关于范数的 $C^\infty_c(X_\varphi)$ 完备化

$$\|f\|^2_{H^2(X_\varphi)} \stackrel{\text{def}}{=} \|f\|^2_{L^2(X_\varphi)} + \|\Delta f\|^2_{L^2(X_\varphi)}.$$

将 $H^2(X_\varphi)$ 视为 $L^2\,(X_\varphi)$ 的子空间，我们令

$$H^2_{\mathrm{new}}\,(X_\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} H^2\,(X_\varphi) \cap L^2_{\mathrm{new}}\,(X_\varphi)\,.$$

$H^2_{\mathrm{new}}\,(X_\varphi)$ 与 $H^2_\varphi\left(\mathbb{H}\right.$ 之间存在一个等距同构；$\left.V_n^0\right)$ 该同构 intertwines 两个相关的拉普拉斯算子。

酉丛

我们将 $E_\phi \to X$ 的光滑整体截面空间（记作 $C^\infty(X; E_\phi)$）与空间$C^\infty_\phi(\mathbb{H}; \mathbb{C}^n)$ 等同起来；后者是定义在 $\mathbb{H}$ 上、取值于 $\mathbb{C}^n$ 的光滑函数空间，这些函数按如下方式变换

$$f(\gamma z) = \rho_\phi(\gamma) f(z).$$

我们用 $L^2(X; E_\phi)$ 表示 $C^\infty(X;\ E_\phi)$ 关于范数

$$\|f\|^2_{L^2(F)} \overset{\text{def}}{=} \int_F \|f(z)\|^2_{\mathbb{C}^n} d\mu(z).$$

与覆盖的情形类似，我们将 $C^\infty_{c,\phi}(\mathbb{H}; \mathbb{C}^n)$ 定义为 $C^\infty_\phi(\mathbb{H}; \mathbb{C}^n)$ 中函数的子集，这些函数模 Γ 紧支撑；并将 $H^2(X; E_\phi)$ 定义为 $C^\infty_{c,\phi}(\mathbb{H}; \mathbb{C}^n)$ 关于范数的完备化

$$\|f\|^2_{H^2_\phi(\mathbb{H};\mathbb{C}^n)} \overset{\text{def}}{=} \|f\|^2_{L^2(F)} + \|\Delta f\|^2_{L^2(F)}.$$

3 随机矩阵理论

本节将介绍必要的随机矩阵理论结果。回忆一下，Γ 是由 d 个生成元 $\gamma_1, \ldots, \gamma_d$生成的自由群。词长 $\mathrm{wl}(\gamma)$ 是 γ作为由 $\gamma_1, \ldots, \gamma_d, \gamma_1^{-1}, \ldots, \gamma_d^{-1}$ 中的约化词所具有的长度。令 $\lambda\colon \Gamma \to \mathrm{End}\left(l^2(\Gamma)\right)$ 表示 Γ的右正则表示。我们高度依赖 Bordenave 和 Collins [BC23]近期取得的极其强有力的结果。首先，对于随机酉矩阵，我们需要以下结果。

定理 3.1（[BC23，推论 1.2] 和 [BC23，引理 7.4]）。设 $m \leqslant n^{\frac{1}{32d+160}}$和 $a_0, a_1, \ldots a_d \in M_m(\mathbb{C})$，其中 $a_0 = a_0^*$。那么存在常数 $c_1 > 0$，使得对于随机的 $\phi \in \mathrm{Hom}(\Gamma, U(n))$ $\mathbb{P}_n$，其概率至少为 $1 - \exp(-\sqrt{n})$，

$$\begin{aligned}
&\left\| a_0 \otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n} + \sum_{i=1}^d \left(a_i \otimes \rho_\phi(\gamma_i) + a_i^* \otimes \rho_\phi\left(\gamma_i^{-1}\right)\right) \right\|_{\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n} \\
\leqslant &\left\| a_0 \otimes \mathrm{Id}_{\ell^2(\Gamma)} + \sum_{i=1}^d \left(a_i \otimes \lambda(\gamma_i) + a_i^* \otimes \lambda\left(\gamma_i^{-1}\right)\right) \right\|_{\mathbb{C}^m \otimes \ell^2(\Gamma)} \left(1 + \frac{c_1}{n^{\frac{1}{32d+160}}}\right).
\end{aligned}$$

我们还需要以下关于随机置换的结果。

定理 3.2 ([BC23，推论 1.4])。设 $m \leqslant n^{\sqrt{\log n}}$且 a_0，a_1，$\ldots a_d \in M_m(\mathbb{C})$ 满足 $a_0 = a_0^*$。则存在一个常数 $c_2 > 0$，使得对于均匀随机选取的 $\varphi \in$同态集$(\Gamma,\ S_n)$，以至少$1 - \frac{c_2}{\sqrt{n}}$的概率，

$$\begin{aligned}
&\left\| a_0 \otimes \mathrm{Id}_{V_n^0} + \sum_{i=1}^d \left(a_i \otimes \rho_\varphi(\gamma_i) + a_i^* \otimes \rho_\varphi\left(\gamma_i^{-1}\right)\right) \right\|_{\mathbb{C}^m \otimes V_n^0} \\
\leqslant &\left\| a_0 \otimes \mathrm{Id}_{\ell^2(\Gamma)} + \sum_{i=1}^d \left(a_i \otimes \lambda(\gamma_i) + a_i^* \otimes \lambda\left(\gamma_i^{-1}\right)\right) \right\|_{\mathbb{C}^m \otimes \ell^2(\Gamma)} \left(1 + \frac{c_2}{(\log n)^{\frac{1}{4}}}\right).
\end{aligned}$$

定理 3.1 和定理 3.2 都涉及线性多项式。我们希望应用定理 3.1 和定理 3.2 的多项式并非线性，因此我们需要应用线性化过程，以便利用这些界限。其思路是，我们可以用较小次数的多项式替代高次数多项式，代价是将 $M_m(\mathbb{C})$ 替换为 $M_m(\mathbb{C}) \otimes M_k(\mathbb{C})$，其中 k。这一过程称为线性化技巧 [Pi96], [HT05]。

我们使用[BC23第 8] 节中证明的有效线性化。在 [BC23第 8], 节中，作者考虑了以下形式的算子： $\sum_{g\in B_l} a_\gamma \otimes \rho_\phi(\gamma)$，其中 B_l 是 l 在 Γ 的词度量下、相对于我们固定选取的生成元构成的大小为 $l \leqslant 1$ 的球（注意，此处的线性是指 $\sum_{g\in S} a_\gamma \otimes \rho_\phi(\gamma)$ 。在我们的情形中，要考虑的算子具有以下形式： $S \subset B_l$ ，其中 $|S|$ 的大小约为 l ，这将为我们带来定量上的改进。这只是对 [BC23第 8], 节中论证的细微调整；不过，由于这是我们方法的关键所在，我们将给出详细说明。

我们称子集 $S \subset \Gamma$ 为对称的，如果 $g \in S$ 蕴含 $g^{-1} \in S$。

引理 3.3. 设 $l \geqslant 2$ 为偶整数，且设 $S \subset B_l$。考虑 $(a_g)_{g\in S}$，其中 $a_g \in M_m(\mathbb{C})$。那么存在一个对称集 $S_1 \subset B_{\frac{l}{2}}$，满足 $|S_1| \leqslant 4|S|$，$(b_g)_{g\in S_1}$，其中 $b_g \in M_m(\mathbb{C}) \otimes M_{2|S_1|}(\mathbb{C})$，并且 $\theta \geqslant 0$，使得对于 Γ 的任意酉表示 (ρ, V)，

$$\| \sum_{\gamma\in S} a_\gamma \otimes \rho(\gamma) \|_{\mathbb{C}^m\otimes V} = \| \sum_{\gamma\in S_1} b_\gamma \otimes \rho(\gamma) \|^2_{\mathbb{C}^m\otimes\mathbb{C}^{2|S_1|}\otimes V} - \theta,$$

其中

$$\theta \leqslant 4|S| \| \sum_{\gamma\in S} a_\gamma \otimes \lambda(\gamma) \|_{\mathbb{C}^m\otimes l^2(\Gamma)}.$$

证明。我们考虑一个集合 $S_1 \subset B_{\frac{l}{2}}$，使得[2]

$$S \subset \left\{ g^{-1}h \mid g, h \in S_1 \right\}.$$

我们声称可以选择 S_1 ，使得

$$|S_1| \leqslant 4|S|.$$

事实上，如果 $w \in S \cap B_{\frac{l}{2}}$，我们只需取 w，并令恒等元属于 S_1。如果 $w \in S$ 的字长$_2 > \frac{l}{2}$，那么它可以写成 $g^{-1}h$，其中 g、$h \in B_{\frac{l}{2}}$ 是两个词，我们将这两个词都加入 S_1。我们通过加入所有已添加词的逆元，使 S_1 成为对称的，最多使 S_1 的大小翻倍。

注意，我们可以将 S 扩充为一个对称集，而不改变 S_1 的大小，因为 S_1 是对称的。必要时将 $M_m(\mathbb{C})$ 替换为 $M_m(\mathbb{C}) \otimes M_2(\mathbb{C})$，并将 S 扩充为一个对称集后，我们可以假设对称性条件 $a_\gamma = a^*_{\gamma^{-1}}$ 成立，特别是 $P \overset{\text{def}}{=} \sum_{\gamma\in S} a_\gamma \otimes \rho(\gamma)$ 是自伴的，例如 [BC23，定理 1 的证明。1]。

现在我们遵循 [BC23，引理 8 的证明1]。考虑元素 $\tilde{a} \in M_m(\mathbb{C}) \otimes M_{|S_1|}(\mathbb{C})$，它由 $(\tilde{a}_{g,h})_{g,h\in S_1}$ 定义，

$$\tilde{a}_{g,h} = \frac{1}{\#\left\{ (g', h') \in S_1 \times S_1 \mid (g')^{-1} h' = g^{-1}h \right\}} a_{g^{-1}h},$$

当 $g^{-1}h \in S$ 和 $\tilde{a}_{g,\ h} = 0$ 否则。接下来

$$\sum_{\substack{g,h\in S_1 \\ g^{-1}h = w\in S}} \tilde{a}_{g,h} = a_w.$$

我们有

$$\|\tilde{a}\|^2 \leqslant \| \sum_{g,h\in S_1} \tilde{a}_{g,h}\tilde{a}_{g,h}^* \| \leqslant \| \sum_{w\in S} a_w a_w^* \| \leqslant \| \sum_{w\in S} a_w \otimes \lambda(w) \|^2.$$

˜算子 $\tilde{a} + \|\tilde{a}\|\mathrm{Id}^{m|S_1|}$ 是半正定的，我们令 $b \in M_m(\mathbb{C}) \otimes M_{|S_1|}(\mathbb{C})$ 为其自伴平方根。对于 $g \in S_1$，我们定义

$$b_g \overset{\text{def}}{=} \tilde{b}\left(\mathrm{Id}_m \otimes e_{g,\emptyset}\right) \in M_m(\mathbb{C}) \otimes M_{|S_1|}(\mathbb{C}),$$

其中 $e_{g,\ h}$ 定义为$= \delta_g \otimes \delta_h \in M_{B_{\underline{l}}}(\mathbb{C})$，且 $\emptyset$ 是 Γ 中的单位元。然后定义[2]

$$Q \overset{\text{def}}{=} \sum_{g\in S_1} b_g \otimes \rho(g),$$

我们有

$$\begin{aligned} Q^*Q &= \sum_{g,h\in S_1} \left(\mathrm{Id}_m \otimes e_{\emptyset,g}\right) \tilde{b}^2 \left(\mathrm{Id}_m \otimes e_{h,\emptyset}\right) \otimes \rho(g^{-1}h) \\ &= \sum_{g,h\in S_1} e_{\emptyset,\emptyset} \otimes (\tilde{a}_{g,h} + \|\tilde{a}\|\mathbf{1}_{g=h}\mathrm{Id}_m) \otimes \rho(g^{-1}h) \\ &= e_{\emptyset,\emptyset} \otimes \left(\sum_{\gamma\in S} a_\gamma \otimes \rho(\gamma) + \theta \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^m\otimes V} \right), \end{aligned}$$

其中

$$\theta \leqslant |S_1| \, \| \sum_{\gamma\in S} a_\gamma \otimes \lambda(\gamma) \| \leqslant 4|S| \, \| \sum_{\gamma\in S} a_\gamma \otimes \lambda(\gamma) \|.$$

由此可得

$$\|Q\|^2 = \| \sum_{\gamma\in S} a_\gamma \otimes \rho(\gamma) + \theta \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^m\otimes V} \|_{\mathbb{C}^m\otimes V} = \| \sum_{\gamma\in S} a_\gamma \otimes \rho(\gamma) \|_{\mathbb{C}^m\otimes V} + \theta.$$

□

我们可以重复这一过程，得到以下结果，参见 [BC23，引理 8。2]。

引理 3.4. 设 $l \geqslant 2$ 为一个整数，$S \subset B_l$ 且令 $v = \lceil \log_2 l \rceil$。那么对每个 $k \in \{0, \ldots, v\}$，都有：

- 交错群整数 $n_k \geqslant 1$，其具有 $n_v \leqslant 2l\,|S|^{\lceil \log_2 l \rceil}\, l^{(\lceil \log_2 l \rceil - 1)}$。
- 一个对称集 $S_k \subset B_{2^{v-k}}$，满足 $S_0 = S$、$|S_k| \leqslant$最小值 $\left\{4^k\,|S|\,, |B_{2^{v-k}}|\right\}$。
- 一个集合 $\left(a_g^k\right)_{g\in S_k}$，具有 $a_g^k \in M_m(\mathbb{C}) \otimes M_{n_k}(\mathbb{C})$。
- 一个常数 $\theta_k \geqslant 0$，使得对于 $k \geqslant 1$,

$$\theta_k \leqslant \Big\| \sum_{\gamma\in S_{k-1}} a_\gamma^{k-1} \otimes \lambda(\gamma) \Big\|_{\mathbb{C}^m\otimes\mathbb{C}^{n_{k-1}}\otimes l^2(\Gamma)} |S_k|\,,$$

使得对于 Γ 的任意酉表示 (ρ, V),

$$\| \sum_{\gamma \in S_{k-1}} a_g^{k-1} \otimes \rho(\gamma) \|_{\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^{n_{k-1}} \otimes V} = \| \sum_{\gamma \in S_k} a_g^k \otimes \rho(\gamma) \|^2_{\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^{n_k} \otimes V} - \theta_k.$$

证明。 这是通过反复应用引理 3.3 的直接推论。我们有

$$n_v \leqslant \prod_{i=1}^{v} 2 \left| S_i \right| \leqslant \prod_{i=1}^{v} 2 \cdot 4^i \cdot |S| = 2^v 4^{\frac{v(v-1)}{2}} |S|^v ,$$

其中 $v = \lceil \log_2 l \rceil$ ，由此得到

$$n_v \leqslant 2l \left| S \right|^{\lceil \log_2 l \rceil} l^{(\lceil \log_2 l \rceil - 1)}.$$

□

由此可得以下结果，参见 [BC23，引理 8。3]

引理 3.5。 令 $l \geqslant 2$ 为一个整数， $S \subset B_l$ 并设 $v = \lceil \log_2 l \rceil$。考虑 $\left(a_g^v\right)_{g \in S_v}$ 如引理 *3.4* 中所示，并记 $a_0 = a_\emptyset^v$， $a_i = a_{\gamma_i}^v$ 对于 $1 \leqslant i \leqslant 2d$。令 ρ， V) 为 Γ的任意酉表示。我们有，对于 $0 < \epsilon < 1$，若

$$2\epsilon l^2 \left| S \right|^{\lceil \log_2 l \rceil} l^{(\lceil \log_2 l \rceil - 1)} < 1$$

and

$$\| a_0 \otimes \mathrm{Id}_V + \sum_{i=1}^{2d} a_i \otimes \rho(\gamma_i) \|_{\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^{n_v} \otimes V} \leqslant \| a_0 \otimes \mathrm{Id}_{l^2(\Gamma)} + \sum_{i=1}^{2d} a_i \otimes \lambda(\gamma_i) \|_{\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^{n_v} \otimes l^2(\Gamma)} \left(1 + \epsilon\right),$$

then

$$\| \sum_{\gamma \in S} a_\gamma \otimes \rho\left(\gamma\right) \|_{\mathbb{C}^m \otimes V} \leqslant \| \sum_{\gamma \in S} a_\gamma \otimes \lambda\left(\gamma\right) \|_{\mathbb{C}^m \otimes l^2(\Gamma)} \left(1 + 2\epsilon l^2 \left| S \right|^{\lceil \log_2 l \rceil} l^{(\lceil \log_2 l \rceil - 1)}\right).$$

证明。 对于 $k \in \{1, \ldots, v\}$， 令 $a_g^k \in M_m\left(\mathbb{C}\right) \otimes M_{n_k}\left(\mathbb{C}\right)$ 对于 $g \in S_k$ 如引理 3.4 所给出的。对于某个 $k \in \{1, \ldots, v\}$，假设对于某个 $0 < \epsilon_k < 1$,

$$\| \sum_{\gamma \in S_k} a_\gamma^k \otimes \rho\left(\gamma\right) \| \leqslant \| \sum_{\gamma \in S_k} a_\gamma^k \otimes \lambda\left(\gamma\right) \| \left(1 + \epsilon_k\right).$$

然后，由引理 3.4 应用两次可得,

$$\begin{aligned} \| \sum_{\gamma \in S_{k-1}} a_\gamma^{k-1} \otimes \rho\left(\gamma\right) \| - \| \sum_{\gamma \in S_{k-1}} a_\gamma^{k-1} \otimes \lambda\left(\gamma\right) \| &= \| \sum_{\gamma \in S_k} a_\gamma^k \otimes \rho\left(\gamma\right) \|^2 - \| \sum_{\gamma \in S_k} a_\gamma^k \otimes \lambda\left(\gamma\right) \|^2 \\ &\leqslant \epsilon_k \left(1 + 2\epsilon_k\right) \left(\| \sum_{\gamma \in S_{k-1}} a_\gamma^{k-1} \otimes \lambda\left(\gamma\right) \| + \theta_k \right) \\ &\leqslant 4 \cdot 4^k \left| S \right| \epsilon_k \| \sum_{\gamma \in S_{k-1}} a_\gamma^{k-1} \otimes \lambda\left(\gamma\right) \|. \end{aligned} \tag{3.1}$$

根据假设， $\epsilon_v = \epsilon < 1$ 然后令 $\epsilon_{k-1} \overset{\text{def}}{=} 4 \cdot 4^k |S| \epsilon_k$ （回顾 $\theta_k \leqslant 4^k |S| \| \sum_{\gamma \in S_{k-1}} a_\gamma^{k-1} \otimes \lambda (\gamma) \|$ 引理 3.4中的），根据ϵ_{k-j}的定义，我们可知

$$\epsilon_0 = \epsilon \prod_{i=1}^{v} 4 \cdot 4^i |S| \leqslant 2\epsilon l^2 |S|^{\lceil \log_2 l \rceil} l^{(\lceil \log_2 l \rceil - 1)},$$

若选取 $2\epsilon l^2 |S|^{\lceil \log_2 l \rceil} l^{(\lceil \log_2 l \rceil - 1)} < 1$ 那么这就保证了 $\epsilon_{k-j} < 1$ 对于 $j = 1, \ldots, k$，我们可以从 $k = v$ 开始，归纳应用不等式 (3.1)，直到 $k = 1$，前提是每个后续的 $\epsilon_{k-j} < 1$。

□

由引理 3.5，我们从定理 3.1得到以下推论。

推论 3.6. 设 $m \geqslant 1$、$l \geqslant 2$，并设 $S \subset B_l$ 是一个满足以下条件的有限集

$$2ml |S|^{\lceil \log_2 l \rceil} l^{(\lceil \log_2 l \rceil - 1)} \leqslant \exp\left(n^{\frac{1}{32d+160}} \right),$$

and

$$2c_1 l^2 |S|^{\lceil \log_2 l \rceil} l^{(\lceil \log_2 l \rceil - 1)} \leqslant n^{\frac{1}{32d+160}},$$

其中 c_1 是定理 3.6中的常数。设 $\gamma \mapsto a_\gamma \in M_m(\mathbb{C})$ 是一个支撑于 S上的任意映射。对于一个随机 $\phi \in (\mathrm{Hom}(\Gamma, U(n)) \ \mathbb{P}_n)$，以至少 $1 - \exp(-\sqrt{n})$ 的概率，有

$$\| \sum_{\gamma \in S} a_\gamma \otimes \rho_\phi (\gamma) \|_{\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n} \leqslant \| \sum_{\gamma \in S} a_\gamma \otimes \lambda (\gamma) \|_{\mathbb{C}^m \otimes l^2(\Gamma)} \left(1 + c_1 \frac{2l^2 |S|^{\lceil \log_2 l \rceil} l^{(\lceil \log_2 l \rceil - 1)}}{n^{\frac{1}{32d+160}}} \right).$$

应用引理 3.5 和定理 3.2 可得一个关于置换矩阵的类似推论。

推论 3.7。设 m 和 l 满足

$$2ml |S|^{\lceil \log_2 l \rceil} l^{(\lceil \log_2 l \rceil - 1)} \leqslant n^{\sqrt{\log n}}.$$

设 $S \subset B_l$ 为一个大小满足以下条件的有限集

$$2c_2 l^2 |S|^{\lceil \log_2 l \rceil} l^{(\lceil \log_2 l \rceil - 1)} \leqslant (\log (n))^{\frac{1}{4}},$$

其中 c_2 是定理 3.7中的常数。令 $\gamma \mapsto a_\gamma \in M_m(\mathbb{C})$ 为任意一个支撑于 S上的映射。对于均匀随机的 $\varphi \in$ 同态集 (Γ, S_n)，其概率至少为 $1 - \frac{c_2}{\sqrt{n}}$，有

$$\| \sum_{\gamma \in S} a_\gamma \otimes \rho_\varphi (\gamma) \|_{\mathbb{C}^m \otimes V_n^0} \leqslant \| \sum_{\gamma \in S} a_\gamma \otimes \lambda (\gamma) \|_{\mathbb{C}^m \otimes l^2(\Gamma)} \left(1 + c_2 \frac{2l^2 |S|^{\lceil \log_2 l \rceil} l^{(\lceil \log_2 l \rceil - 1)}}{(\log (n))^{\frac{1}{4}}} \right).$$

4 参数子的构造

我们的参数子构造与 [HM23]中的相同。

4.1 尖点拟参数

在本小节中，我们介绍参数子的尖点部分。

回想一下，为了简化记号，我们假设 X 只有一个尖点。我们将尖点 $\mathcal{C}$ 与

$$\mathcal{C} \overset{\text{def}}{=} (1,\infty)\times S^1$$

配以度量

$$\frac{dr^2+dx^2}{r^2},$$

其中 $(r,x)\in(1,\infty)\times S^1$。对于每个 $n\in\mathbb{N}$，我们将定义截断函数 $\chi^+_{\mathcal{C},n},\chi^-_{\mathcal{C},n}:\ \mathcal{C}\to[0,1]$，使其在 $\{1\}\times S^1$ 的某个邻域内恒为零，在 $\{\infty\}\times S^1$ 的某个邻域内恒为 1，并满足

$$\chi^+_{\mathcal{C},n}\chi^-_{\mathcal{C},n}=\chi^-_{\mathcal{C},n}. \tag{4.1}$$

我们将 $\chi^{\pm}_{\mathcal{C},n}$ 延拓为 X上的函数，在定义域外取值为 0。设 $\kappa:\ \mathbb{N}\to(0,\infty)$ 是一个给定函数。稍后（引理 5.4）我们将针对覆盖和酉丛的情形选取特定函数 $\kappa(n)$。正如下标所示，函数 $\chi^+_{\mathcal{C},n},\chi^-_{\mathcal{C},n}$ 将通过函数 $\kappa(n)$依赖于 n。

引理 4.1. 给定 $\kappa:\mathbb{N}\to(0,\infty)$，对于每个 $n\in\mathbb{N}$，我们都可以像上面那样选择 $\chi^{\pm}_{\mathcal{C},n}$。

$$\|\nabla\chi^+_{\mathcal{C},n}\|_\infty,\|\Delta\chi^+_{\mathcal{C},n}\|_\infty\le\frac{\kappa(n)}{30}.$$

证明。可以找到一个 $\tau_0>1$ 和一个光滑函数 $\chi^+_{\mathcal{C},0}:\ [0,\infty)\to[0,1]$，使得 $\chi^+_{\mathcal{C},0}\equiv 0$ 对于 τ 在 $[0,1]$, $\chi^+_{\mathcal{C},0}\equiv 1$ 对于 $\tau\ge\tau_0$ 成立，使得

$$\sup_{[0,\infty)}|(\chi^+_{\mathcal{C},0})'|,\ \sup_{[0,\infty)}|(\chi^+_{\mathcal{C},0})''|\le 1.$$

然后定义

$$\chi^+_{\mathcal{C},n}(t)\overset{\text{def}}{=}\begin{cases}0 & \text{for } t\in[0,1]\\ \chi^+_{\mathcal{C},0}\left(\frac{\kappa(n)}{60}(t-1)+1\right) & \text{for } t\in(1,\infty)\end{cases},$$

我们有

$$\sup_{[0,\infty)}|(\chi^+_{\mathcal{C},n})'|,\ \sup_{[0,\infty)}|(\chi^+_{\mathcal{C},n})''|\le\frac{\kappa(n)}{60}.$$

注意$\chi^+_{\mathcal{C},n}(\tau)\equiv 1$ 对于 $\tau\geqslant\tau_n\overset{\text{def}}{=}\frac{60}{\kappa(n)}(\tau_0-1)+1$。HM23 中的计算，[HM23，引理 4.1] 给出

$$\|\nabla\chi^+_{\mathcal{C},n}\|_\infty=\sup_{[0,\infty)}|(\chi^+_{\mathcal{C},n})'|\leqslant\frac{\kappa(n)}{30},$$

and

$$\|\Delta\chi^+_{\mathcal{C},n}\|_\infty=\sup_{[0,\infty)}|(\chi^+_{\mathcal{C},n})''-(\chi^+_{\mathcal{C},n})'|\leqslant\frac{\kappa(n)}{30}.$$

若选取 $\chi^-_{\mathcal{C},n}$ 使其为满足 $\chi^-_{\mathcal{C}}(\tau)\equiv 0$ 的函数，其中 $\tau\le\tau_n$ 且 $\chi^-_{\mathcal{C}}(\tau)\equiv 1$，则 $\tau\ge 2\tau_n$，(4.1) 得以成立，引理也就得证。 □

我们得到这些算子

$$\chi_{\mathcal{C},n,\phi}^{\pm}:L^{2}\left(X;E_{\phi}\right)\to L^{2}\left(X;E_{\phi}\right),$$

在酉情形下，通过乘以 $\chi_{\mathcal{C}}^{\pm}$，n。对于覆盖的情形，我们将 $\chi_{\mathcal{C}}^{\pm}$，n 经覆盖映射提升到 X_{φ}，从而得到函数 $\chi_{\mathcal{C}}^{\pm}$，n，φ 属于 $L^{2}(X_{\varphi})$，并将 $\chi_{\mathcal{C}}^{\pm}$，n，φ 视为乘法算子

$$\chi_{\mathcal{C},n,\varphi}^{\pm}:L^{2}\left(X_{\varphi}\right)\to L^{2}\left(X_{\varphi}\right)$$

我们将 $\mathcal{C}$ 延拓到抛物柱面

$$\tilde{\mathcal{C}}\overset{\text{def}}{=}(0,\infty)\times S^{1},$$

˜，其度量相同。令 $\mathcal{C}_{\varphi}$ 表示 X_{φ} 中覆盖 $\mathcal{C}$的子集，我们令 $\mathcal{C}_{\varphi}$ 为 C_{φ}的相应延拓。我们考虑拉普拉斯算子

$$\Delta_{\tilde{\mathcal{C}}_{\varphi}}:H_{\text{new}}^{2}\left(\tilde{\mathcal{C}}_{\varphi}\right)\to L_{\text{new}}^{2}\left(\tilde{\mathcal{C}}_{\varphi}\right).$$

˜给定 $\phi\in\text{Hom}\left(\mathbb{Z};\text{U}\left(n\right)\right)$，我们考虑相应的酉丛 $E_{\phi,\tilde{\mathcal{C}}}\to\mathcal{C}$ 及其拉普拉斯算子

$$\Delta_{\phi,\tilde{\mathcal{C}}}:H^{2}\left(\tilde{\mathcal{C}};E_{\phi,\tilde{\mathcal{C}}}\right)\to L^{2}\left(\tilde{\mathcal{C}};E_{\phi,\tilde{\mathcal{C}}}\right).$$

根据 [HM23，引理 4。2] 和 [Za22，引理 3。1] (另见 [DFP21，命题 4。16])，相应的预解算子

$$\begin{aligned}R_{\tilde{C},P,\varphi}\left(s\right)&\overset{\text{def}}{=}\left(\Delta_{\tilde{\mathcal{C}}_{\varphi}}-s(1-s)\right)^{-1}:L_{\text{new}}^{2}\left(\tilde{\mathcal{C}}_{\varphi}\right)\to H_{\text{new}}^{2}\left(\tilde{\mathcal{C}}_{\varphi}\right),\\R_{\tilde{C},U,\phi}\left(s\right)&\overset{\text{def}}{=}\left(\Delta_{\phi,\tilde{\mathcal{C}}}-s(1-s)\right)^{-1}:L^{2}\left(\tilde{\mathcal{C}};E_{\phi,\tilde{\mathcal{C}}}\right)\to H^{2}\left(\tilde{\mathcal{C}};E_{\phi,\tilde{\mathcal{C}}}\right),\end{aligned}$$

当 $\text{Re}\left(s\right)>\frac{1}{2}$ 时，作为有界算子存在，其中

$$\|R_{\tilde{C},P,\varphi}\left(s\right)\|_{L_{\text{new}}^{2}(\tilde{\mathcal{C}}_{\varphi})},\|R_{\tilde{C},P,\varphi}\left(s\right)\|_{L_{\text{new}}^{2}(\tilde{\mathcal{C}}_{\varphi})}\leqslant\frac{5}{4\kappa\left(n\right)},$$

and

$$\|R_{\tilde{C},U,\phi}\left(s\right)\|_{L^{2}(\tilde{\mathcal{C}};E_{\phi,\tilde{\mathcal{C}}})},\|\Delta R_{\tilde{C},U,\phi}\left(s\right)\|_{L^{2}(\tilde{\mathcal{C}};E_{\phi,\tilde{\mathcal{C}}})}\leqslant\frac{5}{4\kappa\left(n\right)},$$

对于 $s\in\left[\frac{1}{2}+\underline{\sqrt{\kappa}(n)\ 1}\right]$。与 [HM23]，中完全一样，我们将覆盖的尖点参数子 X_{φ}定义为

$$\begin{aligned}\mathbb{M}_{P,\varphi}^{\text{cusp}}(s)&\overset{\text{def}}{=}\chi_{\mathcal{C},n,\varphi}^{+}R_{\tilde{C},\varphi}\left(s\right)\chi_{\mathcal{C},n,\varphi}^{-}\\\mathbb{M}_{P,\varphi}^{\text{cusp}}(s)&:L_{\text{new}}^{2}\left(X_{\varphi}\right)\to H_{\text{new}}^{2}\left(X_{\varphi}\right).\end{aligned}$$

这里我们以自然的方式看待 $\chi_{\mathcal{C}}^{-}$，n，φ：$L_{\text{new}}^{2}\left(X_{\varphi}\right)\to L_{\text{new}}^{2}\left(\tilde{\mathcal{C}}_{\varphi}\right)$ 以及 $\chi_{\mathcal{C}}^{+}$，n，φ：$H_{\text{new}}^{2}\left(\tilde{\mathcal{C}}_{\varphi}\right)\to H_{\text{new}}^{2}\left(X_{\varphi}\right)$。仿照 [Za22]，，我们类似地将酉丛的尖点拟参数定义 E_{ϕ} 为

$$\begin{aligned}\mathbb{M}_{U,\phi}^{\text{cusp}}(s)&:L^{2}\left(X;E_{\phi}\right)\to L^{2}\left(X;E_{\phi}\right)\\\mathbb{M}_{U,\phi}^{\text{cusp}}(s)&\overset{\text{def}}{=}\chi_{\mathcal{C},n,\phi}^{+}R_{\tilde{C},\phi}\left(s\right)\chi_{\mathcal{C},n,\phi}^{-}.\end{aligned}\tag{4.2}$$

我们有

$$(\Delta - s(1-s))\mathbb{M}_{P,\varphi}^{\mathrm{cusp}}(s) = \chi_{\mathcal{C},n}^{-} + [\Delta, \chi_{\mathcal{C},n,\varphi}^{+}] R_{\tilde{C}}(s)\, \chi_{\mathcal{C},n}^{-} \\ = \chi_{\mathcal{C},n,\varphi}^{-} + \mathbb{L}_{P,\varphi}^{\mathrm{cusp}}(s) \tag{4.3}$$

其中

$$\mathbb{L}_{P,\varphi}^{\mathrm{cusp}}(s) \stackrel{\mathrm{def}}{=} [\Delta, \chi_{\mathcal{C},n,\varphi}^{+}] R_{\tilde{C},\varphi}(s)\, \chi_{\mathcal{C},n,\varphi}^{-}.$$

类似地

$$(\Delta - s(1-s))\mathbb{M}_{U,\phi}^{\mathrm{cusp}}(s) = \chi_{\mathcal{C},n}^{-} + \mathbb{L}_{U,\phi}^{\mathrm{cusp}}(s),$$

其中

$$\mathbb{L}_{U,\phi}^{\mathrm{cusp}}(s) \stackrel{\mathrm{def}}{=} [\Delta, \chi_{\mathcal{C},n,\phi}^{+}] R_{\tilde{C},\phi}(s)\, \chi_{\mathcal{C},n,\phi}^{-}.$$

由引理4.1，根据 [HM23，引理 4.3] （或 [Za22，引理 3.2] 在酉情形下），对于 $s \in \left[\frac{1}{2} + \sqrt{\kappa}\right.$ $\left.(n) \quad 1\right]$，

$$\|\mathbb{L}_{P,\varphi}^{\mathrm{cusp}}(s)\|_{L^2_{\mathrm{new}}(X_\varphi)},\ \|\mathbb{L}_{U,\phi}^{\mathrm{cusp}}(s)\|_{L^2(X;E_\phi)} \leq \left(\|(\Delta\chi_{\mathcal{C},n}^{+})\|_\infty + 2\|\nabla\chi_{\mathcal{C},n}^{+}\|_\infty\right) \cdot \frac{5}{4\kappa(n)} \leqslant \frac{1}{8}. \tag{4.4}$$

这个关于尖点参数子的确定性界限将足以满足我们的目的。

4.2 $\mathbb{H}$ 上的算子

对于 $s \in \mathbb{C}$ 且 $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$，令

$$R_{\mathbb{H}}(s) : L^2(\mathbb{H}) \to L^2(\mathbb{H}), R_{\mathbb{H}}(s) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\Delta_{\mathbb{H}} - s(1-s))^{-1},$$

为上半平面上的预解算子。则 $R_{\mathbb{H}}(s)$ 是一个核为径向核$R_{\mathbb{H}}(s;r)$ 的积分算子。令 $\chi_0 :\ \mathbb{R} \to [0,1]$ 是一个满足以下条件的光滑函数

$$\chi_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t \leqslant 0, \\ 0 & \text{if } t \geqslant 1. \end{cases}.$$

对于 $T > 0$，我们定义光滑截断函数 χ_T 为

$$\chi_T(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \chi_0(t - T).$$

随后，我们将算子 $R_{\mathbb{H}}^{(T)}(s)$: $L^2(\mathbb{H}) \to L^2(\mathbb{H})$ 定义为核为径向核的积分算子

$$R_{\mathbb{H}}^{(T)}(s;r) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \chi_T(r) R_{\mathbb{H}}(s;r).$$

证明见 [HM23，引理 5。3] 对于任意 $f \in C_c^\infty$（$\mathbb{H}$）以及$s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$，我们有

1. $R_{\mathbb{H}}^{(T)}(s) f \in H^2(\mathbb{H})$。 2. $(\Delta - s(1-s))\ R^{(T}{}_{)\mathbb{H}}(s) f = f + \mathbb{L}^{(T}{}_{)\mathbb{H}}(s) f$作为 L^2函数的等价类，其中 $\mathbb{L}^{(T}{}_{)\mathbb{H}}(s)$ 定义为具有径向核的积分算子

$$\mathbb{L}_{\mathbb{H}}^{(T)}(s;r_0) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left(-\frac{\partial^2}{\partial r^2}[\chi_T] - \frac{1}{\tanh r}\frac{\partial}{\partial r}[\chi_T]\right) R_{\mathbb{H}}(s;r_0) - 2\frac{\partial}{\partial r}[\chi_T]\frac{\partial R_{\mathbb{H}}}{\partial r}(s;r_0). \tag{4.5}$$

<escape>我们回顾 $\mathbb{L}_{\mathbb{H}}^{(T)}(s;\ r)$ 在 [HM23，引理 51]。</escape>

引理 4.2。我们有

1. 对于 $T>0$ 和 $s\in[\frac{1}{2},1]$, $\mathbb{L}^{(T)}(s;\ \bullet)$ 是光滑的，且支撑于 $[T,T+1]$。2. 存在常数 $C>0$，使得对于任意 $T>0$ 和 $s\in[\frac{1}{2},1]$，我们有

$$|\mathbb{L}_{\mathbb{H}}^{(T)}(s;r_0)|\le Ce^{-sr_0}$$

3. 存在常数 $C>0$，使得对于任意 $T>0$, $s\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ 和 $r_0\in[T,T+1]$

$$\left|\frac{\partial\mathbb{L}_{\mathbb{H}}^{(T)}}{\partial s}(s_0;r_0)\right|\le C.$$

我们的目标是最终使用诺伊曼级数论证来求逆（$\Delta-s(1-s)$）: $H^2_{\text{new}}(X_\varphi)\to L^2_{\text{new}}(X_\varphi)$，这需要估计 $\mathbb{L}_{\mathbb{H}}^{(T)}(s)$ 的算子范数。由[HM23，引理 52]给出。

引理 4.3 ([HM23，引理 5.2])。存在常数 $C>0$，使得对于任意 $T>0$ 和$s\in[\frac{1}{2},1]$，算子 $\mathbb{L}^{(T)}{}_{\mathbb{H}}(s)$ 可延拓为 $L^2(\mathbb{H})$ 上的有界算子，其算子范数为

$$\|\mathbb{L}_{\mathbb{H}}^{(T)}(s)\|_{L^2(\mathbb{H})}\le CTe^{\left(\frac{1}{2}-s\right)T}.$$

例如，我们需要确保

$$\|\mathbb{L}_{\mathbb{H}}^{(T)}(s)\|_{L^2(\mathbb{H})}<\frac{1}{5},$$

对于 $s\in\left[\frac{1}{2}+\sqrt{\kappa(n)}\ 1\right]$。这意味着我们必须选取满足以下条件的 $T(n)$:

$$Te^{-T\sqrt{\kappa(n)}}<\frac{1}{5} \tag{4.6}$$

对于所有 充分大 n。最终我们将取 $\kappa(n)=\frac{4(\text{对数}\ T^2)}{T^2}$这确保了 (4.6).

4.3 内部拟参数

与[HM23中Za22], 一样，我们定义:

$$R_{\mathbb{H},U,n}^{(T)}(s;x,y)\overset{\text{def}}{=}R_{\mathbb{H}}^{(T)}(s;x,y)\mathrm{Id}_n,\ R_{\mathbb{H},P,n}^{(T)}(s;x,y)\overset{\text{def}}{=}R_{\mathbb{H}}^{(T)}(s;x,y)\mathrm{Id}_{V_n^0},$$
$$\mathbb{L}_{\mathbb{H},U,n}^{(T)}(s;x,y)\overset{\text{def}}{=}\mathbb{L}_{\mathbb{H}}^{(T)}(s;x,y)\mathrm{Id}_n,\ \mathbb{L}_{\mathbb{H},P,n}^{(T)}(s;x,y)\overset{\text{def}}{=}\mathbb{L}_{\mathbb{H}}^{(T)}(s;x,y)\mathrm{Id}_{V_n^0},$$

和 $R_{\mathbb{H}\ U,,n}^{(T)}(s)$ $R^{(T)}{}_{\mathbb{H},P,n}(s)$ $\mathbb{L}^{(T)}{}_{\mathbb{H},U,n}(s)$ $\mathbb{L}^{(T)}{}_{\mathbb{H},P,n}(s)$ 作为相应的积分算子。相关性质总结于以下引理中。

引理 4.4 ([HM23，引理 5。5])。 对于所有 $s\in[\frac{1}{2},1]$,

1. 积分算子 $R_{\mathbb{H}\ P,,n}^{(T)}(s)(1-\chi_{\mathcal{C}\ ,n}^{-})$ 在 $C_{c\ ,\varphi}^{\infty}(\mathbb{H};\ V_n^0)$ 上定义良好，并可扩张为有界算子

$$R_{\mathbb{H},P,n}^{(T)}(s)\left(1-\chi_{\mathcal{C},n}^{-}\right):L_\varphi^2\left(\mathbb{H};V_n^0\right)\to H_\varphi^2\left(\mathbb{H};V_n^0\right).$$

2. 积分算子 $\mathbb{L}^{(T)}_{\mathbb{H}\ P,,n}(s)(1-\chi^{-}_{\mathcal{C}\ ,n})$ 在 $C^{\infty}_{c\ ,\phi}\left(\mathbb{H};V^{0}_{n}\right)$ and and 在 $L^{2}_{\varphi}(\mathbb{H};V^{0}_{n})$ 上可扩张为有界算子。

3. 我们有

$$\left[\Delta-s(1-s)\right]R^{(T)}_{\mathbb{H},P,\varphi}(s)(1-\chi^{-}_{\mathcal{C},n})=(1-\chi^{-}_{\mathcal{C},n})+\mathbb{L}^{(T)}_{\mathbb{H},P,n}(s)(1-\chi^{-}_{\mathcal{C},n}) \tag{4.7}$$

作为 $L^{2}_{\varphi}(\mathbb{H};V^{0}_{n})$ 上算子的恒等式。

对 $R^{(T)}_{\mathbb{H}\ U^{,},n}(s)$ $\mathbb{L}^{(T)}_{\mathbb{H}\ U^{,},n}(s)$，类似的结论也成立。我们将曲面 X_{φ}上的内部参数子定义为，

$$\mathbb{M}^{\mathrm{int}}_{P,\varphi}(s):L^{2}_{\mathrm{new}}(X_{\varphi})\to H^{2}_{\mathrm{new}}(X_{\varphi}),$$

使积分算子 $R^{(T)}_{\mathbb{H}\ U^{,},n}(s)\left(1-\chi^{-}_{\mathcal{C},n}\right)$. 在 $L^{2}_{\mathrm{new}}(X_{\varphi})\cong L^{2}_{\varphi}\left(\mathbb{H};V^{0}_{n}\right)$ 和 $H^{2}_{\mathrm{new}}(X_{\varphi})\cong H^{2}_{\varphi}\left(\mathbb{H};V^{0}_{n}\right)$ 下对应的算子。我们对酉丛作类似定义，并记为

$$\mathbb{M}^{\mathrm{int}}_{U,\phi}(s):L^{2}\left(X;E_{\phi}\right)\to H^{2}\left(X;E_{\phi}\right).$$

接着定义

$$\mathbb{M}_{P,\varphi}(s)=\mathbb{M}^{\mathrm{int}}_{P,\varphi}(s)+\mathbb{M}^{\mathrm{cusp}}_{P,\varphi}(s),$$

由此，利用（4.3），我们得到

$$\begin{aligned}\left(\Delta_{X_{\varphi}}-s(1-s)\right)\mathbb{M}_{P,\varphi}(s)&=\left(1-\chi^{-}_{\mathcal{C},n,\varphi}\right)+\mathbb{L}^{\mathrm{int}}_{P,\varphi}(s)+\chi^{-}_{\mathcal{C},n}+\chi^{+}_{\mathcal{C},n,\varphi}R_{\tilde{C},\varphi}(s)\,\chi^{-}_{\mathcal{C},n,\varphi}\\&=1+\mathbb{M}^{\mathrm{int}}_{P,\varphi}(s)+\mathbb{M}^{\mathrm{cusp}}_{P,\varphi}(s).\end{aligned} \tag{4.8}$$

我们对酉算子的情形作类似定义，记为 $\mathbb{M}_{U,\ \phi}(s)$，并且在此情形下，4.8) 仍然成立。

5 算子范数的概率界

本节将证明定理 1.2 和定理 1.4所需的概率估计。

5.1 预备知识

在本小节中，设 $\kappa:\mathbb{N}\to(0,\infty)$ 已给定，并选取 $\chi^{\pm}_{\mathcal{C}\ ,n}$ 使其满足引理 4.1 的结论。最终，对于随机酉矩阵，我们将取 $\kappa(n)=\ ^{64}(32d+160)(\log\log\ n)^{2}\log\ n$，其中 d 是自由群 Γ 的秩；对于随机覆盖，则取 $\kappa(n)=\ _{4\cdot24^{2}}(\log\log\log\ n)^{2}\log\log n$。本小节旨在确保我们的随机算子 $\mathbb{M}^{\mathrm{int}}(s)$ 具有正确的形式，从而可以应用推论 3.6 和推论 3.7。

设 $f\in C^{\infty}_{\phi}(\mathbb{H};\ \mathbb{C}^{n})$，其中 $\|f\|^{2}_{L^{2}(F)}<\infty$。我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{L}^{(T)}_{\mathbb{H},U,n}(s)\left(1-\chi^{-}_{\mathcal{C},n}\right)[f](x)&=\int_{y\in\mathbb{H}}\mathbb{L}^{(T)}_{\mathbb{H},U,n}(s;x,y)\left(1-\chi^{-}_{\mathcal{C},n}(y)\right)f(y)d\mathbb{H}(y)\\&=\sum_{\gamma\in\Gamma}\int_{y\in F}\mathbb{L}^{(T)}_{\mathbb{H},U,n}(s;\gamma x,y)\,\rho_{\phi}\left(\gamma^{-1}\right)\left(1-\chi^{-}_{\mathcal{C},n}(y)\right)f(y)d\mathbb{H}(y).\end{aligned} \tag{5.1}$$

我们有一个希尔伯特空间的同构

$$L^2_\phi\left(\mathbb{H};\mathbb{C}^n\right)\cong L^2(F)\otimes\mathbb{C}^n;$$
$$f\mapsto\sum_{e_i}\langle f|_F,e_i\rangle_{\mathbb{C}^n}\otimes e_i.$$

通过此同构进行共轭，

$$\mathbb{L}^{(T)}_{\mathbb{H},U,n}(s)\left(1-\chi^-_{\mathcal{C},n}\right)\cong\mathcal{L}_{U,n,\phi}(s)\overset{\text{def}}{=}\sum_{\gamma\in\Gamma}a^{(T)}_{\gamma,n}(s)\otimes\rho_\phi\left(\gamma^{-1}\right),$$

其中

$$a^{(T)}_{\gamma,n}(s):L^2\left(F\right)\to L^2\left(F\right)$$
$$a^{(T)}_{\gamma,n}(s)[f](x)\overset{\text{def}}{=}\int_{y\in F}\mathbb{L}^{(T)}_{\mathbb{H}}\left(s;\gamma x,y\right)\left(1-\chi^-_{\mathcal{C},n}\left(y\right)\right)d\mathbb{H}(y).$$

注意，对于任意 $n\in\mathbb{N}$，$T>1$，$s\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ 以及 $\gamma\in\Gamma$，算子 $a^{(T)}_{\gamma,n}(s)$ 都是一个希尔伯特–施密特算子，其希尔伯特-施密特范数可以由一个仅依赖于 X 的常数来界定。事实上，根据引理 4.2，我们有

$$\int_{x,y\in F}\left|\mathbb{L}^{(T)}_{\mathbb{H}}\left(s;\gamma x,y\right)\left(1-\chi^-_{\mathcal{C},n}\left(y\right)\right)\right|^2d\mathbb{H}(x)d\mathbb{H}(y)\leqslant C\text{Vol}\left(X\right)^2.$$

完全相同地，对于覆盖的情况，我们有

$$L^2_\phi\left(\mathbb{H};V^0_n\right)\cong L^2(F)\otimes V^0_n$$

and

$$\mathbb{L}^{(T)}_{\mathbb{H},P,n}(s)\left(1-\chi^-_{\mathcal{C},n}\right)\cong\mathcal{L}_{P,n,\varphi}(s)\overset{\text{def}}{=}\sum_{\gamma\in\Gamma}a^{(T)}_{\gamma,n}(s)\otimes\rho_\varphi\left(\gamma^{-1}\right).$$

关键在于，映射 $\gamma\mapsto a^{(T)}_{\gamma\,n,}(s)$ 具有有限支撑，且其大小是我们可以控制的。

引理 5.1. 给定 n 和 $T>0$，存在一个有限集 $S\left(T\right)\subset\Gamma$，它包含映射 $\gamma\mapsto a^{(T}_{\gamma),n}(s)$ 对任意任意 $s>\frac{1}{2}$ 的支撑集。存在一个常数 $C>0$，使得

$$\left|S\left(T\right)\right|\leqslant C\kappa\left(n\right)^2e^{2T},\tag{5.2}$$

并且如果 $\gamma\in S(T)$，那么其字长 $\text{wl}\left(\gamma\right)$ 满足

$$\text{wl}(\gamma)\leqslant C\kappa\left(n\right)^2e^{2T}.\tag{5.3}$$

证明。我们定义

$$K_n\overset{\text{def}}{=}\text{Supp}\left(1-\chi^-_{\mathcal{C},n}\right)\subset F.$$

回顾（2.1）可知，$H(L$是基本域 F 中满足 $y\geqslant L$ 的区域。根据 $\chi^-_{\mathcal{C}\text{的定义},\ n}$（第 4.1节），我们有

$$K_n\subset F\backslash H\left(\frac{C}{\kappa\left(n\right)}\right),$$

对于某个常数。我们有

$$F\backslash H\left(\frac{C}{\kappa(n)}\right)=(F\backslash H(1))\bigsqcup\left(H(1)\backslash H\left(\frac{C}{\kappa(n)}\right)\right).$$

$(F\backslash H(1))$ 的直径有一个仅取决于 X 的常数上界。$H(1)\backslash H\left(\frac{C}{\kappa(n)}\right)$ 的直径有一个上界 $\log\left(\frac{C}{\kappa(n)}\right)+2$。由此可得

$$\operatorname{diam}(K_n)\leqslant C+\log\left(\frac{1}{\kappa(n)}\right).$$

那么，对于 $x\in F$，根据引理 4.2，表达式

$$\mathbb{L}_{\mathbb{H}}^{(T)}(s;\gamma x,y)\left(1-\chi_{\mathcal{C},n}^{-}(y)\right)$$

仅当 $y\in K_n$ 和 $d(\gamma x,y)\leqslant T+1$ 时非零。回忆一下，F 是关于某个点 w 的狄利克雷域，我们可以假设 $w\in K_n$。然后

$$\begin{aligned}d(\gamma x,w)&\leqslant d(\gamma x,y)+d(w,y)\\&\leqslant T+1+\operatorname{diam}(K_n).\end{aligned}$$

那么，由于 F 是关于 w 的狄利克雷域，

$$\begin{aligned}d(\gamma w,w)&\leqslant d(\gamma w,\gamma x)+d(\gamma x,w)=d(w,x)+d(\gamma x,w)\leqslant 2d(\gamma x,w)\\&\leqslant 2\left(C+\log\left(\frac{1}{\kappa(n)}\right)+T\right).\end{aligned}$$

然后我们可以利用格点计数来推导出

$$\begin{aligned}|S(T)|&\leqslant\#\left\{\gamma\in\Gamma\mid d(\gamma w,w)\leqslant C+2\log\kappa(n)+2T\right\}\\&\leqslant C\exp\left(2\left(C+\log\left(\frac{1}{\kappa(n)}\right)+T\right)\right)\leqslant C\frac{e^{2T}}{\kappa(n)^2},\end{aligned}$$

证明（5.2）。

现在我们证明性质（5.3）成立。我们假设 F 是 Γ的狄利克雷域，也可以假设 F使得 $\left\{h_1,\ldots,h_k,h_1^{-1},\ldots,h_k^{-1}\right\}$ 对应的边配对集合包含我们选取的生成元 F、γ_1、……、γ_d及其逆元。我们用 $\overline{\mathrm{wl}}(\gamma)$ 表示 γ作为 $\left\{h_1,\ldots,h_k,h_1^{-1},\ldots,h_k^{-1}\right\}$ 中一个词的最小长度。由于任意 h_i或其逆元 h_i^{-1}都是由 γ_1、……、γ_d、γ_1^{-1}、……、γ_d^{-1} 构成的有限词，因此存在一个常数 $C>0$，使得

$$\mathrm{wl}(\gamma)\leqslant C\overline{\mathrm{wl}}(\gamma).$$

现在我们开始对……进行界定

$$\sup_{\gamma\in S(T)}\overline{\mathrm{wl}}(\gamma).$$

根据前面的论证，如果 $\gamma\in S(T)$，那么

$$\gamma F\cap B(w,\operatorname{diam}(K_n)+T+1)\neq\emptyset. \tag{5.4}$$

我们声称，如果 γ满足 (5.4) 且 $\overline{\mathrm{wl}}(\gamma)\geqslant 1$，那么存在一个 γ'满足 $\overline{\mathrm{wl}}(\gamma)=\overline{\mathrm{wl}}(\gamma')-1$且满足 (5.4)。$\overline{\mathrm{wl}}(\gamma)=1$的情形显然，因为 $w\in F$。对于 $l>1$，令 Γ_l表示……的元素

Γ 满足 $\mathrm{wl}(\gamma) = l$。由于 $\left\{h_1, \ldots, h_k, h_1^{-1}, \ldots, h_k^{-1}\right\}$ 是狄利克雷域 F的边配对，我们可见.....

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\gamma F\backslash\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma_l}\gamma F\right)=\left(\bigcup_{i<l}\bigcup_{\gamma\in\Gamma_i}\gamma F\right)^{\circ}\sqcup\left(\bigcup_{i>l}\bigcup_{\gamma\in\Gamma_i}\gamma F\right)^{\circ}.$$

是不连通的。这里 U°表示 U的内部。因此，如果该断言不成立，那么可以找到一个 $l>1$，使得

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma_l}\gamma F\cap B\left(w,\operatorname{diam}\left(K_n\right)+T+1\right)\neq\emptyset, \tag{5.5}$$

使得

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma_{l-1}}F\cap B\left(w,\operatorname{diam}\left(K_n\right)+T+1\right)=\emptyset,$$

特别地，

$$B\left(w,\operatorname{diam}\left(K_n\right)+T+1\right)\subset\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\gamma F\backslash\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma_{l-1}}\gamma F\right).$$

由于双曲平面中半径为 r 的球是连通的，并且 Γ 中的单位元满足（5.4），

$$B\left(w,\operatorname{diam}\left(K_n\right)+T+1\right)\subset\left(\bigcup_{i<l-1}\bigcup_{\gamma\in\Gamma_i}\gamma F\right)^{\circ}.$$

这与（5.5）矛盾，因而断言得证。由此可知，如果 γ 满足（5.4），那么 wl（γ）的上界为满足（5.4）的 $\gamma\in\Gamma$ 的数量。然后根据导出（5.1）的论证，

$$\sup_{\gamma\in S(T)}\mathrm{wl}\left(\gamma\right)\leqslant C\#\left\{\gamma\in\Gamma\mid\gamma F\cap B\left(w,\operatorname{diam}\left(K_n\right)+T+1\right)\neq\emptyset\right\}\leqslant C\frac{e^{2T(n)}}{\kappa\left(n\right)^2},$$

断言得证。 □

目前，我们希望对其范数进行界定的算子 $\sum_{\gamma\in S}a_{\gamma\,n,}^{(T)}(s)\otimes\rho_{\phi}\left(\gamma^{-1}\right)$ 几乎具有推论 3.6的形式，唯一的区别在于 $a_{\gamma\,n,}^{(T)}(s)$： $L^2(F)\to L^2(F)$ 不是一个矩阵。然而，每个$a_{\gamma\,n,}^{(T)}(s)$ 都是紧算子，因此可以用有限秩算子对其进行逼近。我们需要这一结论的一个有效版本，同时还要控制有限秩算子的秩与误差之间的关系。

引理 5.2. 设给定 $s\in\left[\frac{1}{2},1\right]$。对于任意 $n\in\mathbb{N}$ 和 $T>1$，存在有限维子空间 $W\subset L^2(X)$，使得 $|W|\leqslant C(S(T))^3$，其中某个常数为 C，且有限秩算子$b_{\gamma,\,n}^{(T)}$：对于每个 $\gamma\in S(T)$ 都有 $W\to W$，使得

$$\|b_{\gamma,n}^{(T)}(s)-a_{\gamma,n}^{(T)}(s)\|_{L^2(F)}\leqslant\frac{1}{20|S(T)|},$$

证明。设 $\gamma\in S(T)$，那么由于 $a_{\gamma}^{(T)}(s)$ 是紧算子，它具有奇异值分解

$$a_{\gamma,n}^{(T)}(s)=\sum_{i\in\mathbb{N}}s_n\left(a_{\gamma,n}^{(T)}(s)\right)\langle\cdot,e_i\rangle f_i,$$

其中 $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 和 $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 $L^2(F)$ 中的正交归一系统，并且 $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个非负实数递减数列 [RS81，定理 VI.17]。紧算子 $\{s_n(A)\}_{n\in\mathbb{N}}$的奇异值 A 在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上是 $|A|=\sqrt{AA^*}$ 的特征值；若 A 是希尔伯特–施密特算子，则 $\|A\|_{\mathrm{H.S.}}^2=\sum_{j\in\mathbb{N}}s_j(A)^2$。

通过定义

$$b_{\gamma,n}^{(T)}(s)\overset{\mathrm{def}}{=}\sum_{i=1}^{r}s_i\left(a_{\gamma}^{(T)}(s)\right)\langle\cdot,e_i\rangle f_i,$$

我们看到 $b_{\gamma}^{T}(s):W_\gamma\to W_\gamma$，其中 $|W_\gamma|\leqslant 2r$，并且

$$\|b_{\gamma,n}^{(T)}(s)-a_{\gamma,n}^{(T)}(s)\|\leqslant s_{r+1}(A).$$

我们希望 r 满足以下条件。

$$s_{r+1}\left(a_{\gamma,n}^{(T)}(s)\right)\leqslant\frac{1}{20|S(T)|}. \tag{5.6}$$

我们有

$$\sum_{i=1}^{\infty}s_i\left(a_{\gamma,n}^{(T)}(s)\right)^2=\|a_{\gamma,n}^{(T)}(s)\|_{\mathrm{H.S}}^2\leqslant C,$$

Then

$$\begin{aligned}0\leqslant\sum_{i=r+1}^{\infty}s_i\left(a_{\gamma,n}^{(T)}(s)\right)^2&=\|a_{\gamma,n}^{(T)}(s)\|_{\mathrm{H.S}}^2-\sum_{i=1}^{r}s_i\left(a_{\gamma,n}^{(T)}(s)\right)^2\\&\leqslant C-rs_r\left(a_{\gamma,n}^{(T)}(s)\right)^2.\end{aligned}$$

特别地，

$$s_r\left(a_{\gamma,n}^{(T)}(s)\right)\leqslant\sqrt{\frac{C}{r}}.$$

取 $r\geqslant 400\cdot C\cdot S(T)^2$ 保证（5.6）得到满足。然后 $|W_\gamma|\leqslant CS(T)^2$ 对每个$\gamma\in S(T)$，并取

$$W=\bigcup_{\gamma\in S(T)}W_\gamma,$$

得出结论。 □

最后，我们证明一个简单的偏差界。

引理 5.3. 存在一个常数 $c_3>0$，仅依赖于 X，使得对于任意 $T>1$、任意$\gamma\in S(T)$ 以及 s_1，$s_2\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，

$$\|a_{\gamma,n}^{(T)}(s_1)-a_{\gamma,n}^{(T)}(s_2)\|_{L^2(F)}\leq c_3|s_1-s_2|.$$

证明。该算子

$$a_{\gamma,n}^{(T)}(s_1)-a_{\gamma,n}^{(T)}(s_2)$$

是一个核为

$$\left(\mathbb{L}_{\mathbb{H}}^{(T)}(s;\gamma x,y)-\mathbb{L}_{\mathbb{H}}^{(T)}(s;\gamma x,y)\right)\left(1-\chi_{\mathcal{C},n}^{-}(y)\right).$$

对于任意 $T>1$, $\gamma\in S(T)$, 由引理 4.4,

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{L}_{\mathbb{H}}^{(T)}(s;\gamma x,y)-\mathbb{L}_{\mathbb{H}}^{(T)}(s;\gamma x,y)\right| &\leqslant \sup_{s\in\left[\frac{1}{2},1\right]}\left|\frac{\partial}{\partial s}\mathbb{L}_{\mathbb{H}}^{(T)}(s;\gamma x,y)\right||s_1-s_2|\\ &\leqslant C|s_1-s_2|.\end{aligned}$$

于是我们看到

$$\|a_\gamma^{(T)}(s_1)-a_\gamma^{(T)}(s_2)\|_{L^2(F)}\leqslant\|a_\gamma^{(T)}(s_1)-a_\gamma^{(T)}(s_2)\|_{\text{H.S.}}\leqslant c_3|s_1-s_2|,$$

对于某个常数 $c_3>0$。 □

5.2 随机算子界

现在我们可以将第 3 节的结果应用于我们的随机算子 $\mathcal{L}_{U,\ n,\ \phi}(s)$ 和$\mathcal{L}_{P,\ n,\ \varphi}(s)$。

引理 5.4. 采用上述记号,

- 取 $T=\sqrt[\ ]{\log\frac{n}{4\sqrt{32d+160}}}$和 $\kappa(n)=\frac{64}{(32d+160)(\log\log n)^2\log n}$, 则当 $n\to\infty$ 时, 该结论成立的概率趋于 1,

$$\sup_{s\in\left[\frac{1}{2}+\sqrt{\kappa(n)},1\right]}\|\mathcal{L}_{U,n,\phi}(s)\|_{L^2(F)\otimes\mathbb{C}^n}<\frac{3}{5}.$$

- 取 $T=\sqrt[\ ]{\text{对数}\frac{\text{对数对数}}{24}}^{\ n}$和 $\kappa(n)=\frac{4\cdot24^2\ (\text{对数的对数的对数}\ n)^{\ 2}\text{对数的对数}\ n}{}$, 则当 $n\to\infty$ 时, 该结论以趋近于 1 的概率成立

$$\sup_{s\in\left[\frac{1}{2}+\sqrt{\kappa(n)},1\right]}\|\mathcal{L}_{P,n,\varphi}(s)\|_{L^2(F)\otimes V_n^0}<\frac{3}{5}.$$

证明。我们首先处理酉情形。令 $T=\sqrt[\ ]{\text{对数}\frac{n}{4\sqrt{32d+160}}}$, $\kappa(n)=\frac{64}{(32d+160)\ (\text{对数的对数}\ n)^{\ 2}\text{对数}\ n}$, 并令$s\in\left[\frac{1}{2}+\sqrt{\kappa(n)}\ 1\right]$为固定值。于是根据引理 5.2, 存在一个有限维子空间$W\subset L^2(X)$, 满足 $m=|W|\leqslant C_{\kappa\ n}^{\ e^{3T}}{}^{3}$, 以及算子 $b_\gamma^{(T)}$: 对每个 $\gamma\in S(T)$ 都有 $W\to W$, 使得

$$\|b_{\gamma,n}^{(T)}(s)-a_{\gamma,n}^{(T)}(s)\|_{L^2(F)}\leqslant\frac{1}{20|S(T)|}.$$

由此可得

$$\|\mathcal{L}_{U,n,\phi}(s)-\sum_{\gamma\in S(T)}b_{\gamma,n}^{(T)}(s)\otimes\rho_\phi(\gamma)\|_{L^2(X)\otimes\mathbb{C}^n}\leqslant\frac{1}{20}.\tag{5.7}$$

现在应用推论 3.6 于 $\sum_{\gamma\in S\ (T)}b_{\gamma\ n,}^{(T)}(s)\otimes\rho_\phi(\gamma)$。

根据引理 5.1, 我们有 $S(T)\subset B_l$其中 $l\leqslant C_{\kappa\ n}^{\ e^{2T}}{}^{2}$且 $|S(T)|\leqslant C_{\kappa\ n}^{\ e^{2T}}{}^{2}$。回顾一下, 我们取了 $T=\sqrt[\ ]{\log\frac{n}{4\sqrt{32d+160}}}$, $\kappa(n)=\frac{64}{(32d+160)(\log\log\ n)^2\log\ n}$。现在我们检查推论 3.6 的假设是否满足。

$$\begin{aligned}\log\left(2ml\,|S|^{\lceil\log_2 l\rceil}\,l^{(\lceil\log_2 l\rceil-1)}\right)&\leqslant C+\log m+\log l+\log l\log|S|+(\log l)^2\\ &\leqslant C+5T-5\log\kappa(n)+2\left(2T-2\log\kappa(n)+\log C\right)^2\\ &\ll T^2\ll\log n.\end{aligned}$$

因此，存在某个常数 C,

$$2ml\left|S\right|^{\lceil\log_2 l\rceil} l^{(\lceil\log_2 l\rceil-1)} < n^C < \exp\left(n^{\frac{1}{32d+160}}\right),$$

对于 n 足够大且推论3.6 的第一个假设成立时。我们注意到，为了检验第一个条件，无需使用 T 和 κ 中常数的精确取值。为了检验第二个条件，我们注意到

$$\log\left(l^2\left|S\right|^{\lceil\log_2 l\rceil} l^{(\lceil\log_2 l\rceil-1)}\right) \leqslant 9\left(T-\log\kappa\left(n\right)\right)^2 < 12T^2 < \frac{1}{32d+160}\log n, \tag{5.8}$$

对于充分大的 n，对（5.8）取指数可得

$$\frac{l^2\left|S\right|^{\lceil\log_2 l\rceil} l^{(\lceil\log_2 l\rceil-1)}}{n^{\frac{1}{32d+160}}} \to 0,$$

当 $n\to\infty$时。现在我们可以应用推论3.6。我们得到，以至少以下概率

$$1-\exp\left(-\sqrt{n}\right),$$

我们有

$$\begin{aligned}\|\sum_{\gamma\in S} b_{\gamma,n}^{(T)}(s)\otimes\rho_\varphi\left(\gamma\right)\|_{\mathbb{C}^m\otimes\mathbb{C}^n} &\leqslant \|\sum_{\gamma\in S} b_{\gamma,n}^{(T)}(s)\otimes\lambda\left(\gamma\right)\|_{\mathbb{C}^m\otimes l^2(\Gamma)}\left(1+\frac{l^2\left|S\right|^{\lceil\log_2 l\rceil} l^{\frac{3}{2}(\lceil\log_2 l\rceil-1)}}{n^{\frac{1}{32d+160}}}\right)\\ &= \|\sum_{\gamma\in S} b_{\gamma,n}^{(T)}(s)\otimes\lambda\left(\gamma\right)\|_{\mathbb{C}^m\otimes l^2(\Gamma)}\left(1+o\left(1\right)\right).\end{aligned}$$

我们有一个等距线性同构

$$\begin{aligned}L^2\left(F\right)\otimes\ell^2\left(\Gamma\right)&\cong L^2\left(\mathbb{H}\right),\\ f\otimes\delta_\gamma&\mapsto f\circ\gamma^{-1},\end{aligned} \tag{5.9}$$

（其中，$f\circ\gamma^{-1}$ 由 γF上的函数延拓为零）。事实上，令 $L_F^2(\mathbb{H})$表示 $\mathbb{H}$ 上平方可积且支集包含在有限个 Γ平移后的 F中的函数。那么任意$g\in L_F^2(\mathbb{H})$都可以写成

$$g=\sum_{i\in I} g\mid_{\gamma_i F}=\sum_{i\in I} g_i\circ\gamma_i^{-1},$$

其中 $g_i\in L^2\left(F\right)$ 且 $I\subset\Gamma$ 是一个有限集，则映射 (5.9) 的逆映射为

$$g\mapsto\sum_{i\in I} g_i\otimes\delta_{\gamma_i}. \tag{5.10}$$

可以验证，映射 (5.10) 是 $L_F^2\left(\mathbb{H}\right)$ 到其像的等距同构，且其像在 $L^2\left(F\right)\otimes l^2\left(\Gamma\right)$ 中稠密。由于 $L_F^2(\mathbb{H})$ 在 $L^2\left(\mathbb{H}\right)$ 中稠密，映射 (5.10) 可延拓为 $L^2\left(\mathbb{H}\right)$ 与 $L^2\left(F\right)\otimes l^2\left(\Gamma\right)$ 之间的等距同构。

在此同构下，算子 $\sum_{\gamma\in S} a_{\gamma\ n,}^{(T)}(s)\otimes\lambda\left(\gamma^{-1}\right)$ 被共轭为

$$\mathbb{L}_{\mathbb{H}}^{(T)}(s)\left(1-\chi_{\mathcal{C},n}^{-}\right): L^2(\mathbb{H})\to L^2(\mathbb{H})$$

来自第 4.2。由于 $\left(1-\chi_{\mathcal{C},n}^{-}\right)$ 取值于 $[0,1]$,，乘以它的算子范数为 ≤ 1在 $L^2(\mathbb{H})$上，因此我们看到

$$\|\mathbb{L}_{\mathbb{H}}^{(T)}(s)\left(1-\chi_{\mathcal{C},n}^{-}\right)\|_{L^2(\mathbb{H})} \leqslant \|\mathbb{L}_{\mathbb{H}}^{(T)}(s)\|_{L^2(\mathbb{H})} < CT\left(n\right)e^{-T(n)\left(\frac{1}{2}-s\right)}.$$

由于 $s \in \left[\frac{1}{2}+\sqrt{\kappa(n)\ 1}\right]$ 和 $\kappa(n) = {}^{4}\underline{(\log\ T\ n\ {}^{2}())()^{2}}$ ，
我们有

$$T\left(n\right)e^{-T(n)\left(\frac{1}{2}-s\right)} \leqslant T\left(n\right)e^{-2\log(T(n))} = o\left(1\right).$$

那么我们有

$$\|\sum_{\gamma\in S} a_{\gamma,n}^{(T)}(s)\otimes\lambda(\gamma^{-1})\|_{L^2(F)\otimes l^2(\Gamma)} < \frac{1}{10}, \tag{5.11}$$

对于充分大的 n。根据推导出 (5.7) 的论证，我们得到

$$\|\sum_{\gamma\in S} b_{\gamma,n}^{(T)}\otimes\lambda\left(\gamma^{-1}\right) - \sum_{\gamma\in S} a_{\gamma,n}^{(T)}(s)\otimes\lambda(\gamma^{-1})\|_{\mathbb{C}^m\otimes l^2(\Gamma)} < \frac{1}{20}. \tag{5.12}$$

那么，根据 (5.7)、(5.11) 和 (5.12)，对于我们固定选取的 s,

$$\|\mathcal{L}_{U,n,\phi}(s)\|_{L^2(F)\otimes\mathbb{C}^n} < \frac{2}{5},$$

概率至少为

$$1-\exp\left(-\sqrt{n}\right).$$

现在我们使用有限网论证来一致地控制所有 $s \in \left[\frac{1}{2}+\sqrt{\kappa(n)\ 1}\right]$。令 $\mathcal{Y}$为 $\left[\frac{1}{2}+\sqrt{\kappa(n)\ 1}\right]$中的一个有限集，使得 $\left[\frac{1}{2}+\sqrt{\kappa(n)\ 1}\right]$中的每个点与其距离至多是

$$\frac{1}{5|S\left(T\right)|c_3},$$

来自有限集 $\mathcal{Y}$，其中 c_3 是引理 5.3 中的常数。我们可以选取 $\mathcal{Y}$ 使得 $|\mathcal{Y}| \leqslant 5c_3\left|S(T)\right| \leqslant C\ {}_{\kappa\ n}^{e^{2T}}$ $()^2$。然后通过应用交集界，该事件发生的概率为

$$\|\mathcal{L}_{U,n,\phi}(s)\|_{L^2(F)\otimes\mathbb{C}^n} < \frac{2}{5}$$

对于每个点， $s\in\mathcal{Y}$ 都有一个下界为

$$1-C\exp\left(-\sqrt{n}\right)\left|S\left(T\right)\right| \geqslant 1-n\exp\left(-\sqrt{n}\right), \tag{5.13}$$

当 $n\to\infty$ 和...趋近于 1 时

$$\sup_{s\in\mathcal{Y}}\|\mathcal{L}_{U,n,\phi}(s)\|_{L^2(F)\otimes\mathbb{C}^n} \leqslant \frac{2}{5},$$

以渐近几乎必然的方式。最后，对于 s_1,
$s_2 \in \left[\frac{1}{2}+\sqrt{\kappa(n)\ 1}\right]$,

$$\mathcal{L}_{U,n,\phi}(s_1)-\mathcal{L}_{U,n,\phi}(s_2) = \sum_{\gamma\in S(T)}\left[a_{\gamma}^{(T)}(s_1)-a_{\gamma}^{(T)}(s_2)\right]\otimes\rho_{\phi}\left(\gamma^{-1}\right). \tag{5.14}$$

那么由引理 5.3，对于某个常数 $c_3 > 0$，我们有

$$\|a_\gamma^{(T)}(s_1) - a_\gamma^{(T)}(s_2)\|_{L^2(F)} \leq c_3|s_1 - s_2|,$$

对于所有 $\gamma \in S(T)$ 以及 $s_1, s_2 \in [s_0, 1]$。我们看到，

$$\|\mathcal{L}_{U,n,\phi}(s_1) - \mathcal{L}_{U,n,\phi}(s_2)\|_{L^2(F)\otimes\mathbb{C}^n} \leq |S(T)|\, c_3|s_1 - s_2|.$$

因此，根据 $\mathcal{Y}$ 的选择，可得

$$\sup_{s\in\mathcal{Y}} \|\mathcal{L}_{U,n,\phi}(s)\| \leqslant \frac{2}{5} \implies \sup_{s\in\left[\frac{1}{2}+\sqrt{\kappa(n)},1\right]} \|\mathcal{L}_{U,n,\phi}(s)\| \leqslant \frac{3}{5}.$$

由于前述事件以趋于 1 的概率发生（当 $n \to \infty$ 时），第一个断言得证。

随机覆盖情形下的论证类似，只需验证 $\kappa(n)$ 和 T 能够得出与酉情形相同的结论。我们希望应用推论3.7，这要求

$$2ml\,|S|^{\lceil \log_2 l\rceil}\, l^{(\lceil \log_2 l\rceil - 1)} \leqslant n^{\sqrt{\log n}},$$

and

$$l^2\,|S|^{\lceil \log_2 l\rceil}\, l^{(\lceil \log_2 l\rceil - 1)} \leqslant (\log(n))^{\frac{1}{4}}.$$

由于 $m \leqslant C\frac{e^{3T}}{\kappa\, n}()^3$ 且 $l, |S| \leqslant C\frac{e^{2T}}{\kappa\, n}()^2$，参见引理 5.1 和引理 5.2，通过简单计算可以验证，取 $T = \sqrt[\log\log_{24}]{n}$ 和 $\kappa(n) = 4{\cdot}24^2(\log\log\log n)^2\log\log n$ 时，这~~两个不~~等式均成立。最后，我们只需要满足以下条件：

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot |S(T)| \to 0,$$

<escape>为了应用相同的交集界论证（5.13，这由我们关于 T 和 κ 的假设保证。</escape>

□

6 定理 1.2和定理 1.4

现在可以直接得出定理 1.2 和定理 1.4。回顾酉丛的情形，有

$$\mathbb{M}_{U,\phi}(s) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{M}^{\text{int}}_{U,\phi}(s) + \mathbb{M}^{\text{cusp}}_{U,\phi}(s),$$

那么 $\mathbb{M}_{U,\phi}(s)\colon L^2(X; E_\phi) \to H^2(X; E_\phi)$ 是一个有界算子，并且

$$\left(\Delta_{X_\phi} - s(1-s)\right)\mathbb{M}_{U,\phi}(s) = 1 + \mathbb{L}^{\text{int}}_{U,\phi}(s) + \mathbb{L}^{\text{cusp}}_{U,\phi}(s), \tag{6.1}$$

由第 4.3 节可知。我们在引理 5.4 中证明了存在一个常数 c_4（其精确值可从引理5.4中读出），使得几乎必然有

$$\|\mathbb{L}^{\text{int}}_{U,\phi}(s)\| \leqslant \frac{3}{5},$$

对所有 $s \in \left[\frac{1}{2} + \sqrt{c_4\log\log\sqrt[n]{n}\log}, \ 1\right]$。那么由于（4.4）

$$\|\mathbb{L}^{\text{cusp}}_{U,\phi}(s)\| \leqslant \frac{1}{8},$$

我们几乎必然有。

$$\sup_{s\in\left[\frac{1}{2}+\sqrt{c_4}\frac{\log\log n}{\sqrt{\log n}},1\right]}\left\|\mathbb{L}_{\phi}^{\mathrm{int}}(s)+\mathbb{L}_{\phi}^{\mathrm{cusp}}(s)\right\|\leqslant\frac{4}{5}.$$

这意味着，几乎必然地

$$\mathbb{M}_{U,\phi}(s)\left(1+\mathbb{L}_{U,\phi}^{\mathrm{int}}(s)+\mathbb{L}_{U,\phi}^{\mathrm{cusp}}(s)\right)^{-1}$$

存在一个有界算子 $L^2(X;\ E_\phi)\to H^2(X;\ E_\phi)$，对每个 $s\in\left[\frac{1}{2}+\sqrt{c_4}\log\log\sqrt{\sqrt{n}}\log,\ 1\right]$。然后由 (6.1)，可得几乎必然地

$$\inf\operatorname{spec}(\Delta_\phi)\geqslant\frac{1}{4}-c_4\frac{(\log\log n)^2}{\log n}.$$

为证明定理 1.2，我们运用完全相同的论证，并使用引理5.4，从而得出存在一个常数 $c_5>0$ 使得几乎必然地

$$\mathbb{M}_{P,\varphi}(s)\left(1+\mathbb{L}_{P,\varphi}^{\mathrm{int}}(s)+\mathbb{L}_{P,\varphi}^{\mathrm{cusp}}(s)\right)^{-1},$$

存在一个有界算子 $L^2_{\mathrm{new}}(X_\varphi)\to H^2_{\mathrm{new}}(X_\varphi)$，对所有 $s\in\left[\frac{1}{2}+\sqrt{c_5}\log\log\log\sqrt{\sqrt{n}}\log\log,\ 1\right]$. 然后

$$\operatorname{spec}(\Delta_{X_n})\cap\left[0,\frac{1}{4}-c_5\frac{(\log\log\log n)^2}{\log\log n}\right)=\operatorname{spec}(\Delta_X)\cap\left[0,\frac{1}{4}-c_5\frac{(\log\log\log n)^2}{\log\log n}\right),$$

几乎必然地

参考文献

[AM23] N. Anantharaman 和 L. Monk，随机双曲几何中的 Friedman-Ramanujan 函数及其在谱隙中的应用。预印本，arXiv:2304.02678。（2023年）4[Bo20] C. Bordenave。Friedman 第二特征值定理及其对随机提升的推广的新证明。Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4), 53(6):1393–1439，（2020）。3[BC19] C. Bordenave 和 B. Collins。随机提升和随机置换矩阵多项式的特征值。Annals of Mathematics，190(3):811–875，（2019）。3，4，5[BC23] C. Bordenave 和 B. Collins，随机酉算子与置换的矩阵值多项式的范数，预印本，arXiv:2304.05714（2023）。4，5，8，9，10，11[BM04] R. Brooks 和 E. Makover。黎曼曲面的随机构造。J. Differential Geom. 68(1):121–157，（2004）。4[BCP21] T. Budzinski、N. Curien 和 B. Petri。随机 Belyi 曲面的直径。Algebr. Geom. Topol.，21(6):2929–2957，2021年。4[Bu84] P. Buser，关于图的二分，Discrete Appl. Math. 9 (1984)，第 1 期，105–109。2

[BBD88] P. Buser、M. Burger 和 J. Dodziuk，大亏格及大 λ_1的黎曼曲面，流形上的几何与分析（片田/京都，1987），数学讲义，第1339卷，施普林格，柏林，（1988），第54–63页。2[Di69] J. D. Dixon，生成对称群的概率，数学杂志 110 (1969年)，199–205。 2, 6[DFP21] M. Doll、K. Fedosova 和 A. Pohl，带酉扭曲的双曲曲面上的共振计数，预印本，arXiv:2109.12923。（2021年）14[Fr03] J. Friedman，相对扩张子或弱相对拉马努金图，杜克数学杂志 118 (2003年)，第1期，19–35。 3[Fr08] J. Friedman。Alon第二特征值猜想及相关问题的一个证明。美国数学会回忆录，195(910):viii+100，（2008年）。 3[Ga06] A. Gamburd。随机 Belyi 曲面的泊松–狄利克雷分布。概率年刊，34(5):1827–1848，（2006年）。4[GJ78] S. Gelbart 和 H. Jacquet。GL_2 与 GL_3，的自守表示之间的一种关系。高等师范学校科学年刊 (4) 11 (1978年)，第4期，471–542。 4[GMST21] C. Gilmore、E. Le Mason、T. Sahlsten 和 J. Thomas。大亏格随机曲面上的短测地环路与L^p 特征函数范数。《几何与泛函分析》31，62–110（2021年）。4[GPY11] L. Guth、H. Parlier 和 R. Young，随机曲面的裤子分解，《几何与泛函分析》21 (2011年)，1069–1090。4[HT05] U. Haagerup 和 S. Thorbjørnsen，随机矩阵的新应用：Ext$C^*_{\mathrm{red}}(F_2)$不是一个群，数学年刊 (2) 162，2 (2005年)，第711–775页。9[HM23] W. Hide 和 M. Magee，双曲曲面的近乎最优谱隙，数学年刊 (2) 198(2): 791-824 (2023年)。2, 4, 5, 7, 12, 13, 14, 15, 16[Hi22] W. Hide，带尖点的 Weil–Petersson随机曲面的谱隙，《国际数学研究通知》，(2022年)。4[HT22] W. Hide 和 J. Thomas。随机双曲穿孔球面上的短测地线与小特征值，预印本，arXiv:2209.15568 (2022年)。4[HY21] J. Huang 和 H.-T. Yau。随机 d-正则图直至谱边缘的谱。arXiv:2102.00963，（2021年）。3[Iw89] H. Iwaniec，同余群第一特征值的 Selberg下界，数论、迹公式与离散群（奥斯陆，1987），学术出版社，波士顿，MA，（1989），第371–375页。4[Iw96] H. Iwaniec，同余群的最低特征值，几何专题，非线性微分方程及应用进展，第20卷，Birkh¨auser Boston，波士顿，MA，（1996），第203–212页。4

[Ki03] H. Kim. GL_4 的外平方与 GL_2,的对称四次幂的函子性。《美国数学会杂志》16（2003年），第1期，139–183页，附录1由 D. Ramakrishnan 撰写，附录2由 H. Kim 和 P. Sarnak 撰写。4[KS02] H. Kim 和 F. Shahidi. GL_2 ×与 GL_3 的函子性乘积，以及 GL_2, 的对称立方。《数学年刊》（第2辑）155（2002年），第3期，837–893页，附录由 C. J. Bushnell 和 G. Henniart 撰写。4[LW21] M. Lipnowski 和 A. Wright，大亏格下趋于最优谱隙，（2021年）。预印本，arXiv:2103.07496。4[LM22] L. Louder、M. Magee（附录由 W. Hide 撰写）和 M. Magee。极限群的强收敛酉表示。预印本，arXiv:2210.08953，（2022年）。2[LRS95] W. Luo、Z. Rudnick 和 P. Sarnak。关于塞尔伯格特征值猜想。《几何与泛函分析》5（1995年），第2期，387–401页。4[MN20] M. Magee 和 F. Naud。黎曼曲面的随机覆盖的显式谱隙。《高等科学研究所数学出版物》（2020年）。2, 3[MN21] M. Magee 和 F. Naud。将 Alon 猜想和弗里德曼猜想推广至 Schottky 曲面，预印本，arXiv:2106.02555。（2021年）3[MNP22] M. Magee、F. Naud 和 D. Puder。紧致双曲曲面的随机覆盖具有相对谱隙 $\frac{3}{16} - \varepsilon$ 。《几何与泛函分析》32，595–661页（2022年）。2, 3[Mi13] M. Mirzakhani。Weil-Petersson 体积的增长与大亏格随机双曲曲面。《微分几何杂志》94（2013年），第2期，267–300页。4[Mo21] L. Monk, Benjamini-Schramm 收敛与高亏格随机双曲曲面的谱，《分析与偏微分方程》（即将刊出）（2021年）。4[Na22] F. Naud，紧曲面的随机覆盖与光滑线性谱统计量，arXiv:2209.07941（2022年）。3[Pi96] G. Pisier，Kirchberg 定理的一个简单证明及关于 C^*-范数的相关结果。《算子理论杂志》35，2（1996年），317--335页。9[RS81] M. Reed、B. Simon。《现代数学物理方法：泛函分析》第一卷。学术出版社，纽约，（1981年）。21[Ru22] Z. Rudnick，大亏格曲面模空间上的 GOE 统计，arXiv:2202.06379（2022年）。4[Sa95] P. Sarnak。塞尔伯格特征值猜想。《美国数学会通报》42（1995年），第11期，1272–1277页。4[Sa03] P. Sarnak。双曲曲面的谱。《美国数学会通报》体积40，第4期，（2003年），441-478页。4[Se65] A. Selberg，关于模形式傅里叶系数的估计，《纯数学专题讨论会论文集》，第VIII卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，（1965年），第1–15页。4

[SW22A] Y. Shen、Y. Wu，《随机 Belyi 曲面的切格常数》，《国际数学研究通知》，（2022年）。4[SW22] Y. Shen、Y. Wu。《具有多个尖点的随机双曲曲面的任意小的谱隙》，预印本，arXiv:2203.15681，（2022年）。4[WX21] Wu, Y.、Xue, Y. 大亏格随机双曲曲面的第一特征值大于$\frac{3}{16} - \epsilon$。《几何与泛函分析》32，340–410（2022年）。4[Za22] M. Zargar，随机平坦丛与等分布，预印本，arXiv:2210.09547（2022年）。2,3, 14, 15,16[Zo87] P. Zograf，抛物型形式空间中的自守拉普拉斯算子的小特征值。《数学科学杂志》36，106–114（1987年）。4

Will Hide，杜伦大学数学科学系，
Lower Mountjoy，DH13LE，杜伦，
英国 william.hide@durham.ac.uk