arXiv:2305.04592v1 [math.LO] 8 May 2023

摘要

受完备原子布尔代数的单子性的启发，我们证明了逆极限有限模态代数在**集合**上是单子的。在分析单子函子时，我们重新得到了通用模型构造——这一构造在模态逻辑文献中被广泛用于描述有限生成自由模态代数及其典范模型的本质有限子框架。

关键词 单子函子 · 逆极限有限代数 · 模态代数

模态逻辑中的逆极限有限性、单子性与泛模型

预印本

Matteo De Berardinis*
数学系
米兰大学
意大利

Silvio Ghilardi
数学系
米兰大学
意大利

2023年5月9日

1 引言

模态逻辑是代数技术和余代数技术的一个富有启发性的领域，过去几十年的大量文献便是明证。一方面，模态代数（作为模态演算的林登鲍姆代数而产生）似乎是布尔代数范畴上某个自函子的代数；另一方面，Kripke 框架（最流行的模态逻辑语义中的主要组成部分）似乎是集合范畴上协变幂集自函子的余代数。本文将探讨模态逻辑与代数／余代数构造之间的另一种联系：这一次，我们将考虑 Eilenberg-Moore 意义下的单子／余单子以及代数／余代数。

这是初等托扑斯理论中的一个基本结果（例如参见 [1], Thm. A2.2.7）：反变幂集函子P：$\mathcal{E}^{op} \longrightarrow \mathcal{E}$ 是单子的，因此 $\mathcal{E}^{op}$ 等价于由该伴随诱导的单子的代数范畴。对于 $\mathcal{E} =$ **集合**，众所周知**集合**^{op} 等价于**CABA**（完备原子布尔代数）范畴，而该范畴进而是**集合**上的单子范畴。

若尝试在模态逻辑的语境下重现上述结果，便会立即遇到看似无法解决的问题。若令 Kripke 框架与 p-态射构成的范畴扮演集合范畴的角色，我们可以轻易地识别出（借助 Thomason 对偶 [2]）该范畴的对偶，即由完备原子且完全可加的模态代数组成的范畴 **CAMA**$_\infty$：若一个模态代数的底层布尔代数完备且原子，且其可能性算子 $\Diamond$ 与任意上确界可交换，则称该代数为“完备原子且完全可加的”。然而，从 **CAMA**$_\infty$ 到集合范畴的遗忘函子甚至没有左伴随：事实上，正如我们将在下文第 3 节中正式证明的，**CAMA**$_\infty$ 没有始对象；而假设存在左伴随，该始对象应当由左伴随映至始对象，因为 **Set**有始对象。

然而，这只是事情的一部分。事实上，如果我们将完备原子布尔代数视为前有限 布尔代数（即有限布尔代数范畴的 Pro-完备化），再以前有限模态代数取代完备原子且完全可加的模态代数，那么单子性结果竟然可以恢复。

在 **集合**上的单子性是一项重要性质：根据定义，它意味着与某个伴随所诱导的单子对应的 Eilenberg-Moore 范畴等价。单子性可以被视为“具有代数结构”这一性质的推广：事实上，根据众所周知的刻画 [3, 4], , 在 **集合**上的单子范畴具有与通常的有限型簇相似的相关性质（例如

*通讯作者

正合性）。前有限模态代数在 **集合**上构成单子范畴是一个颇为特殊的事实，因为没有理由认为前有限代数应当具有单子性（有限剩余集合是 Stone空间，而 Stone空间范畴在**集合**上不是单子范畴，因为它不是正合的）。

前有限模态代数的单子性有一个余代数对应结果（本文也证明了这一结果），即局部有限 Kripke 框架范畴到**集合**的余单子性。由局部有限 Kripke 框架与**集合**之间的伴随所诱导的余单子本身也颇有趣，因为事实证明，它与泛模型构造有着密切联系。泛模型构造是模态逻辑文献中针对传递模态系统广泛研究的一种构造 [5, 6, 7, 8, 9] ，与表示定理、有限生成自由代数的原子性、子簇的局部有限性等问题相关。

本文结构如下：我们首先回顾有关 Ind-完备化和 Pro-完备化的基本事实，然后考察局部有限 Kripke 框架范畴的相关性质，并由此证明单子性／余单子性定理。最后，在说明我们的单子与自由代数的前有限完备化相关之后，我们将对传递模态系统的情形给出它的显式描述。

关于预备知识，本文只要求具备单子、伴随函子、极限和余极限方面的基础范畴论知识（例如参见教科书 [10]）。

2 Ind-完备化与 Pro-完备化回顾

本节回顾 [11] 第六章中关于 Ind-完备化与 Pro-完备化的一些定义和结果（此处所述结果的完整证明请参见该教科书）。范畴 $\mathcal{C}$ 的 Ind-完备化通过形式化地向 $\mathcal{C}$添加滤余极限而得到。引入它的一种方式是将其视为预层范畴的一个全子范畴：

定义 2.1. 对于小范畴 $\mathcal{C}$，我们将 $\mathrm{Ind}\mathcal{C}$ 定义为**集合**$^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ 的全子范畴，其中的函子都是可表函子的滤余极限。

我们只考虑 $\mathcal{C}$ 具有有限余极限的情形；下述定理概述了在这一假设下 $\mathrm{Ind}\mathcal{C}$ 的相关性质：

定理 2.2. 设 $\mathcal{C}$ 是一个具有有限余极限的小范畴。那么

(i) $\mathrm{Ind}\mathcal{C}$ 等价于 $\mathit{Lex}(\mathcal{C}^{op}$,集合)，即由从 $\mathcal{C}$ 到 集合 的逆变函子构成的全子范畴集合$^{\mathcal{C}^{op}}$，这些函子将有限余极限转化为有限极限；

(ii) $\mathrm{Ind}\mathcal{C}$ 具有所有滤余极限，且嵌入$\mathrm{Ind}\mathcal{C} \hookrightarrow$ 集合$^{\mathcal{C}^{op}}$ 保留这些余极限；(iii) $\mathrm{Ind}\mathcal{C}$ 具有有限余极限，且 *Yoneda*嵌入（在余域中限制） $Y\colon \mathcal{C} \hookrightarrow \mathrm{Ind}\mathcal{C}$ 保留这些余极限；(iv) $\mathrm{Ind}\mathcal{C}$ 是完备的，且嵌入$\mathrm{Ind}\mathcal{C} \hookrightarrow$ 集合$^{\mathcal{C}^{op}}$ 保留所有小极限。

注意，由 (ii) 和 (iii) 可知，$\mathrm{Ind}\mathcal{C}$ 是余完备的；实际上，按照下述意义，它是 $\mathcal{C}$ 的一个余完备化：

定义 2.3。给定一个小范畴 $\mathcal{C}$，$\mathcal{C}$ 的余完备化 是一个全嵌入 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 到某个余完备范畴 $\mathcal{D}$ 中，使得 $\mathcal{D}$ 的每个对象都是 F 的像中的对象的余极限。

我们回顾有限可表示性的概念。

定义 2.4. 具有滤余极限 $\mathcal{D}$ 的（局部小）范畴中的对象 X 称为有限可表示（在$\mathcal{D}$中），如果函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, -)\colon \mathcal{D} \to$ **集合** 保留滤余极限。

下述定理（将在后文使用）刻画了 $\mathrm{Ind}\mathcal{C}$ 在等价意义下的性质：它是 $\mathcal{C}$ 的一种余完备化，其中嵌入函子保留有限余极限，并将 $\mathcal{C}$ 的对象映至有限可表示对象。

定理 2.5. 设 $\mathcal{C}$ 是一个具有有限余极限的小范畴，且 $Z\colon \mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{D}$ 是 $\mathcal{C}$ 到余完备范畴 $\mathcal{D}$ 中的全嵌入。那么

(i) 若 Z 的像中的对象在 $\mathcal{D}$ 中是有限可表示的，则 Z 可延拓为全嵌入 $Z\colon \mathrm{Ind}\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{D}$；

(ii) 若在 *ad* ˆ化 $Z\colon \mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{D}$ 是 $\mathcal{C}$ 的余完备化，且 Z 保持有限余极限， Z 是一个等价。

Ind-完备化这一概念的对偶是前有限完备化这一概念：

定义 2.6. 若 $\mathcal{C}$ 是一个具有有限极限的小范畴，我们令 Pro$\mathcal{C}$ 为如下定义的范畴 $(\mathrm{Ind}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}))^{\mathrm{op}}$（也就是说，Pro$\mathcal{C}$ 与从 $\mathcal{C}$ 到 **集合** 的保有限极限协变函子的范畴对偶）。

我们以几个例子（同样取自 [11]）作为本节的结尾，它们与本文相关。

例 2.7. 给定一个簇（即由方程定义的代数等价类）$\mathcal{V}$，可以应用定理 2.5 来证明 $\mathcal{V}$ 是有限表示的 $\mathcal{V}$-代数范畴的 Ind-完备化。特别地，布尔代数是有限布尔代数范畴的 Ind-完备化。[2] 有限集与有限布尔代数对偶；Stone空间及连续映射构成的范畴与布尔代数范畴对偶；因此可以得出，Stone空间范畴是有限集范畴的 Pro-完备化。

例 2.8. 集合范畴是由空签名上的空方程集所定义的簇；因此**集合** 是范畴 **集合**^{fin}（有限集合的范畴）的 Ind-完备化。由于 **集合**^{fin} 与有限布尔代数范畴对偶，而**CABA**（完备原子布尔代数范畴）与**集合** 对偶（见下文定理 3.4），我们得出结论：**CABA** 是有限布尔代数范畴的 Pro-完备化（换言之，完备原子布尔代数恰好就是前有限布尔代数）。

3 模态代数与 Kripke 框架

本节介绍一些代数背景，并回顾 Tarski 对偶与 Thomason 对偶（相关证明广为人知，故置于附录中）；随后考察 Kripke 框架范畴中的余极限构造。

模态代数是最小正规模态逻辑 K 的标准代数语义；模态代数的簇与命题正规模态逻辑之间一一对应。有关模态逻辑的全面介绍，请读者参阅教材 [12]；此处我们仅回顾本文相关的定义。

一个 模态代数 $(B, \Diamond)$ 是一个布尔代数 B，并配备一个半同态，即一个保持有限并的算子 $\Diamond\colon B \to B$:

$$\Diamond(a \vee b) = \Diamond a \vee \Diamond b, \qquad \Diamond\bot = \bot\,.$$

下文用字母 B 同时表示一个模态代数及其支撑集；$\Diamond$ 算子称为该模态代数的“可能性”算子，其对偶算子（定义为 $\Box a := \neg\Diamond\neg a$）称为该模态代数的必然性算子。保持 $\Diamond$ 的布尔同态与模态代数构成范畴 **MA**；我们将**MA**中由有限模态代数构成的全子范畴记作**MA**$_f$。

关于 se 在语义方面，我们有***Kripke*** 框架 以及 Kripke 框架之间的 p-态射的概念。 es.

定义 3.1. 一个***Kripke*** 框架 是一个有向图，即一个有序对 (P, R)，由一个集合 P 及其上的一个二元关系 R 构成。**定义 3.2.** 给定两个 Kripke 框架 (P, R) 和 (Q, S)，从 (P, R) 到 (Q, S) 的一个***p*-态射** 是一个函数$f\colon P \to Q$，满足以下性质:

- (*stability*) for $p, p' \in P$, $pRp' \implies f(p)Sf(p')$;
- (*openness*) for $q' \in Q$, $p \in P$, $f(p)Sq' \implies \exists p' \in P$ s.t. pRp' & $f(p') = q'$.

我们将 **KFr** 定义为一个范畴，其对象为 Kripke 框架，态射为 p-态射；**DGrph** 则为一个范畴，其对象与 **KFr** 相同，态射为稳定函数。[3] 有时，在指称**KFr**（或 **DGrph**）中的对象时，我们会省略二元关系。

现在我们回顾塔斯基对偶和 Thomason 对偶，它们联系了代数性的概念与语义概念。以下命题是众所周知的:

命题3.3。 布尔代数 B满足以下等价条件:

(i) B 是完备且原子的;

(ii) B 同构于某个幂集布尔代数;

(iii) B 是完备的，并满足无穷分配律:

$$\bigwedge_{i\in I}\bigvee X_i = \bigvee_{f\in\prod_{i\in I} X_i}\bigwedge_{i\in I} f(i)$$

对于集合 B的任意子集族 $\{X_i\}_{i\in I}$。

[2]一般而言，有限代数与有限表示代数的概念并不一致；但对于局部有限簇而言，二者是一致的，因为有限生成自由代数都是有限的（布尔代数便是这种情况，而模态代数则不是）。[3]“稳定函数”这一名称源自近期的模态逻辑文献，参见例如 [13]。

保留任意上确界和交的完备原子布尔代数及布尔同态构成范畴**CABA**。如果模态代数 $(B, \Diamond)$ 是完全可加且完备原子的，则称其为 B 当且仅当其作为布尔代数是完备且原子的，且 $\Diamond$ 保留任意上确界。完全可加的完备原子模态代数，配备保留 $\Diamond$ 以及任意上确界和交的布尔同态，构成范畴**CAMA**$_\infty$。

定理 3.4。 *[塔斯基对偶]**CABA** 与集合对偶。*

证明。 参见附录。我们仅回顾对偶的运作方式。从**集合** 到**CABA**，对偶函子将一个集合映射为其幂集，将一个函数映射为原像布尔态射。从**CABA** 到**集合**，对偶函子将一个完备且原子的布尔代数对应到其原子的集合，并将一个保任意上确界和交的布尔态射对应到其偏序左伴随在原子上的限制（分别取定义域和陪域中的原子）。 □

定理 3.5。 *[Thomason 对偶]**CAMA**$_\infty$ 与**KFr**对偶。*

证明。 这些对偶函子扩展了塔斯基对偶函子。在布尔代数一侧，对偶函子通过设定 aRb iff $a \leq \Diamond b$，将布尔代数的原子集合赋予 Kripke 框架结构。在 Kripke 框架 (P, R) 一侧，布尔代数 $\mathcal{P}(P)$ 通过设定 $\Diamond X := \{p \in P \mid \exists p' (pRp' \,\&\, p' \in X)\}$ 转化为模态代数。 □

现在我们回顾 Kripke 框架上的标准语义构造。

定义 3.6。 子集 $G \subseteq P$ 称为 Kripke 框架 (P, R) 的**生成子框架**，如果对所有 $p, p' \in P$，

$$p \in G \,\&\, pRp' \implies p' \in G \quad .$$

定义 3.7。 如果存在一个 p-态射 $(P, R) \to (Q, S)$，且它作为函数是满射，则称 (Q, S) 是 (P, R) 的***p*-态射像**。

上述构造可以从范畴论角度加以利用：

命题 3.8。***KFr*** 是余完备的。此外，遗忘函子***KFr*** $\to$ 集合 和 ***KFr*** $\to$ ***DGrph*** 保持余极限 *s.*

证明。 我们来计算余积和余等化子。

余积很容易：给定 **KFr** 中的一个对象族 $\{P_i\}_{i \in I}$，其余积就是集合 P_i 的不交并 $\coprod P_i$，并赋予由各个 R_i 的并所给出的关系 $\coprod R_i$；根据定义，包含映射 $\iota_j \colon P_j \to \coprod P_i$ 对所有 $j \in I$ 都定义了 p-态射 $(P_j, R_j) \to (\coprod P_i, \coprod R_i)$。余积的泛性质很容易验证。

余等化子则更有意思。给定一对平行态射 $f, g \colon P \rightrightarrows Q$，其中 $P \rightrightarrows Q$ 属于 **KFr**，我们来考虑 Q 关于 $\sim$ 的商集，其中 $\sim$ 是由 $\{(f(p),\ g(p))$ 生成的等价关系（即包含该关系的最小等价关系）；我们用 $[x]$ 表示 x 关于等价关系 $\sim$ 的等价类。在 $Q/\!\sim$ 上，我们考虑如下二元关系：对于 $x, y \in Q$，

$$[x] \overline{S} [y] \Leftrightarrow \exists \tilde{y} \in Q \text{ s.t. } \tilde{y} \sim y \text{ and } xS\tilde{y}$$

关系 S 是良定义的（我们必须证明对等价类 $[x]$ 中元素的选取无关）。为此，我们在 Q 上定义另一个等价关系：对于 $x,\ x' \in Q$，

$$x \equiv x' \Leftrightarrow \bigcup_{\tilde{y} \text{ s.t. } xS\tilde{y}} [\tilde{y}] = \bigcup_{\tilde{y}' \text{ s.t. } x'S\tilde{y}'} [\tilde{y}']$$

固定 $p \in P$ 和 $\tilde{y} \in Q$ 使得 $f(p) S \tilde{y}$，存在 $\tilde{p} \in P$ 使得 $pR\tilde{p}$ 且 $f(\tilde{p}) = \tilde{y}$；如果我们选取某个 $y \in Q$ 使得 $y \sim g(p)$，那么 $y \sim f(\tilde{p})$ 且 $g(p) S y(\tilde{p})$。这证明了

$$\bigcup_{\tilde{y} \text{ s.t. } f(p)S\tilde{y}} [\tilde{y}] = \bigcup_{\tilde{y}' \text{ s.t. } g(p)S\tilde{y}'} [\tilde{y}']$$

对所有 $p \in P$ 都成立（我们证明了 $\subseteq$，另一个包含函子方向的证明类似），这意味着 $\{(f(p),\ g(p)) \mid p \in P\} \subseteq \equiv$。现在，根据 $\sim$ 的定义，我们可以得出 $\sim \subseteq \equiv$，也就是说 S 是良定义的。

根据定义，投影 $\pi \colon Q \to Q/\!\sim$ 定义了一个 p-态射 $(Q, S) \to \left(Q/\!\sim, \overline{S}\right)$。

现在，给定一个集合 A，以及一个函数 $h \colon Q \to A$ 使得 $h \circ f = h \circ g$，存在唯一的函数 $\phi \colon Q/\!\sim \to A$ 使得 $\phi \circ \pi = h$（它必须将 $[x]$ 映射到 $h(x)$）。

如果为 A 赋予一个二元关系 T，且 h 是稳定的，那么 ϕ 也是稳定的：如果 $[x]S[y]$ 属于 $Q/\sim$，令 $\tilde{y} \in Q$ 使得 $\tilde{y} \sim y$ 且$xS\tilde{y}$；那么 $\phi([x]) = h(x)Th(\tilde{y}) = \phi([\tilde{y}]) = \phi([y])$。
若 h 是开的，则 ϕ 是开的：若 $\phi([x])Ta$ 属于 A，那么由于 $\phi([x]) = h(x)$，存在 $y \in Q$ 使得 xSy 且 $h(y) = a$，因此 $[x]S[y]$ 且 $\phi([y]) = a$。 □

这些计算不仅表明**KFr** 具有所有余极限，也表明遗忘函子**KFr** $\longrightarrow$ **Set** 和**KFr** $\longrightarrow$ **DGrph** 保留这些余极限。然而，这些函子没有右伴随；事实上，**KFr** （因而**CAMA**$_\infty$也）并不是一个适合研究的范畴，因为它缺少一些基本性质：

命题 3.9. ***KFr***没有终对象。

证明。 考虑一个序数 $(\alpha, >)$，并将其视为一个 Kripke 框架。注意，任意 p-态射 $f\colon (\alpha, >) \longrightarrow (P, R)$都必定是单射：这是因为若有 $f(p_0) = f(p_0') := q$，其中 $p_0 > p_0'$，那么由稳定性可得 qRq。然而，根据开性，由 $f(p_0)Rq$ 可知，存在 p_1，使得 $p_0 > p_1$，且 $f(p_1) = q$。如此继续下去，我们便得到一条无限下降链 $p_0 > p_1 > p_2 \cdots$，这是不可能存在的。因此，假设存在的**KFr** 中的终对象必须包含每个序数的一个副本：这对于一个集合来说太大了。□

等化子　很容易计算。考虑一对平行态射 $f, g\colon P \rightrightarrows Q$ in **KFr**；我们可　t

$$E_{fg} := \{p \in P \mid \forall p'\ (pRp' \Rightarrow f(p') = g(p'))\}$$

$E_{fg} \subseteq P$ 显然是一个生成子框架，并且是包含于 $\{p \in P \mid f(p) = g(p)\} \subseteq P$ 中的最大生成子框架。

引理 3.10。 包含函子 $\iota\colon E_{fg} \to P$ 是 ***KFr*** 中 f 和 g 的等化子。

证明。 ι 显然是 **KFr** 中的一个态射。为验证 ι 是 f 和 g的等化子，考虑另一个态射$h\colon A \to P$（设 A 配备二元关系 T），使得 $f \circ h = g \circ h$。若固定满足$h(x)Rp'$的 $x \in A$ 和 $p' \in P$，则可找到 $x' \in A$ 使得 xTx' 且 $h(x') = p'$，从而推出 $f(p') = f(h(x')) = g(h(x')) = g(p')$；这证明了 $\mathrm{Im}h \subseteq E_{fg}$，因此在 **KFr** 中，$h$可经由 ι唯一分解。 □

注记 3.11。 因此，遗忘函子 **KFr** $\to$ **集合** 和 **KFr** $\to$ **DGrph** 不保等化子。不过，对于满足以下条件的那些对 $f, g\colon P \rightrightarrows Q$ 集合 $\{p \in P \mid f(p) = g(p)\}$ 是 P 的生成子框架，它们保等化子。

4 局部有限 Kripke 框架

存在一个很好的全自反传递闭包　子范畴值得研究。设 (P, R) 是一个 Kripke 框架；我们用 R^* 表示其包 R，即对于 $p, q \in P$，我们定义　e

$$pR^*p' \quad \Leftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N}\ \exists p_0, \ldots, p_n \in P \text{ s.t. } p = p_0 R \ldots R p_n = p'$$

对于 $p \in P$，我们分别用 $R(p)$ 和 $R^*(p)$ 表示 $\{q \in P \mid pRq\}$ 和 $\{q \in P \mid pR^*q\}$。注意， $R^*(p)$ 是包含 p 的 P 的最小生成子框架。

定义 4.1. 如果 Kripke 框架 (P, R) 对所有 $p \in P$ 都满足 $R^*(p)$ 有限，则称其为局部有限的 。

我们令 **KFr**^{lf} 表示由局部有限 Kripke 框架构成的 **KFr** 的全子范畴，并令 **KFr**^{f} 表示由有限 Kripke 框架构成的 **KFr**的全子范畴。

KFr^{lf} 和 **KFr**^{f} 对生成子框架、p-态射像和有限不交并封闭（**KFr**^{lf} 还对无限不交并封闭）；因此，根据命题 3.8 的证明，我们得到：

命题 4.2. ***KFr***^{lf} 是余完备的，而 ***KFr***^{f} 有有限余极限。此外，嵌入 ***KFr***$_{lf} \hookrightarrow$ ***KFr*** 保持余极限，嵌入***KFr***$_f \hookrightarrow$ ***KFr***^{lf} 保持有限余极限。

现在我们可以应用定理 2.5 给出的 Ind-完备化刻画：

定理 4.3。 ***KFr***^{lf} 是***KFr***^{f}的 *Ind*-完备化。此外，***KFr***^{lf} 与***KFr*** 的全子范畴重合，该子范畴由那些可表示为***KFr*** 中 ***KFr***^{f}内图表的滤余极限的对象组成。

证明。 注意，范畴**KFr**^{f} 并非小范畴，但它本质上是小的，即等价于某个小范畴。我们应用定理 2.5。

KFr$_f \hookrightarrow$ **KFr**^{lf} 是一个全嵌入，并且在命题 4.2 中，我们看到**KFr**^{lf} 是余完备。

我们证明 $\mathbf{KFr}_{lf}$ 中的每个对象都是 $\mathbf{KFr}_f$ 中对象的余极限。给定 $\mathbf{KFr}_{lf}$ 中的 (P, R)，考虑 $\mathbf{KFr}_f$ 中的图表，该图表由有限 Kripke 框架 $R^*(p)$ 组成，其中有 $p \in P$，以及包含映射 $R^*(p) \hookrightarrow R^*(p')$（当 pR^*p' 时）；显然，P（连同包含映射 $R^*(p) \to P$）是 $\mathbf{KFr}_{lf}$ 中该图表的余极限（我们也可以使用由 P 的生成子框架构成的图表，其中底层集合有限——在这种情况下，余极限将是滤过的）。此论证也证明了定理的第二个断言，因为 $\mathbf{KFr}_{lf} \hookrightarrow \mathbf{KFr}$ 保持余极限。

根据命题 4.2，我们知道 $\mathbf{KFr}_f$ 具有所有有限余极限，并且 $\mathbf{KFr}_f \hookrightarrow \mathbf{KFr}_{lf}$ 保留这些余极限。接下来只需证明 $\mathbf{KFr}_f$ 中的对象在 $\mathbf{KFr}_{lf}$ 中是有限可表示的。

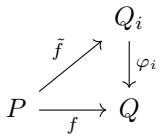
考虑 $\mathbf{KFr}_{lf}$ 中的一个 Q，它是某个滤子图 $I \to \mathbf{KFr}_{lf}$ 的余极限，其态射为 $\varphi_i\colon Q_i \to Q$。由于遗忘函子 $\mathbf{KFr}_{lf} \to \mathbf{Set}$（由嵌入 $\mathbf{KFr}_{lf} \hookrightarrow \mathbf{KFr}$ 与遗忘函子 $\mathbf{KFr} \to \mathbf{Set}$ 复合而成）保留余极限，因此 Q 作为集合同构于 $\coprod_i Q_i$ 的一个商集；并且，对于 $i, j \in I$、$x \in Q_i$ 和 $x' \in Q_j$，有 $\varphi_i(x) = \varphi_j(x')$ 当且仅当存在 $i \to k$ 和 $j \to k$ 属于 I，使得诱导出的 $Q_i \to Q_k$ 和 $Q_j \to Q_k$ 将 x 和 x' 映到同一个元素。

我们需要证明所诱导的态射

$$\varinjlim_i \mathrm{Hom}_{\mathbf{KFr}_{lf}}(P, Q_i) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{KFr}_{lf}}(P, \varinjlim_i Q_i)$$

对所有对象 $P \in \mathbf{KFr}_f$ 都是一个双射。

考虑 $f\colon P \to Q \cong \varinjlim_i Q_i \in \mathbf{KFr}_{lf}$；若将其视为 **Set** 中的态射，由于遗忘函子 $\mathbf{KFr}_{lf} \to \mathbf{Set}$ 保留余极限，且有限集在 **Set** 中有限可表示，因此存在唯一分解（在 $\varinjlim_i \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(P, Q_i)$ 中相差一个等价）：



一般来说，$\tilde{f}$ 只是一个函数，但只要适当选择指标 i，它就是稳定的。事实上，[4] 若有 $p, p' \in P$ 满足 pRp'，则（f 是一个 p-态射）$\varphi_i(f(p)) = f(p) S f(p') = \varphi_i(f(p'))$；由于 φ_i 是一个 p-态射，存在 $x' \in Q_i$ 满足 $f(p) S_i x'$ 且 $\varphi_i(x') = \varphi_i(f(p'))$。现在，利用前述观察，以及任意两个平行箭头 $\alpha, \beta\colon i \rightrightarrows j$ 在 I 中都由某个 $\gamma\colon j \to k$ 在 I 中等化这一事实（这是滤过范畴的性质），我们有一个态射 $i \to k$ 在 I 中，使得其诱导的 $Q_i \to Q_k$ 将 x' 和 $f(p')$ 映到同一个元素；这意味着，在与 $Q_i \to Q_k$ 复合之后，有 $f(p) S_i f(p')$。此外，若 f 对 P 中某个 pRp' 对已经具有稳定性，则 f 与 $Q_i \to Q_k$（这是一个 p-态射）的复合也具有稳定性。由于作为集合，P 是有限的，我们可以假设 f 是一个稳定函数（P 中的 pRp' 对只有有限多个，并且每次与 $Q_i \to Q_k$ 复合后，f 不具备稳定性的这类对的数量都会严格减少）。

现在证明 f 的开性；若有 $f(p) S_i x'$ 属于 Q_i，则（φ_i 是一个 p-态射）$f(p) = \varphi_i(f(p)) S \varphi_i(x')$，因此（$f$ 是一个 p-态射）存在 $p' \in P$ 使得 pRp' 且 $\varphi_i(\tilde{f}(p')) = f(p') = \varphi_i(x')$；若我们与 $Q_i \overset{Q_d}{\to} Q_k$（由一个适当的 $d\colon i \to k$ 属于 I 所诱导）复合，则有 $Q_d(f(p')) = Q_d(x')$。我们证明了。

(*)“对所有 $p \in P$，对于 $(f(p')) = Q_d(x')$ 所有满足 x' 的 $f(p) S_i x'$，都存在 $p' \in P$ 和 $d\colon i \to k$ 属于 I，使得 pRp' 且 Q_d,,

由于 P 是有限的，而 Q_i 是局部有限的，因此这样的对 $(p,\ x')$ 只有有限多个；又由于 I 是滤的，我们可以为所有这样的对取相同的 d。复合 $Q_d \circ f$ 如今符合我们的目的，因为如果对于某个 $y \in Q_k$，我们有 $Q_d(f(p')) S_k y$，那么（由于 Q_d 是一个 p-态射）存在 x'，使得 $f(p) S_i x'$ 且 $Q_d(x') = y$：将 (*) 应用于 $(p,\ x')$，我们得到 $p' \in P$，使得 pRp' 且 $Q_d(f(p')) = Q_d(x') = y$，从而证明 $Q_d \circ f$ 是开的（换言之，f：对于适当选择的指标 i，$P \longrightarrow Q_i$ 本身是开的）。 □

如果我们现在回顾定理 2.2，便可立即得到：

推论 4.4. *$\mathbf{KFr}_{lf}$ 等价于 $Lex(\mathbf{KFr}_f^{op}, \text{集合})$；此外，$\mathbf{KFr}_{lf}$ 是完备的，且嵌入 $\mathbf{KFr}_{lf} \hookrightarrow \text{集合}^{\mathbf{KFr}_f{}^{op}}$ 保留所有极限。*

[4] $\tilde{f}$ 的稳定性也可由以下事实得到保证：有限图在 **DGrph** 中是有限可表示的，并且包含函子 $\mathbf{KFr}_{lf} \hookrightarrow \mathbf{DGrph}$ 保留余极限（见命题 3.8 和 4.2）。

然而，应当注意，极限很难在$\mathbf{KFr}_{lf}$中直接计算。问题在于积（对于等化子，很容易看出引理 3.10 对$\mathbf{KFr}_{lf}$也成立）。在底层范畴**DGrph** 中使用积的想法是错误的（来自**DGrph**积的投影是 p-态射，但映入**DGrph**积的显然候选泛映射未必是开的）。在 Lex($\mathbf{KFr}_f^{\mathrm{op}}$,**集合**)中很容易计算极限，但等价$\mathbf{KFr}_{lf} \simeq$ Lex($\mathbf{KFr}_f^{\mathrm{op}}$,**集合**)并非平凡。

相反，余极限 它们在 $\mathbf{KFr}_{lf}$ 中很容易直接计算，但若在 Lex($\mathbf{KFr}_f^{\mathrm{op}}$, **Set** 中计算，则相当复杂).

根据定义 2.6 以及 $\mathbf{MA}_f \simeq (\mathbf{KFr}_f)^{op}$ 这一事实，可以立即得到前有限模态代数的一个对偶刻画：

定理 4.5. 设 $\boldsymbol{MA}_f$ 为由有限模态代数构成的 $\boldsymbol{MA}$ 的全子范畴。那么，Pro$\boldsymbol{MA}_f$ 与 $\boldsymbol{KFr}_{lf}$ 对偶。

一个类似的关于刻画前有限海廷代数的结果（但仅限于对象）已在 [14 中获得].

5 前有限模态代数的单子性

现在，让我们回到遗忘函子 $\mathbf{KFr}_{lf} \to$ **集合** 和 $\mathbf{KFr}_{lf} \to$ **DGrph** （我们将它们统称为 U）；我们已经注意到，它们保留所有（小）余极限（因为它们是包含函子 $\mathbf{KFr}_{lf} \hookrightarrow \mathbf{KFr}$ 与相应的遗忘函子的复合），因此我们想知道它们是否具有右伴随。

定理 5.1. 遗忘函子 $\boldsymbol{KFr}_{lf} \to$ 集合 和 $\boldsymbol{KFr}_{lf} \to$ ***DGrph***具有一个右伴随。

证明。 由于我们要寻找一个右伴随，因此采用经典的“特殊伴随函子定理”（SAFT）的对偶版本结果 [10], 。我们检验对偶 SAFT 的条件是否由 U 满足：

- $\mathbf{KFr}_{lf}$、**集合** 和**DGrph** 具有小同态集；
- $\mathbf{KFr}_{lf}$ 具有所有小余极限并且 U 保持这些小余极限（如命题 4.2 和 3.8 所证）；
- $\mathbf{KFr}_{lf}$ 是良余共生成的：这一点显而易见，因为正如下面的引理 5.2 所示，$\mathbf{KFr}_{lf}$中的满态射与作为函数具有满射性的 p-态射一致。
- $\mathbf{KFr}_{lf}$ 有一个小生成集：事实上，来自本质小子范畴$\mathbf{KFr}_f$ 的对象构成$\mathbf{KFr}_{lf}$的生成集，因为$\mathbf{KFr}_{lf}$中的所有对象都是某个来自$\mathbf{KFr}_f$的图表的余极限。

□

引理5.2。 在 $\boldsymbol{KFr}$、$\boldsymbol{KFr}_f$ 和 $\boldsymbol{KFr}_{lf}$ 中，满态射与作为函数是满射的态射一致。

证明。 令 $f\colon (P,R) \to (Q,S)$ 为上述某个范畴中的一个态射，并考虑不交并$A := Q + (Q \setminus \mathrm{Im} f)$，其中函数（单射） $\iota_1\colon Q \to A$ （将每个元素映射到其在 A第一分量中的副本）以及 $\iota_2\colon Q \to A$ （将 $\mathrm{Im} f$ 中的元素映射到其在 A 第一分量中的副本，并将 $Q \setminus \mathrm{Im} f$ 中的元素映射到其在 A第二分量中的副本）。在 A上，考虑如下二元关系：对于 $a, b \in A$

$$aTb \Leftrightarrow \begin{cases} a = \iota_1(x), b = \iota_1(y), x, y \in Q \text{ and } xSy & \text{or} \\ a = \iota_2(x), b = \iota_2(y), x, y \in Q \setminus \mathrm{Im} f \text{ and } xSy & \text{or} \\ a = \iota_2(x), b = \iota_1(y), x \in Q \setminus \mathrm{Im} f, y \in \mathrm{Im} f \text{ and } xSy \end{cases}$$

借助这一关系， ι_1 和 ι_2 定义了 p-态射（可以验证， ι_1， $\iota_2\colon Q \rightrightarrows A$ 事实上是 $f\colon P \to Q$的余核对）。显然 $\iota_1 \circ f = \iota_2 \circ f$；若 f是满态射，则 $\iota_1 = \iota_2$，而这只有在 $Im(f) = Q$的情况下才成立。反过来，显然满射 p-态射是满态射。

□

结合定理 4.5 和塔斯基对偶，我们得到：

定理5.3。 遗忘函子 Pro$\boldsymbol{MA}_f \longrightarrow \boldsymbol{CABA}$有一个左伴随。

证明。 只需回忆一下，塔斯基对偶将集合 X 与完备原子布尔代数 $\mathcal{P}(X)$ 联系起来，因此复合函子 $\mathbf{ProMA}_f \simeq \mathbf{KFr}_{lf}^{op} \xrightarrow{U^{op}} \mathbf{Set}^{op} \simeq \mathbf{CABA}$ 将前有限模态代数与其底层布尔代数联系起来（相差一个自然双射）。

□

定理 5.4。 遗忘函子 U： $\boldsymbol{KFr}_{lf} \to \boldsymbol{Set}$ 是余单子的。

证明。 我们在对偶语境中检查 CTT（“粗三元组性定理”，参见 [15], 第 3.5 节或 [1], 定理 A1.1.2）的假设，因为我们想要证明余单子性。假设如下：

- U 有右伴随（参见前一个定理）。
- U 反映同构：事实上，很容易看出，**KFr**（以及 $\mathbf{KFr}^{lf}$,$\mathbf{KFr}^{f}$）中的态射 $f\colon (P,R) \to (Q,S)$ 是同构，当且仅当它作为函数是双射。[5]
- $\mathbf{KFr}^{lf}$ 具有并保留余自反对的等化子。事实上，在$\mathbf{KFr}^{lf}$ 中，等化子存在，且根据引理 3.10，其计算方式与 **KFr** 中的相同。如果我们考虑一个图表。

$$\begin{tikzcd} (P,R) \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & (Q,S) \arrow[l, bend right, "t"'] \end{tikzcd}$$

使得 $t \circ f = 1_P$和 $t \circ g = 1_P$，集合 $\{p \in P \mid f(p) = g(p)\}$是 P 的生成子框架：如果 $p \in P$满足 $f(p) = g(p)$ 且 pRp'，那么 $g(p) = f(p)Sf(p')$，因此存在 $p_1 \in P$使得 pRp_1且 $g(p_1) = f(p')$；必然有 $p_1 = tg(p_1) = tf(p') = p'$，所以我们可以得出结论， $f(p') = g(p')$。因此，根据注 3.11，我们得出结论： U 保留余自反对的等化子。

□

一般而言，单子函子不能复合；然而，若复合中的第一个部分满足 CTT，那么两个单子函子的复合仍是单子函子，参见 [15], 第 3.5 节。因此，由众所周知的事实——遗忘函子**CABA** $\longrightarrow$ **集合** 是单子函子（[1], 定理 A2.2.7）——以及定理 4.5 和 5.4，我们得出主要结果：

定理 5.5. 遗忘函子 $\mathrm{Pro}\boldsymbol{MA}_f \longrightarrow \boldsymbol{CABA}$ 和 $\mathrm{Pro}\boldsymbol{MA}_f \longrightarrow$ 集合 均为单子函子。

现在，我们希望进一步研究从 $\mathrm{Pro}\mathbf{MA}_f \longrightarrow$ **集合** 到集合的遗忘函子的左伴随，并探讨它与自由模态代数的前有限完备化之间的关系。

引理 5.6. 忠实包含$\boldsymbol{CAMA}_\infty \hookrightarrow \boldsymbol{MA}$ 保持极限。

证明。 这是因为 $\mathbf{CAMA}_\infty$ 中的极限与 **集合**中的极限计算方式相同，而这又是因为在完备原子布尔代数的底层范畴中情况如此（参见命题3.3(iii)中给出的无穷元等式公理化）。

□

理论 例 5.7。 包含函子 $\iota : \mathrm{Pro}\boldsymbol{MA}_f \hookrightarrow \boldsymbol{MA}$ 有一个左伴随 $\mathrm{PrC} : \boldsymbol{MA} \longrightarrow \mathrm{Pro}\boldsymbol{MA}^f$。

证明。 注意到 ι 是两个包含映射的复合。

$$\mathrm{Pro}\mathbf{MA}_f \hookrightarrow \mathbf{CAMA}_\infty \hookrightarrow \mathbf{MA},$$

两者均为保极限：第二个包含函子根据前引理保极限，而第一个包含函子保极限，因为它对偶于 $\mathbf{KFr}_{lf} \hookrightarrow$ **KFr**，后者根据命题 4.2 已知保余极限。此外，**MA**具有小同态集，SAFT 的其余条件由 $\mathrm{Pro}\mathbf{MA}^f$ 满足（我们在定理 5.1 的证明中检查了$\mathbf{KFr}^{lf}$ 的此类条件的对偶）。 □

函子 PrC 称为“前有限完备函子”；下文给出的上述伴随中的单位的刻画将阐明这一术语的由来。

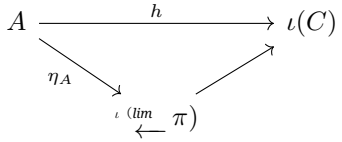
我们用 ι_f 表示函子 ι： $\mathrm{Pro}\mathbf{MA}_f \hookrightarrow \mathbf{MA}$ 在其定义域中的子范畴$\mathbf{MA}^f$ 上的限制，并对**MA**中的每个对象 A，考虑本质小的逗号范畴 $A \downarrow \iota_f$ 以及遗忘函子π： $A \downarrow \iota_f \to \mathbf{MA}_f \hookrightarrow \mathbf{MA}$，它将 $A \longrightarrow \iota_f(C)$ 关联到模态代数 C（并以类似方式作用于态射）。我们将 $A \downarrow \iota_f$ 的对象称为有限 A-模型 。

[5]请注意，th 对于**DGrph** 中的态射，这一结论并不成立；事实上，遗忘函子 **DGrph** $\longrightarrow$ **Set** 不是余单子。 c.

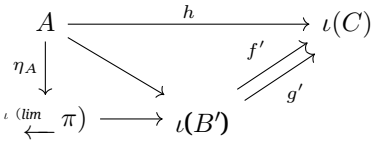
定理 5.8。 $\mathit{PrC}(A) \cong \mathit{lim}\leftarrow^{\pi}$ 以及态射 $A \to \iota(\mathit{lim}\leftarrow^{\pi}) \cong \mathit{lim}\leftarrow^{\iota\pi}$，由极限的泛性质所诱导，是伴随 $\mathrm{PrC} \dashv \iota$的单位。

证明。 考虑 J，它是 $A \downarrow \iota_f$ 的全子范畴，由那些作为函数满射的态射 $A \to \iota_f(B)$ 组成（这样的有限 A-模型称为 不可约），以及包含函子 $J \hookrightarrow (A \downarrow \iota_f)$。注意， J 是一个余滤范畴（更确切地说，它是一个余有向预序），且 J 是初始的，因此极限 $\mathit{lim}\leftarrow^{\pi}$ 与经由 J 对 π 作限制所得图表的极限同构；从现在起， π 表示这个受限的余滤图表。

我们必须证明，对于每个前有限模态代数 C A $h\ A \longrightarrow$、每个模态代数以及 MA ιC $\bar{h}$ 中的每个态射 $:(),$ 都存在唯一态射 $:\mathit{lim}_{\leftarrow}\ \pi \to C$（属于 ProMA$f$），使得复合 $(\mathit{lim}\leftarrow^{\pi})_{()}()$ 等于 $A \xrightarrow{\eta_A} \iota(\mathit{lim}\leftarrow^{\pi}) \xrightarrow{\iota\bar{h}} \iota C$ h（这里 η_A 是到该极限的泛映射）。由于 ProMAf 中的所有对象都是有限模态代数的（余滤）极限，因此很容易看出，我们可以将检验限制在 $C \in$**MA**f的情形。在这种情况下， $h\colon\ A \to \iota(C)$ 可通过其像分解为 $A \to \iota_f(B) \to \iota_f(C)$，其中 $A \to \iota_f(B)$ 是 J 的一个对象。将由极限的泛性质诱导的态射 $\eta_A\colon\ A \to \iota(\mathit{lim}\leftarrow^{\pi}) \cong \mathit{lim}\leftarrow^{\iota\pi}$ 与极限锥的态射 $\mathit{lim}\leftarrow^{\pi} \to^{\pi}(A \to \iota(B)) = B$ 经 ι 得到的像复合，我们得到态射 $A \to \iota(B)$；将 $\mathit{lim}_{\leftarrow}\ \pi \to B$ 与包含函子 $B \to C$复合，即可在 ProMAf 中找到所需的态射 $\mathit{lim}_{\leftarrow}\ \pi \to C$，使得图表



交换。我们需要证明这样的态射是唯一的。考虑两个态射 $f, g\colon \mathit{lim}_{\leftarrow}\ \pi \rightrightarrows C$ in ProMAf如上；由于 C属于 **MA**f，$\mathit{lim}\leftarrow^{\pi}$是一个余滤极限，而 **MA**$f$中的对象在 ProMA$f$中是有限余表现的，[6] f和 g经由 J中的某个 $A \to \iota(B')$ 分解为 $\mathit{lim}\leftarrow^{\pi} \to^{\pi}(A \to \iota(B')) = B' \overset{f'}{\underset{g'}{\rightrightarrows}} C$（$J$是余滤的，因此我们可以为 f 和 g选择同一个对象）。在下列交换图中



态射 $A \to \iota(B')$ 是满射，因此我们可以得出 $f' = g'$，这意味着 $f = g$。 □

定理 5.8 将在下一节中发挥作用，用于具体描述遗忘函子 ProMA$_f \longrightarrow$ **集合**的左伴随。

6 传递簇

我们的所有结果都可以轻松推广到有限可近似的模态代数簇（我们称一个模态代数簇有限可近似，当且仅当它由其有限成员生成）。[7] 事实上，我们所用到的关于**KFr** 的唯一性质是**KFr**f 在有限不交并、生成子框架和满射 p-态射下封闭；由于这些概念（对于有限模态代数）分别与有限积、商集和子代数对偶，显然，若考虑任意模态代数簇，所需的封闭性性质都成立。因此我们有

定理 6.1. 设 V 是一个可有限逼近的模态代数簇，并令 V_f 为属于 V的有限代数所构成的子范畴。那么，遗忘函子 $\mathrm{Pro}V_f \longrightarrow$ 集合 是单子函子；该伴随的单位由将定理 *5.8* 的极限构造应用于自由 V-代数而给出。

[6]关于对偶范畴 **KFr**$_f$中的对偶陈述，请参见定理 2.5 和定理 4.3 的证明。[7]在我们的语境中，考虑非有限可逼近的簇并无意义，因为逆极限有限代数由一个簇中的有限成员所确定。

定理 6.1 适用于例如由以下方程公理化的**S4** 内代数（也称为*S4*代数）这个簇。

$$x \wedge \Diamond x = x \qquad \Diamond\Diamond x = \Diamond x \ .$$

其 Thomason 对偶为内代数的 Kripke 框架所构成的等价类由预序集组成，即由那些满足 $\leq$ 具有自反性和传递性 [12] 的 Kripke 框架（$P,\ \leq$）组成。

另一个有趣的有限可近似模态代数簇例子是 Grzegorczyk 簇，该簇在以下结果的证明中有所提及：

定理 6.2. 前有限海廷代数是集合上的单子。

证明。 回顾一下，Heyting 代数是具有零元和单位元的分配格，并配备了一个额外的二元运算$\rightarrow$，使得对于其支集中的所有元素 a，偏序函子 $a \wedge (\text{–})$ 都是 $a \rightarrow (\text{–})$ 的左伴随。有限 Heyting 代数的范畴$\mathbf{Heyt}_f$与有限 Kripke 框架的范畴 ($P, \leq$) 对偶，其中 $\leq$ 是一个偏序集，即一个自反、传递且反对称的关系（态射为 p-态射，证明见 [16] ）。

现在让我们考虑 Grz模态代数的簇；属于该簇的模态代数是满足内 r
代数 额外公理

$$\top = \Box(\Box(x \rightarrow \Box x) \rightarrow x) \rightarrow x$$

（回想一下，$\Box y := \neg\Diamond\neg y$）。该簇可由有限代数逼近，而其 Thomason 对偶属于$\mathbf{Grz}$ 的 Kripke 框架类，由反身且传递的框架 $(P, \leq)$ 构成；这些框架不存在无限递增链 [12]

$$p_0 < p_1 < \cdots < p_i < \cdots$$

（这里 $p_i < p_{i+1}$ 表示 $p_i \leq p_{i+1}$ 和 $p_{i+1} \neq p_i$）。因此，一个有限 模态代数属于$\mathbf{Grz}$，当且仅当其对偶 Kripke 框架是偏序集。换言之，有限 Heyting 代数范畴与有限$\mathbf{Grz}$-代数范畴等价。因此，有限生成完备 Heyting 代数范畴与有限生成完备$\mathbf{Grz}$-代数范畴也等价。由定理 6.1 可知，等价函子 $\mathrm{Pro}\mathbf{Heyt}_f \simeq \mathrm{Pro}\mathbf{Grz}_f$ 与遗忘函子 $\mathrm{Pro}\mathbf{Grz}_f \longrightarrow$ **集合** 的复合是单子的（但请注意，这并非遗忘函子 $\mathrm{Pro}\mathbf{Heyt}_f \longrightarrow$ **集合**）。

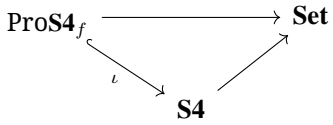
我们通过归纳法构造自由内代数的前有限完备化，从而结束本节；这一构造（用 Kripke模型的术语称为“通用模型构造”）利用了定理 5.8，并且在模态逻辑文献中广为人知，学界出于不同动机分别独立地提出过这一构造。[8] 我们沿用 [9] 的论述。

我们将 **PreO**、**PreO**$_{lf}$ 和 **PreO**$_f$ 分别称为预序集、局部有限预序集和有限预序集的范畴（态射始终为 p-态射）；注意，（**PreO**$_{lf}$）$^{op} \simeq \mathrm{Pro}\mathbf{S4}_f$以及（**PreO**$_f$）$^{op} \simeq \mathbf{S4}_f$。在局部有限预序集和有限预序集中（$P, R$），存在一个称为高度 的概念，它在证明中导出强有力的归纳论证。局部有限预序集中的点 p_1 （P, R）的高度 h（p_1）定义为链的最大基数

$$p_1 \, R \, p_2 \, R \cdots R \, p_n$$

使得 $p_{i+1} R p_i$ doe s 不适用于 $i = 1, \ldots, n-1$。由于 (P, R) 是局部有限的，且 R 是传递的，因此 $h(p)$ 是一个自然 l
数，大于或等于 1。

在以下分解中



遗忘函子 **S4** $\rightarrow$ **Set** 有一个左伴随 F（即“自由内代数”构造）；由于伴随函子可以复合，$\mathrm{Pro}\mathbf{S4}_f \rightarrow$ **Set** 的左伴随会将集合 X 映射为由 X生成的自由内代数的拟有限完备化。我们将这个代数称为 $\mathrm{PrC}_{\mathbf{S4}}(F(X))$：根据定理 6.1，它可计算为 $\mathrm{Pro}\mathbf{S4}_f$中的极限，其对应于范畴 J上的（滤过）图表 π；该范畴由不可约有限 $F(X)$-模型 $F(X) \rightarrow \iota_f(B)$组成（与定理 5.8 的构造唯一的区别在于，现在 B 是有限内代数，而不仅仅是有限模态代数）。从现在起，我们固定集合 X，并将有限和有限不可约$F(X)$-模型分别简称为有限模型 和有限不可约模型 。容易看出，这些恰好就是有限 Kripke 模型（采用.....中使用的标准意义）】【。

[8]在现有文献中，这种构造仅针对有限生成的自由内代数给出，因为只有在这一受限情形下，该构造才具备模态逻辑文献中所讨论的应用所需的“可定义性”性质。

模态逻辑文献）在自反且传递的 Kripke 框架上，针对由命题变量集合 X构成的命题模态语言。

根据 Thomason 对偶，有限模型（在同构意义下）具有如下形式 $F(X) \to (\mathcal{P}(P)\ \Diamond)$，其中某个 $(P,\ R) \in \mathbf{PreO}_f$（此处$\Diamond_R$ 是与关系 R 相关联的可能性算子，参见上文定理 3.5 的证明概要）；根据对偶性（$\mathbf{PreO}_f$）$^{op} \simeq \mathbf{S4}_f$，有限模型的态射是交换三角形。

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \longrightarrow & (\mathcal{P}(Q), \Diamond_S) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & (\mathcal{P}(P), \Diamond_R) \end{array}$$

由某个 p-态射 $(P, R) \to (Q, S)$ 在 $\mathbf{PreO}_f$ 中诱导的原像得到。利用 F 是从 $\mathbf{S4} \to \mathbf{Set}$ 出发的遗忘函子的左伴随，且幂集函子 $\mathcal{P} : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}^{\mathrm{op}}$ 是幂集函子$\mathcal{P} : \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ 的右伴随，我们得到如下双射对应关系。

$$\frac{F(X) \longrightarrow (\mathcal{P}(P), \Diamond_R)}{X \longrightarrow \mathcal{P}(P)} \qquad \frac{X \longrightarrow \mathcal{P}(P)}{P \longrightarrow \mathcal{P}(X)}$$

在 $\mathbf{S4}$ 中

在 **集合**

在**集合**中

通过这个双射，有限模型的范畴（$F(X) \downarrow \iota_f$）与以函数 $P \to \mathcal{P}(X)$（其中（P, R）属于$\mathbf{S4}_f$）为对象、以 p-态射 f:（P, R）$\to$（Q, S）属于 $\mathbf{S4}_f$ 为态射的范畴对偶；其中三角形

$$(\tau) \qquad \begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & \mathcal{P}(X) \\ \downarrow & \nearrow & \\ Q & & \end{array}$$

交换，作为态射（$P \to \mathcal{P}(X)$) $\longrightarrow$ ($Q \to \mathcal{P}(X)$).

根据定义，有限模型 $F(X) \to \iota_f(B)$ 不可约，当且仅当它作为函数是满射；也就是说，当且仅当由$\mathbf{S4}_f$中的单射态射 $B' \longrightarrow B$诱导的、属于 $(F(X) \downarrow \iota_f)$ 的每个映射 $(F(X) \to \iota(B')) \longrightarrow (F(X) \to \iota(B))$ 最终都是同构。现在注意到 Thomason 对偶将单射同态映射为满射 p-态射，因此可以得出：有限模型作为映射 $P \to \mathcal{P}(X)$（其中 (P, R) 是有限预序集）时，不可约当且仅当每个与上述三角形 (τ) 交换的 p- 态射 $f : (P, R) \to (Q, S)$ 都是同构。由这些观察可得以下结果：

命题 6.3. 设(P, R) 是一个有限预序集。有限模型 $v : P \to \mathcal{P}(X)$ 不可约，当且仅当对所有 $p_1, p_2 \in P$，以下两个条件成立：

a) $R(p_1) \simeq_{\mathcal{P}(X)} R(p_2) \implies p_1 = p_2$;

b) 并非以下两者同时成立：$R(p_1) \setminus \mathit{cl}_R(p_1) = R(p_2)$ 以及 $v(\mathit{cl}_R(p_1)) \subseteq v(\mathit{cl}_R(p_2))$。

这里，$cl_R(p_1)$ 表示 $\{q \in P \mid p_1 R q\ \&\ q R p_1\}$，而 $R(p_1) \simeq_{\mathcal{P}(X)} R(p_2)$表示存在一个有限模型的同构

$$\begin{array}{ccc} R(p_1) & \xrightarrow{v|_{R(p_1)}} & \mathcal{P}(X) \\ {\scriptstyle\phi}\downarrow{\scriptstyle\cong} & \nearrow_{v|_{R(p_2)}} & \\ R(p_2) & & \end{array}$$

使得 $\phi(p_1) = p_2$。

[9]注意，在预序集中我们有 $R(p_1) = R^*(p_1)$。

证明。 一方面，如果一个有限模型不满足上述两个条件，通过取一个恰当的余等化子来识别 p_1， p_2 ，从而将其“约化”，是很容易做到的（利用 p-态射的余等化子与在 **集合** 中的计算方式相同这一事实，参见命题 3.8 和 4.2）。另一方面，通过对有限预序集 P 的基数进行归纳，不难证明，在其上定义且满足上述两个条件的模型是不可约的。 □

根据上述命题给出的不可约有限模型刻画，我们现在可以明确描述与 $F(X)$ 的前有限完备化对偶的局部有限预序集（在模态逻辑文献中称为 X 上的“泛模型”）。该构造采用归纳法，即对 n 进行归纳，依次描述高度为 n 的点。

对于每个 $n \geq 0$，我们如下定义模型 v_n： $(P_n,\ R_n) \to \mathcal{P}(X)$。 P_0 是 $\emptyset$，而 v_0 是空包含函子。假设 v_n 已定义。令 P_n^+ 等于满足以下条件的有序对 $(Y,\ G)$ 的集合：(i) Y 是 $\mathcal{P}(X)$ 的非空有限子集，且 G 是 P_n 的一个生成子框架，其中至少包含一个高度为 n 的点；(ii) 若对某个 $p \in P_n$ 有 $G = R_n(p)$，则 $Y \nsubseteq v_n(\mathrm{cl}_{R_n}(p))$。令

$$
\begin{aligned}
P_{n+1} &:= P_n \cup \{(y, Y, G) \mid (Y, G) \in P_n^+ \ \&\ y \in Y\} \\
R_{n+1} &:= R_n \cup \{\langle (y, Y, G), (y', Y, G)\rangle \mid (Y, G) \in P_n^+ \ \&\ y, y' \in Y\} \cup \\
&\qquad \cup \langle \{(y, Y, G), q\rangle \mid (Y, G) \in P_n^+ \ \&\ y \in Y \ \&\ q \in G\} \\
v_{n+1}(p) &:= \begin{cases} v_n(p) & \text{if } p \in P_n \\ y & \text{if } p = (y, Y, G) \text{ for some } (Y, G) \in P_n^+ \ \&\ y \in Y \end{cases}
\end{aligned}
$$

换句话说，(P_n, R_n) 通过添加所有可能的、不能再约化的高度为 $n+1$ 的底部簇（簇是预序关系为全关系的子集）而扩展。容易通过归纳法看出，每个 $v_n : (P_n, R_n) \to \mathcal{P}(X)$ 都是不可约的，因为它满足 a) 和 b)。此外，对于某个 n，每个不可约模型都可以 $\mathcal{P}(X)$-嵌入到 $v_n : (P_n, R_n) \to \mathcal{P}(X)$ 中。因此，由这些模型构成的链在余极限构造中是最终的，该构造给出了与 $\mathrm{PrC}_{\mathbf{S4}}(F(X))$ 对偶的 Kripke 框架，所以这样的 Kripke 框架就是这条链上的集合论并。总之，我们有】【。

定理 6.4. $\mathrm{PrC}_{\mathbf{S4}}(F(X)) \ \cong\ \langle \mathcal{P}(\bigcup_{n\geq 0} P_n)\ \Diamond_{\bigcup R_n}\rangle$.

7 结论

我们利用 Thomason 对偶，确定了 Kripke 框架范畴的一个全子范畴，该子范畴与前有限模态代数对偶；这个子范畴（局部有限 Kripke 框架范畴 $\mathbf{KFr}^{lf}$）表现得出人意料地良好，从该范畴到集合范畴的遗忘函子最终被证明是余单子的。这使得前有限模态代数成为 **Set** 上的单子对象，并将完备原子布尔代数广为人知的单子性结果推广到了模态逻辑。单子本身也很有趣：从对偶 Kripke模型的角度看，它对应于模态逻辑界广为人知的通用模型构造。

还需要进一步研究诸如 $\mathbf{KFr}^{lf}$ 这样的范畴的正合性，尤其是其与**MA**的传递子簇之间的对应关系。根据初步分析，在某些有限但具有相关性的情形下，可以获得正则性；而正合性则可能产生类似于 [16] 中有限呈示海廷代数范畴的对偶范畴所表现出的反例。

最后，由第4节的结果可知，$\mathbf{KFr}^{lf}$ 是一个局部有限呈示范畴，因此它是某一本质代数的一阶理论的模型范畴：找出这样一种理论将会很有意思（这一任务因$\mathbf{KFr}^{lf}$ 中的态射是p-态射，而不仅仅是稳定映射这一事实而变得困难）。

参考文献

[1] Peter T. Johnstone. 《大象素描》：托扑斯理论概要。第*1*卷，《牛津逻辑指南》第43卷。克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，2002年。[2] S. K. Thomason. 模态逻辑的框架范畴。《符号逻辑杂志》，40(3):439–442，1975年。[3] Francis Borceux. 《范畴代数手册》。剑桥大学出版社，1994年。[4] Enrico M. Vitale. 关于集合上的单子范畴的刻画。《拓扑、微分几何与范畴 *Cahiers*》，35(4):351–358，1994年。[5] Leo Esakia 和 Revaz Grigolia. 圣诞树：闭包代数某些簇中的自由循环代数。波兰科学院哲学与社会学研究所逻辑部通报，4(3):95–102，1975年。

[6] Valentin B. Shehtman. Rieger-Nishimura格。苏联科学院通报，19:1014–1018，1978年。[7] Fabio Bellissima. 有限生成自由 Heyting 代数。《符号逻辑杂志》，51(1):152–165，1986年。[8] Fabio Bellissima. 有限生成自由内代数的有效表示。《普遍代数》，20(3):302–317，1985年。[9] Silvio Ghilardi. 不可约模型与可定义嵌入。载于逻辑讨论会 *'92*，《逻辑、语言与信息研究》，第95–113页。CSLI出版社，斯坦福，加利福尼亚州，1995年。[10] Saunders Mac Lane.《工作数学家的范畴论》，第5卷。施普林格科学与商业媒体公司，2013年。[11] Peter T Johnstone. *Stone*空间，第3卷。剑桥大学出版社，1982年。[12] Alexander Chagrov 和 Michael Zakharyaschev. 模态逻辑，《牛津逻辑指南》第35卷。克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，1997年。牛津科学出版物。[13] Guram Bezhanishvili、Nick Bezhanishvili 和 Rosalie Iemhoff. 稳定典范规则。《符号逻辑杂志》，81(1):284–315，2016年。[14] Guram Bezhanishvili 和 Nick Bezhanishvili. 前有限海廷代数。《序》，25(3):211–227，2008年。[15] Michael Barr 和 Charles Wells.《托普斯、三元组与理论》，《数学科学基础丛书》第278卷 *[*《数学科学基础原理》*]*。施普林格出版社，纽约，1985年。[16] Silvio Ghilardi 和 Marek Zawadowski.《层、博弈与模型完备化：非经典命题逻辑的范畴论方法》。施普林格出版公司，2011年。

8 附录

这里补充一些背景结果的缺失证明。回顾一下，在布尔代数 B 中，原子 是一个非零极小元；如果该代数是完备的，那么原子也可以等价地定义为并不可约元，即满足以下性质的元素 a：对于任意 $C \subseteq B$，若有 $a \leq \bigvee C$，则存在 $c \in C$，使得 $a \leq c$。

命题3.3 对于一个布尔代数 B，以下条件等价：

- B 已完整且不可分割；
- B 同构于一个幂集布尔代数；
- B 是完备的，并满足无穷分配律：

$$\bigwedge_{i\in I}\bigvee X_i = \bigvee_{f\in\prod_{i\in I} X_i}\bigwedge_{i\in I} f(i)$$

  对于 $\{X_i\}_{i\in I}$ 的每个子集族 B。

证明。 完备布尔代数 B 是原子的，当且仅当它的每个元素 $b \in B$ 都可以写成满足 $a \leq b$的原子 $a \in B$ 的析取。对于布尔代数 B，我们可以考虑态射

$$\eta_B : B \to \mathcal{P}(Atoms(B)), \tag{1}$$

它将每个元素 $b \in B$ 映射到所有低于它的原子构成的集合；根据上述观察，如果 B 是完备且原子的，那么 η_B必定是一个同构。
如果 B 同构于某个幂集布尔代数，那么很容易看出它是完备的，并且满足无穷分配律。

如果 B 是完备的并满足无穷分配律，那么我们可以写成

$$\top = \bigwedge_{b\in B}(b \vee \neg b) = \bigvee_{f\in\prod_{b\in B}\{b,\neg b\}}\bigwedge_{b\in B} f(b)$$

我们定义 $a(f) := \bigwedge_{b\in B} f(b)$ 对所有 $f \in \prod_{b\in B}\{b, \neg b\}$。给定 $b' \in B$和 $f \in \prod_{b\in B}\{b, \neg b\}$，使得 $a(f) \neq \bot$，

$$b' \wedge a(f) \neq \bot \implies f(b') = b' \text{ (by definition of } a(f)) \implies a(f) \leq b'$$

反之亦然，这显然也是成立的；这意味着 $\{a(f) \mid f \in \prod_{b\in B}\{b, \neg b\}$ &$a(f) \neq \bot\}$ 是 B 的原子集合，并且，由于

$$b' = b' \wedge \top = b' \wedge \bigvee_{f\in\prod_{b\in B}\{b,\neg b\}} a(f) = \bigvee_{f\in\prod_{b\in B}\{b,\neg b\}} b' \wedge a(f)$$

对于每个 $b' \in B$，我们得出结论： B 是原子的。 □

定理 3。4 *[塔斯基对偶]/CABA* 与集合对偶。

证明。 我们有一个函子

$$\mathcal{P} : \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{CABA}$$

将一个集合 X 发送到布尔代数 $\mathcal{P}(X)$ 中，我们已经证明该布尔代数是完备且原子的。给定一个函数 $f : X \to X'$, $\mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(X') \to \mathcal{P}(X)$ 将一个子集 $S' \subseteq X'$ 映射到其原像 $f^{-1}(S')$；很容易看出，它定义了完备且原子的布尔代数之间的一个态射。

反之，我们有函子

$$Atoms : \mathbf{CABA} \longrightarrow \mathbf{Set}^{\mathrm{op}}$$

将完备原子布尔代数 B 映射到其原子组成的集合原子(B)。给定完备原子布尔代数的态射 $\mu : B \to B'$，我们可以取其左伴随 $\mu^* : B' \to B$。 μ^* 限制为一个函数 原子(μ) :原子(B') $\to$原子(B)：事实上，给定 $a' \in$原子(B') 和 $C \subseteq B$，若 $\mu^*(a') \leq \bigvee C$（即 $a' \leq \mu(\bigvee C) = \bigvee \mu(C)$），则存在 $c \in C$ 使得 $a' \leq \mu(c)$，也就是说，存在 $c \in C$ 使得 $\mu^*(a') \leq c$。

完备原子布尔代数的同构 (1) $\eta_B : B \to \mathcal{P}($原子$(B))$ 在 B 中是自然的，而函数$\epsilon_X : X \to$ 原子$(\mathcal{P}(X))$ 将 $x \in X$ 映射为单元素集合 $\{x\}$，它是**集合** 中的一个同构，并且在 X 中是自然的。这两个映射分别是该等价的单位和余单位。 □

定理 3。5 *[Thomason 对偶]/CAMA*$_\infty$ 与 ***KFr*** 对偶。

证明。 与塔斯基对偶类似，我们有一对函子

$$\mathcal{P} : \mathbf{KFr}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{CAMA}_\infty$$

and

$$Atoms : \mathbf{CAMA}_\infty \longrightarrow \mathbf{KFr}^{\mathrm{op}}$$

事实上，给定一个 Kripke 框架 (P, R)，我们可以定义一个菱形算子 $\Diamond_R$: $\mathcal{P}(P) \to \mathcal{P}(P)$，将 $A \in \mathcal{P}(P)$ 映射到 $\{p \in P \mid \exists p' \in A$s.t. $pRp'\}$（容易验证该算子与任意上确界可交换），从而使 $\mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(Q) \to \mathcal{P}(P)$ 成为完全可加的完备且原子模态代数之间的态射，对每个 Kripke 框架的 p-态射 $f : P \to Q$均如此。

反过来，给定一个完全可加的完备且原子模态代数 M，我们可以在其原子的集合上定义如下关系：对于 $a, a' \in$原子(M),

$$aR_M a' \Leftrightarrow a \leq \Diamond a'$$

对于 **CAMA**$_\infty$ 中的每个态射 $\mu : M \to N$，函数 原子(μ) : 原子(N) $\to$原子(M) 关于关系 R_N 和 R_M是稳定且开的:

- 如果 $bR_N b'$（即 $b \leq \Diamond b'$），那么 $\mu^*(b) \leq \mu^*(\Diamond b') \leq \Diamond\mu^*(b')$（由 $b' \leq \mu(\mu^*(b'))$，可得 $\Diamond b' \leq \Diamond\mu(\mu^*(b'))$ $=\mu(\Diamond\mu^*(b'))$，即 $\mu^*(\Diamond b') \leq \Diamond\mu^*(b')$）；这意味着 $\mu^*(b)R_M\mu^*(b')$】【。

- 若 $\mu^*(b) R_M a'$，即 $\mu^*(b) \leq \Diamond a'$，则 $b \leq \mu(\Diamond a') = \Diamond \mu(a') = \Diamond \bigvee \{b' \mid b' \in$ 原子(N) 和 $b' \leq \mu(a')\} = \bigvee \{\Diamond b' \mid b' \in$ 原子(N) 和 $b' \leq \mu(a')\}$（是原子的且完全可加的）；但此时存在$b' \in$ 原子(N)，使得 $b \leq \Diamond b'$ 且 $b' \leq \mu(a')$（即 $\mu^*(b') \leq a'$，因此 $\mu^*(b') = a'$，是 a' 且 $\mu^*(b')$ 原子），也就是说，存在 $b' \in$原子(N)，使得 $b R_N b'$ 且 $\mu^*(b') = a'$。

至于塔斯基对偶，我们有一对自然同构，$\eta_M \colon M \to \mathcal{P}($原子$(M))$，位于 $\mathbf{CAMA}_\infty$，以及 $\epsilon_P \colon P \to$原子$(\mathcal{P}(P))$，位于 **KFr** 中，并满足三角恒等式。 □