arXiv:2305.04591v1 [math.DG] 8 May 2023

由余切丛上的微分形式构造的广义几何

拉德克·苏赫´安内克*

2023年5月9日

摘要。我们研究了可由 Monge-Amp`ere 结构导出的广义几何。我们没有沿用 Banos、Roubtsov、Kosmann-Schwarzbach 等人的方法，而是受 Hu、Moraru 和 Svoboda 的研究成果启发，另辟蹊径。我们构造了一大类新的广义近几何，它们源自非退化的二维辛 Monge-Amp`ere 结构及其他相关几何对象，例如复结构。我们证明，在某些假设下，非退化的 Monge-Amp`ere 结构会产生广义近几何的二次曲面。此外，我们还讨论了在这一框架下 Monge-Amp`ere 结构与 Monge-Amp`ere 方程之间的联系。

目录

1 引言 **2**

2 Monge-Amp˙ere 结构与方程 3
2.1 二维 Monge-Amp˙ere 理论.3 2.2 自同态场.6

3 M-A 结构的广义几何 8
3.1 广义（几乎）结构.8 3.1.1 各向同性、狄拉克结构与可积性 12

*数学与统计学系，马萨里克大学，捷克布尔诺

c

3.2 广义几何与蒙日-安培理论.14 3.3 广义几何的二次曲面.16

1 引言

许多作者都曾研究过直接从相应分块表示的张量场构造广义结构的方法 [3, 7, 11, 13,14, 24, 25]。与我们的问题相关的这一方法的一个例子是 Crainic 的论文 [7], ，其中描述了定义一般（可积）广义复结构的张量场所满足的关系。利用通过自同态对 2-形式进行扭曲的概念，Crainic 证明了广义复结构与 Hitchin对之间的对应关系。根据 Lychagin 的结果 [15, 16, 17], ，每个二维 Monge-Amp`ère 方程都可以由一对 2-形式编码，而这对 2-形式还能够确定一个特定的自同态。Banos 将 Monge-Amp`ère 理论应用于广义复几何的背景下，并在 [3] 中证明，散度型 Monge-Amp`ère 结构能够导出广义近复结构，而这些结构的可积性与 Pfaffian 非零（即椭圆型或双曲型方程）的二维辛 Monge-Amp`ère 方程的局部等价问题有关。Kosmann-Schwarzbach 和 Rubtsov 在 [14] 中进一步利用这一结果，对 T (*T**B) 上的 Lie algebroid 结构进行了变形，这又在 T (*T**B) 上诱导出一种 Courant algebroid 结构，作者将其称为 *Monge-Amp`ère Courant algebroid*。

本文进一步探讨了可由 Monge-Amp`ere 结构导出的广义几何的研究领域。为此，显然有两种可能的途径：一是进入更高维度，尤其是三维，在这一维度下，辛分类仍然是可行的；二是采用一种与 Banos 完全不同的方法。我们选择了后一种途径。受 [13], 中关于反交换对和广义度量相容结构的研究成果启发，我们构造了许多新的广义近几何，这些几何源自非退化二维辛 Monge-Amp`ere 结构以及其他几何对象（例如，它们所定义的复结构和伪黎曼度量）。其中一些广义近几何可以借助 [2, 3, 14, 15, 18] 中的研究成果证明是可积的。另一方面，对于所构造的许多几何，无法应用通过 Nijenhuis 张量（或等价地，通过某些近似狄拉克结构的 Courant 对合性）来定义的标准可积性概念。

通过我们的方法。比如，对于非各向同性情形，可以考虑采用弱可积性 这一概念 [13, 19]。

论文的原始内容。借助蒙日-安培理论，我们构造了与二维辛蒙日-安培结构相关联的广义近似结构族。我们证明，在某些假设下，非退化 M-A 结构会产生广义近几何的二次曲面。在此框架下，我们讨论 M-A 结构与 M-A 方程之间的联系。

2 蒙日–安培结构与方程

设 \(M\) 为一个 n 维辛流形。在这种情况下， n 必须是一个偶数。现在，我们定义一对特定的微分形式，由此可以构造出其他几何结构，这些结构将在接下来的章节中进行研究。

定义 2.1. 一对 $(\Omega\ \alpha) \in \Omega^2(M) \times \Omega^n(M)$ 称为 M 上的*Monge-Amp`ere* 结构（或简称*M-A* 结构），如果 Ω 是一个辛形式，并且

$$\Omega \wedge \alpha = 0\ .$$

如果 $\mathcal{M} = T^*\mathcal{B}$，那么 $(\Omega\ \alpha)$ 称为 辛 *Monge-Amp`ere* 结构。

记号。 在我们的讨论中，我们将研究辛 M-A 结构，符号 Ω 始终表示余切丛上的典范辛形式。

2.1 二维 Monge-Amp¨ere 理论

现在，我们来考察辛 2 维 M-A 结构，并展示它们在典范辛坐标下的形式。随后，我们将介绍相应的 M-A 算子和方程。我们还将讨论 2 维蒙日-安培理论的一些独特特征，并描述由（非退化）2 维 M-A 结构构造出的各种张量场，这些张量场对于我们后续的研究至关重要。

设 \(\dim B= = 2\)，并回忆一下，\(\Omega\) 表示余切丛 \(T^*B\) 上的典范辛形式。在达布坐标 \(x, y, p, q （其中 \(x, y\) 是 \(B\) 上的基底坐标）下，辛形式可表示为

$$\Omega = \mathrm{d}\,x \wedge \mathrm{d}\,p + \mathrm{d}\,y \wedge \mathrm{d}\,q \ . \tag{1}$$

设 α 是一个给定的 2-形式：

$$\begin{aligned} \alpha = A\,\mathrm{d}\,p \wedge \mathrm{d}\,y + B(\mathrm{d}\,x \wedge \mathrm{d}\,p - \mathrm{d}\,y \wedge \mathrm{d}\,q) \\ + C\,\mathrm{d}\,x \wedge \mathrm{d}\,q + D\,\mathrm{d}\,p \wedge \mathrm{d}\,q + E\,\mathrm{d}\,x \wedge \mathrm{d}\,y \ , \end{aligned} \tag{2}$$

其中，系数 A, B, C, D, E 是 T^*B 上的光滑函数。因此，对于系数的任意选择，$\alpha \wedge \Omega = 0$ 均成立，且 (Ω α) 是一个 M-A 结构。

现在设 f: B $\to$ R 为一个光滑函数。f 的微分确定了一个截面 d f: B $\to$ T^* B，其定义为 d $f(x) := \mathrm{d}_x f$，并且我们可以将 α 拉回到 B 上，从而得到一个顶次形式 (d $f)^*\alpha \in \Omega^2$(B)。于是方程

$$(\mathrm{d}\,f)^*\alpha = 0 \tag{3}$$

定义了关于两个变量的非线性二阶偏微分方程，适用于 f。若 α 由式（2）给出，则方程（3）对应于二维辛 *Monge-Amp`ère* 方程

$$Af_{xx} + 2Bf_{xy} + Cf_{yy} + D\left(f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2\right) + E = 0 \ , \tag{4}$$

其中 $f_{xy} := \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$，且 A, B, C, D, E 是光滑函数，它们依赖于 x, y, f_x, f_y。

这样，我们可以通过一对微分形式，即 M-A 结构，来表示 M-A 方程。尽管如此，这种表示仍存在一定的歧义，借助有效性的概念可以部分消除这种歧义。条件 $\Omega \wedge \alpha = O$ 可视为对 α 有效的定义。

有关 Monge-Amp`ere 方程理论及其应用的详细论述，尤其是在二维和三维中的应用，请参见 [15]。有关 Monge-Amp`ere 理论应用的更多详情，例如复微分方程理论，请参见 [4]，理论气象学和不可压缩流体理论，请参见 [23, 22, 20, 8, 5]。

例2.1。设 $\alpha = -\mathrm{d}\ x \wedge \mathrm{d}\ q + \mathrm{d}\,y \wedge \mathrm{d}\ p$。则

$$(\mathrm{d}\,f)^*\alpha = -\,\mathrm{d}\,x \wedge \mathrm{d}(f_y) + \mathrm{d}\,y \wedge \mathrm{d}(f_x) = (-f_{yy} - f_{xx})\,\mathrm{d}\,x \wedge \mathrm{d}\,y \ .$$

因此，$(\mathrm{d}\ f)^*\alpha = 0$ 相当于二维拉普拉斯方程 $f_{yy} + f_{xx} = 0$，而 $(\Omega\ \alpha)$ 是相应的 M-A 结构。现在设 $\alpha = p\mathrm{d}\ p \wedge dy + \mathrm{d}\ x \wedge \mathrm{d}\ q$。则 $(\mathrm{d}\ f)^*\alpha = 0$ 描述冯·卡门方程 $f_x f_{xx} - f_{yy} = 0$。

定义 2.2 ([15]). 二维 *M-A* 结构的 ***Pfaffian***，$\mathrm{Pf}(\alpha)$，定义为

$$\alpha \wedge \alpha = \mathrm{Pf}(\alpha)\Omega \wedge \Omega\ . \tag{5}$$

M-A 结构称为非退化，如果其 Pfaffian 处处不为零。如果 $\mathrm{Pf}(\alpha) > 0$，则该结构称为椭圆型；如果 $\mathrm{Pf}(\alpha) < 0$，则称为双曲型。如果$|\mathrm{Pf}(\alpha)| = 1$，则称非退化结构为归一化。

注 2.1. 在稳定分层地球物理流的建模中，Pfaffian 与 Rellich 参数 [26, 9, 21] 有关。

对于一般的二维辛 M-A 结构，其在典范坐标下的 Pfaffian 可表示为

$$\mathrm{Pf}(\alpha) = -B^2 + AC - DE\ . \tag{6}$$

这可以直接利用坐标表达式（1）和（2）验证。

例 2.2. 令 $(\Omega\ \alpha)$ 为例 2.1 中描述的 M-A 结构，即二维拉普拉斯方程的结构。则 $\mathrm{Pf}(\alpha) = 1$。现在考虑冯·卡门方程 $f_x f_{xx} - f_{yy} = 0$ 的 M-A 结构。则 $\mathrm{Pf}(\alpha) = p$。根据 Lychagin-Rubtsov 定理 2.1（见第 2.2 节），二维拉普拉斯方程产生可积复结构，而冯·卡门方程则不会。

归一化。非退化 M-A 结构可以通过以下方式归一化 $(\Omega\ \alpha) \mapsto (\Omega\ n(\alpha))$：

$$n(\alpha) := |\mathrm{Pf}(\alpha)|^{-\frac{1}{2}}\alpha \tag{7}$$

事实上，$n(\alpha)$ 的 Pfaffian 满足 $|\mathrm{Pf}\,(n(\alpha))| = 1$，因为

$$n(\alpha) \wedge n(\alpha) = |\mathrm{Pf}(\alpha)|^{-1}\alpha \wedge \alpha = \frac{\mathrm{Pf}(\alpha)}{|\mathrm{Pf}(\alpha)|}\Omega \wedge \Omega\ ,$$

这意味着

$$\mathrm{Pf}\,(n(\alpha)) = \mathrm{sgn}\,\mathrm{Pf}(\alpha)\ . \tag{8}$$

非退化 M-A 结构 (Ω, α) 及其归一化 $(\Omega, n(\alpha))$ 对应于同一个 M-A 方程，因为

$$(\mathrm{d}f)^* n(\alpha) = |\mathrm{Pf}(\alpha)|^{-\frac{1}{2}}\big|_{\mathrm{Im}\,\mathrm{d}f} (\mathrm{d}f)^*\alpha = 0 \ .$$

注 2.2。请注意，我们可以用任意非零函数对 α 重新缩放，从而得到一个新的 M-A 结构 $(\Omega, \tilde{\alpha})$。然后，按照归一化时的同样论证，$(\Omega, \tilde{\alpha})$ 定义了与 (Ω, α) 相同的 M-A 方程。我们选择使用归一化结构的主要原因是，我们将由 α 构造的广义几何并不具有关于缩放的不变性。因此，归一化条件为类 $[\alpha]$ 中的代表元提供了一种一致的选择，其中 $\tilde{\alpha} \in [\alpha]$ 当且仅当存在某个函数 h 使得 $\tilde{\alpha} = e^h \alpha$。当然，同样的论证也适用于由 α 导出的其他结构。

2.2 自同态场

接下来的段落中，我们将说明每个非退化 M-A 结构如何定义一个自同态场，其平方为 $\mathrm{Id}_{T(T^*\mathcal{B})}$ 或 $-\mathrm{Id}_{T(T^*\mathcal{B})}$。在此之前，我们需要先确定一些记号。

记号。张量 $\sigma \in \Gamma(T^*\mathcal{B} \otimes T^*\mathcal{B})$ 可识别为一个 $C^\infty(\mathcal{B})$-线性映射 $\sigma_\#\colon \Gamma(T\mathcal{B}) \to \Gamma(T^*\mathcal{B})$，其定义为 $\sigma_\#(X) := X \lrcorner \sigma$。类似地，若 $\tau \in \Gamma(T\mathcal{B} \otimes T\mathcal{B})$，则用 $\tau^\#$ 表示线性映射 $\tau_\#\colon \Gamma(T^*\mathcal{B}) \to \Gamma(T\mathcal{B})$，其中 $\tau^\#(\xi) := \xi \lrcorner \tau$。现在考虑非退化 2-形式 $\alpha \in \Omega^2(T^*\mathcal{B})$，这意味着 $\alpha_\#\colon T\mathcal{B} \to T^*\mathcal{B}$ 是一个同构。利用逆映射 $(\alpha_\#)^{-1}\colon T^*\mathcal{B} \to T\mathcal{B}$，我们定义双向量 $\pi_\alpha \in \Gamma(\Lambda^2 T T^*\mathcal{B})$：

$$(\pi_\alpha)^\# := (\alpha_\#)^{-1} \ . \tag{9}$$

例如，若 $\Omega = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}p + \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}q$ 是典范辛形式，则 $\pi_\Omega = \partial_x \wedge \partial_p + \partial_y \wedge \partial_q$ 是相应的双向量，其中 $\partial_x := \frac{\partial}{\partial_x}$ 是 x-坐标向量场（其他向量场 ∂_i 也类似）。

处理矩阵时，我们将使用下划线记号，以区分态射与其矩阵表示。例如，如果 $\rho \in \mathrm{End}(T(T^*\mathcal{B}))$，那么相应的矩阵将记作 $\underline{\rho}$（它总是相对于 Ω 的典范坐标来理解）。此外，在处理由 2-形式（和 2-向量）导出的态射时，我们将省略 # 符号，例如，$\alpha_\#$ 的矩阵将记作

简写为 $\underline{\alpha}$。类似地，$(\pi_\alpha)^\#$ 的矩阵将简写为 $\underline{\alpha}^{-1}$（见定义方程 (9)）。在处理广义结构时，我们用 J 表示无坐标描述，也表示通过矩阵给出的坐标描述。由于广义结构的分块描述要么包含无坐标对象，要么包含它们的矩阵，且在我们的记号中两者区别明确，因此不太容易产生混淆。

近复结构与近乘积结构。令 $\rho \in \mathrm{End}\,(TT^*\mathcal{B})$ 为由下式定义的自同态

$$\rho := |\,\mathrm{Pf}(\alpha)|^{-\frac{1}{2}} \pi_\Omega^\# \circ \alpha_\# \ . \tag{10}$$

若 $(\Omega\ \alpha)$ 为椭圆型，则 $\rho^2 = -\mathrm{Id}_{T(T^*\mathcal{B})}$；若 $(\Omega\ \alpha)$ 为双曲型，则 $\rho^2 = \mathrm{Id}_{T(T^*\mathcal{B})}$。$\rho$是 T^*B 上的近复结构（若 $\mathrm{Pf}(\alpha) > 0$），或近乘积结构（若 $\mathrm{Pf}(\alpha) < 0$）这一事实，已在[18]中得到证明。在典范坐标下，

$$\underline{\rho} = |\,\mathrm{Pf}(\alpha)|^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} B & -A & 0 & -D \\ C & -B & D & 0 \\ 0 & E & B & C \\ -E & 0 & -A & -B \end{pmatrix} \tag{11}$$

并且，正如预期的那样，可以推出

$$\underline{\rho}^2 = \frac{-\,\mathrm{Pf}(\alpha)}{|\,\mathrm{Pf}(\alpha)|}\,\mathrm{Id}_{T(T^*\mathcal{B})} = -\,\mathrm{sgn}\,\mathrm{Pf}(\alpha)\,\mathrm{Id}_{T(T^*\mathcal{B})} \ .$$

注意，ρ在归一化下保持不变，因为由 (8) 可得

$$\mathrm{sgn}\,\mathrm{Pf}\,(n(\alpha)) = \mathrm{sgn}^2\,\mathrm{Pf}(\alpha) = \mathrm{sgn}\,\mathrm{Pf}(\alpha)\ .$$

可积性。V. Lychagin 和 V. Rubtsov 在 [18] 中证明，相应 M-A 结构 $(\Omega\ \alpha)$ 所导出的 ρ 结构的可积性与 M-A 方程的局部等价性之间存在直接联系。此外，可积性条件可以表述为某个闭性条件。

命题2.1 (Lychagin-Rubtsov [18]). 二维辛蒙日–安培方程$(\mathrm{d}\ f)^*\alpha = 0$ 可以通过辛变换在局部变换为拉普拉斯方程 $\Delta f = 0$ 或波动方程 $\Box f = 0$，当且仅当 ρ 结构是可积的，这等价于 $\frac{\alpha}{\sqrt{|\,\mathrm{Pf}(\alpha)|}}$ 是闭的。

3 M-A 结构的广义几何

我们回顾广义几何中的一些关键定义和对象。为避免任何混淆，我们先针对一般的光滑流形 M 表述这些概念，然后选择 M $= T^*$B 来研究辛 2 维 M-A 结构和二维不可压缩流体流的广义几何。

3.1 广义（近似）结构

一个广义切丛在 $\mathcal{M}$ 上是向量丛

$$\mathbb{T}\mathcal{M} := T\mathcal{M} \oplus T^*\mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M} \ , \tag{12}$$

其中丛投影 π 由以下复合映射定义

$$\mathbb{T}\mathcal{M} \longrightarrow T\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M} \ ,$$

其中，左侧的映射是惠特尼和在第一因子上的投影，第二个映射是 M 上的切丛投影。向量场与 1-形式之间的配对赋予 TM 一个非退化、对称的双线性形式 η

$$\eta\left((X,\xi),(Y,\zeta)\right) := \frac{1}{2}\left(\xi(Y)+\zeta(X)\right) \ , \tag{13}$$

它在 TM 上定义了一个符号为 (n,n) 的伪黎曼度量。如果我们在 M 上选择一个坐标系 (q^μ)，那么相应的坐标向量场和 1-形式定义了 TM 的一个局部基 $((\partial_{q^\mu},0),(0,dq^\mu))$。 η 在此基下的矩阵表示为

$$\eta = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \ .$$

M 上的广义近复结构是一个丛映射 *J: TM TM*，使得 *JId*，并且对于所有 $(,\xi),(Y,\zeta) \in$TM

$$\eta\left(\mathbb{J}(X,\xi),\mathbb{J}(Y,\zeta)\right) = \eta\left((X,\xi),(Y,\zeta)\right) \ , \tag{14}$$

其中， η 是自然内积（13） [11, 12]。

例3.1。 设 (Ω α) 是一个 α 闭的非退化 M-A 结构（即一对辛结构）。考虑一个 (1,1)-张量 $A_\alpha := \pi^{\#}\Omega \circ \alpha_{\#}$（参见定义 (10)）。那么 (Ω A_α) 在 Crainic [7, 14] 的意义下定义了一对 *Hitchin pair* 2形式，因为

$$\Omega_{\#} A_\alpha = A_\alpha^* \Omega_{\#} \ .$$

利用 Hitchin对 的概念，B. Banos 在 [3] 中证明，对于适当的 $\phi \in C^\infty$（T^*B），满足散度条件的每个二维非退化 M-A 结构，

$$\mathrm{d}(\alpha + \phi\Omega) = 0 \ ,$$

得到如下可积广义近结构 J$_\alpha$ 。

$$\mathbb{J}_\alpha = \begin{pmatrix} A_\alpha & \pi_\Omega^{\#} \\ -\left(\Omega_{\#} + \Omega_{\#} A_\alpha^2\right) & -A_\alpha^* \end{pmatrix}$$

例3.1中所描述的结果是促使我们进一步研究其他可能性的重要动机，即如何利用 Monge-Amp`ere 方程及其对应的 Monge-Amp`ere 结构来构造广义（几乎）几何结构。为了陈述我们的结果，我们需要通过以下定义扩展广义（几乎）复结构的概念。

定义3.1 ([13])。 $\mathcal{M}$ 上的广义几乎结构（或$\mathcal{M}$上的广义近几何）是一个丛映射 $\mathbb{J}\colon \mathbb{T}\mathcal{M} \to \mathbb{T}\mathcal{M}$，满足

$$\mathbb{J}^2 = \gamma_1 \, \mathrm{id}_{\mathbb{T}M} \ , \qquad\qquad \mathbb{J}^\bullet \eta = \gamma_2 \eta \ ,$$

其中 $\gamma_1, \gamma_2 \in \{-1, 1\}$，且 J$^\bullet\eta$((X, ξ) , (Y, ζ)) := $\eta\Big(\mathrm{J}\,(X, \xi)\,, \mathrm{J}\,(Y, \zeta)\Big)$。表 1 描述了常数 γ_i 的四种可能取值。缩写表示

(γ_1, γ_2)	(1, 1)	(1, −1)	(−1, 1)	(−1, −1)
J 的型	GaP	GaPC	GaC	GaAC

表 1：广义几乎结构的型取决于 (γ_1, γ_2)。

用于广义近似乘积（GaP）、广义近似复结构（GaC）、广义近似抛物复结构（GaPC）和广义近似反复结构（GaAC）结构。若一个广义结构的特征丛同构于 TM（若 J^2 = 恒等映射$_{\mathbb{T}\mathcal{M}}$），或同构于 TM ⊗ C（若 J ^{2} = −恒等映射$_{\mathbb{T}\mathcal{M}}$），则称其为非退化。

命题 3.1. 设 $J, P \in \mathrm{End}(T\mathcal{M})$ 分别为一个近复结构和一个近乘积结构。设 $\alpha \in \Omega^2(\mathcal{M})$ 为一个非退化 2-形式， $g \in S^2(\mathcal{M})$ 为定义在 $\mathcal{M}$ 上的一个非退化对称双线性形式。假设给定了如下所示的 $\mathbb{J}_J$、$\mathbb{J}_P$、$\mathbb{J}_\alpha$、$\mathbb{J}_g \in \mathrm{End}(\mathbb{T}\mathcal{M})$。

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_J &= \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & \epsilon J^* \end{pmatrix} , & \mathbb{J}_\alpha &= \begin{pmatrix} 0 & \pi_\alpha^\# \\ \epsilon \alpha_\# & 0 \end{pmatrix} , \\ \mathbb{J}_P &= \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & \epsilon P^* \end{pmatrix} , & \mathbb{J}_g &= \begin{pmatrix} 0 & \pi_g^\# \\ \epsilon g_\# & 0 \end{pmatrix} , \end{aligned} \tag{15}$$

其中 $\epsilon \in \{-1, 1\}$。于是 $\mathbb{J}_J$, $\mathbb{J}_P$, $\mathbb{J}_\alpha$, $\mathbb{J}_g$ 都是广义几乎结构，并且满足

$$\begin{aligned} -\mathbb{J}_J{}^2 = \mathbb{J}_P{}^2 &= \mathrm{Id}_{\mathbb{T}M} , & -\mathbb{J}_J^\bullet \eta = \mathbb{J}_P^\bullet \eta &= \epsilon \eta , \\ \mathbb{J}_\alpha{}^2 = \mathbb{J}_g{}^2 &= \epsilon\, \mathrm{Id}_{\mathbb{T}M} , & -\mathbb{J}_\alpha^\bullet \eta = \mathbb{J}_g^\bullet \eta &= \epsilon \eta . \end{aligned} \tag{16}$$

这些结构的型如下表所示。

$\mathrm{sgn}\ \epsilon$	$\mathbb{J}_J$	$\mathbb{J}_P$	$\mathbb{J}_\alpha$	$\mathbb{J}_g$
$+$	GaAC	GaP	GaPC	GaP
$-$	GaC	GaPC	GaC	GaAC

表 2：广义几乎结构的型取决于 $\mathrm{sgn}\,\epsilon$。

证明。 由于 $-J^2 = P^2 = \mathrm{Id}_{T\mathcal{M}}$ 且 $J^{*2} = J^{2*}$，不难看出 $-\mathbb{J}_J{}^2 = \mathbb{J}_P{}^2 =$ 恒等映射$_{\mathbb{T}\mathcal{M}}$。现在回顾式 (9)，其意味着

$$g_\# \pi_g^\# = \mathrm{Id}_{T^*\mathcal{M}} = \alpha_\# \pi_\alpha^\# , \tag{17}$$

$$\pi_g^\# g_\# = \mathrm{Id}_{T\mathcal{M}} = \pi_\alpha^\# \alpha_\# . \tag{18}$$

这意味着 $\mathbb{J}_\alpha{}^2 = \mathbb{J}_g{}^2 = \epsilon$ 恒等映射$_{\mathbb{T}M}$。接下来考察 $\mathbb{J}_J$ 与 η 的相容性。由式 (13) 可得

$$\mathbb{J}_J^\bullet \eta\left((X,\xi),(Y,\zeta)\right) = \epsilon\left(J^*\xi(JY) + J^*\zeta(JX)\right) .$$

根据对偶映射的定义，我们得到

$$\mathbb{J}_J^\bullet \eta\left((X,\xi),(Y,\zeta)\right) = \epsilon\left(\xi(A^2Y) + \zeta(A^2X)\right) = -\epsilon\eta\left((X,\xi),(Y,\zeta)\right) .$$

$\mathbb{J}_P$ 的计算完全类似，唯一的区别来自 $P^2 = -J^2$，结果为 $\mathbb{J}_P^\bullet\eta = \epsilon\eta$。$\mathbb{J}_\alpha$（以及 $\mathbb{J}_g$）的计算略有不同。我们有

$$(\mathbb{J}_\alpha)^\bullet\eta\left((X,\xi),(Y,\zeta)\right) = \frac{\epsilon}{2}\left(\alpha_\#X(\pi_\alpha^\#\zeta) + \alpha_\#Y(\pi_\alpha^\#\xi)\right) .$$

由于 $\alpha_\#X = \alpha(X, -)$，且鉴于 α 的反对称性，

$$\begin{aligned}\frac{\epsilon}{2}\left(\alpha_\#X(\pi_\alpha^\#\zeta) + \alpha_\#Y(\pi_\alpha^\#\xi)\right) &= \frac{\epsilon}{2}\left(\alpha(X,\pi_\alpha^\#\zeta) + \alpha(Y,\pi_\alpha^\#\xi)\right)\\ &= \frac{-\epsilon}{2}\left((\alpha_\#\pi^\#\zeta)X + (\alpha_\#\pi_\alpha^\#\xi)Y\right) .\end{aligned}$$

再次利用关系式 (17)，我们得到

$$(\mathbb{J}_\alpha)^\bullet\eta\left((X,\xi),(Y,\zeta)\right) = -\epsilon\eta\left((X,\xi),(Y,\zeta)\right) .$$

$\mathbb{J}_g$ 的计算与 $\mathbb{J}_\alpha$ 的情形仅在 g 的对称性上有所不同。因此 $-\mathbb{J}_J^\bullet\eta = \mathbb{J}_P^\bullet\eta = \epsilon\eta$，且 $-\mathbb{J}_\alpha^\bullet\eta = \mathbb{J}_g^\bullet\eta = \epsilon\eta$。表 2 根据定义3.1总结了由此得到的结构类型。 □

例3.2。设 g 是一个非退化对称双线性形式。考虑 $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & \pi_g^\# \\ g_\# & 0 \end{pmatrix}$. 则 $\mathbb{A}$ 满足 $\mathbb{A} = -$恒等映射$_{\mathbb{T}\mathcal{M}}$ 且 $\mathbb{A}^\bullet\eta = \eta$，因此 $\mathbb{A}$ 是一个广义近似乘积结构。$\mathbb{A}$ 的 ±1-特征丛为

$$E_\pm = \{(X, \pm g_\#X) | X \in \Gamma(T\mathcal{M})\} .$$

事实上，对于 $x_+ = (X, g_\#X) \in E_+$，以及 $y_- = (Y, -g_\#Y) \in E_-$，有 $\mathbb{A}x_+ = (X, g_\#X) = x_+$，以及 $\mathbb{A}y = (-Y, g_\#Y) = -y_-$。现在假设 $x_+, y_+ \in E_+$。那么

$$\eta(x_+, y_+) = \frac{1}{2}\left((g_\#X)Y + (g_\#Y)X\right) = g(X,Y) .$$

显然，存在 $X, Y \in \Gamma(T\mathbb{M})$，使得 $g(X,Y) \neq 0$，因此 E_+ 并非全各向同性，故 $\mathbb{A}$ 是一种非各向同性结构。

坐标描述。由于 $(\Omega^\#(\partial_i))(\partial_j) = \Omega(\partial_i, \partial_j)$，我们有

$$\underline{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} .$$

同理，对于 $\pi^{\#}$ Ω的矩阵，我们有

$$\underline{\pi_{\Omega}}^{\#} = \underline{\Omega}^{-1} \ .$$

对于任意非退化 2-形式 α，同样成立。因此，我们将 $\alpha_{\#}$ 和 $\pi_{\alpha}^{\#}$ 的矩阵分别简记为 $\underline{\alpha}$ 和 $\underline{\alpha}^{-1}$。对于对称的非退化 2-张量 g，情况也没有变化。最后，我们回顾一下，对于自同态 A， A的矩阵与 A^* 的矩阵互为转置 $\underline{A}^* = \underline{A}^T$。因此，引理 3.1 中描述的广义几乎结构（它们是后续构造的基本组成部分）在典范坐标下写作

$$\mathbb{J}_J = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & \epsilon J^T \end{pmatrix} \ , \qquad \mathbb{J}_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \underline{\alpha}^{-1} \\ \epsilon\underline{\alpha} & 0 \end{pmatrix} \ ,$$
$$\mathbb{J}_P = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & \epsilon P^T \end{pmatrix} \ , \qquad \mathbb{J}_g = \begin{pmatrix} 0 & \underline{g}^{-1} \\ \epsilon\underline{g} & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

Courant 括号。截面空间 $\Gamma(\mathrm{TM}) = \Gamma(T\mathrm{M}) \oplus \Gamma(T^*\mathrm{M})$ 配备了反对称的 *Courant* 括号 $[-,-]_C$ [6]

$$[(X,\xi),(Y,\zeta)]_C := \Big([X,Y], \mathcal{L}_X\zeta - \mathcal{L}_Y\xi - \frac{1}{2}\,\mathrm{d}(X \lrcorner\, \zeta - Y \lrcorner\, \xi)\Big) \ , \qquad (19)$$

其中 $[X,Y]$ 是李括号，L 是李导数。请注意，Courant 括号是向量场李括号的一种扩展，但不满足雅可比恒等式。对于我们的讨论而言，更重要的是，Courant 括号可用于定义 TM 上各向同性 结构的可积性。

3.1.1 各向同性、狄拉克结构与可积性

每个广义几乎结构都伴随着相应的子丛 E_+， E_-；如果 $\mathbb{J}^2 =$ 恒等映射$_{\mathbb{T}\mathcal{M}}$，它们是 ± 1-特征丛；如果 $\mathbb{J}^2 = -$恒等映射$_{\mathbb{T}\mathcal{M}}$，则是 $\pm i$- 特征丛。

定义 3.2. 若子丛 $E \subset$TM 关于内积 η 满足：对所有 x， $y \in E$，都有 $\eta(x,\ y) = 0$，则称其为全各向同性。若全各向同性 E 的秩为 $E =$rank TM，则称其为 M 上的几乎狄拉克结构。若几乎狄拉克结构 E 满足 $[E,E]_C \subset E$，则称其为 M 上的狄拉克结构。

注 3.1. M 上的狄拉克结构也可以等价地定义为 TM 中一个极大秩的全各向同性子丛 $E \subset$ ，且该子丛关于 Courant 括号封闭。

根据定义3.1确定的四种可能的广义几乎结构，可根据特征丛$E_{\pm}$ 是否为近似狄拉克结构分为两类。

定义3.3。 设 J 是一个广义几乎结构。若其特征丛$E_{\pm}$ 是近似狄拉克结构，则称 J 为各向同性 （相对于η）。否则，称 J 为非各向同性。

近似狄拉克结构的对合条件 $E_{\pm}$ 只有在 J 各向同性时才能作为可积性的定义（见下文注释3.2）。

定义3.4。 若各向同性广义几乎结构 J ∈ End(TM) 满足相应的特征丛 E_{+}，E_{-} 为狄拉克结构，则称 J可积 。可积的广义几乎结构称为广义结构。

设 J $\in$ End(TM) 是一个各向同性广义几乎结构。则对所有 x， $y \in \Gamma$(TM)，J 的挠率定义为

$$N_{\mathbb{J}}(x,y) := [\mathbb{J}x, \mathbb{J}y]_C + \mathbb{J}^2[x,y]_C - \mathbb{J}\left([\mathbb{J}x,y]_C + [x,\mathbb{J}y]_C\right) . \qquad (20)$$

这个（1，2）型张量 $N_{\mathbb{J}}$: Γ(TM) $\otimes$ Γ(TM) $\to$ Γ(TM) 称为（广义）*Nijenhuis* 张量。各向同性的 A 可积，当且仅当相应的 Nijenhuis 张量消失: $N_{\mathbb{A}}(x,\ y) = 0$ 对所有 x， $y \in \Gamma$(TM) [7]均成立。

注3.2。 如果广义几乎结构 J 是非各向同性的，那么特征丛 $E_{\pm}$ 并非全各向同性（见例子3.2），且 Courant 括号在其上没有良好定义。因此，非各向同性结构的挠率（20）并未良好定义为张量。因此，通常通过 Nijenhuis 张量消失条件或定义3.4给出的可积性概念，不能应用于非各向同性结构。

注 3.3。 作者 [13] 研究了弱可积性这一概念，他们将其定义为由一个不定广义度量 G 和任意广义结构 J 组成的交换对。弱可积性的概念同样可以应用于非各向同性结构，但要求存在一个

与广义度量 G [10, 13]相关联的广义 *Bismut*联络[1] $\mathfrak{D}$ 。根据定义，弱可积性条件是$\mathfrak{D}\mathrm{J}=0$ [13]。对于广义 K¨ahler 结构和广义 para-K¨ahler 结构，[10] 针对广义 K¨ahler 结构情形所引入的可积性条件（并在 [13]中扩展到广义 para-K¨ahler 结构的情形）蕴含弱可积性 [13]。

3.2 广义几何与 M-Atheory

回顾一下，B 是二维的，Ω 表示 T^*B 上的典范辛形式。

命题 3.2。 设 $(\Omega\ \alpha)\ \in\Omega^2\left(T^*\mathcal{B}\right)\times\Omega^2\left(T^*\mathcal{B}\right)$ 是一个非退化的 *Monge-Amp`ere* 结构， $\rho\in\mathrm{End}\left(TT^*\mathcal{B}\right)$ 是由 (10) 定义的相应自同态。则

$$\mathbb{J}_\rho=\begin{pmatrix}\rho & 0\\ 0 & \epsilon_1\rho^*\ ,\end{pmatrix}\qquad \mathbb{J}_\alpha=\begin{pmatrix}0 & \pi_\alpha^{\#}\\ \epsilon_2\alpha_{\#} & 0\end{pmatrix}\ ,\qquad \mathbb{J}_\Omega=\begin{pmatrix}0 & \pi_\Omega^{\#}\\ \epsilon_3\Omega_{\#} & 0\end{pmatrix}\ , \tag{21}$$

是广义几乎结构。

1. 如果 *M-A* 结构是椭圆型的，$\mathrm{Pf}(\alpha)\ >0$，则 $\mathbb{J}\rho$ 对于 $\epsilon_1=1$ 是 *GaPC* 结构，对于 $\epsilon_1=-1$ 是 *GaC* 结构。*2.* 如果 *M-A* 结构是双曲型的，$\mathrm{Pf}(\alpha)<0$，则 $\mathbb{J}\rho$ 对于 $\epsilon_1=1$ 是 *GaP* 结构，对于 $\epsilon_1=-1$ 是 *GaPC* 结构。*3.* $\mathbb{J}_\alpha$、$\mathbb{J}_\Omega$ 的类型与 $\mathrm{sgn}(\mathrm{Pf}(\alpha))$ 无关。类型分别由 ϵ_1 和 ϵ_2 的值决定，汇总于表 *2* 中。这两个结构从不重合，$\mathbb{J}_\alpha\neq\mathbb{J}_\Omega$。

证明。首先注意，M-A 结构的非退化性假设保证了可以考虑 J_ρ 和 J_α 。这一点可以从

$$\det\underline{\alpha}=\mathrm{Pf}(\alpha)^2\ , \tag{22}$$

并回顾一下，非退化意味着 Pf(α) 处处不为零 .

[1]与广义度量相关的广义 Bismut联络是一种使广义度量 [10] 平行的 Courant 代数丛联络。针对不定广义度量的推广见 [13]。

为求完整，我们继续证明：如果 Pf(α) > 0，则 ρ 是近复结构；如果 Pf(α) < 0，则 ρ 是近乘积结构。方程（10）写作 $\underline{\alpha} = \sqrt{|\,\mathrm{Pf}(\alpha)|}\underline{\rho}^T\underline{\Omega}$，这意味着 $\underline{\rho} = \frac{1}{\sqrt{|\,\mathrm{Pf}(\alpha)|}}(\underline{\alpha}\underline{\Omega}^{-1})^T$。由于 Ω $\underline{\alpha}$是反对称矩阵，且 $\Omega^{-1} = -\Omega$，因此我们得到 $\underline{\rho}^2 = \frac{1}{|\,\mathrm{Pf}(\alpha)|}(\underline{\Omega}\underline{\alpha})^2$。因为

$$\underline{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \underline{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & E & B & C \\ -E & 0 & -A & -B \\ -B & A & 0 & D \\ -C & B & -D & 0 \end{pmatrix}, \tag{23}$$

我们有 $(\underline{\Omega}\underline{\alpha})^2 = (B^2 - AC + DE)\mathbb{1}$。利用 Pfaffian 的坐标表达式，Pf($\alpha$) $= -B^2 + AC - DE$，可得 $\underline{\rho}^2 = -\mathrm{sgn}\,\mathrm{Pf}(\alpha)\mathbb{1}$。因此，对于 Pf < 0，有 $\underline{\rho}^2 = \mathbb{1}$，这对应于双曲型 M-A 结构；而对于 Pf > 0，有 $\underline{\rho}^2 = -\mathbb{1}$，这定义了椭圆型 M-A 结构。由于 M-A 结构 (Ω α) 的非退化性，这两种情况是 $\underline{\rho}^2$ 的唯一可能结果。现在，设 $T \in$ Gl(4,R) 为一个变换（作用于 M 中某点上方的 TM 的一个纤维），它将由典范坐标˜诱导的基 b 映射为另一个基 b。那么， ρ 关于 $\tilde{b}$ 基的矩阵满足 $\underline{\tilde{\rho}} = T\underline{\rho}T^{-1}$，这意味着 $\underline{\tilde{\rho}}^{\,2} = T\underline{\rho}^2T^{-1} = \pm\mathbb{1}$。因此，$\rho^2 = \pm$ 恒等映射$_{TM}$。

J$^\rho$ 是 $\epsilon_1 = 1$ 的广义 almost product 结构，也是 $\epsilon_1 = -1$ 的 GaPC 结构，这一点现在可由命题 3.1 得出。类似地，广义 almost 结构 J$_\alpha$ 和 J$_\Omega$ 的类型由表 2 给出。这一事实与 Pf(α) 无关，这一点可由上述命题的证明以及假设 Pf(α) $\neq 0$ 得出，该假设保证了 α 是非退化的，因此满足该命题的假设。事实上，如果 Pf(α) $\neq 0$，那么由 (22) 可知 $\alpha_\#$ 是可逆的，因此 α 是非退化的。

最后，定义 2.1 要求 $\alpha \wedge \Omega = 0$。辛形式 Ω 的非退化性意味着 α 不能写成两个形式$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$之和，其中一个加项与 Ω 共线。因此，这些结构始终满足 J$_\alpha \neq$J$_\Omega$。

□

注 3.4. 关于 ρ 在 T^*B 上构成近复结构（如果 Pf(α) > 0）或近乘积结构（如果 Pf(α) < 0）的无坐标证明，可参见 [15]。

3.3 广义几何的二次曲面

考虑一个配备了三个几乎复结构I、 J、 K并满足 $IJ + JI = 0$ 和 $K = IJ$ 的光滑流形。这样的流形称为近四元复流形。在超复流形上，存在一个由几乎复结构构成的二维球面 $\{a_1 I + a_2 J + a_3 K | \sum_{i=1}^{3} {a_i}^2 = 1\}$。这是因为， I、 J、 K之间的上述关系意味着三元组 $\{I$、 $J\} = \{J$、 $K\} = \{I$、 $K\} = 0$具有反交换性。我们将看到，当考虑由与二维非退化 M-A 结构相关的张量构造的、两两反交换的三元组广义几何时，会出现类似但丰富得多的情形。

命题 3.3. 设$(\Omega\ \alpha) \in \Omega^2(T^*\mathcal{B}) \times \Omega^2(T^*\mathcal{B})$ 是一个非退化的蒙日-安培结构，$\rho \in \mathrm{End}(TT^*\mathcal{B})$ 是由(10)定义的相应自同态。那么由(21) 给出的广义几乎结构$\mathbb{J}_\rho$,$\mathbb{J}_\alpha$,$\mathbb{J}_\Omega$ 两两反对易，当且仅当 $\epsilon_1 = -1$ 和

$$\epsilon_3 \pi_\alpha^\# \Omega_\# + \epsilon_2 \pi_\Omega^\# \alpha_\# = 0\ . \tag{24}$$

在典范坐标中，条件 (24) 等价于

$$B^2 - AC + DE = -\epsilon_2 \epsilon_3\ , \tag{25}$$

其中， A、 B、 C、 D、 $E \in C^\infty(T^*\mathcal{B})$ 是 α 在典范基底中的系数。 *is.*

注记 3.5. 在命题 3.2 的证明中，我们已证明 $\mathrm{Pf}(\alpha) = -B^2 + AC - DE$。因此，条件 (25) 可表示为 $\mathrm{Pf}(\alpha) = \epsilon_2 \epsilon_3$。

证明。 这些反对易子是

$$\{\mathbb{J}_\rho, \mathbb{J}_\alpha\} = \begin{pmatrix} 0 & \rho\pi_\alpha^\# + \epsilon_1 \pi_\alpha^\# \rho^* \\ \epsilon_1\epsilon_2 \rho^* \alpha_\# + \epsilon_2 \alpha_\# \rho & 0 \end{pmatrix}\ ,$$
$$\{\mathbb{J}_\rho, \mathbb{J}_\Omega\} = \begin{pmatrix} 0 & \rho\pi_\Omega^\# + \epsilon_1 \pi_\Omega^\# \rho^* \\ \epsilon_1\epsilon_3 \rho^* \Omega_\# + \epsilon_3 \Omega_\# \rho & 0 \end{pmatrix}\ ,$$
$$\{\mathbb{J}_\alpha, \mathbb{J}_\Omega\} = \begin{pmatrix} \epsilon_3 \pi_\alpha^\# \Omega_\# + \epsilon_2 \pi_\Omega^\# \alpha_\# & 0 \\ 0 & \epsilon_2 \alpha_\# \pi_\Omega^\# + \epsilon_3 \Omega_\# \pi_\alpha^\# \end{pmatrix}\ .$$

条件 $\{\mathrm{J}_\rho, \mathrm{J}_\alpha\} = 0$ 要求 $\rho\pi_\alpha^\# + \epsilon_1 \pi_\alpha^\# \rho^* = 0$。将此方程分别从右侧和左侧乘以 $\alpha_\#$ （即前复合和复合），我们得到 $\alpha_\# \rho + \epsilon_1 \rho^* \alpha_\# = 0$。对偶方程为 $\rho^* \alpha_\#^* + \epsilon_1 \alpha_\#^* \rho = 0$,

根据 α 的反对称性，这与 $\epsilon_1\epsilon_2\rho^*\alpha_\# + \epsilon_2\alpha_\#\rho = 0$ 等价。类似地

$$\rho\pi_\Omega^\# + \epsilon_1\pi_\Omega^\#\rho^* = 0 \iff \epsilon_1\rho^*\Omega_\# + \Omega_\#\rho = 0 \ .$$

因此，前两个反对易子为零，当且仅当

$$\begin{aligned} \epsilon_1\rho^*\alpha_\# + \alpha_\#\rho = 0 \ , \\ \epsilon_1\rho^*\Omega_\# + \Omega_\#\rho = 0 \ . \end{aligned} \tag{26}$$

采用典范坐标，系统 (26) 可写为

$$\begin{aligned} \frac{-1}{\sqrt{|\operatorname{Pf}(\alpha)|}}\underline{\alpha\Omega}\,(\epsilon_1\underline{\alpha} + \underline{\alpha}) = 0 \ , \\ \frac{-1}{\sqrt{|\operatorname{Pf}(\alpha)|}}\underline{\Omega}^2\,(\epsilon_1\underline{\alpha} + \underline{\alpha}) = 0 \ . \end{aligned}$$

由于 M-A 结构 (Ω α) 非退化，上述方程成立，当且仅当 $\epsilon_1 = -1$。剩余条件 $\{\mathsf{J}_\alpha,\mathsf{J}_\Omega\} = 0$ 由方程 (24) 给出，因为

$$\epsilon_3\pi_\alpha^\#\Omega_\# + \epsilon_2\pi_\Omega^\#\alpha_\# = 0 \iff \epsilon_3\pi_\alpha^\#\Omega_\# + \epsilon_2\pi_\Omega^\#\alpha_\# = 0 \ .$$

这可由 (9) 直接推出。用矩阵记法，(24) 等价于

$$(\underline{\alpha\Omega})^2 = -\epsilon_2\epsilon_3\mathbb{1} \ .$$

回顾 (23)，我们可以将 $\underline{\alpha}$ 和 Ω 写成分块形式

$$\underline{\alpha} = \begin{pmatrix} P & Q \\ -Q^T & R \end{pmatrix} \qquad\qquad \underline{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \ , \tag{27}$$

其中 $P^T = -P$ 和 $R^T = -R$。方程 (27) 可写为

$$\begin{pmatrix} Q^2 - PR & -QP - PQ^T \\ RQ + Q^TR & -RP + (Q^T)^2 \end{pmatrix} = -\epsilon_2\epsilon_3\mathbb{1} \ .$$

条件 $-QP - PQ^T = RQ + Q^TR = 0$ 自动满足，因为

$$P = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad Q = \begin{pmatrix} B & C \\ -A & -B \end{pmatrix} \ , \qquad R = \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

其中 A, B, C, D, E是 $\underline{\alpha}$的各项，即 α 在典范基下的系数。我们还注意到，

$$Q^2 - PR = -\epsilon_2\epsilon_3\mathbb{1} \iff -RP + (Q^T)^2 = -\epsilon_2\epsilon_3\mathbb{1} \ ,$$

这归因于 A和 C的反对称性，以及 B^2 为对角的。最后

$$Q^2 - PR = \begin{pmatrix} B^2 - AC + DE & 0 \\ 0 & B^2 - AC + DE \end{pmatrix} = -\epsilon_2\epsilon_3\mathbb{1} \ .$$

证明至此完成。 □

例3.3。 设(Ω α)是一个非退化 M-A 结构。我们将寻找满足条件(24)，并与典范辛形式交换的2-形式 α，其意义为[$\underline{\alpha}$,Ω] = 0，其中矩阵由Ω的典范基给出。此处的交换条件相当任意，但若要构造超（拟）复结构，或研究 $T \oplus T^*$上的广义K¨ahler结构的变化，它就更有意义。为了得到满足(24)的更具体解族，我们进一步选取 $\epsilon_2 = -\epsilon_3$。此时条件(24)变为$\underline{\alpha}^T = \underline{\alpha}^{-1}$。因此，我们寻找与Ω交换的正交群O(4)中的反对称元素。若取 $Q \in$ O(2)，则 $\underline{\alpha} := \begin{pmatrix} 0 & Q \\ -Q^T & 0 \end{pmatrix}$ 满足$\underline{\alpha}^T = -\underline{\alpha} = \underline{\alpha}^{-1}$。与Ω交换进而要求det $Q = -1$，这相当于 $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -\overline{a} \end{pmatrix}$，其中 $a, b \in$ R满足 $a^2 + b^2 = 1$。将其与(23)中描述的 $\underline{\alpha}$ 的一般形式比较，可得

$$\underline{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & B & -A \\ 0 & 0 & -A & -B \\ -B & A & 0 & 0 \\ A & B & 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

因此， α 的系数必须满足 $A = -C$、 $D = E = 0$，且 Pf(α) $= -A^2 - B^2 = -1$。这与 (25) 一致。由 (3) 从 (Ω α) 确定的相应 Monge-Amp`ere 方程为

$$Af_{xx} + 2(1 - A^2)f_{xy} - Af_{yy} = 0 \ ,$$

其中 $A \in C^\infty(B)$。例如，若选择 $|A| = 1$，则得到波动方程 $f_{xx} = f_{yy}$。

在上述例子中，我们描述了一族非退化 M-A 结构（由满足 $A^2+B^2=1$ 的光滑函数 A,B 参数化）。根据命题 3.3，它们确定了相应的一族反交换对 $\mathsf{J}_\alpha,\mathsf{J}_\Omega$，对于 $(\epsilon_2,\epsilon_3)=(1,-1)$，该对由 GaPC 结构和 GaC 结构组成（或者，对于 $(\epsilon_2,\epsilon_3)=(-1,1)$，由 GaC 结构和 GaPC 结构组成）。选择 $\epsilon_1=-1$ 可将这一对 $\mathsf{J}_\alpha,\mathsf{J}_\Omega$ 扩展为一个两两反交换的广义几乎结构三元组，其中第三个结构是 GaPC 结构 J_ρ（因为 $\mathrm{Pf}(\alpha)<0$ ——参见命题 3.2）。接下来，我们将展示两两反交换的三元组如何产生由广义几乎结构构成的某些二次曲面。

命题 3.4. 设 $(\Omega\ \alpha)\in\Omega^2(T^*\mathcal{B})\times\Omega^2(T^*\mathcal{B})$ 为一个非退化 *M-A* 结构，并设 $\rho\in\mathrm{End}(TT^*\mathcal{B})$ 由 (10) 给出。若 (24) 成立，则

$$\mathbb{A}:=\begin{pmatrix} a_1\rho & a_2\pi_\alpha^\# + a_3\pi_\Omega^\# \\ a_2\epsilon_2\alpha_\# + a_3\epsilon_3\Omega_\# & -a_1\rho^* \end{pmatrix}\ , \tag{28}$$

其中 $a_i\in\mathbb{R}\ \ \forall i$ 是一个广义几乎结构，当且仅当

$$k:=-\operatorname{sgn}\mathrm{Pf}(\alpha){a_1}^2+{a_2}^2\epsilon_2+{a_3}^2\epsilon_3 \tag{29}$$

满足 $|k|=1$。

1. 如果$(\Omega\ \alpha)$ 是椭圆型的，那么$\mathcal{A}:=\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\mathbb{J}_\rho,\mathbb{J}_\alpha,\mathbb{J}_\Omega\}$中存在以下广义几乎结构的二次曲面：

> ***(a)*** 对于 $k=1$，在 $\mathcal{A}$ 中存在两个由 *GaPC* 结构构成的单叶双曲面、一个由 *GaPC* 结构构成的双叶双曲面，以及一个由 *GaPC* 结构构成的二维球面；***(b)*** 对于 $k=-1$，在 $\mathcal{A}$ 中存在两个由 *GaC* 结构构成的双叶双曲面和一个由 *GaC* 结构构成的单叶双曲面。

2. 如果 $(\Omega\ \alpha)$ 是双曲型，那么

> ***(a)*** 对于 $k=1$，在$\mathcal{A}$中有两个2叶双曲面和一个1叶 *GaPC* 结构；
> ***(b)*** 对于 $k=-1$，在$\mathcal{A}$中有两个1叶双曲面、一个2叶双曲面，以及一个2球面的广义几乎复结构。

在转向命题 3.4 的证明之前，我们还想强调，陈述 1. 和 2. 是彼此独立的情形，不应

将它们混为一谈，例如，在寻找与 (Ω α) 相关的广义 K¨ahler 结构时。这是因为给定的非退化 M-A 结构的 sgn Pf(α) 只有一个取值，从而区分了椭圆情形与双曲情形。

证明。我们有 A $= a_1\mathbf{J}_\rho + a_2\mathbf{J}_\alpha + a_3\mathbf{J}_\Omega$，其中 $\mathbf{J}_\rho$，$\mathbf{J}_\alpha$，$\mathbf{J}_\Omega$ 由 (21) 给出，其中 $\epsilon_1 = -1$。则 $\mathbf{A}^\bullet\eta = a_1{}^2\mathbf{J}_\rho^\bullet\eta + a_2{}^2\mathbf{J}_\alpha^\bullet\eta + a_3{}^2\mathbf{J}_\Omega^\bullet\eta$ 且

$$\begin{aligned}\mathbb{A}^2 = {} & a_1{}^2\mathbb{J}_\rho{}^2 + a_2{}^2\mathbb{J}_\alpha{}^2 + a_3{}^2\mathbb{J}_\Omega{}^2 \\ & + a_1a_2\{\mathbb{J}_\rho, \mathbb{J}_\alpha\} + a_1a_3\{\mathbb{J}_\rho, \mathbb{J}_\Omega\} + a_2a_3\{\mathbb{J}_\alpha, \mathbb{J}_\Omega\} \ .\end{aligned} \tag{30}$$

根据命题 3.3，我们的假设给出 $\{\mathbf{J}_\rho,\mathbf{J}_\alpha\} = \{\mathbf{J}_\rho,\mathbf{J}_\Omega\} = \{\mathbf{J}_\alpha,\mathbf{J}_\Omega\} = 0$。因此，利用关系式 (16)，我们得到

$$\mathbb{A}^2 = a_1{}^2\mathbb{J}_\rho{}^2 + a_2{}^2\mathbb{J}_\alpha{}^2 + a_3{}^2\mathbb{J}_\Omega{}^2 \ , \quad \mathbb{A}^\bullet\eta = a_1{}^2\mathbb{J}_\rho^\bullet\eta - \left(a_2{}^2\epsilon_2 + a_3{}^2\epsilon_3\right)\eta \ .$$

根据命题 3.1 和命题 3.2，广义近似结构 $\mathbf{J}_\rho$ 的型取决于 M-A 结构 (Ω α) 的 Pfaffian，如下所示

$$\mathbb{J}_\rho{}^2 = \begin{cases} \mathrm{Id}_{\mathbb{TB}} \ \text{ for } \ \mathrm{Pf}(\alpha) < 0 \\ -\mathrm{Id}_{\mathbb{TB}} \ \text{ for } \ \mathrm{Pf}(\alpha) > 0 \end{cases} \qquad \mathbb{J}_\rho^\bullet\eta = \begin{cases} -\eta \ \text{for } \ \mathrm{Pf}(\alpha) < 0 \\ \ \eta \ \text{for } \ \mathrm{Pf}(\alpha) > 0 \end{cases}$$

其中，sgn Pf(α) :=~~Pf(α)~~/|Pf(α)|（由于我们假设 M-A 结构是非退化的，因此该表达式定义良好，Pf(α) $\neq 0$）。因此，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{A}^2 &= \left(-\operatorname{sgn}\mathrm{Pf}(\alpha)a_1{}^2 + a_2{}^2\epsilon_2 + a_3{}^2\epsilon_3\right)\mathrm{Id}_{\mathbb{TB}} \ , \\ \mathbb{A}^\bullet\eta &= \left(-\operatorname{sgn}\mathrm{Pf}(\alpha)a_1{}^2 + a_2{}^2\epsilon_2 + a_3{}^2\epsilon_3\right)(-\eta) \ ,\end{aligned} \tag{31}$$

由此立即可得，A 是广义几乎结构当且仅当 $|k| = 1$。下面证明陈述 1 和 2。

1. Pf(α) > 0: 椭圆型 *M-A* 结构。 (a) 对于 $k = 1$，由 (31) 可知 $\mathbb{A}^2 =$ 恒等映射$_{\mathbb{TB}}$ 且 $\mathbb{A}^\bullet\eta = -\eta$，即 A 是一种 GaPC 结构。此外，Pfaffian 为正意味着 A 的系数必须满足 $-a_1{}^2 + a_2{}^2\epsilon_2 + a_3{}^2\epsilon_3 = 1$。根据 ϵ_2 和 ϵ_3 的值，这会得到两个单叶双曲面、一个双叶双曲面和一个 2-球面，汇总于表3。(b) 若 $k = -1$，则 $\mathbb{A}^2 = -$恒等映射$_{\mathbb{TB}}$ 且 $\mathbb{A}^\bullet\eta = \eta$，这意味着 A 是一种 GaC结构，并且系数 a_i 必须满足 $-a_1{}^2 + a_2{}^2\epsilon_2 + a_3{}^2\epsilon_3 = -1$。这意味着存在表4所述的二次曲面。

sgn(ϵ_2, ϵ_3)	关于 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ 的条件	GaPC 的二次曲面 结构
$(+,\ +)$	${a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2 = 1$	单叶双曲面
$(+,\ -)$	${a_1}^2 + {a_2}^2 - {a_3}^2 = 1$	双叶双曲面
$(-,\ +)$	$-{a_1}^2 - {a_2}^2 + {a_3}^2 = 1$	双叶双曲面
$(-,\ -)$	$-{a_1}^2 - {a_2}^2 - {a_3}^2 = 1$	$\emptyset$

表3：Pf$(\alpha) > 0$ 的 GaPC 结构的二次曲面。

sgn(ϵ_2, ϵ_3)	关于 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ 的条件	GaC 的二次曲面 结构
$(+,\ +)$	${a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2 = -1$	双叶双曲面
$(+, -)$	${a_1}^2 + {a_2}^2 - {a_3}^2 = -1$	单叶双曲面
$(-,\ +)$	$-{a_1}^2 - {a_2}^2 + {a_3}^2 = -1$	单叶双曲面
$(-,\ -)$	$-{a_1}^2 - {a_2}^2 - {a_3}^2 = -1$	二维球面

表4：Pf$(\alpha) > 0$的GaC结构二次曲面。

2. Pf$(\alpha) < 0$：双曲型 *M-A* 结构。这种情况与椭圆情形非常相似。我们再次得到以下两种结果之一：(a) 对于 $k = 1$，得到 GaPC 结构；或者 (b) 对于 $k = -1$，得到 GaC结构。主要区别在于，由此得到的 GaPC/GaC 结构不同于椭圆情形中得到的结构。这仅仅是因为根据定义，对于非退化 M-A 结构，sgn Pf(α) 为常数。因此，双曲型与椭圆情形之间的区别发生在 M-A 结构这一层面，而对应于不同配对 $(\Omega\ \alpha)$ 的 GaPC/GaC 结构也存在预期的差异。由双曲型 M-A 结构导出的广义几乎结构的二次曲面，对于 $k = {a_1}^2 + {a_2}^2\epsilon_2 + {a_3}^2\epsilon_3 = 1$，见表 5；对于 $k = {a_1}^2 + {a_2}^2\epsilon_2 + {a_3}^2\epsilon_3 = -1$，见表 6。

□

此时，一个自然的问题是，命题 3.4 描述的广义几乎结构中是否有任何结构彼此重合。在下面的命题中，我们将证明，无论是同一个二次曲面上的不同点所参数化的结构，还是两个不同二次曲面上的点所参数化的结构，都不会彼此重合。

sgn(ϵ_2, ϵ_3)	关于（a_1, a_2, a_3）的条件	GaPC 结构的二次曲面 结构
(+, +)	${a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2 = 1$	二维球面
(+, −)	${a_1}^2 + {a_2}^2 - {a_3}^2 = 1$	单叶双曲面
(−, +)	${a_1}^2 - {a_2}^2 + {a_3}^2 = 1$	单叶双曲面
(−, −)	${a_1}^2 - {a_2}^2 - {a_3}^2 = 1$	双叶双曲面

表 5：Pf(α) < 0 的 GaPC 结构的二次曲面。

sgn(ϵ_2, ϵ_3)	关于 (a_1, a_2, a_3) 的条件	GaC 结构的二次曲面 结构
(+, +)	${a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2 = -1$	$\emptyset$
(+, −)	${a_1}^2 + {a_2}^2 - {a_3}^2 = -1$	双叶双曲面
(−, +)	${a_1}^2 - {a_2}^2 + {a_3}^2 = -1$	双叶双曲面
(−, −)	${a_1}^2 - {a_2}^2 - {a_3}^2 = -1$	单叶双曲面

表 6：Pf(α) < 0对应的 GaC结构的二次曲面。

命题 3.5。 从命题 *3.4* 的陈述 *1.*（如果 $\mathrm{Pf}(\alpha) > 0$）或陈述 *2.*（如果 $\mathrm{Pf}(\alpha) < 0$）中所描述的二次曲面上任意选取的两个不同点，分别表示两个不同的广义几乎结构。

证明。 设 A,B 由 (28) 给出。结构之间的差异可能来自系数 (a_i),(b_i) 的选择以及 epsilons 的取值 $\epsilon_i^{\mathbb{A}}, \epsilon_i^{\mathbb{B}}$。系数 ($a_i$),($b_i$) 决定相应的 $k_{\mathbb{A}}, k_{\mathbb{B}}$，其定义见 (29)。注意，A 和 B 都由单个 M-A 结构 (Ω α) 构造，因此 Pfaffian 固定，故 sgn Pf(α) 为常数。这意味着始终只会有一个 ρ ，且命题 3.4 的陈述 1. 和 2. 中只有一个适用于给定的非退化 M-A 结构。

情形 *1.* 设 $k_{\mathbb{A}} = k_{\mathbb{B}}$ 和 $\epsilon_i^{\mathbb{A}} = \epsilon_i^{\mathbb{B}}$ 对于 $i = 2,3$ 成立。则 A 和 B 是由相同广义几乎结构构成的 R-线性组合，即 A $= a_1\mathbf{J}_\rho + a_2\mathbf{J}_\alpha + a_3\mathbf{J}_\Omega$ ，B $= b_1\mathbf{J}_\rho + b_2\mathbf{J}_\alpha + b_3\mathbf{J}_\Omega$。这意味着

$$\mathbb{A} = \mathbb{B} \quad \Longleftrightarrow \quad a_i = b_i \ \forall i \ .$$

注意，这种情形相当于在同一个二次曲面上选择结构 A，B。

情形 *2*。 假设 $k_{\mathbb{A}} = k_{\mathbb{B}}$ 但对于至少一个 i， $\epsilon_i^{\mathbb{A}} \neq \epsilon_i^{\mathbb{B}}$。由于结构 J_ρ 对 A 和 B 都是固定的（因为 Pf(α) 相同），因此 A =B，当且仅当 $a_1 = b_1$ 并且

$$\begin{pmatrix} 0 & a_2\pi_\alpha^\# + a_3\pi_\Omega^\# \\ a_2\epsilon_2^{\mathbb{A}}\alpha_\# + a_3\epsilon_3^{\mathbb{A}}\Omega_\# & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b_2\pi_\alpha^\# + b_3\pi_\Omega^\# \\ b_2\epsilon_2^{\mathbb{B}}\alpha_\# + b_3\epsilon_3^{\mathbb{B}}\Omega_\# & 0 \end{pmatrix} .$$

比较右上角的分块可得

$$(a_2 - b_2)\pi_\alpha^\# = (b_3 - a_3)\pi_\Omega^\# \ . \tag{32}$$

根据 M-A 结构 (Ω α) 的定义，我们有 $\alpha \wedge \Omega = 0$。这意味着对偶双向量满足 $\pi_\alpha \wedge \pi_\Omega = 0$。因此， $\pi_\alpha^\#$不能写成 $\pi^\#{}_\Omega$ 的非零倍数，故 (32) 成立当且仅当$a_2 = b_2$ 和 $a_3 = b_3$。

情形 *3.* 假设 $k_{\mathbb{A}} \neq k_{\mathbb{B}}$。那么 A 是一种与 B 型不同的广义几乎结构，由此证明完毕。 □

命题 3.4 和 3.5 给出以下定理。

定理 *3.1.* 设 *(Ω α) $\in \Omega^2(T^*B) \times \Omega^2(T^*B)$* 是定义在 T^*B 上的非退化 *M-A* 结构，且 $\rho \in End(TT^*B)$ 由 *(10)* 给出。那么 *(Ω α)* 通过 *(28)* 在 T^*B 上定义了一个广义近几何族 $A \in End(TT^*B)$。它们由 R^3, 中的二次曲面参数化，并在表 *3–6* 中加以描述。任意二次曲面上的两个不同点参数化出两个不同的几何结构。

反交换性假设的必要性。 考虑命题 3.4 的假设，我们现在关注这样一个问题：两两反交换性（在推论中通过 (28) 中选择 $\epsilon_1 = -1$ 以及通过方程 $\epsilon_3\pi_\alpha^\#\Omega_\# + \epsilon_2\pi^\#{}_\Omega\alpha_\# = 0$ 所作的假设）是否是 A $= a_1\mathsf{J}_\rho + a_2\mathsf{J}_\alpha + a_3\mathsf{J}_\Omega$ 成为广义几乎结构的必要条件。我们希望考察由 (21) 给出的三个广义几乎结构 J_ρ,J_α,J_Ω 均对 A 作出贡献的情形。因此，对所有 i，我们假设$a_i \neq 0$ 。在不对反交换性作任何假设的情况下，A^2 由 (30) 描述。如果 A 是一个广义几乎结构，那么 $\mathsf{A}^2 = \pm\mathrm{Id}_{\mathbb{T}\mathcal{B}}$，并且根据命题 3.2

$$a_1{}^2\mathbb{J}_\rho{}^2 + a_2{}^2\mathbb{J}_\alpha{}^2 + a_3{}^2\mathbb{J}_\Omega{}^2 = c_1\,\mathrm{Id}_{\mathbb{T}\mathcal{B}} \ , \tag{33}$$

对于适当的 $c_1 \in \mathbb{R}$。这意味着

$$a_1 a_2 \{\mathbb{J}_\rho, \mathbb{J}_\alpha\} + a_1 a_3 \{\mathbb{J}_\rho, \mathbb{J}_\Omega\} + a_2 a_3 \{\mathbb{J}_\alpha, \mathbb{J}_\Omega\} = c_2 \, \mathrm{Id}_{\mathbb{T}\mathcal{B}} \ ,$$

对于某个 $c_2 \in \mathbb{R}$。由于两个乘积 $\mathbb{J}_\rho \mathbb{J}_\alpha$ 和 $\mathbb{J}_\rho \mathbb{J}_\Omega$ 在对角块中都只有零，最后一个方程意味着

$$\{\mathbb{J}_\rho, \mathbb{J}_\alpha\} = 0 \ , \qquad \{\mathbb{J}_\rho, \mathbb{J}_\Omega\} = 0 \ , \qquad a_2 a_3 \{\mathbb{J}_\alpha, \mathbb{J}_\Omega\} = c_2 \, \mathrm{Id}_{\mathbb{T}\mathcal{B}} \ .$$

根据命题 3.3，当且仅当 $\epsilon_1 = -1$ 属于 $\mathbb{J}_\rho = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \epsilon_1 \rho^* \end{pmatrix}$ 时，前两个方程成立。此外，如果 $\epsilon_1 = -1$，则由命题 3.1 可知，(33) 等价于

$$c_1 = -\operatorname{sgn} \mathrm{Pf}(\alpha) {a_1}^2 + {a_2}^2 \epsilon_2 + {a_3}^2 \epsilon_3 \ .$$

注意，c_1 与 (29) 中描述的 k 一致。现在假设方程 $a_2 a_3 \{\mathbb{J}_\alpha, \mathbb{J}_\Omega\} = c_2$ 恒等映射$_{\mathbb{T}M}$ 可以求解。根据 $\mathbb{A}^2 = \pm$恒等映射$_{\mathbb{T}\mathcal{B}}$，常数 c_1，c_2 必须满足 $|c_1 + c_2| = 1$。同时，命题 3.1 意味着 $\mathbb{A}^\bullet \eta = -c_1 \eta$，而我们需要 $|c_1| = 1$。

回到方程 $a_2 a_3 \{\mathbb{J}_\alpha, \mathbb{J}_\Omega\} = c_2$ 恒等映射$_{\mathbb{T}\mathcal{B}}$。在矩阵中，这对应于

$$\begin{aligned} \epsilon_2 \epsilon_3 \mathbb{1} + (\underline{\alpha\Omega})^2 &= \frac{-c_2 \epsilon_2}{a_2 a_3} \underline{\alpha\Omega}, \\ \epsilon_2 \epsilon_3 \mathbb{1} + (\underline{\Omega\alpha})^2 &= \frac{-c_2 \epsilon_2}{a_2 a_3} \underline{\Omega\alpha} \ . \end{aligned} \tag{34}$$

由于 $(\underline{\alpha\Omega})^2 = (\underline{\Omega\alpha})^2$, 系统（34）当且仅当 $[\underline{\alpha}, \underline{\Omega}] = 0$时可解。在这种情况下，两个方程重合。请注意，如果我们希望 $\{\mathbb{J}_\alpha, \mathbb{J}_\Omega\} = 0$ （这对应于 $c_2 = 0$），则不需要满足 $[\underline{\alpha}, \underline{\Omega}] = 0$。这是因为，如果将 $\{\mathbb{J}_\alpha, \mathbb{J}_\Omega\} = 0$ 改写为矩阵方程，（34）的右端会消失。

由此我们得出以下结论。如果我们不预先假定 $\mathbb{J}_\rho, \mathbb{J}_\alpha, \mathbb{J}_\Omega$ 之间存在任何关系，那么要使 $\mathbb{A}$ 成为广义近似结构，$\mathbb{J}_\rho$ 必须与 $\mathbb{J}_\alpha$ 和 $\mathbb{J}_\Omega$ 反对易。假设 $\{\mathbb{J}_\alpha, \mathbb{J}_\Omega\} = 0$ 可以替换为 $\{\mathbb{J}_\alpha, \mathbb{J}_\Omega\} = c$ 恒等映射$_{\mathbb{T}\mathcal{B}}$，代价是必须满足 $[\underline{\alpha}, \underline{\Omega}] = 0$，此外还须满足 $|c + k| = 1$，而这是在 $|k| = 1$ 之外的要求，其中 k 由 (29) 给出。

关于 M-A 结构与 M-A 方程之间的联系。我们已在命题 3.2 和 3.4 中看到，非退化 M-A 结构如何产生各种广义几乎结构。我们也描述了 M-A 结构与 M-A 方程之间的联系，该联系由 (3) 给出。现在，我们希望利用这一联系来定义与给定 M-A 方程相关联的广义几何。为此，我们必须处理与以下观察相关的歧义（以及相应的良定义性问题）。

考虑非退化 M-A 结构 $(\Omega\ \alpha)$ 和 $(\Omega\ \tilde{\alpha})$。根据定义，$\alpha \wedge \Omega\ = 0 = \tilde{\alpha} \wedge \Omega$。此外，对于 $h \in C^\infty(\mathrm{B})$

$$(\mathrm{d}\, f)^*(h\alpha) = h|_{\mathrm{Im}\,\mathrm{d}\, f}(\mathrm{d}\, f)^*\alpha\ ,$$

其中，$f \in C^\infty(\mathrm{B})$ 和 $\mathrm{Im}\,\mathrm{d}\ f$ 的含义是 $\mathrm{d}\ f\colon B \to T^*\mathrm{B}\ x \mapsto \mathrm{d}_x f$。因此，如果 h 处处非零，

$$(\mathrm{d}\, f)^*\alpha = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (\mathrm{d}\, f)^*(h\alpha) = 0\ .$$

因此，当且仅当 $\tilde{\alpha} = h\alpha$ 时，两个非退化 M-A 结构导出同一个 M-A 方程。记满足 $\alpha \wedge \Omega\ = 0$ 的 2-形式的等价类为 $[\alpha]$，其中

$$\tilde{\alpha} \in [\alpha] \quad \overset{\mathrm{def.}}{\Longleftrightarrow} \quad \tilde{\alpha} = h\alpha\ ,$$

对于不消失的 $h \in C^\infty(T^*\mathrm{B}$，等价类与 M-A 方程之间存在如下对应关系 $1-1$

$$\{[\alpha] \mid \alpha \in \Gamma\left(\Lambda^2 T^*\mathcal{B}\right)\} \longleftrightarrow \{(\mathrm{d}\, f)^*\alpha = 0 \mid f \in C^\infty(\mathcal{B})\}\ .$$

为了将其置于与 M-A 结构相关的广义几何背景下，我们希望了解等价类 $[\alpha]$ 中代表元的变化如何改变命题 (3.2) 给出的广义几乎结构族。回顾一下，由非退化 M-A 结构 $(\Omega\ \alpha)$ 确定的 A，是通过满足条件 $\epsilon_3 \pi_\alpha^{\#}\Omega_{\#} + \epsilon_2 \pi^{\#}{}_{\Omega}$ $\alpha_{\#} = 0$ 的三个广义几乎结构来定义的，这三个结构由 (21)（其中 $\epsilon_1 = -1$）给出。

考虑一个非退化 M-A 结构 $(\Omega\ \tilde{\alpha})$，其中 $\tilde{\alpha} \in [\alpha]$。首先，很明显，$\mathrm{J}_\Omega$ 对于两个 M-A 结构而言是相同的，因为 Ω 保持不变。其次，我们计算 ρ 的变化以及相应的 J_ρ。从 Pfaffian 开始，

$$\tilde{\alpha} \wedge \tilde{\alpha} = h^2\, \mathrm{Pf}(\alpha)\Omega \wedge \Omega \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Pf}(\tilde{\alpha}) = h^2\, \mathrm{Pf}(\alpha)\ . \tag{35}$$

现在根据定义 (10)，我们有

$$\tilde{\rho} = \frac{1}{\sqrt{|\operatorname{Pf}(\tilde{\alpha})|}} \pi_{\Omega}^{\#} \tilde{\alpha}_{\#} = \frac{h}{|h|\sqrt{|\operatorname{Pf}(\alpha)|}} \pi_{\Omega}^{\#} \alpha_{\#} = \operatorname{sgn} h \rho \ , \tag{36}$$

并由此立即得出推论

$$\mathbb{J}_{\tilde{\rho}} = \operatorname{sgn} h \mathbb{J}_{\rho} \ . \tag{37}$$

第三，我们聚焦于 $\mathbb{J}_{\alpha}$。由张量场的 C^{∞}-线性以及 $\pi_{\alpha}^{\#}$ 的定义可得 $\tilde{\alpha}_{\#} = h\alpha_{\#}$ 和 $\pi_{\tilde{\alpha}}^{\#} = \frac{1}{h}\pi_{\alpha}^{\#}$。因此， $\alpha \mapsto \tilde{\alpha} = h\alpha$ 得出ETwitter

$$\mathbb{J}_{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \pi_{\alpha}^{\#} \\ \epsilon_2 \alpha^{\#} & 0 \end{pmatrix} \quad \longmapsto \quad \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{h}\pi_{\alpha}^{\#} \\ h\epsilon_2 \alpha^{\#} & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{J}_{\tilde{\alpha}} \tag{38}$$

现在我们可以研究与 $(\Omega\ \tilde{\alpha})$ 相关的广义近似结构的反交换性。我们有 $\{\mathbb{J}_{\tilde{\rho}}, \mathbb{J}_{\Omega}\} = \operatorname{sgn} h \{\mathbb{J}_{\rho}, \mathbb{J}_{\Omega}\}$，因此。

$$\{\mathbb{J}_{\tilde{\rho}}, \mathbb{J}_{\Omega}\} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \epsilon_1 = -1 \ .$$

继续计算 $\mathbb{J}_{\tilde{\rho}}$ 和 $\mathbb{J}_{\tilde{\alpha}}$ 的反对易子，我们有

$$\{\mathbb{J}_{\tilde{\rho}}, \mathbb{J}_{\tilde{\alpha}}\} = \operatorname{sgn} h \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{h}\left(\rho\pi_{\alpha}^{\#} + \epsilon_1 \pi_{\alpha}^{\#}\rho^*\right) \\ h\left(\epsilon_1\epsilon_2\rho^*\alpha_{\#} + \epsilon_2\alpha_{\#}\rho\right) & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

这意味着

$$\{\mathbb{J}_{\tilde{\rho}}, \mathbb{J}_{\tilde{\alpha}}\} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 0 = \rho\pi_{\alpha}^{\#} + \epsilon_1 \pi_{\alpha}^{\#}\rho^* \\ 0 = \epsilon_1\epsilon_2\rho^*\alpha_{\#} + \epsilon_2\alpha_{\#}\rho \end{cases}$$

考虑等价关系的右侧，我们在命题 3.3 的证明中已经看到，这两个方程等价，并且当且仅当 $\epsilon_1 = -1$ 时成立。最后，我们考虑 $\mathbb{J}_{\tilde{\alpha}}$ 和 $\mathbb{J}_{\Omega}$ 的反对易子，随后讨论 A 对类 $[\alpha]$ 中代表元的选取的整体依赖性。反对易子为

$$\{\mathbb{J}_{\tilde{\alpha}}, \mathbb{J}_{\Omega}\} = \begin{pmatrix} h\epsilon_3 \pi_{\alpha}^{\#}\Omega_{\#} + \frac{\epsilon_2}{h}\pi_{\Omega}^{\#}\alpha_{\#} & 0 \\ 0 & h\epsilon_2\alpha_{\#}\pi_{\Omega}^{\#} + \frac{\epsilon_3}{h}\Omega_{\#}\pi_{\alpha}^{\#} \end{pmatrix} \ .$$

与前面的反对易子类似，$\{\mathsf{J}_{\tilde{\alpha}},\ \mathsf{J}_{\Omega}\}$ 为零归结为一个方程

$$\{\mathbb{J}_{\tilde{\alpha}}, \mathbb{J}_{\Omega}\} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad h^2\epsilon_3\pi_{\alpha}^{\#}\Omega_{\#} + \epsilon_2\pi_{\Omega}^{\#}\alpha_{\#} = 0\ .$$

在典范坐标中，这相当于

$$(\underline{\alpha\Omega})^2 = \frac{-\epsilon_2\epsilon_3}{h^2}\mathbb{1}\ . \tag{39}$$

现在，我们可以比较 $(\Omega\ \alpha)$ 和 $(\Omega\ \tilde{\alpha})$ 之间的情况了。 .

从以上讨论可知，$(\Omega\ \alpha)$ 和 $(\Omega\ \tilde{\alpha})$ 确定同一个广义近似结构族恰有两个障碍。第一个障碍源于 J_{α} 的变化，如式 (38) 所述。第二个障碍是第一个障碍在反对易子层面上的推论，体现在式 (39) 中。选择 $h = 1$ 可以避免这两个障碍，但这相当于保持 $[\alpha]$ 的代表元不变。

命题 3.6. 两个非退化 *M-A* 结构 $(\Omega\ \alpha)$ 和 $(\Omega\ \tilde{\alpha})$，其中 $\tilde{\alpha} \in [\alpha]$，当且仅当 $\tilde{\alpha} = \alpha$ 时，由命题 *3.4* 确定的广义几乎结构族相同。

对于所有 $[\alpha]$ 的代表元，$\mathsf{J}_{\tilde{\rho}}$ 与 J_{Ω} （以及 $\mathsf{J}_{\tilde{\alpha}}$）之间的反交换性均由同一条件满足，即通过选择 $\epsilon_1 = -1$。由于改变 $[\alpha]$ 的代表元会根据 (37) 对 J_{ρ} 进行变换，因此我们得到以下结果。

命题 3.7。 二维辛非退化 *M-A* 方程与广义几乎结构的等价类 $[\mathbb{A}]$ 之间存在一一对应关系，该关系由命题 *3.4* 给出，其中 $a_2 = 0$。$[\mathbb{A}]$的代表元具有相同的型。

证明。 根据命题前的讨论，需要注意的唯一一点是， $a_2 = 0$ 意味着 A 仅由 J_{ρ} 和 J_{Ω}构造而成。这进一步意味着，由于 (30)，条件 (24)（它等价于 J_{α} 与 J_{Ω}之间的反交换性）不必满足。当然， $a_2 = 0$ 也会影响命题陈述 1. 和 2. 中所描述的二次曲面。其中一些将不再存在（例如，与 $\mathrm{Pf}(\alpha) > 0$ 和 $(\epsilon_2,\ \epsilon_3) = (1,\ -1)$ 对应的广义几乎乘积复结构所构成的双叶双曲面），而仍然存在的那些将变为二次曲线，而非曲面˜。最后，$\mathsf{A} \in [\mathsf{A}] \Leftarrow \Rightarrow\ \tilde{a}_1 = \mathrm{sgn}\, h a_1$ 与 (35) 一起意味着， $[\mathsf{A}]$的两个代表元具有相同的型。

□

归一化 (7) 的概念提供了一种统一的方式来选取 $[\alpha]$ 中的代表元。这引出了以下定义及随后的定理。

定义 3.5。 设 (d f)$^*\alpha = 0$ 是满足 $Pf(\alpha) \neq 0$ 的二维辛 Monge-Amp`ere 方程。与 *M-A* 方程相关联的广义近几何 是由对应于该方程的归一化 Monge-Ampère 结构 (Ω $n(\alpha)$) 确定的广义近几何。

现在，我们可以通过以下定理进行总结，该定理基于命题 3.6 和命题 3.7。

定理 3.2。 设（d f）$^*\alpha = 0$ 是$\mathcal{B}$上的一个二维辛 *Monge-Amp`ère* 方程，且在 $T^*\mathcal{B}$上处处满足 Pf（α） $\neq 0$。那么，在 $T^*\mathcal{B}$上存在唯一一个由定理 *3.1* 确定的广义近几何族$\mathbb{A} \in \mathrm{End}\,(\mathbb{T}T^*\mathcal{B})$，它与该方程相关联。

结论与展望

我们描述了一种构造方法，由非退化的二维辛 Monge-Amp`ère 结构及其对应的偏微分方程确定广义近几何。受 [3, 7, 11, 13, 14, 24, 25], 中的结果启发，我们构造了许多新的广义近几何，它们源自 Monge-Amp`ère 结构以及这些结构所定义的几何对象。我们证明，非退化的 Monge-Amp`ère 结构会产生广义近几何的二次曲面。我们还探讨了这一背景下 Monge-Amp`ère 结构与 Monge-Amp`ère 方程之间的联系。未来，我们将致力于构造二维以上维数中的广义几何，尤其是三维情形，因为其情况要丰富得多。我们还将着重研究各种可积性概念，特别是这一背景下的弱可积性概念，以及与之密切相关的 Bismut 联络 [13, 1, 25]概念。尤其值得关注的是，进一步探寻广义结构的（弱）可积性与三维中某些 Monge-Apm`ère 偏微分方程的局部等价问题之间的联系。

参考文献

[1] A. Andrada 和 R. Villacampa。Vaisman流形上的Bismut联络。*Mathematische Zeitschrift*，302：1091–1126，2022年。[2] B. Banos。可积几何与Monge-Amp`ère方程。*arXiv*：微分几何，2006年。[3] B. Banos。Monge–Amp`ère方程与广义复几何——二维情形。几何与物理学杂志，57(3)：841–853，2007年。[4] B. Banos。Monge-Amp`ère方程的复解。几何与物理学杂志，61(11)：2187–2198，2011年。[5] B. Banos、V. Rubtsov 和 I. Roulstone。Monge–Amp`ère结构与不可压缩流的几何。*Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*，49，2016年10月。[6] T. J. Courant。Dirac流形。*Transactions of the American Mathematical Society*，319(2)：631–661，1990年。[7] M. Crainic。广义复结构与李括号。巴西数学会通报，新系列，42：559–578，2004年。[8] S. Delahaies。地球物理流体动力学中的复几何与接触几何。博士论文，萨里大学，2009年1月。[9] D. G. Dritschel 和 A. Vi´udez。对旋转稳定分层地球物理流建模的平衡方法。*Journal of Fluid Mechanics*，488：123–150，2003年。[10] M. Gualtieri。泊松簇上的膜。*arXiv*：微分几何，2007年。[11] M. Gualtieri。广义复几何。数学年刊，174(1)：75–123，2011年。[12] N. Hitchin。广义Calabi–Yau流形。数学季刊，54(3)：281–308，2003年9月。

[13] S. Hu、R. Moraru 和 D. Svoboda。《交换对、广义抛物 K¨ahler 几何与 Born 几何》。*arXiv:1909.04646*，2019年。[14] Y. Kosmann-Schwarzbach 和 V. Rubtsov。《李代数丛上的相容结构与 Monge-Amp`ere 算子》。*Acta Applicandae Math-ematicae*，109(1):101–135，2010年1月。[15] A. Kushner、V. Lychagin 和 V. Rubtsov。《接触几何与非线性微分方程》。数学百科全书及其应用。剑桥大学出版社，2006年。[16]V. V. Lychagin。《接触几何与非线性二阶微分方程》。《俄罗斯数学调查》，34(1):149–180，1979年2月。[17] V. V. Lychagin。《二维流形上的微分方程》。《高等院校数学学报》，5:43–57，1992年。[18]V. V. Lychagin 和 V. N. Rubtsov。《Monge-Amp`ere 微分方程的局部分类》。《苏联数学文摘》，28:328–332，1983年。[19] L. Reidel、F. J. Rudolph 和 D. Svoboda。《Born 几何中的唯一联络》。《数学物理通讯》，372:119–150，2019年。[20] I. Roulstone、B. Banos、J. D. Gibbon 和 V. Roubtsov。《准地转流中的 K¨ahler 几何与 Burgers 涡旋》。《乌克兰国家科学院数学论文集》，16(2):303–321，2009年。[21]V. Rubtsov。《*Monge–Amp `ere* 结构的几何》，第95–156页。施普林格国际出版公司，查姆，2019年。[22]V. Rubtsov 和 I. Roulstone。《准地转流流体动力学模型中的全纯结构》。《伦敦皇家学会会刊 *A* 辑》，457:1519–1531，2001年6月。[23] V. N. Rubtsov 和 I. Roulstone。《准地转流哈密顿模型中的四元数结构与 K¨ahler 结构示例》。《物理学杂志 *A*：数学与一般》，30(4):L63–L68，1997年2月。

[24] M. Salvai。《复流形与辛流形上的广义几何结构》。*Annali di Matematica Pura edApplicata*，194:1505–1525，2015年。[25] I. Vaisman。《广义抛物 K¨ahler 流形》。***Differential Geometry and its Applications***，42:84–103，2015年。[26] ´A. Vi´udez 和 D. G. Dritschel。《一种显式的势涡度守恒方法，用于非线性内重力波建模》。*Journal of FluidMechanics*，458:75–101，2002年。