arXiv:2305.04601v1 [math.DG] 8 May 2023

二阶无穷小群与仿射联络

Filip Bár

谨以此文纪念 *Bill Lawvere*（*09.02.1937 - 23.01.2023*）

摘要

本文通过引入无穷小群的概念，并探讨其性质及影响，介绍了无穷小代数领域的新研究。作者研究了李群的一阶和二阶子群，并展示了如何利用二阶无穷小群结构定义一种内在于李群的点的李括号。这一构造使得我们能够推导出无穷小群运算的二阶 Baker-Campbell-Hausdorff公式，并提供了一种重构李群李代数的李括号的方法。作者还将 KL 向量空间上的所有二阶无穷小群结构刻画为由双线性映射对向量加法作出的变形。本文的主要贡献，是通过二阶无穷小群，将此前确立的对称仿射联络与二阶无穷小仿射结构之间的对应关系推广到具有非对称仿射联络的流形上。

1 引言

综合微分几何 （SDG）精确地刻画了无穷小的概念，使我们能够研究和建模根深蒂固的直觉，以及基于无穷小论证的隐含构造；这些论证促成了流形微分几何的发展。例如，在 [9, 定理 2.2]中，Kock 表明，所有形式流形在无穷小层面上都具有仿射几何，因为它们允许对彼此无穷小接近的点族进行仿射组合。这阐明了如何直接在流形上运用完整的仿射组合代数，而不必依赖坐标图。Kock 在后续工作中反复且充分地运用了这一事实；其中最值得一提的是 [10]。

为了理解并应用仿射情形之外的理论的无穷小模型，作者着手发展并研究了代数理论的无穷小模型这一概念，见 [1]（另见 [3][1]）。在这一框架下，Kock 的结果可表述如下：每个形式流形都是仿射组合代数理论的自然无穷小模型；它带有一种自然的（幂零平方）无穷小结构，该结构定义了

[1]每当本文提及 [3] 时，为了使其适用于合成微分几何，我们都需要考虑在格罗滕迪克托扑斯上进行的一切，而不是像 [3] 中那样考虑集合范畴。正如 [3] 中所指出的，利用格罗滕迪克托扑斯的内部语言和逻辑，所有结果都可以推广到这种情形。（关于这一更一般设定下的一些证明，请参见 [1] 。）

无穷接近的点的元组，而仿射组合恰好定义在满足仿射空间所有熟知方程的这些元组上。

超越幂零平方的情形后，作者在 [2] 中证明，形式流形上的二阶无穷小结构所对应的仿射组合模型与对称仿射联络相对应。这说明，在研究无穷小代数时，将其视为一种结构而非形式流形的一种性质，确实是恰当的。

然而，迄今为止所考察的代数理论实例仅有仿射空间和向量空间。本文将通过研究（非阿贝尔）无穷小群来弥补这一空白。我们将证明，单位元[2] 的一阶和二阶单子是李群的自然无穷小子群。此外，我们还将能够直接从无穷小群结构中恢复李群的基本微分几何构造。

例如，在二阶情形下，我们将把点的李括号定义为一种类似代数交换子的运算，并利用它证明无穷小群运算由二阶 Baker-Campbell-Hausdorff公式 [7]给出。将点的李括号通过一阶 log-exp 双射提升到单位元处的切空间，我们便可恢复李群李代数中熟悉的李括号。利用二阶 log-exp 双射将二阶无穷小群结构传递到李代数上，便得到 KL 向量空间上第二类二阶无穷小群实例，即截断形式群律 [4], [6]。我们将证明，KL 向量空间的所有二阶子群都由此方式得到。

基于这样一个观察：点的李括号等于挠率的负值，我们可以仅凭李群上的左不变联络，重新构造二阶无穷小群结构。这一观察使我们能够将 [2] 中的主要结果推广到形式流形上的（非对称）仿射联络：我们将证明，仿射联络与流形上每一点处二阶单子的无穷小群结构相对应。当且仅当仿射联络是对称的，这些群才是阿贝尔群（并且与二阶无穷小线性结构一致）。

2 预备知识

为方便读者，我们将回顾综合微分几何（SDG）框架下无穷小仿射空间和向量空间的无穷小代数基本概念，并陈述与本文相关的主要结果。[3] 与 [10] 和 [2]一样，我们将遵循 SDG 的朴素公理化方法；也就是说，我们将在满足以下三条*Kock-Lawvere* 公理 的 $\mathbb{Q}$ 代数 R 上进行研究，这些公理针对一阶和二阶无穷小量空间 $D(n)$ 和 $D_2(n)$，以及无穷小空间 $D_2(2, R^n)$，对所有 $n \geq 1$均成立：

[2]在无穷小微积分中，将“单子”用作连续统的“原子”这一术语可追溯至莱布尼茨；Kock 借用这一术语来指称一个点的无穷小邻域。[3]更详细的阐述见 [2] ；有关代数理论的无穷小模型的一般理论见 [3], [1] 。请注意，Kock-Lawvere 公理 (III)和一阶无穷小结构并未出现在此前发表的研究中。

(I) 对于每个映射 $t:\ D(n) \to R$，都存在唯一的 a_0、……、$a_n \in R$，使得

$$t(d_1, \ldots, d_n) = a_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j d_j,$$

w这里 $D(n)$ 表示集合 $D(n) = \{(d_1, \ldots, d_n) \in R^n \mid d_i d_j = 0,\ 1 \le i, j \le n\}$

(II) 每个映射 $t:\ D_2(n) \to R$ 都是多项式函数，且对应于唯一确定的 $R[X_1, \ldots, X_n]$ 中的总次数为 ≤ 2的多项式

$$t(d_1, \ldots, d_n) = a_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j d_j + \sum_{1 \le j \le k \le n} a_{jk} d_j d_k,$$

其中 $D_2(n)$ 表示集合

$$D_2(n) = \{(d_1, \ldots, d_n) \in R^n \mid \text{any product of three } d_j \text{ vanishes}\}$$

(III) [4] 每个映射 $t:\ \tilde{D}_2(2,\ R^n) \to R$ 都是多项式函数，且对应于唯一确定的 $R[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n]$ 中的总次数为 ≤ 2

$$\begin{aligned} t(\delta, \varepsilon) =& a_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j \delta_j + \sum_{1 \le j \le k \le n} a_{jk} \delta_j \delta_k \\ &+ \sum_{j=1}^{n} b_j \varepsilon_j + \sum_{1 \le j \le k \le n} b_{jk} \varepsilon_j \varepsilon_k + \sum_{1 \le j \le k \le n} c_{jk} \delta_j \varepsilon_k \end{aligned}$$

˜其中 $D_2(2, R^n)$ 表示集合

$$\tilde{D}_2(2, R^n) = \{(\delta, \epsilon) \in (R^n)^2 \mid x_j x_k x_\ell = x_j x_k y_\ell = 0,\ x, y \in \{\delta, \epsilon\},\ 1 \le j, k, \ell \le n\}$$

一个（有限维）**KL 向量空间**是一个 R-模 $V \cong R^n$。[5] 我们定义

$$\begin{aligned} D(V) &= \{v \in V \mid \phi[v]^2 = 0 \text{ for all bilinear maps } \phi : V^2 \to R\}, \\ D_2(V) &= \{v \in V \mid \phi[v]^3 = 0 \text{ for all trilinear maps } \phi : V^3 \to R\}, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \tilde{D}_2(2, V) = \{(v, w) \in V^2 \mid \phi[x]^3 = \phi[x, x, y] = 0, \\ x, y \in \{v, w\} \text{ for all trilinear } \phi : V^3 \to R\}, \end{aligned}$$

其中，对于一个 ℓ-线性映射 $\phi:\ V^\ell \to W$，$\phi[v]^\ell$ 表示在 ℓ-元组 $(v, \ldots, v)$ 上取 ϕ 的值。在 $V = R^n$ 的情况下，我们有 $D(V) = D(n)$，$D_2(V) = D_2(n)$ [10, 命题 1.2.2]，以及 ˜ ˜$D_2(2, V) = D_2(2, R^n)$。

[4]我们只会在定理 3.13 中刻画二阶无穷小群结构时要求这一公理。请注意，在合成微分几何的良适配模型（以及扎里斯基模型）中，整个 Kock–Lawvere 公理模式均由 R 满足，包括公理 (I)、(II) 和 (III) [10, 第 1 章。3], [5], [8]。[5]本文假设所有 KL 向量空间都是有限维的。

公理 (II) 的一个重要推论是，每个映射 $f:\ V \to W$ （定义在 KL 向量空间之间）都有唯一的泰勒表示。

$$f(P) - f(Q) = \partial f(Q)[P-Q] + \frac{1}{2}\partial^2 f(Q)[P-Q]^2$$

如果 $P - Q \in D_2(V)$。这里， R-线性映射 $\partial f(P_1)$ 表示 f 在 P_1处的导数，而 $\partial^2 f(Q)$ 表示 f 在 Q处的二阶导数，它是一个对称的 R-双线性映射 $V^2 \to W$。在 $P - Q \in D(V)$ 的情形下，公理 (I) 给出一阶泰勒表示

$$f(P) - f(Q) = \partial f(Q)[P-Q].$$

定义 2.1 (i-结构)。设 A 是一个空间。A 上的一个**无穷小结构（i-结构）**是一个由 $\mathbb{N}$ 索引的族 $n \mapsto A\langle n\rangle \subseteq A^n$，满足

(1) $A\langle 1\rangle = A$, $A\langle 0\rangle = A^0 = 1$ （“单点”空间，或终对象）

(2) 对于有限集之间的任意映射 $h:\ m \to n$，以及任意的 $(P_1, \ldots, P_n) \in A\langle n\rangle$，都有 $(P_{h(1)}, \ldots, P_{h(m)}) \in A\langle m\rangle$

一个位于 $A\langle n\rangle$ 中的 n 元组 $(P_1, \ldots, P_n) \in A^n$ 记作 $\langle P_1, \ldots, P_n\rangle$，我们将这些点称为无穷小邻点。保持 i-结构的映射 $f:\ A \to X$，即满足 $f^n(A\langle n\rangle) \subseteq X\langle n\rangle$，称为*i-态射*。

在任意 KL 向量空间 V 上，对角线的第一邻域

$$\{(P_1, P_2) \mid P_2 - P_1 \in D(V)\} = V\langle 2\rangle$$

诱导出**幂零平方 i-结构**

$$V\langle m\rangle = \{(P_1, \ldots, P_m) \mid (P_i, P_j) \in V\langle 2\rangle,\ 1 \le i, j \le m\}$$

该 i-结构由 $V\langle 2\rangle$ 生成，并且是包含对角线第一邻域的最大 i-结构。我们还将定义其上的**一阶 i-结构** $V_1\,V$

(1) $V_1\langle 1\rangle = V$, $V_1\langle 0\rangle = V^0 = 1$

（2）对于 $m \ge 2$

$$V_1\langle m\rangle = \{(P_1, \ldots, P_m) \in V^m \mid (P_{i_1} - P_{j_1}, P_{i_2} - P_{j_2}) \in \mathrm{DN}_1(V), \\ \text{for all } i_\ell, j_\ell \in \{1, \ldots, m\}, 1 \le \ell \le 2\}$$

其中 $\mathrm{DN}_1(V)$ 是集合

$$\mathrm{DN}_1(V) = \{(v_1, v_2) \in D(V)^2 \mid \text{For any bilinear map } \phi : V^2 \to R,\ \phi[v_1, v_2] = 0\}$$

对于 $n = 2$，一阶 i-结构与幂零平方 i-结构相同；即 $V\langle 2\rangle = V_1\langle 2\rangle$。然而，一阶 i-结构真包含于幂零平方 i-结构中，因为 $\langle P, Q, R\rangle \in V\langle 3\rangle$ 只能推出 $\phi[Q-P, R-P]$ 是交替的，但不一定 $\phi[Q-P, R-P] = 0$.[6]

对角线的第二邻域

$$\{(P_1, P_2) \mid P_2 - P_1 \in D_2(V)\} = V_2\langle 2\rangle$$

诱导出**二阶 i-结构** V_2 于 V

[6]截至目前，合成微分几何（SDG）的已发表研究中尚未明确出现一阶 i-结构。其重要性将在第 3 节中得到阐明。

(1) $V_2\langle 1\rangle = V$, $V_2\langle 0\rangle = V^0 = 1$

(2) 对于 $m \geq 2$

$$V_2\langle m\rangle = \{(P_1, \ldots, P_m) \in V^m \mid (P_{i_1} - P_{j_1}, P_{i_2} - P_{j_2}, P_{i_3} - P_{j_3}) \in \mathrm{DN}_2(V), \\ \text{for all } i_\ell, j_\ell \in \{1, \ldots, m\}, 1 \leq \ell \leq 3\}$$

其中 $\mathrm{DN}_2(V)$ 是集合

$$\mathrm{DN}_2(V) = \{(v_1, v_2, v_3) \in D_2(V)^3 \mid \text{对于任意三线性映射 } \phi\colon V^3 \to R, \phi[v_1, v_2, v_3] = 0\}$$

对于 i-结构，我们有如下关系

$$V_1 \hookrightarrow V, \qquad V_1 \hookrightarrow V_2,$$

其中所有包含关系都是严格的。尽管我们有 $V\langle 2\rangle \subset V_2\langle 2\rangle$, $V\langle 3\rangle$ 不包含于 $V_2\langle 3\rangle$，但如果 $\dim V > 2$。这就是幂零平方 i-结构不能嵌入二阶 i-结构的原因。

命题 2.2. *KL 向量空间之间的每个映射 $f : V \to W$ 都是相应的幂零平方、一阶和二阶 i-结构的 i-态射。*

证明。这分别由一阶和二阶泰勒展开，以及一阶和二阶 i-结构的定义直接计算即可得出 [2,定理 3。2]。

□

定义 2.3 （i-仿射空间）。设 $A\langle -\rangle$ 是 A 上的一个 *i*-结构。令 $\mathcal{A}(n) = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in R^n \mid \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1\}$。若对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都存在满足以下条件的运算，则称空间 A 为一个**无穷小仿射空间（i-仿射空间）**（在 R 上）：

$$\mathcal{A}(n) \times A\langle n\rangle \to A, \qquad ((\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \langle P_1, \ldots, P_n\rangle) \mapsto \sum_{j=1}^n \lambda_j P_j$$

满足公理

- （邻域）设 $\lambda^k \in \mathcal{A}(n)$, $1 \leq k \leq m$。若 $\langle P_1, \ldots, P_n\rangle \in A\langle n\rangle$，则

$$\Big(\sum_{j=1}^n \lambda_j^1 P_j, \ldots, \sum_{j=1}^n \lambda_j^m P_j\Big) \in A\langle m\rangle$$

- （结合律）设 $\lambda^k \in \mathcal{A}(n)$, $1 \leq k \leq m$, $\mu \in \mathcal{A}(m)$，并且 $\langle P_1, \ldots, P_n\rangle \in A\langle n\rangle$。我们有

$$\sum_{k=1}^m \mu_k \Big(\sum_{j=1}^n \lambda_j^k P_j\Big) = \sum_{j=1}^n \Big(\sum_{k=1}^m \mu_k \lambda_j^k\Big) P_j$$

(注意，左侧由于邻域公理而定义良好。)

- （投影）令 $n \geq 1$，并令 $e_k^n \in R^n$ 表示$1 \leq k \leq n$的第 k个标准基向量。对于每个 $\langle P_1, \ldots, P_n\rangle \in A\langle n\rangle$，均有

$$\sum_{j=1}^{n} (e_k^n)_j P_j = P_k$$

特别地，对于 $n = 1$，我们有 $1P = P, P \in A$。

如果一个 i-仿射空间之间的 i-态射与取 i-仿射组合的运算可交换，则称其为 *i*-仿射映射。

命题 2.4. *(1)* 每个 *KL* 向量空间都可在幂零平方和一阶 *i*-结构下成为一个 *i*-仿射空间，并且 *KL* 向量空间之间的任意映射都是 *i*-仿射映射。

(2) 每个 *KL* 向量空间都通过二阶 *i*-结构成为 *i*-仿射空间。然而，*KL* 向量空间之间的映射不一定是 *i*-仿射的。

证明。 这分别由取一阶和二阶泰勒展开，并根据二阶 i-结构的定义，通过直接计算即可得出。 [9, 引理 2。1]和[2,定理 3。3]。 □

在 R 上的 **i-向量空间**以同样的方式定义，即将每个仿射组合集 $\mathcal{A}(n)$ 替换为 R-线性组合集 R^n。注意，对于每个 $P \in A$，i-仿射空间 A 会在每个 单子 $\mathfrak{M}(P)$ 上诱导出一个 i-向量空间结构。

$$\mathfrak{M}(P) = \{Q \in A \mid \langle P, Q\rangle \in A\langle 2\rangle\}$$

配备诱导的 i-结构

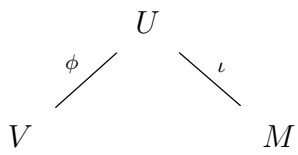
$$\mathfrak{M}(P)\langle n\rangle = \{(Q_1, \ldots, Q_n) \in \mathfrak{M}(P)^n \mid \langle P, Q_1, \ldots, Q_n\rangle \in A\langle n+1\rangle\}$$

通过定义

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j Q_j; = \big(1 - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\big) P + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j Q_j$$

对于任意的 $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in R^n$ 和 $\langle Q_1, \ldots, Q_n\rangle \in \mathfrak{M}(P)\langle n\rangle$。点 P作为 $\mathfrak{M}(P)$中的零向量。

一个**形式流形** M 是一个具有由形式开子空间 $U \rightarrowtail M$构成的覆盖的空间，这些子空间也是有限维 KL 向量空间 V的形式开子空间。我们称这些子空间为 M的坐标图 。



在空间 X 中， $U \rightarrowtail X$ 是形式开意味着 U 在每个点处都对所有“无穷小运动”保持稳定。在我们的情形中，实际上只要求：对于每个$P \in U$以及任意映射 $t\colon D(n) \to X, q\colon D_2(n) \to X$，若 $t(0)$ $s(0)$ $\in U$，则对所有 $n \geq 1$，映射 t和 s都通过 U 分解。（一般定义见 [10, I.17] 或 [1, 定义 3.2.5] 。）

KL 向量空间 V通过限制（= 拉回）在任意形式开子空间 $\iota\colon U \rightarrowtail V$上诱导出幂零平方、一阶和二阶 i-结构。嵌入 ι成为一个 i-态射，且是无穷小闭的（i-闭的），也就是说，如果 $\langle P_1, \ldots, P_n\rangle \in U\langle n\rangle$以及 $\langle \iota(P_1) \ldots, \iota(P_n)\ Q\rangle \in V\langle n+1\rangle$，那么存在 $P_{n+1} \in U$，使得 $\langle P_1, \ldots, P_n, P_{n+1}\rangle$属于 $U\langle n+1\rangle$，并且 $\iota(P_{n+1}) = Q$。这对所有三种 i-结构均成立。

引理 2.5。 设 $U \rightarrowtail V$ 是 *KL* 向量空间 V 的形式开子空间。

(1) U 是相对于诱导的幂零平方、一阶和二阶 *i*-结构的 *i*-仿射子空间。

(2) KL 向量空间的形式开子空间之间的任意映射都是 *i*-态射。

(3) 配备幂零平方或一阶 *i*-仿射结构的 *KL* 向量空间的形式开子空间之间的任意映射都是 *i*-仿射映射。

证明。(i) 根据命题 2.4， V 对于所有这些 i-结构都是 i-仿射空间。设$\langle P_1$、……、 $P_n\rangle \in U\langle n\rangle$。邻域公理蕴含，对于任意仿射组合 $\lambda \in \mathcal{A}(n)$， $\langle \iota(P_1)$……、 $\iota(P_n)$ $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \iota(P_j)\rangle$。由于 ι 是 i-闭的单态射，这便在 U 的 i-结构上定义了仿射组合运算，使 ι 成为 i-仿射映射。此外，由于 ι: $U \rightarrowtail V$ 按构造保留 i- 结构，即 $\langle \iota(P_1)$…… 、 $\iota(P_n)\rangle$ 蕴含 $\langle P_1$ 、 …… 、 $P_n\rangle$，因此这些 i- 仿射组合满足邻域公理。结合律和投影公理也成立，因为 ι 是单态射。这表明U 对于这三种 i-结构都是 i-仿射子空间。

(ii) 断言 (2) 和 (3) 可以如下看出。由于 ι 是 i-闭的，它包含每个 $P \in U$ 对应的单子 $\mathfrak{M}(P)$。对于幂零平方和一阶 i-结构，我们有 $\mathfrak{M}(P) \cong D(V)$；对于二阶 i-结构，我们有 $\mathfrak{M}_2(P) \cong D_2(V)$。[7,8] 根据 Kock-Lawvere 公理，任意映射 $f\colon \mathfrak{M}_{(2)}(P) \to W$ 都有唯一的仿射延拓或二次延拓 $f\colon V \to W$ ，具体取决于 i-结构。根据命题 2.2，这些映射都是 i-态射。此外，对于幂零平方和一阶 i-结构的情形，根据命题 2.3 (1)， f 还保持 i-仿射组合。由于形式开子空间会反映 i-结构，因此上述所有性质对于形式开子空间之间的映射也都成立。

□

命题 2.6。 设 M 是一个形式流形。

(1) M 带有由其坐标图诱导的幂零平方、一阶和二阶 *i*-结构，并且形式流形之间的任何映射对于各自的 *i*-结构都是 *i*-态射。我们有

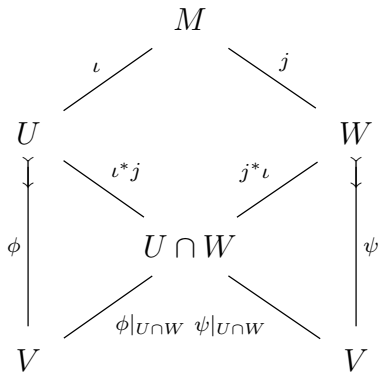
$$M_1 \hookrightarrow M, \qquad M_1 \hookrightarrow M_2.$$

(2) M 在其一阶幂零平方 *i*-结构上具有自然的 *i*-仿射结构，并且形式流形之间的任何映射都是 *i*-仿射的。

证明。 (1) 所有 i-结构都是由 M 的所有坐标图各自的 i-结构共同构造出的像（一个覆盖族，即 图册 ，只需 M 即可 [2, 注 3。5]）。根据引理 2.5 (2)，形式流形之间的任意映射对于所有 i-结构都是 i-态射 [2,定理 3。4]。

[7]从现在起，我们将用 $\mathfrak{M}(P)$ 表示由幂零平方 i-结构诱导的单子（连同其 i-结构），并分别用 $\mathfrak{M}_1(P)$ 和 $\mathfrak{M}_2(P)$ 表示形式流形 M 上由一阶 i-结构和二阶 i-结构诱导的单子（及其 i-结构）。请注意，在 [10] 中，下标 1 用于表示幂零平方 i-结构，而不是一阶 i-结构。尽管 $\mathfrak{M}(P)$ 和 $\mathfrak{M}_1(P)$ 作为空间是一致的，但它们的 i-结构有所不同。[8]请注意， $\mathfrak{M}_2(P)\langle 2\rangle \cong \tilde{D}_2(2, V) = D_2(V)\langle 2\rangle$。

(2) 注意，坐标图在拉回下保持不变；因此，两个坐标图 $\iota : U \rightarrowtail M$ 和 $j : W \rightarrowtail M$（作为 M 的子空间）的交集 $U \cap W \rightarrowtail M$ 也是一个坐标图。



如图所示，$U \cap W$ 是两个坐标图的定义域。恒等映射$1_{U\cap W}$ 诱导出一个形式开子空间的映射 $\phi|_{U\cap W} \to \psi|_{U\cap W}$，根据引理 2.5 (3)，它是 i-仿射的。这表明由 V的两个形式开子空间在 $U \cap W$ 上诱导的两个 i-仿射结构相同。此外，映射 $\iota^* j$ 和 $j^*\iota$是 i-仿射的，并且反映 i-结构。由粘合定理，结论得证 [3,定理 5]。[9]

□

在形式流形 M 上的**仿射联络** 是指第 [10, 章中定义的 Kock 关于点的仿射联络, 3] 其依据是这样一种几何思想：将三个点 P、Q、S补成一个平行四边形 $PQRS$，使得 $R = \lambda(P, Q, S)$：一个（关于点的）仿射联络是一个映射 λ，它将满足 $\langle P、Q\rangle$、$\langle P、S\rangle \in M\langle 2\rangle$ 的三元组（P, Q, S）映射到一个点 $\lambda(P, Q, S)$，使得

$$\begin{aligned} \lambda(P, Q, P) &= Q \\ \lambda(P, P, S) &= S \end{aligned} \tag{1}$$

这些性质足以推导出其他幂零平方邻域关系[10, 第2章3]。如果一个仿射联络是对称的，则称其为对称仿射联络。

$$\lambda(P, Q, S) = \lambda(P, S, Q)$$

在坐标图 $U \rightarrowtail M$ 中，仿射联络 λ 可以表示为

$$\lambda(P, Q, S) = Q + S - P + \Gamma_P[Q - P, S - P]$$

对于一个双线性映射 Γ_P [10, 第 2 章3], ，我们将其称为联络 λ 的联络符号[10] 。当且仅当该联络的联络符号在每个点 $P \in M$ 都是对称的时，该联络才是对称的。

在合成微分几何中，$P \in M$ 处的切向量是满足 $t(0) = P$ 的映射 $t : D = D(1) \to M$。根据空间 D 的 Kock-Lawvere 公理 (I)，P 处的每个切向量都通过单子 $\mathfrak{m}(P)$（由幂零平方 i-结构诱导）分解为 i-R-线性映射。

[9]在[2] 中将其称为 [1, 定理3.2。8] 以建立（2）。然而，正如 [3] 中所指出的，[1,定理3.2。8] 的证明依赖于 [1, 定理2.6。19],而后者是不正确的。[10]注意，Γ_P 是经典定义的协变导数联络符号的负。在 [10] 中，该联络符号被称为克里斯托费尔符号。

引理 2.7。 对于任意两个切向量 t_1, t_2 : $D \rightrightarrows M$ 在 P 处，我们有 $\langle t_1(d)\ t_2(d)\rangle \in M\langle 2\rangle$ 对所有 $d \in D$均成立。

证明。 [10,练习题 2.1。1] □

由于这一引理，由 $\mathfrak{M}(P)$ 在 P处的切空间上诱导的逐点 i-线性结构

$$T_P M = \{t \in M^D \mid t(0) = P\}$$

使 $T_P M$ a（全）KL 向量空间 [1, 第 3.3 章2]。根据 Kock-Lawvere (I)，我们得到 $T_P M \cong V$，其中 V 是 KL 向量空间 M 以[10, 为模型2]第 4 章。

对称仿射联络 λ 诱导出一个二阶对数-指数双射

$$\log_P : \mathfrak{M}_2(P) \to D_2(T_P M), \qquad \exp_P : D_2(T_P M) \to \mathfrak{M}_2(P),$$

它们在坐标图 [10, 第 8 章2]中具有以下表示:

$$\begin{aligned} \log_P(Q)(d) &= P + d\big((Q-P) - \frac{1}{2}\Gamma_P[Q-P]^2\big) \\ \exp_P(t) &= P + v + \frac{1}{2}\Gamma_P[v]^2 \end{aligned} \tag{2}$$

注意，切向量 t 被认定为其主部 $v \in V$，即满足对于所有 $d \in D$， $t(d) = P + d\,v$ 的向量 $v \in V$。

引理 2.8。

(1) 一阶对数$_P$: $\mathfrak{M}(P) \to D(T_P M)$ 和指数$_P$: $D(T_P M) \to \mathfrak{M}(P)$ 是 *i*-线性映射。

(2) 二阶对数$_P$ 和指数$_P$ 是 *i*-态射。

证明。 由于 $T_P M$ 是一个 KL 向量空间，一阶和二阶对数$_P$ 在坐标图中考察时，分别由 Kock-Lawvere 公理 (I) 和 (II) 得到扩张 $V \to T_P M$ 。结论由命题 2.4 (1) 和 2.2 得出。 □

引理 2.9。 设 M是一个形式流形，且 $P \in M$，那么 $\mathfrak{M}(P) \times \mathfrak{M}(P) \subset \mathfrak{M}_2(P)\langle 2\rangle$.

证明。T这可通过坐标图中的直接计算得出。（参见[2, 命题 4.1]的证明。） □

命题 2.10. 设 M 为一个形式流形。在 M 的二阶 *i*-结构上存在 *i*-仿射结构，当且仅当 M 上存在一个对称仿射联络 λ。

证明。 任何这样的 i-仿射结构都通过如下定义给出一个对称仿射联络:

$$\lambda(P, Q, S) = Q - P + S.$$

（注意，根据前面的引理， $P, Q \in \mathfrak{M}(P)$ 蕴含 $\langle P, Q\rangle \in M_2\langle 2\rangle$ 。）反过来，任意对称仿射联络 λ 都可以通过利用二阶对数-指数双射（以及 i-态射），将 $D_2(T_P M)$ 上的 i-线性结构传输到每个 $P \in M$ 对应的 $\mathfrak{M}_2(P)$ 上，从而在 M 上定义一个 i-仿射结构。

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_j P_j := \exp_P\Big(\sum_{j=1}^{n} \mu_j \log_P(P_j)\Big)$$

对于任意 $\langle P_1, \ldots, P_n\rangle \in \mathfrak{M}_2(P)$。对于仿射组合，结果证明它与基点 P 无关。（详情请参见 [2, 命题 4.1、定理 4.2] 的证明。） □

利用由 对数-指数双射 (2) 诱导的 λ ，我们得到坐标图中二阶 i-仿射组合的如下表示ι： $U \rightarrowtail M$ [2, 式 (3)]

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_j \iota(P_j) = \iota\left(\sum_{j=1}^{n} \mu_j P_j + \frac{1}{2}\Big(\Gamma_P[\sum_{j=1}^{n} \mu_j\, P_j - P]^2 - \sum_{j=1}^{n} \mu_j \Gamma_P[P_j - P]^2\Big)\right) \tag{3}$$

对于任意 $\langle P,\ P_1,\ \ldots\ldots,\ P_n\rangle \in U\langle n+1\rangle$ 以及 $\mu \in \mathcal{A}(n)$。这里，左侧的 i-仿射组合是在 M中取的，而右侧的 i-仿射组合是在 U 中取的（应用引理 2.5 (1)）。注意，二阶 对数 和 指数 根据构造成为 i-线性映射，从而推广了引理 2.8。

本文的主要结果是将命题2.10 推广到不一定对称的仿射联络。

3 李群的无穷小子群

到目前为止，我们只研究了无穷小仿射空间和向量空间。在本节中，我们将定义无穷小群，并研究李群的无穷小子群示例。除了阐明和简化微分几何中李群的许多熟悉的基本构造外，为二阶无穷小子群建立的对应关系是将命题2.10 推广到非对称仿射联络的关键；我们将在第4节中证明这一点。

定义 3.1. 设 $G\langle -\rangle$ 是 G上的一个*i*-结构 。如果空间 G 具有两个运算 $\cdot$ 和 inv，则称其为一个**无穷小群（i-群）**。

$$\cdot : G\langle 2\rangle \to G, \quad (P,Q) \mapsto PQ \qquad \mathrm{inv} : G \to G, \quad P \mapsto P^{-1}$$

以及满足这些公理的常数 $e \in G$

- （邻域）

  (I) $\langle PQ, P_1, \ldots, P_n\rangle \in G\langle n+1\rangle$ for all $\langle P, Q, P_1, \ldots, P_n\rangle \in G\langle n+2\rangle$ and $n \geq 0$.
  (II) $\langle P^{-1}, P_1, \ldots, P_n\rangle \in G\langle n+1\rangle$ for all $\langle P, P_1, \ldots, P_n\rangle \in G\langle n+1\rangle$ and $n \geq 0$.
  (III) $\langle e, P_1, \ldots, P_n\rangle \in G\langle n+1\rangle$ for all $\langle P_1, \ldots, P_n\rangle \in G\langle n\rangle$ and $n \geq 0$.

- (结合律) $(PQ)R = P(QR)$ 对所有 $\langle P, Q, R\rangle \in G\langle 3\rangle$.
- (单位元) $e \cdot P = P \cdot e = P$对于所有 $P \in G$.
- （逆元） $P \cdot P^{-1} = P^{-1} \cdot P = e$ 对于所有 $P \in G$。

注意，邻域公理（I）保证了结合律所要求的迭代乘积均有定义，而邻域（III）保证了每个 $P \in G$ 都可以与 $e \in G$ 相乘。由于 $\langle P$、 $P\rangle$ 和邻域公理（II），我们还可以得到对每个 $P \in G$ 都有 $\langle P^{-1}$、 $P\rangle$。

回想一下，导出的形式群运算对应于形如 $X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot X_n^{\alpha_n}$with $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ and $n \geq 0$ 的形式单项式。事实上，长度为 n 的形式单项式，恰好是群的代数理论的签名下、以 n 个变量为元的项代数中的项（参见 [3, sec. 3], [1, ch. 1.1.4] 及其中引用的文献

）。由于邻域公理，每个导出的形式群运算在 i-群中都有一种解释 G

$$X^\alpha : G\langle n\rangle \to G, \quad \langle P_1, \dots, P_n\rangle \mapsto P_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot P_n^{\alpha_n},$$

其中 P^n 是 P 与其自身的 n 次乘积，$P^{-n} := (P^{-1})^n$ 且 $P^0 := e$，对 $n \in \mathbb{N}$ 而言如群论中所述。我们将 $X^\alpha(P_1, \dots, P_n)$ 记作 P^α。

引理 3.2。 导出运算 X^α 满足以下邻域公理：设 $\alpha^k \in \mathbb{Z}^n$，$1 \le k \le m$。若 $P = \langle P_1, \dots, P_n\rangle \in G\langle n\rangle$ 则 $\langle P^{\alpha^1}, \dots, P^{\alpha^m}\rangle \in G\langle m\rangle$. 特别地，*i-* 群 G 是群的代数理论的一个无穷小模型，定义见 *[3,* 定义 *4]*。

证明。 (i) 首先注意，由于 i-群的邻域公理，每个 X^α 都满足 $\langle P^\alpha, Q_1, \dots, Q_m\rangle \in G\langle m+1\rangle$，对所有 $\langle P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_m\rangle \in G\langle n+m\rangle$ 和 $m \ge 0$ 均如此。事实上，先考虑 $k > 0$ 对应的运算 $P \mapsto P^k$。由于 $\langle P, Q_1, \dots, Q_m\rangle \in G\langle 1+m\rangle$，我们还有

$$\langle \underbrace{P, \dots, P}_{k \text{ times}}, Q_1, \dots, Q_m\rangle$$

现在，我们可以将二元 i-群运算与邻域公理（I）结合，迭代应用 $k-1$ 次，从而得到 $\langle P^k$、Q_1、.....、$Q_m\rangle \in G\langle 1+m\rangle$。

对于 P^α 的一般情形，我们可以将邻域公理（II）和（III）应用于 $\langle P_1$、.....、P_n、Q_1、.....、$Q_m\rangle \in G\langle n+m\rangle$：首先，如果 $\alpha_j = 0$，则将每个 P_j 替换为 e；如果 $\alpha_j < 0$，则替换为 P_j^{-1}；然后，对每个 $\alpha_j \ne 0$，迭代地对每个运算 $P_j \mapsto P_j^{|\alpha_j|}$ 应用邻域性质 $1 \le j \le n$。最后，将二元 i-群运算与邻域公理（I）结合，应用 $n-1$ 次。

（ii）与第（i）部分类似的论证可得所需的邻域公理。首先，$\langle P_1$、.....、$P_n\rangle$ 意味着

$$\langle \underbrace{P_1, \dots, P_n, \dots, P_1, \dots, P_n}_{k \text{ times}}\rangle$$

现在对 $1 \le j \le k$ 逐次应用每个运算 X^{α^j}，以得到 $\langle P_1^{\alpha^1}$、.....、$P_n^{\alpha^k}\rangle$，作为第 (i) 部分的组成。

□

注 3.3。 在 [3, 第 4] 节中，我们概述了代数理论的无穷小化，将其作为一种替代且更实用的方法：对于给定特定呈示的代数理论，借此获得该理论的无穷小模型，而非采用通过克隆的方法（另见 [1, 定义 2.4。1]）。i-群的定义提供了一个实例，展示了如何在实践中实现这一方法，以及如何获得一个简化的邻域公理，从而保证该理论所有导出运算都满足完整的邻域公理模式。结合引理 3.2，这一方法可以轻松推广到任意代数理论的任意呈示。

注意，如果 G 上的 i-结构由 $G\langle 2\rangle$ 生成，例如形式流形上的幂零平方 i-结构就是这种情况，那么只需检验邻域公理

(I) $\langle PQ, R\rangle \in G\langle 2\rangle$ for all $\langle P, Q, R\rangle \in G\langle 3\rangle$,

(II) $\langle P^{-1}、\ R\rangle \in G\langle 2\rangle$ 对所有 $\langle P、\ R\rangle \in G\langle 2\rangle$,

(III) 对所有 $R \in G$, $\langle e, R\rangle \in G\langle 2\rangle$ 。

下面我们转而研究 i-群的例子。正如预期的那样，第一类例子来自 i-向量空间：对于任意形式流形 M 和 $P \in M$，带有诱导的幂零平方以及相应的一阶 i-结构的单子 $\mathfrak{M}(P)$ 和 $\mathfrak{M}_1(P)$，在运算 [11] 下都是 i- 群

$$\begin{aligned} + : \mathfrak{M}_{(1)}(P)\langle 2\rangle &\to \mathfrak{M}(P), \qquad (Q, R) \mapsto Q + R - P, \\ \mathrm{inv} : \mathfrak{M}(P) &\to \mathfrak{M}(P), \qquad Q \mapsto 2P - Q \end{aligned}$$

单位元为 P。请注意，与 i-仿射空间不同，i-向量空间具有由零元运算 0 给出的隐式常量。因此，邻域公理 (III) 是 i-向量空间关于零元运算 0 的邻域公理的一个特例。特别地，任何 i-向量空间始终都是零向量的单子。

如果 M 配备了一个对称仿射联络 λ，那么 $\mathfrak{M}_2(P)$ 在由 λ 所诱导的二阶 i-仿射结构所诱导的运算下，是一个 i-群（参见命题 2.10）。特别地，我们有 $Q + R = \lambda(P, Q, R)$ 如果 Q, $R \in \mathfrak{M}(P)$。这使得 $\mathfrak{M}(P)$ 成为 $\mathfrak{M}_2(P)$的一个 i-子群。我们得到以下（阿贝尔）i-群的包含关系

$$\mathfrak{M}_1(P) \hookrightarrow \mathfrak{M}(P), \qquad \mathfrak{M}_1(P) \hookrightarrow \mathfrak{M}_2(P)$$

到目前为止，给出的所有例子都是阿贝尔 i-群。寻找非阿贝尔例子的显而易见之处，是非阿贝尔李群 G，也就是说，既是形式流形又是（非阿贝尔）群的对象。注意， G 是李群，当且仅当它对于平凡 *i*-结构是 i-群，即 $G\langle n\rangle = G^n$, $n \in \mathbb{N}$；换句话说，群运算在 $G \times G$的所有元素上都有定义。无穷小群的概念涵盖了普通群。

对于 G 上的任何其他 i-结构，邻域公理 (III)意味着我们需要考虑将群运算限制在单位元 e的单子上。首先自然会考虑的例子是单子 $\mathfrak{M}(e)$。虽然可以证明$\mathfrak{M}(e)$在群运算下封闭，即 $\langle P, Q\rangle$ 属于 $\mathfrak{M}(e)$蕴含 $PQ \in \mathfrak{M}(e)$，且$P \in \mathfrak{M}(e)$蕴含 $P^{-1} \in \mathfrak{M}(e)$ [10, 定理 6.8.1], 幂零平方 *i*-结构对 *dim*不满足邻域公理，因此一般而言不是 *i*-群。

这种失败的原因在于，幂零平方 i-结构编码了二阶及更高阶的信息，而当且仅当群运算非阿贝尔时，这些信息会成为邻域公理的障碍。这就是为什么一般而言， $\mathfrak{M}(e)$ 可以具有阿贝尔 i- 群结构，但不能具有非阿贝尔 i- 群结构。

限制到 $\mathfrak{M}_1(e)$ 后，得到 G 的一个 i-子群。不过，在这种情况下，我们恰好重新得到一个阿贝尔 i-群 $\mathfrak{M}(e)$ 的 i-子群，而该阿贝尔 i-群是 i-向量空间 $\mathfrak{M}(e)$ 的底层结构。这一结果并不意外，因为它证实了李群的群运算在一阶 [4] 中就是加法。要获得非阿贝尔的 i-群示例，我们必须考虑二阶单子 $\mathfrak{M}_2(e)$。

[11]请注意， $\mathfrak{M}(P)$ 和 $\mathfrak{M}_1(P)$ 作为空间是相同的，但它们仅在 i-结构上有所不同。

定理 3.4。 设 G 是一个以 $e \in G$ 为单位元的李群。

(1) G 的群运算使单子 $\mathfrak{M}_1(e)$、 $\mathfrak{M}_2(e)$ 成为 G 的无穷小子群。我们得到以下 *i*-群的包含关系。

$$\mathfrak{M}_1(e) \hookrightarrow \mathfrak{M}_2(e) \hookrightarrow G$$

(2) $\mathfrak{M}_1(e)$ 上的 *i*-群结构与由 *i*-线性结构诱导的阿贝尔 *i*-群结构一致，即对于所有 $\langle P, Q\rangle \in \mathfrak{M}_1(e)$ $\langle 2\rangle$ 以及 $\mathrm{inv}(P) = -P$，均成立。特别地，我们有阿贝尔 *i*-群的包含关系 $\mathfrak{M}_1(e) \hookrightarrow \mathfrak{M}(e)$。

(3) 设 H 是一个李群，则每个保持单位元的映射 $f\colon\ G \to H$ 都会诱导一个 *i*-群的映射 $\mathfrak{M}_1^G\,(e) \xrightarrow{f} \mathfrak{M}_1^H\,(e)$。

(4) 设 H 为一个李群，则每个群同态 $f\colon G \to H$ 都会诱导一个 *i*-群的映射 $\mathfrak{M}_2^G\,(e)$ $\xrightarrow{f} \mathfrak{M}_2^H\,(e)$。

下面的引理是定理 3.4 证明的核心。

引理 3.5。 设 $\langle P_1, Q_1, \ldots, P_n, Q_n\rangle \in G_k\langle 2n\rangle$ 则 $\langle (P_1, Q_1)\ldots, (P_n, Q_n)\rangle \in (G \times G)_k\langle n\rangle$ 对所有 $n \geq 1$ 和 $k \in \{1, 2\}$均成立。

证明。 （引理）设 V为 G 所建模于的 KL 向量空间。回忆一下，V-坐标图的乘积是 $V \oplus V$-坐标图，因为形式开子空间在取乘积时保持稳定，且 $V \oplus V$是 KL 向量空间，因为 V是。因此，$G \times G$ 是一个形式流形[10, 练习 2.1。2],因此，根据命题 2.6 (1)，它具有所有 i-结构。

我们证明 $k = 2$ 的情形。（ $k = 1$ 的情形可用同样的论证证明，只需用 DN_1 代替 DN_2。）只需证明该断言对李群所建模于的 KL 向量空间 V 成立，这可通过直接计算得到：设 $\phi : (V \times V)^3 \to R$ 是一个三线性映射。写作

$$\begin{pmatrix} P_{i_k} \\ Q_{i_k} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} P_{j_k} \\ Q_{j_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{i_k} - P_{j_k} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ Q_{i_k} - Q_{j_k} \end{pmatrix}$$

并展开

$$\phi\left[\begin{pmatrix} P_{i_1} \\ Q_{i_1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} P_{j_1} \\ Q_{j_1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P_{i_2} \\ Q_{i_2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} P_{j_2} \\ Q_{j_2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P_{i_3} \\ Q_{i_3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} P_{j_3} \\ Q_{j_3} \end{pmatrix}\right]$$

对于任意的 i_ℓ、 $j_\ell \in \{1, \ldots, n\}$ 和 $1 \leq \ell \leq 3$，都会得到关于 $P_{i_k} - P_{j_k}$ 和 $Q_{i_k} - Q_{j_k}$ 的三线性映射之和。由于 $\langle P_1$、Q_1、.....、P_n、$Q_n\rangle \in V_2\langle 2n\rangle$，所有这些三线性项都为零。这表明

$$\left(\begin{pmatrix} P_{i_1} \\ Q_{i_1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} P_{j_1} \\ Q_{j_1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P_{i_2} \\ Q_{i_2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} P_{j_2} \\ Q_{j_2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P_{i_3} \\ Q_{i_3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} P_{j_3} \\ Q_{j_3} \end{pmatrix}\right) \in \mathrm{DN}_2(V)$$

因此， $\langle (P_1, Q_1)\ldots, (P_n, Q_n)\rangle \in (V \times V)_2\langle n\rangle$， 如前所述。

由于所断言的性质对 V 成立，因此它对每个形式开子空间$\iota : U \rightarrowtail V$ 都成立。这是因为 ι 保持 i-结构，而 $\iota \times \iota$ 反映 i-结构。（后者由 $U \times U$ 上 i-结构的定义可知。[12]）但这样一来，它便对每个坐标图都成立，因而对形式流形 G 也成立。 □

[12]注意， $V \times V$上的一阶和二阶 i-结构，以及因此 $U \times U$上的 i-结构，都不是乘积 i-结构。

证明。（定理）

(i) 根据单子$\mathfrak{M}_k(e)$的定义，i-群的邻域公理 (III) 成立，$k \in \{1, 2\}$。接下来只需证明邻域公理（I）和（II）。设$\langle P, Q, P_1, \ldots, P_n\rangle \in \mathfrak{M}_k(e)\langle n+1\rangle$那么

$$\langle e, e, P, Q, e, P_1, \ldots, e, P_n\rangle \in G_k\langle 2(n+2)\rangle.$$

由引理 3.5 可得 $\langle (e, e), (P, Q), (e, P_1) \ldots, (e, P_n)\rangle$ 属于 $(G \times G)_k$。由命题 2.2 可得 $\langle e, PQ, e \cdot P_1, \ldots, e \cdot P_n\rangle$ 属于 G_k。这表明 $\langle PQ, P_1, \ldots, P_n\rangle \in \mathfrak{M}_k(e)\langle n+1\rangle$，因此邻域公理（I）成立。为证明 $\langle \mathrm{inv}(P)\ P_1, \ldots, P_n\rangle$ 属于$\mathfrak{M}_k(e)$，将 i-态射 $m \circ (\mathrm{inv} \times 1_G)$ 应用于 $\langle (e, P), (P_1, e) \ldots, (P_n, e), (e, e)\rangle$ 属于 $(G \times G)_k$，其中 m 表示二元群运算。这就证明了 (1)。

(ii) 为了证明 (2)，设 $\langle P, Q\rangle \in \mathfrak{M}_1(e)$。我们有 $\langle (P, e), (e, Q), (e, e)\rangle \in (G \times G)_1$。根据命题 2.6 (2)，群运算保持 i-仿射组合 $(P, Q) = (P, e) + (e, Q) - (e, e)$，即

$$PQ = P \cdot e + e \cdot Q - e \cdot e = P + Q - e = P + Q,$$

其中，右侧表示 $\mathfrak{M}_1(e)$ 中的向量加法。类似地，映射 $m \circ (\mathrm{inv} \times 1_G)$ 是 i-仿射的（m 再次表示二元群运算），因此保持 i-仿射组合 $(P, P) = (P, e) + (e, P) - (e, e)$ 不变，由此得到 $e = \mathrm{inv}(P) + P - e$，进而得到 $\mathrm{inv}(P) = -P$；右侧表示 i-向量空间 $\mathfrak{M}_1(e)$ 中向量 P 的加法逆元。

(iii) (3) 是命题 2.6(2) 和 (2) 的直接推论；而 (4) 是命题 2.6 (1) 的直接推论。

□

我们的下一个目标是找出二阶群运算在$\mathfrak{M}_2(e)$ 上的表示，以扩展定理 3.4(2)。

李群 G 配备了两个典范仿射联络 λ_l 和 λ_r，分别由左平移和右平移定义：

$$\lambda_l(P, Q, R) = QP^{-1}R$$
$$\lambda_r(P, Q, R) = RP^{-1}Q,$$

其中 $\langle P$、$Q\rangle$、$\langle P$、$R\rangle \in G\langle 2\rangle$。注意，形式流形 M 上的仿射联络空间，在由 M 上的幂零平方 i-仿射结构所诱导的逐点 i-仿射运算下，成为一个仿射空间。事实上，利用坐标图中的表示，很容易看出，对于任意两个仿射联络 λ、λ'，我们有 $\langle \lambda(P, Q, R)\ \lambda'(P, Q, R)\rangle$ 属于 M [10,习题 2.4.3]。因此，仿射联络空间上诱导的逐点 i-仿射结构是全的。特别地，G 具有一个典范对称仿射联络，它由 λ_r 和 λ_l的对称化 给出。

$$\bar{\lambda}(P, Q, R) = \frac{1}{2}\lambda_l(P, Q, R) + \frac{1}{2}\lambda_r(P, Q, R).$$

根据命题 2.10 G 带有由诱导的典范二阶 *i*-仿射结构 。令 λ。设 Γ 为 λ_l 在坐标图 U 中的联络符号，即

$$\lambda_l(P, Q, R) = Q + R - P + \Gamma_P[Q - P, R - P],$$

then

$$\lambda_r(P,Q,R) = R + Q - P + \Gamma_P[R-P, Q-P]$$

and

$$\bar{\lambda}(P,Q,R) = Q + R - P + \frac{1}{2}\big(\Gamma_P[Q-P, R-P] + \Gamma_P[R-P, Q-P]\big).$$

我们将 $\bar{\lambda}$ 的联络符号记为 $\bar{\Gamma}$。由于 $\lambda_l(e,P,Q) = PQ$，我们得到 $\mathfrak{M}_2(e)$ 上群运算的坐标表示，其中 $P, Q \in \mathfrak{M}(e)$ 为

$$PQ = P + Q - e + \Gamma_e[P-e, Q-e]. \tag{4}$$

可改写为

$$PQ = P + Q - e + \bar{\Gamma}_e[P-e, Q-e] + \frac{1}{2}\big(\Gamma_e[P-e, Q-e] - \Gamma_e[Q-e, P-e]\big). \tag{5}$$

Lem命题 3.6. 表示 *(4)* 和 *(5)* 唯一地延拓到 $\langle P, Q\rangle \in \mathfrak{M}_2(e)\langle 2\rangle$.

证明。注意，在 $G_2\langle 3\rangle$ 上由 $(P,Q,R) \mapsto QP^{-1}R$ 给出的三元运算是 λ_l 的一个延拓，满足仿射联络的方程 (1)。这与 Kock-Lawvere 公理 (III) 一起，得到坐标图中的如下呈示：[13] (回顾一下，$\mathfrak{M}_2(P)\langle 2\rangle \cong D_2(2,V)$)

$$QP^{-1}R = Q + R - P + B_P[Q-P, R-P],$$

对于唯一的双线性映射 B_P。我们有

$$d_1 d_2\, B_P[v,w] = B_P[d_1\, v, d_2\, w] = \Gamma_P[d_1\, v, d_2\, w] = d_1 d_2\, \Gamma_P[v,w]$$

对所有 $d_1, d_2 \in D$ 都成立，因此在消去全称量化的 d 后有 $B_P = \Gamma_P$。[14]

同样的延拓也适用于 λ_r，并且我们仍有 $\langle QP^{-1}R, RP^{-1}Q\rangle$ 在 G_1 中，因此可以对它们进行对称化，从而得到 λ 到 $G_2\langle 3\rangle$ 的一个（唯一）延拓。这表明表示 (4) 和 (5) 唯一地延拓到 $\langle P, Q\rangle \in \mathfrak{M}_2(e)\langle 2\rangle$，如所述。 □

将（5）与 $\mathfrak{M}_2$（e）上二阶 i-仿射组合的局部表示（参见方程（3））结合起来，我们将证明，群运算在 G_2 上的表示由下式给出

$$PQ = P + Q - e + \frac{1}{2}(PQ - QP)$$

（注意，这个表达式是 G 中的一个二阶 i-仿射组合，而不是一个坐标图。）利用 $\mathfrak{M}_2$（e）上的诱导 i-线性结构，我们将 $\mathfrak{M}_2$（e）中 $\langle P$、$Q\rangle$ 的（点的）李括号定义为

$$[P,Q] = PQ - QP \ (= e + PQ - QP)$$

借助它，我们可以将定理 3.4 (2) 中的呈示推广到二阶 i-群$\mathfrak{M}_2(e)$ 如下。（关于幂零平方 i-结构的情形，参见 [10, 定理 6.8。1] ）

[13]由于我们用于联络的三元群运算是在全局上定义的，因此我们可以由公理 (II) 证明这个引理，而不必依赖公理 (III)。[14]这个在合成微分几何中广为人知的消去引理是 Kock-Lawvere 公理 (I) 的直接推论。

定理 3.7。 设 G 是一个李群。考虑 *i*-群 $\mathfrak{M}_2(e)$ ，它具有由G上的典范二阶 *i*-仿射结构所诱导的典范二阶 *i*-线性结构。

(1)（点的）李括号是定义在 $\mathfrak{M}_2(e)$ 上的交错 *i*-双线性映射；也就是说，对于任意满足 $\langle P,$ $P_1,$ ……, $P_n\rangle \in \mathfrak{M}_2(e)\langle n+1\rangle$ 的 $P \in \mathfrak{M}_2(e)$ ， $[-,P]$ 和 $[P,-]$ 与 $P_j \in \mathfrak{M}_2(e)$ 的二阶 *i*- 线性组合 $1 \le j \le n$ 交换。

(2) 在 $\mathfrak{M}_2(e)$ 中，群运算由下式给出

$$PQ = P + Q + \frac{1}{2}[P,Q] \qquad \langle P,Q\rangle \in \mathfrak{M}_2(e)\langle 2\rangle \tag{6}$$

并且对于二阶 *i*-仿射结构而言，它是一个 *i*-双仿射映射。

(3) 对 P 求逆相当于在 e 中进行点反射

$$\mathrm{inv}(P) = -P \qquad P \in \mathfrak{M}_2(e).$$

证明。 (1) 首先注意，由邻域公理可知， $\langle P$、 $Q\rangle$ 属于 $\mathfrak{M}_2(e)$ 意味着 $\langle PQ$、 $QP\rangle$ 属于 $\mathfrak{M}_2(e)\langle 2\rangle$。因此， $[P,Q]$ 定义良好。显然，它是交错的。为证明它是 i-双线性的，我们在一个坐标图中考察 $[P,Q]$ ，其中 $\langle P$、 $Q\rangle$ 属于 $\mathfrak{M}_2(e)$。

在 $\mathfrak{M}_2(e)$ 中的二阶 i-线性组合的呈示（参见方程（3））给出：

$$[P,Q] = PQ - QP + e + \frac{1}{2}\big(\bar{\Gamma}_e[PQ-QP]^2 - \bar{\Gamma}_e[QP-e]^2 + \bar{\Gamma}_e[PQ-e]^2\big)$$

代入（4），并注意到所有包含 $Q-e$ 和 $P-e$ 的高于二阶的项均为零，我们可以将其简化为

$$[P,Q] = e + \Gamma_e[P-e,Q-e] - \Gamma_e[Q-e,P-e], \tag{7}$$

设 $P_j \in \mathfrak{M}_2(e)$、 $1 \le j \le n$ 和 $\langle P,P_1,\ldots,P_n\rangle \in \mathfrak{M}_2(e)\langle n+1\rangle$。于是，对二阶 i-线性组合 ( ) 应用 ($\sum_{j=1}^n \lambda_j P_j$ =)，并将其代入 ( )，通过类 $e+\sum_{j=1}^n \lambda_j\ P_j - e$ 似的论证可得：

$$[P,\sum_{j=1}^n \lambda_j P_j] = \sum_{j=1}^n \lambda_j [P,P_j]$$

由于李括号具有反对称性，因此它对每个自变量都是 i-线性的，从而如所述，它是 i-双线性的。

(2) 第二个结论也可以通过在坐标图中进行直接计算来证明。根据 i-群的邻域公理 $\langle P,$ $Q\rangle$ 在 $\mathfrak{M}_2(e)$ 可推出 $\langle P,$ $Q,$ $[P,Q]\rangle \in \mathfrak{M}_2(e)\langle 3\rangle$。(6) 的右侧由二阶 i-仿射组合给出

$$P + Q + \frac{1}{2}[P,Q] - \frac{3}{2}e$$

应用（3）得：

$$P+Q-e+\frac{1}{2}([P,Q]-e) + \frac{1}{2}\Big(\bar{\Gamma}_e\big[P-e+Q-e+\frac{1}{2}\big([P,Q]-e\big)\big]^2 - \bar{\Gamma}_e[P-e]^2 - \bar{\Gamma}_e[Q-e]^2 - \frac{1}{2}\bar{\Gamma}_e\big[[P,Q]-e\big]^2\Big)$$

在一个坐标图中。代入（7），同时注意到所有包含 $Q-e$和 $P-e$ 且阶数高于二阶的项均为零，该表达式可简化为

$$P+Q-e+\frac{1}{2}\big(\Gamma_e[P-e,Q-e]-\Gamma_e[Q-e,P-e]\big)+\bar{\Gamma}_e[P-e,Q-e],$$

其在以下表示 PQ 在一个坐标图（5）中的表示。

为完成 (2) 的证明，注意求和是 i-双仿射的，而点的李括号根据 (1) 是 i-双线性的。因此，群运算是一个二阶 i-双仿射映射。

（3）将（1）应用于 $e=PP^{-1}$。

□

对（1）的证明进行更仔细的分析可以发现，我们不仅有 $[P,Q]\in\mathfrak{M}_2(e)$，甚至还有 $[P,Q]\in\mathfrak{M}_1(e)$（这可以由（7）或 $[-,-]$ 的 i-双线性推出）。此外，对于 $\langle P,\ P_1,\ \ldots\ldots,\ P_n\rangle\in\mathfrak{M}_2(e)\langle n+1\rangle$，我们有 $\langle[P,P_1],\ \ldots\ldots,\ [P,P_j]\rangle\in\mathfrak{M}_1(e)\langle n\rangle$，并且二阶 i-线性组合 $\sum_{j=1}^n\lambda_j[P,P_j]$ 与一阶组合一致。

命题 3.8。 点的李括号可通过一个 *i*-双线性映射[15]进行分解

$$[-,-]:\mathfrak{M}_2(e)\langle 2\rangle\to\mathfrak{M}_1(e)\hookrightarrow\mathfrak{M}_2(e)$$

推论 3.9。 $\mathfrak{M}_2(e)$ 上的李括号由无穷小群换位子给出

$$[P,Q]=PQP^{-1}Q^{-1},\qquad \langle P,Q\rangle\in\mathfrak{M}_2(e)\langle 2\rangle$$

证明。 带有定理的无穷小代数 3.7 得出

$$\begin{aligned}PQP^{-1}Q^{-1}&=PQ(QP)^{-1}\\&=PQ(-QP)\\&=PQ(2e-QP)\\&=2PQ-PQQP\\&=2PQ-(PQ+QP+\frac{1}{2}[PQ,QP])\\&=PQ-QP+\frac{1}{2}([P,[P,Q]]+[Q,[P,Q]])\end{aligned}$$

由于这两个括号在 $\mathfrak{M}_2(e)$ 上都是 i-三线性的，因此它们都是恒为零的（e）映射。这表明

$$PQP^{-1}Q^{-1}=PQ-QP+e=[P,Q]$$

正如所声称的。

□

由于 $\mathfrak{M}_2(e)$ 上的 i-三线性映射均为零映射，因此点的李括号显然满足雅可比恒等式。由此可知，$(\mathfrak{M}_2(e)\ [-,-])$ 根据 [3, def. 4],的含义构成一个李代数的无穷小模型，这等价于说，$\mathfrak{M}_2(e)$ 是一个 i-向量空间，并配备一个满足雅可比恒等式的 i-双线性映射 $[-,-]$ 以及一个邻域公理 $\langle[P,Q],P_1,\ldots,P_n\rangle$，对于 $\langle P,Q,P_1,\ldots,P_n\rangle\in\mathfrak{M}_2(e)$ 成立；后者是由于 $\mathfrak{M}_2(e)$ 既是一个 i-向量空间又是一个 i-群的结果。

将李括号限制到 $\mathfrak{M}(e)$上，命题 3.8 与引理 2.9共同在 $\mathfrak{M}(e)$上给出一个（总体的）点的李括号，此时雅可比恒等式不再是显然成立的。

[15]如果我们在 $\mathfrak{M}_2(e)$ 上考虑以下 i-结构：$\langle(P_1,Q_1)\ldots,(P_n,Q_n)\rangle$，那么李括号 $\mathfrak{M}_2(e)\langle 2\rangle\to\mathfrak{M}_1(e)$ 就成为一个 i-态射；$\langle 2\rangle$ 当 $\langle P_1,Q_1,..,P_n,Q_n\rangle$ 属于 $\mathfrak{M}_2(e)$ 时，$\mathfrak{M}_2(e)$。

推论 3.10. 二阶 *i*-李代数 $(\mathfrak{M}(e)\ [-,-])$ 在 $\mathfrak{M}(e)$上诱导出一个（总体的）点的李括号

$$[-,-]:\mathfrak{M}(e)\times\mathfrak{M}(e)\to\mathfrak{M}(e)$$

它是 *i*-双线性的，并满足雅可比恒等式。

证明。 雅可比恒等式由推论 3.9 以及群交换子的菲利普·霍尔恒等式（参见 [10, 命题 6.8.5f]）。

李括号的 i-双线性由命题 3.8 得出，但也可以直接看出：设 $P\in\mathfrak{M}(e)$ 并考虑 i-仿射映射 $[P,-]$。由于 $[P,e]=e$ 该映射对于 $\mathfrak{M}(e)$上的幂零平方 i-线性结构是 i-线性的。此外，由于李括号是交错的，它是 i-双线性的。

（后一个证明并不依赖于 P 是我们进行 i-线性组合的任何一个 P_j 的幂零平方邻点。因此，这种 i-双线性的概念比我们上文使用的略强一些。）

□

注意， $\mathfrak{M}(e)$ 并不是一个 i-李代数，因为它不满足邻域公理。（原因与 $\mathfrak{M}(e)$ 不满足 i-群条件相同。）我们在单子上所拥有的 i-李代数只有定义在 $\mathfrak{M}_2(e)$ 和 $\mathfrak{M}_1(e)$ 上的两种；后者是平凡的。

然而，点的李括号可以从 $\mathfrak{M}(e)$ 提升到全向量空间T_eG。与 i-线性结构不同，我们无法逐点进行这一操作，因为 $d\mapsto[t_1(d)\ t_2(d)]$关于 $d\in D$ 是二次的，因此对于 t_1, $t_2\in T_eG$其为零映射。（注意，由于引理 $[t_1(d)\ t_2(d)]$，该映射是良定义的。）我们必须通过（一阶）指数-对数双射来提升点的李括号。

$$\begin{array}{ccc} D(T_eG)\times D(T_eG) & \xrightarrow{\overline{[-,-]}} & D(T_eG) \\ {\scriptstyle \exp_e\times\exp_e}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \log_e} \\ \mathfrak{M}(e)\times\mathfrak{M}(e) & \xrightarrow{[-,-]} & \mathfrak{M}(e) \end{array}$$

定理 3.11. 设 G 是一个李群。 $\mathfrak{M}(e)$ 上点的李括号的（一阶）指数-对数 提升在 T_eG 上诱导出一个整体李代数，该李代数与左不变向量场的李括号一致。

证明。 (i) 由于 指数$_e$ 和 对数$_e$ 都是 i-线性的（引理 2.8 (1)），李括号的点的提升给出一个在 $\overline{[-,-]}$ 上的 i-双线性、交错映射，满足雅可比恒等式。特别地，我们有 T_eG 对于$\overline{[t,0]}=\overline{[0,t]}=0$($t\in D$) T_eG。由于 是一个 KL 向量空间， $\overline{[-,-]}$ 有唯一的延拓成为一个双线性映射

$$[-,-]:T_eG\times T_eG\to T_eG$$

设 t_1 和 t_2 是 e 处的切向量。我们有

$$\begin{aligned} d_1d_2\,[t_1,t_2] &= [d_1\,t_1,d_2\,t_2] \\ &= \overline{[d_1\,t_1,d_2\,t_2]} \\ &= -\overline{[d_2\,t_2,d_1\,t_1]} \\ &= d_2d_1\,(-[t_2,t_1]) \end{aligned}$$

对于 $d_1,d_2\in D$。由于 T_eG 是 KL，我们可以约去 d，从而得到 $[t_1,t_2]=-[t_2,t_1]$。通过类似的论证可以得出雅可比恒等式。这表明 $(T_G,[-,-])$ 构成一个李代数。

(ii) 设 $t_1, t_2 \in T_eG$。在一个坐标图中，我们得到

$$[t_1, t_2](d) = e + d\,(\Gamma_e[v_1, v_2] - \Gamma_e[v_2, v_1]),$$

其中 v_j 是 t_j 的主部。令 d_1，$d_2 \in D$。根据引理 2.9，有 $\langle t_1(d_1)\ t_2(d_2)\rangle$ 属于 $\mathfrak{M}_2(e)$，因此

$$\begin{aligned}
[t_1, t_2](d_1 d_2) &= e + \Gamma_e[d_1\, v_1, d_2\, v_2] - \Gamma_e[d_2\, v_2, d_1\, v_i] \\
&= e + \Gamma_e[t_1(d_1) - e, t_2(d_2) - e] - \Gamma_e[t_2(d_2) - e, t_1(d_1) - e] \\
&= [t_1(d_1), t_2(d_2)] \\
&= t_1(d_1)\, t_2(d_2)\, \big(t_2(d_2)\, t_1(d_1)\big)^{-1},
\end{aligned}$$

其中我们应用了（7）和推论 3.9。根据 [10, 等式 4.9.3、6.6, 1] 将 t_1 和 t_2 视为左不变向量场时，它们的李括号与群交换子一致；因此，两种构造在 T_eG 上给出了相同的李括号。

事实上，回顾一下，Kock-Lawvere 公理 (I) 蕴含：对于 KL 向量空间 V 以及任意映射 $m\colon\ D \times D \to V$，满足 $m(0, d) = m(d, 0)$ 的映射可唯一地通过乘积映射 $D \times D \to D$ 分解为 $t\colon\ D \to V$，使得 $t(d_1 d_2) = m(d_1, d_2)$。这就是为什么只需在乘积 $d_1 d_2$ 上对 d_1、$d_2 \in D$ 比较两个李括号即可。

□

我们可以利用 指数-对数 双射 (2) 将 G 上的二阶 i-群结构传递自 $\mathfrak{M}_2(e)$ 到 $D_2(T_eG)$，从而使 指数-对数 双射成为 i-群同构。由此得到的 T_eG 上的 i-群可以明确表示为：

推论 3.12. 设 G 是一个李群。在 T_eG 上的后续运算

$$\begin{aligned}
(t_1, t_2) &\mapsto t_1 + t_2 + \frac{1}{2}[t_1, t_2] \\
t &\mapsto -t
\end{aligned}$$

并将 $0 \in T_eG$ ***make*** $D_2(T_eG)$ （配备诱导的二阶 *i*-结构）转化为一个与 $\mathfrak{M}_2(e)$ 同构的 *i*-群。

证明。 回顾一下，二阶 指数-对数 双射根据命题 2.10 也是一个 i-线性同构。根据定理 T_eG 中对李括号的构造 3.11 以及定理 3.7，我们得到

$$\begin{aligned}
\log_e(\exp_e(t_1)\exp_e(t_2)) &= \log_e(\exp_e(t_1) + \exp(t_2) + \frac{1}{2}[\exp_e(t_1), \exp_e(t_2)] \\
&= t_1 + t_2 + \frac{1}{2}[t_1, t_2]
\end{aligned}$$

and

$$\log_e(\exp_e(t_1)^{-1}) = \log_e(-\exp_e(t_1)) = -t_1.$$

通过二阶指数-对数双射传递的 i-群结构由此给出了所述运算。特别地，$D_2(T_eG)$ 满足这些运算下 i-群的公理，并且指数-对数双射诱导出一个 i-群同构 $D_2(T_eG) \cong \mathfrak{M}_2(e)$。

□

上文所述的 $D_2(T_eG)$ 上的二阶 i-群结构，是众所周知的二阶 [7] Baker-Campbell-Hausdorff公式 [4]，也是截断形式群律的一个例子。事实上，对于 KL 向量空间 V 上的二阶 i-群，我们不要求完整的形式群律；任意双线性映射 $B: V \times V \to V$ 都可以。这为我们提供了第二类 i-群实例，除此之外还有上文研究过的李群的 i-子群。事实上，结果表明， $D_2(V)$ 上的所有 i-群结构，都是通过双线性映射对典范阿贝尔 i-群结构作形变而得到的。

定理 3.13。 设 V 是一个 *KL* 向量空间， $B:\ V \times V \to V$ 是一个双线性映射。那么运算

$$(v, w) \mapsto v + w + B[v, w]$$
$$v \mapsto -v + B[v]^2$$

连同 $0 \in V$ 一起使 $D_2(V)$ 成为一个 *i*-群。当且仅当 B 是对称的时，这个 *i*-群是阿贝尔群。反过来， $D_2(V)$ 上的任意 *i*-群结构都具有这种形式，其中双线性映射 B 唯一确定。

证明。 (i) 结合律、单位元、逆元和邻域公理都可通过直接计算轻松验证；注意到对于 $\langle u、\ v、\ w\rangle$ 属于 $D_2(V)$ 的情形，所有三阶项都为零。

(ii) 为了说明 i-群 $D_2(V)$ 的单位元 $e \in D_2(V)$ 是零向量 0，我们对情形 $V \cong R^n$ 作坐标化，并利用 R^n 上逐点的 R-代数结构。由于 e 必须是每个 $\delta \in D_2(V)$ 的二阶邻点，映射

$$D_2(V) \to V, \qquad \delta \mapsto (\delta - e)^3 = -3\delta^2 e + 3\delta e^2$$

是零映射。因此，Kock-Lawvere 公理 (II) 蕴含 $e^2 = e = 0$。

(iii) 回忆一下， $D_2(V)\langle 2\rangle = D_2(2, V)$，因此任何 i-群运算都是一个映射 $m:\ D_2(2, V) \to V$。根据 Kock-Lawvere 公理 (III)，存在唯一的向量 $a_0 \in V$、唯一的线性映射 A_1 和 B_1，以及双线性映射 A_2、 B_2 和 C_2，使得

$$m(\delta, \varepsilon) = a_0 + A_1[\delta] + B_1[\varepsilon] + A_2[\delta]^2 + B_2[\varepsilon]^2 + C_2[\delta, \varepsilon].$$

由于 $m(0, 0) = 0$, $m(0, \varepsilon) = \varepsilon$, $m(\delta, 0) = \delta$，我们得到 $a_0 = 0$, $A_1 = B_1 = \mathrm{id}_V$和 $A_2 = B_2 = 0$。因此，对于唯一的双线性映射 $B = C_2$，i-群运算具有所需的形式：

$$m(\delta, \varepsilon) = \delta + \varepsilon + C_2[\delta, \varepsilon].$$

由于 $-\delta + C_2[\delta]^2$ 是 $\delta \in D_2(V)$ 的一个 m-逆元，根据 i-群中逆元的唯一性可知

$$\delta^{-1} = -\delta + C_2[\delta]^2$$

正如所断言的。

□

请注意，要证明诱导运算构成定理 B 中的二阶 i-群，并不需要双线性映射满足雅可比恒等式，因为这是一个三阶关系。3.13,

4 流形上的仿射联络与二阶 i-群结构

本节旨在推广 [2, 定理 4。2] （在本文中表述为命题 2.10 ），通过构造与上一节 3.13 中的定理相反的命题，将其推广到非对称仿射联络 3。

在那一节中，我们从一个李群 G 出发，并从群结构中得到一个非对称仿射联络λ_l 。由其对称化所诱导的二阶 i-仿射结构，结合点的李括号，使我们能够用二阶 BCH 公式表示直到二阶的群运算。然而，点的李括号是仿射联络 λ_l的挠率的负值，因此 $\mathfrak{M}_2$（e）上的整个二阶 i-群结构仅由 λ_l 决定。

事实上，回顾一下，在合成微分几何中，挠率 τ 的 λ_l 定义为

$$\tau_P(Q,R)=\lambda_l(\lambda_l(P,Q,R),Q,R)$$

根据 λ_l 关于群运算的定义，我们得到

$$\tau_P(Q,R)=Q(QP^{-1}R)^{-1}R=QR^{-1}PQ^{-1}R$$

特别地，我们得到

$$\tau_e(P,Q^{-1})=PQP^{-1}Q^{-1}=[P,Q],$$

或者，等价地，利用李括号的 i-双线性

$$\tau_e(P,Q)=[P,Q^{-1}]=[P,-Q]=-[P,Q]$$

对于 $P,Q\in\mathfrak{M}(e)$。

现在我们希望进行逆向操作，也就是说，从一个仿射联络出发，构造一个二阶 i-群结构。我们陈述本文的主要结果：

定理 4.1。 设 M 是一个形式流形， λ 是 M上的仿射联络；则 λ在 $\mathfrak{M}_2(P)$ 上诱导出一个 *i*-群结构，对于每个 $P\in M$使得 $\lambda(P,\ Q,\ R)=QR$对于$Q,\ R\in\mathfrak{M}(P)$。

证明。 该证明结合了关于挠率的观察以及定理 3.11、定理 3.13和命题 2.10的证明策略。

(i) 首先，令 λ^{op} 表示 λ 的共轭仿射联络，即 $\lambda^{op}(P,Q,R)=\lambda(P,R,Q)$。对称化

$$\bar{\lambda}=\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2}\lambda^{op}$$

由命题M_2 2.10可知，得到一个对称仿射联络，从而在上得到一个二阶 i-仿射结构。

(ii) 我们利用 λ 的挠率 τ 构造 T_PM 上的交替双线性映射 $[-,-]_P$，其特征为

$$[t_1,t_2]_P(d_1d_2)=-\tau_P\big(t_1(d_1),t_2(d_2)\big),\qquad d_1,d_2\in D$$

如定理 3.11。

坐标图中挠率的表示 [10, 方程 2.3。13]

$$\tau_P(Q,R) = P - \big(\Gamma_P[Q-P, R-P] - \Gamma_P[R-P, Q-P]\big), \tag{8}$$

其中 Γ_P表示 λ的联络符号，这表明对于Q、 $R \in \mathfrak{M}(P)$， $\tau_P(Q,R) \in \mathfrak{M}(P)$，因此 $-\tau_P(Q,R) \in \mathfrak{M}(P)$。我们得到一个交替映射

$$\mathfrak{M}(P) \times \mathfrak{M}(P) \to \mathfrak{M}(P), \qquad (P,Q) \mapsto -\tau_P(P,Q)$$

它可通过提升得到一个交替映射

$$[-,-]_P : D(T_PM) \times D(T_PM) \to D(T_PM)$$

借助 P处的一阶指数-对数双射。由于 $\tau_P(P,Q) = \tau_P(Q,P) = P$我们有 $[0,t]_P = [t,0]_P = 0$。根据 Kock-Lawvere 公理 (I)， $[-,-]_P$因而可唯一扩张为 T_PM上的交替双线性映射。通过在坐标图中考察括号，我们得到

$$[t_1,t_2]_P(d_1d_2) = -\tau_P\big(t_1(d_1), t_2(d_2)\big), \qquad d_1,d_2 \in D,$$

其特征是 $[t_1,t_2]_P$ 这归因于 Kock-Lawvere 公理 (I)，如定理3.11的证明中所述。

(iii) 根据定理3.13这些运算

$$(t_1,t_2) \mapsto t_1 + t_2 + \frac{1}{2}[t_1,t_2]_P$$

and

$$t \mapsto -t$$

使 $D_2(T_PM)$ 成为一个 i-群。我们利用二阶 $\mathfrak{M}_2(P)$对数-指数log-exp 双射（2）将此 i-群结构传递到

$$QR := \exp_P\big(\log_P(Q)\log_P(R)\big)$$

and

$$Q^{-1} := \exp_P\big(-\log_P(Q)\big)$$

对于 $\langle Q,R\rangle \in \mathfrak{M}_2(P)$。这使得 $\mathfrak{M}_2(P)$ 成为一个 i-群。

(iv) 令 Q， $R \in \mathfrak{M}(P)$。由引理 2.9 可得 $\langle Q,\ R\rangle$ 属于 $\mathfrak{M}_2(P)$。由于 指数$_P$对于二阶 i-线性结构是 i-线性的，我们得到

$$Q^{-1} = \exp_P\big(-\log_P(Q)\big) = -Q$$

and

$$\begin{aligned} QR &= \exp_P\Big(\log_P(Q) + \log_P(R) + \frac{1}{2}\big[\log_P(Q), \log_P(R)\big]_P\Big) \\ &= Q + R + \frac{1}{2}\exp_P\Big(\big[\log_P(Q), \log_P(R)\big]_P\Big) \\ &= Q + R - \frac{1}{2}\tau_P(Q,R), \end{aligned}$$

其中，最后一个等式由 T_PM 上括号 $[-,-]_P$ 的构造得出。 $\mathfrak{m}_2(e)$ 中最后一个 i-线性组合可以改写为 M_2 中的 i-仿射组合

$$QR = Q + R - P - \frac{1}{2}\big(\tau_P(Q,R) - P\big)$$

利用坐标图中挠率的呈示（8），类似于定理 3.7 (2) 证明中的计算可得

$$\begin{aligned} QR &= Q + R - P + \bar{\Gamma}_P[Q-P, R-P] + \frac{1}{2}\big(\Gamma_P[Q-P,R-P] - \Gamma_P[R-P,Q-P]\big) \\ &= Q + R - P + \Gamma_P[Q-P,R-P] \\ &= \lambda(P,Q,R), \end{aligned}$$

其中， $\bar{\Gamma}_P$ 是 λ的联络符号，因此也是 Γ_P的对称化。这表明群运算与 λ 一致，正如所声称的那样。

□

比较定理4.1 与命题2.10，我们注意到，缺少一种不依赖基点的代数结构概念。事实上，命题2.10意味着，在 M 上，每个对称仿射联络都等价于在每个 $\mathfrak{m}_2(P)$ 和 $P \in M$上存在二阶 i-线性结构。只有当从 i-线性组合转向 i-仿射组合时，这些运算才变得与基点无关，此时我们称之为 i-仿射结构。

对非阿贝尔情形的直接推广，是在 M_2上进行以下非阿贝尔 *i*-仿射组合运算：

$$\mathcal{A}(n) \times M_2\langle n\rangle, \quad (\mu, \langle P_1, \dots, P_n\rangle) \mapsto \exp_{P_1}\Big(\prod_{j=1}^{n} \mu_j \log_{P_1}(P_j)\Big)$$

然而，事实 证明挠率构成了其与基点无关的障碍 .

命题 4.2. 设 $\langle P, Q, P_1, \dots, P_n\rangle \in M_2\langle n+2\rangle$ 以及 $\mu \in \mathcal{A}(n)$, 则

$$\begin{aligned} \exp_P\Big(\prod_{j=1}^{n} \mu_j \log_{P_1}(P_j)\Big) = &\exp_Q\Big(\prod_{j=1}^{n} \mu_j \log_{P_2}(P_j)\Big) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k<j} \mu_k\mu_j\big(\tau_Q(P,P_k) + \tau_Q(P_j,P) - 2Q\big) \end{aligned}$$

证明。 首先，我们利用由 λ 在 M_2 上诱导的二阶 i-仿射结构来表示并简化 n 元运算

$$\exp_P\Big(\prod_{j=1}^{n} \mu_j \log_{P_1}(P_j)\Big) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j P_j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k<j} \mu_k\mu_j\big(\tau_P(P_k,P_j) - P\big)$$

分别，

$$\exp_P\Big(\prod_{j=1}^{n} \mu_j \log_{P_1}(P_j)\Big) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j P_j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k<j} \mu_k\mu_j\big(\tau_Q(P_k,P_j) - Q\big)$$

（这里我们将 τ 与其唯一延拓 $M_2\langle 3\rangle$视为关于第二和第三个自变量的交替 i-双仿射映射，这由定理4.1 和 Kock-Lawvere 公理 (III) 保证。）

现在我们将证明

$$\tau_P(R,S) - P = \tau_Q(R,S) + \tau_Q(P,R) + \tau_Q(S,P) - 3Q$$

对于 $\langle P,\ Q,\ R,\ S\rangle$ 在 M_2中。我们在一个坐标图中进行计算。应用（8）可得

$$\tau_P(R,S) - P = \Gamma_P[S-P, R-P] - \Gamma_P[R-P, S-P]$$

对 $\Gamma_P = \Gamma_{P+(Q-P)}$ 作泰勒展开，并注意到三阶及更高阶项均为零，可得

$$\begin{aligned}\Gamma_Q[S-P,R-P] &= \Gamma_P[S-P,R-P] + \partial\Gamma_P[S-P,R-P][Q-P] \\ &\qquad + \frac{1}{2}\partial^2\Gamma_P[S-P,R-P][Q-P]^2 \\ &= \Gamma_P[S-P,R-P].\end{aligned}$$

最后，我们利用 Γ_Q的双线性：

$$\begin{aligned}\tau_P(R,S) - P &= \Gamma_P[S-P,R-P] - \Gamma_P[R-P,S-P] \\ &= \Gamma_Q[S-Q+Q-P, R-Q+Q-P] \\ &\qquad - \Gamma_P[R-Q+Q-P, S-Q+Q-P] \\ &= \Gamma_Q[S-Q,R-Q] - \Gamma_Q[R-Q,S-Q] \\ &\qquad - \Gamma_Q[S-Q,P-Q] - \Gamma_Q[P-Q,R-Q] \\ &\qquad + \Gamma_Q[R-Q,P-Q] + \Gamma_Q[P-Q,S-Q] \\ &= \tau_Q(R,S) - Q + \tau_Q(P,R) - Q + \tau_Q(S,P) - Q.\end{aligned}$$

注意，最后一个等式在 M_2中成立，这是因为$\langle Q,\ \tau_Q(R,\ S)\ \tau_Q(P,\ R)\ \tau_Q(S,\ P)\rangle$ 属于 $M_1 \hookrightarrow M_2$（参见命题 3.8）。 □

5 结论

超越无穷小仿射空间和向量空间，我们引入了无穷小群的概念，将其视为群的代数理论的无穷小模型。我们证明，对于李群，其单位元的一阶和二阶单子是李群 G 的 i-子群；但由幂零平方 i-结构诱导的单子并非如此。这表明，在非交换无穷小代数的情形下，自然定义的一阶 i-结构变得至关重要，因为幂零平方 i-结构过于庞大。

借助点的李括号，我们能够重新构造李群的李代数的李括号。由于二阶 i-群运算是 i-双仿射的，我们已经看到，即使没有包络代数，也总能将李括号理解为矩阵李群中熟悉的交换子。此外，我们能够将 KL 向量空间上的二阶 i-群结构刻画为由双线性映射对向量加法进行的变形。

从无穷小图景转向整体图景，借助挠率与点的李括号之间的关系，我们得以将二阶 i-群的构造从李群推广到带有非对称仿射联络的流形。由于在挠率为零的情形下，这一构造退化为二阶 i-仿射结构，因此它也推广了文献[2]中确立的流形上的对称仿射联络与二阶 i-仿射结构之间的对应关系。然而，与对称情形不同，目前我们尚缺少能够导出（非对称）仿射联络的相应代数理论，这仍是一个开放问题。

本文尚未讨论的一个重要例子是形式流形的微分同胚群。尽管它通常不是形式流形，但对于幂零平方 i-结构 [1, chap. 3.3.2] ，自态射幺半群是一个 i-仿射空间，也是一个微线性空间 [11, chap. 2.3]。我们将在未来的论文中讨论这一点。

最后但同样重要的是，我们已经看到，无穷小代数如何帮助简化并澄清李群和形式流形上的许多基本微分几何构造。令人欣慰的是，熟悉的代数结构如何在无穷小层面上自然重现，并与整体结构相互作用，例如李群的情形。在无穷小层面上，坐标图中的许多论证并非为了坐标化，而是为了进行多重线性代数。当这种形式的多重线性代数能够转化为点的无穷小代数时，其处理便会大为简化。我们相信，随着无穷小代数的进一步发展，许多涉及无穷小量的计算最终都可以直接在流形本身上完成，而无需借助坐标图。

参考文献

[1] F. Bár。《代数理论的无穷小模型》。博士论文，剑桥大学纯数学与数理统计系，2017年。网址：https://doi.org/10.17863/CAM.13058。[2]F. Bár。《仿射联络与二阶仿射结构》。范畴拓扑与微分几何笔记，LXIII(1):35–58，2022年。网址：http://cahierstgdc.com/wp-content/uploads/2022/01/BAR-LXIII-1-2.pdf。[3] F. Bár。《代数理论无穷小模型的粘合》。arXiv 预印本，arXiv:2305.01357，2023年。网址：https://doi.org/10.48550/arXiv.2305.01357。[4] S. Bochner。《形式李群》。数学年刊，47(2):192–201，1946年。ISSN 0003486X。网址：http://www.jstor.org/stable/1969242。[5] E. J. Dubuc。《合成微分几何的模型》。范畴拓扑与微分几何笔记，20(3):231–279，1979年。网址：http://www.numdam.org/article/CTGDC_1979__20_3_231_0.pdf。[6] A. Fröhlich。《形式群》，数学讲义第74卷。施普林格出版社，1968年。[7] F. Hausdorff。《群论中的符号指数公式》。莱比锡皇家萨克森科学学会数学与物理部报告与会议录，58:19–48，1906年。

[8]A. Kock。合成微分几何良适配模型的性质。纯粹与应用代数杂志，20(1):55–70，1981年。[9]A. Kock。列维-奇维塔平行性的几何构造。范畴论及其应用，4(9):1–16，1998年。网址：http://www.tac.mta.ca/tac/volumes/1998/n9/n9.pdf。[10] A. Kock。 流形的合成几何。剑桥数学丛书第180卷。剑桥大学出版社，剑桥，2009年。[11] R. Lavendhomme。 合成微分几何基本概念。数学科学丛书。施普林格美国公司，2013年。ISBN 9781475745887。doi: 10.1007/ 978-1-4757-4588-7。网址：https://books.google.com/books?id=IU7UBwAAQBAJ。