arXiv:2305.04617v1 [gr-qc] 8 May 2023

BMS 变换下质量-角动量方面的变换

Po-Ning Chen、Mu-Tao Wang、Ye-Kai Wang 和 Shing-Tung Yau

2023年5月9日

摘要

在本文中，我们给出了质量方面和角动量方面在 BMS 变换下的确定变换公式。我们采用了两种不同的方法，而这两种方法导出了相同的公式。在第一种方法中，我们通过从曲率张量中直接读出方面函数来推导这些公式。而在第二种更为传统的方法中，我们则从度规系数中读出它们。作为角动量方面变换公式的一个应用，我们直接验证了一个关于 Dray-Streubel角动量的关系。该公式还使我们能够用零无穷远上的微分形式重新诠释我们的计算，并得到一般截面的 Drey-Streubel角动量的精确表达式。我们得到的公式在我们近期关于超平移不变荷的工作中发挥了关键作用，并解决了文献中的一些不一致之处。

1 引言

在开创性工作 [2, 14], 中，Bondi-van der Burg-Metzner 和 Sachs 引入了一种基于坐标的方法，即如今所称的 Bondi-Sachs 形式体系 [13], ，用于研究远距离处的引力场。Bondi-Sachs坐标系由一个光学函数 u （其等值面为零超曲面）、光度半径 r，以及球面截面的坐标 $x^A, A = 2$ 组成，3。在 Bondi-Sachs 坐标中，时空度规的形式为

$$-UVdu^2 - 2Ududr + r^2 h_{AB}(dx^A + W^A du)(dx^B + W^B du), A, B = 2, 3 \qquad (1.1)$$

其中， h_{AB} 满足行列式条件

$$\det h_{AB} = \det \sigma_{AB}.$$

这里， σ 表示 S^2上的标准度量。边界条件假设时空是渐近平直的，并且度规系数可以展开为幂级数

上$_r$的
ㄹ
ㄱ
ㄹ
ㄹ

$$
\begin{aligned}
U &= 1 + \frac{U^{(-2)}}{r^2} + O(r^{-3}), \\
V &= 1 - \frac{2m}{r} + O(r^{-2}), \\
W^A &= \frac{W^{A(-2)}}{r^2} + \frac{W^{A(-3)}}{r^3} + O(r^{-4}) \\
h_{AB} &= \sigma_{AB} + \frac{1}{r}C_{AB} + \frac{1}{r^2}d_{AB} + O(r^{-3})
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

其中，行列式条件意味着 C_{AB} 是(S^2, σ)上的对称无迹二阶张量。 $U^{(-2)}, m, W^{A\ (-2)}$ 、 $W^{A\ (-3)}$ 、 C_{AB}和 d_{AB}均依赖于坐标(u, x^A)。

我们进一步通过以下方程定义[1] N^A：

$$
W^{A(-3)} = \frac{2}{3}N^A - C^A_B W^{B(-2)} + \partial_A U^{(-2)}. \tag{1.3}
$$

定义 1.1. 函数 $m(u, x^A)$、1-形式 $N_A(u, x^A) = \sigma_{AB}N^B$和二阶张量 $C_{AB}(u, x^A)$分别称为质量方面、角动量方面和剪切张量。它们被视为定义在 S^2 上、依赖于 u 的张量。本文中，我们相对于 σ_{AB} 升降指标。

注：我们的角动量方面的约定具有 $N_A = \lim_{r\to\infty} r^3 R_{Arru}$，其中 $R_{Arru} = R(\partial_A, \partial_r, \partial_r, \partial_u)$ 和 $R(X, Y, Z, W) = \langle (D_X D_Y - D_Y D_X - D_{[X,Y]})W,\ Z\rangle$ 是曲率张量。

在基于坐标的形式体系中，理解保持 (1.1) 和 (1.2) 不变的坐标变换——即 BMS 变换——至关重要。本文旨在推导 BMS 变换下质量方面和角动量方面的变换公式，即定理 3.1 和定理 3.3。在一种方法中，质量方面和角动量方面被视为曲率分量，这大大减少了计算量。传统上，质量方面和角动量方面被视为度量分量，因此需要进行 BMS 变换的次领先阶计算，才能得到变换公式。超平移下角动量方面的变换公式最早由 [7] 计算得出。该公式的正确形式对于我们近期关于超平移不变荷的研究至关重要，这些荷包括角动量和质心 [4, 5, 6]。由于我们的结果与 [7], 中的结果不一致，我们决定采用两种不同的推导方法，以确保本文所得公式的正确性。

这些公式的推导相当复杂，涉及 U、V、 W^A 等量，这些量最初在 [2, 14] 中采用；此外，计算中还引入了若干中间量（不过，我们严格遵循 [13] 中的 Bondi-Sachs 形式体系）。以下内容仅用度规系数及其展开式来表述；对应关系见附录B。

[1]我们的约定是 $N^A = -3N^A{}_{(CJK)}$。参见 [7, (C.104)]。

定理 1.2. 假设 $(\bar{u},\bar{r},\bar{x}^A)$ $A=2,3$ 是真空时空的一个 Bondi-Sachs坐标系，使得对于 $\bar{r}>\bar{r}_0>>1$，时空度规具有如下形式

$$\bar{g}_{\bar{u}\bar{u}}d\bar{u}^2+2\bar{g}_{\bar{u}\bar{r}}d\bar{u}d\bar{r}+2\bar{g}_{\bar{u}A}d\bar{u}d\bar{x}^A+\bar{g}_{AB}d\bar{x}^Ad\bar{x}^B$$

且度量分量允许作如下展开:

$$\begin{aligned}\bar{g}_{\bar{u}\bar{u}}&=-1+\bar{g}^{(-1)}_{\bar{u}\bar{u}}(\bar{u},\bar{x}^A)\bar{r}^{-1}+o(\bar{r}^{-1})\\ \bar{g}_{\bar{u}\bar{r}}&=-1+\bar{g}^{(-1)}_{\bar{u}\bar{r}}(\bar{u},\bar{x}^A)\bar{r}^{-1}+o(\bar{r}^{-1})\\ \bar{g}_{\bar{u}A}&=\bar{g}^{(0)}_{\bar{u}A}(\bar{u},\bar{x}^A)+\bar{g}^{(-1)}_{\bar{u}A}(\bar{u},\bar{x}^A)\bar{r}^{-1}+o(\bar{r}^{-1})\\ \bar{g}_{AB}&=\sigma_{AB}\bar{r}^2+\bar{g}^{(1)}_{AB}(\bar{u},\bar{x}^A)\bar{r}+o(\bar{r}).\end{aligned}$$

将 $m(\bar{u},\bar{x}^A)=\frac{1}{2}\bar{g}^{(-1)}_{\bar{u}\bar{u}}(\bar{u},\bar{x}^A)$ 记为质量方面,

$$N_A(\bar{u},\bar{x}^A)=\frac{3}{2}[\bar{g}^{(-1)}_{\bar{u}A}+\frac{1}{16}\partial_A(\sigma^{BD}\sigma^{CE}\bar{g}^{(1)}_{BC}\bar{g}^{(1)}_{DE})](\bar{u},\bar{x}^A)$$

角动量方面，以及 $C_{AB}(\bar{u},\bar{x}^A)=\bar{g}^{(1)}_{AB}(\bar{u},\bar{x}^A)$ 表示 $(\bar{u},\bar{r},\bar{x}^A)$ 坐标系的剪切。

假设 (u,r,x^a) $a=2,3$ 是另一个 Bondi-Sachs坐标系，它通过以下方式与 $(\bar{u},\bar{r},\bar{x}^A)$ 相关联】【。

$$\bar{x}^A(u,r,x^a)=g^A(x^a)+\bar{x}^{(-1)A}(u,x^a)r^{-1}+o(r^{-1}) \tag{1.4}$$

$$\bar{u}(u,r,x^a)=K(x^a)\,(u+f(x^a))+\bar{u}^{(-1)}(u,x^a)r^{-1}+o(r^{-1}) \tag{1.5}$$

$$\bar{r}(u,r,x^a)=\frac{1}{K(x^a)}r+\bar{r}^{(0)}(u,x^a)+o(1), \tag{1.6}$$

其中， $g^A(x^a)$ 是定义在 S^2 上的共形映射，满足:

$$\sigma_{AB}\partial_a g^A\partial_b g^B=K^2(x^a)\sigma_{ab}=:\bar{\sigma}_{ab}, \tag{1.7}$$

使得在 u、 r、 x^a 坐标系中， $r=\infty$ 附近的时空度规具有如下形式

$$g_{uu}du^2+2g_{ur}dudr+2g_{ua}dudx^a+g_{ab}dx^adx^b$$

并且度量分量具有以下展开式:

$$\begin{aligned}g_{uu}&=-1+g^{(-1)}_{uu}(u,x^a)r^{-1}+o(r^{-1})\\ g_{ur}&=-1+g^{(-1)}_{ur}(u,x^a)r^{-1}+o(r^{-1})\\ g_{ua}&=g^{(0)}_{ua}(u,x^a)+g^{(-1)}_{ua}(u,x^a)r^{-1}+o(r^{-1})\\ g_{ab}&=r^2\sigma_{ab}+g^{(1)}_{ab}(u,x^a)r+o(r)\end{aligned}$$

将 $\mathfrak{m}(u,x^a)=\frac{1}{2}g^{(-1)}_{uu}(u,x^a)$ 记为

$$\mathfrak{N}_a(u,x^a)=\frac{3}{2}[g^{(-1)}_{ua}+\frac{1}{16}\partial_a(\sigma^{bd}\sigma^{ce}g^{(1)}_{bc}g^{(1)}_{de})](u,x^a)$$

(u, r, x^a) 坐标系的质量方面和角动量方面。

记 $f(u, x^a) \hat{=} K(x^a)\,(u + f(x^a))$，则质量方面和角动量方面满足以下变换公式：

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}(u, x^a) = K^3\Big(m + \frac{1}{2}\bar{\nabla}^a\hat{f}\partial_a g^A\partial_{\bar{u}}\nabla^D C_{AD} + \frac{1}{4}\bar{\nabla}^a\hat{f}\bar{\nabla}^b\hat{f}\partial_a g^A\partial_b g^B\partial_{\bar{u}}\partial_{\bar{u}}C_{AB} \\ + \frac{1}{4}\bar{\nabla}^a\bar{\nabla}^b\hat{f}\partial_a g^A\partial_b g^B\partial_{\bar{u}}C_{AB}\Big)\end{aligned} \tag{1.8}$$

其中，右侧的 m、$\partial_{\bar{u}}C_{AB}$、$\partial_{\bar{u}}\partial_{\bar{u}}C_{AB}$ 均在 $(\bar{u} = \hat{f}(u, x^a)\ \bar{x}^A = g^A(x^a))$ 处取值。

$$\begin{aligned}\mathfrak{N}_a(u, x^a) = K^2\Big(&\partial_a g^A N_A + 3m\nabla_a\hat{f} \\ &- \frac{3}{4}\partial_a g^A\left(\nabla_B\nabla^D C_{DA} - \nabla_A\nabla^D C_{DB}\right)\partial_c g^B\bar{\nabla}^c\hat{f} - \frac{3}{4}\partial_a g^A\nabla^B\partial_{\bar{u}}C_{BA}|\bar{\nabla}\hat{f}|^2 \\ &+ \frac{3}{4}\partial_{\bar{u}}C^B_D C_{AB}\partial_a g^A\partial_c g^D\bar{\nabla}^c\hat{f} + \frac{1}{2}\partial_{\bar{u}}\partial_{\bar{u}}C_{AB}\partial_c g^A\partial_d g^B\bar{\nabla}^c\hat{f}\bar{\nabla}^d\hat{f}\nabla_a\hat{f} \\ &+ \frac{3}{2}\partial_{\bar{u}}\nabla^D C_{DB}\partial_c g^B\bar{\nabla}^c\hat{f}\nabla_a\hat{f} - \frac{1}{4}\partial_{\bar{u}}\partial_{\bar{u}}C_{AB}\partial_a g^A\partial_c g^B\bar{\nabla}^c\hat{f}|\bar{\nabla}\hat{f}|^2\Big)\end{aligned} \tag{1.9}$$

其中，右侧的 N_A、m、C_{AB}、$\partial_{\bar{u}}C_{AB}$、$\partial_{\bar{u}}\partial_{\bar{u}}C_{AB}$ 均在 $(\bar{u}, \hat{f}(u, x^a)\ \bar{x}^A = g^A(x^a))$ 处取值。

方程 (1.8) 在定理 3.1 中证明，方程 (1.9) 在定理 3.3 中证明。

本文结构如下。第 2 节给出 Christoffel 符号、曲率张量和 BMS 变换的主导阶。这些结果用于在第 3 节推导主要变换公式 (1.8) 和 (1.9)。第 4 节介绍推导变换公式的传统方法。第 5 节应用我们得到的角动量方面变换公式，验证一个关于 Dray-Streubel角动量的关系，并用零无穷远上的一个微分 2-形式给出一般截面的 Drey-Streubel角动量的精确表达式。随后，我们也将结果推广到一般截面的 BMS 荷。本文包含三个附录：附录 A 给出 S^2 上对称无迹二阶张量的两个恒等式；附录B介绍传统方法中计算度规系数的一般方案；附录 C 中我们推导 [7, 的变换公式5]，并将其与我们的公式进行比较。

2 克里斯托费尔符号、曲率张量和 BMS 变换的主导阶

2.1 时空的克里斯托费尔符号和曲率张量

在本小节中，我们假设时空度量关于给定的 Bondi 坐标 r具有幂级数展开，并给出克里斯托费尔符号的首阶项以及

曲率张量的分量。计算过程很直接。提醒读者， S^2 上张量的指标是相对于标准度量 σ_{AB} 升降的。此外，我们用 ∇ 表示 σ_{AB} 的协变导数。

引理 2.1. 时空度规的克里斯托费尔符号 $\mathbf{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta}$ 由下式给出

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Gamma}^{u}_{uu} &= r^{-2}\left(\partial_u U^{(-2)} - m\right) + O(r^{-3}) \\
\mathbf{\Gamma}^{u}_{ru} &= \mathbf{\Gamma}^{u}_{rr} = \mathbf{\Gamma}^{u}_{rA} = 0 \\
\mathbf{\Gamma}^{u}_{uA} &= r^{-2}\cdot\frac{1}{2}\left(\partial_A U^{(-2)} - W^{(-3)}_A - C_{AB}W^{(-2)B}\right) + O(r^{-3}) \\
\mathbf{\Gamma}^{u}_{AB} &= r\sigma_{AB} + \frac{1}{2}C_{AB} + O(r^{-1})
\end{aligned}$$

对于 $\Gamma^{r}_{\alpha\beta}$，我们有

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Gamma}^{r}_{uu} &= r^{-1}\cdot(-\partial_u m) + O(r^{-2}) \\
\mathbf{\Gamma}^{r}_{ur} &= r^{-2}\cdot m + O(r^{-3}) \\
\mathbf{\Gamma}^{r}_{uA} &= r^{-1}\left(-\partial_A m + \frac{1}{2}W^{B(-2)}\partial_u C_{AB}\right) + O(r^{-2}) \\
\mathbf{\Gamma}^{r}_{rr} &= r^{-3}\cdot(-2U^{(-2)}) + O(r^{-4}) \\
\mathbf{\Gamma}^{r}_{rA} &= r^{-1}W^{(-2)}_A + O(r^{-2}) \\
\mathbf{\Gamma}^{r}_{AB} &= r\left(\frac{1}{2}\partial_u C_{AB} - \sigma_{AB}\right) + O(1)
\end{aligned}$$

对于 $\Gamma^{A}_{\alpha\beta}$，我们有

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Gamma}^{A}_{uu} &= r^{-2}\partial_u W^{(-2)A} + O(r^{-3}) \\
\mathbf{\Gamma}^{A}_{ur} &= r^{-4}\cdot\frac{1}{2}\left(\nabla^A U^{(-2)} - W^{(-3)A} - C^A_B W^{(-2)B}\right) + O(r^{-5}) \\
\mathbf{\Gamma}^{A}_{uB} &= \frac{1}{2r}\partial_u C^A_B + \frac{1}{2r^2}\left(\partial_u d^A_B - C^{AD}\partial_u C_{BD} + \nabla_B W^{(-2)A} - \nabla^A W^{(-2)}_B\right) + O(r^{-3}) \\
\mathbf{\Gamma}^{A}_{rr} &= 0 \\
\mathbf{\Gamma}^{A}_{rB} &= r^{-1}\delta^A_B + O(r^{-2}) \\
\mathbf{\Gamma}^{C}_{AB} &= \Gamma^C_{AB} + O(r^{-1})
\end{aligned}$$

其中， $\Gamma^C_{AB} = \frac{1}{2}\sigma^{AD}(\partial_B\sigma_{CD} + \partial_C\sigma_{BD} - \partial_D\sigma_{BC})$ 是 σ_{AB} 在 S^2 上的克里斯托费尔符号。

命题 2.2. 时空度规 $R_{\alpha\beta}{}^{\gamma}{}_{\delta} = \partial_\alpha\mathbf{\Gamma}^{\gamma}_{\beta\delta} - \partial_\beta\mathbf{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\delta} +$ 的曲率张量

$\mathbf{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\sigma}\mathbf{\Gamma}^{\sigma}_{\beta\delta} - \mathbf{\Gamma}^{\sigma}_{\alpha\delta}\mathbf{\Gamma}^{\gamma}_{\beta\sigma}$ 由下式给出

$$
\begin{aligned}
R_{uAuB} &= -\frac{r}{2}\partial_u\partial_u C_{AB} + O(1)\\
R_{Auru} &= -\frac{1}{r}\partial_u W_A^{(-2)} + O(r^{-2})\\
R_{urru} &= \frac{2}{r^3}\left(m - \partial_u U^{(-2)}\right) + O(r^{-4})\\
R_{ABCD} &= O(r)\\
R_{ABru} &= \frac{1}{r}\left(\frac{1}{4}C_A^D\partial_u C_{DB} - \frac{1}{4}C_B^D\partial_u C_{DA} + \nabla_A W_B^{(-2)} - \nabla_B W_A^{(-2)}\right) + O(r^{-2})\\
R_{ArBu} &= \frac{1}{r}\left(m\sigma_{AB} - \frac{1}{4}C_B^D\partial_u C_{DA} + \frac{1}{2}\partial_u d_{AB} + \frac{1}{2}\nabla_A W_B^{(-2)} - \frac{1}{2}\nabla_B W_A^{(-2)}\right) + O(r^{-2})\\
R_{Arru} &= \frac{1}{r^3}\cdot\frac{3}{2}\left(C_{AB}W^{(-2)B} + W_A^{(-3)} - \partial_A U^{(-2)}\right) = \frac{1}{r^3}N_A + O(r^{-4})\\
R_{ABDu} &= \frac{r}{2}\left(\nabla_A\partial_u C_{BD} - \nabla_B\partial_u C_{AD}\right) + O(1)\\
R_{rArB} &= O(r^{-3})
\end{aligned}
$$

特别地，我们确定了 R_{urur} 中的质量方面 m 以及 R_{Arru}中的角动量方面N_A。

2.2 BMS 变换

设 $\varphi: (u, r, x^a) \to (\bar{u}, \bar{r}, \bar{x}^A)$为一个BMS变换，它将一个Bondi-Sachs坐标系(u, r, x^a)变换到另一个坐标系$(\bar{u}, \bar{r}, \bar{x}^A)$。众所周知，其领先阶为

$$\bar{x}^A(u, r, x^a) = g^A(x^a) + \frac{1}{r}g^{(-1)A}(u, x^a) + O(r^{-2}) \tag{2.10}$$

$$\bar{u}(u, r, x^a) = K(x^a)\left(u + f(x^a)\right) + \frac{1}{r}a^{(-1)}(u, x^a) + O(r^{-2}) \tag{2.11}$$

$$\bar{r}(u, r, x^a) = \frac{1}{K(x^a)}r + \rho^{(0)}(u, x^a) + O(r^{-1}), \tag{2.12}$$

其中，$g^A(x^a)$是 S^2 上的一个共形映射，满足：

$$\sigma_{AB}\partial_a g^A\partial_b g^B = K^2(x)\sigma_{ab} =: \bar{\sigma}_{ab}. \tag{2.13}$$

参见Sachs [14, 第3(b)节]。此处的记号采用自 [2, (28)]。

注：当 f 是 S^2上的常函数和第一特征函数的线性组合时，相应的BMS变换是一个平移。参见 [18]中的附录。

$\hat{}$ 定义 2.3。我们使用简写 $f = K(u + f)$。我们用 $\bar{\nabla}$ 和 $\bar{\Delta}$ 表示相对于 (2.13) 中的 $\bar{\sigma}$ 的协变导数和拉普拉斯算子，并记作 $|\bar{\nabla}\hat{f}|^2 = \bar{\sigma}^{ab}\partial_a\hat{f}\partial_b\hat{f}$。此外，对于 $(\bar{u}, \bar{r}, \bar{x}^A)$ 坐标系的剪切张量，我们记作 C_{AB}（而不是 $\bar{C}_{AB}$）。

根据链式法则，我们得到：

$$\begin{aligned}
\varphi_*(\partial_u) &= K\partial_{\bar{u}} + \partial_u\rho^{(0)}\partial_{\bar{r}} + \frac{1}{r}\partial_u g^{(-1)A}\partial_A + \text{lower order term} \\
\varphi_*(\partial_r) &= -\frac{1}{r^2}a^{(-1)}\partial_{\bar{u}} + K^{-1}\partial_{\bar{r}} - \frac{1}{r^2}g^{(-1)A}\partial_A + \text{lower order term} \\
\varphi_*(\partial_a) &= \nabla_a\hat{f}\partial_{\bar{u}} - rK^{-2}\nabla_a K\partial_{\bar{r}} + \partial_a g^A\partial_A + \text{lower order term.}
\end{aligned} \tag{2.14}$$

将 $g_{\alpha\beta}$ 记为 (u, r, x^a) 坐标系中的度量分量，我们有

$$\begin{aligned}
g_{ra} &= -K^{-1}\nabla_a\hat{f} - K^{-2}\sigma_{AB}\partial_a g^A g^{(-1)B} + O(r^{-1}) \\
g_{rr} &= \frac{1}{r^2}\left(2K^{-1}a^{(-1)} + K^{-2}\sigma_{AB}g^{(-1)A}g^{(-1)B}\right) + O(r^{-3}) \\
g_{ab} &= r^2\sigma_{ab} \\
&\quad + r\Big[K^{-2}\nabla_a K\nabla_b\hat{f} + K^{-2}\nabla_b K\nabla_a\hat{f} + 2K\rho^{(0)}\sigma_{ab} \\
&\qquad + K^{-2}\sigma_{AB}\left(\partial_a g^A\partial_b g^{(-1)B} + \partial_a g^{(-1)A}\partial_b g^B\right) \\
&\qquad + \left(K^{-2}\partial_D\sigma_{AB}g^{(-1)D} + K^{-1}C_{AB}\right)\partial_a g^A\partial_b g^B\Big] + O(1).
\end{aligned}$$

我们归纳地求解

1. 从 $g^{(0)}_{ra} = 0$ 得到 $g^{(-1)A}$，2. 从 $g^{(-2)}_{rr} = 0$ 得到 $a^{(-1)}$，3. 从 $\sigma^{ab}g^{(1)}_{ab} = 0$ 得到 $\rho^{(0)}$。

首先，由 (2.13) 可以验证以下公式。

引理 2.4。

$$g^{(-1)A} = -K\bar{\nabla}^c\hat{f}\partial_c g^A \tag{2.15}$$

接下来，由 $g^{(0)}_{rr} = 0$ 和上述公式，我们得到

引理 2.5。

$$a^{(-1)} = -\frac{1}{2}K|\bar{\nabla}\hat{f}|^2$$

最后，我们得到

引理 2.6.

$$\rho^{(0)} = \frac{1}{2}\bar{\Delta}\hat{f}$$

证明。我们计算

$$\partial_b g^{(-1)B} = -\nabla_b K \bar{\nabla}^c \hat{f} \partial_c g^B - K \partial_b (\bar{\nabla}^c \hat{f}) \partial_c g^B - K \bar{\nabla}^d \hat{f} \partial_b \partial_d g^B.$$

¯根据克里斯托费尔符号的变换（此处 Γ^c_{bd} 表示 $\bar{\sigma}$在 S^2上的克里斯托费尔符号）

$$\bar{\Gamma}^c_{bd} = \partial_E g^c \left(\Gamma^E_{AD} \partial_b g^A \partial_d g^D + \partial_b \partial_d g^E \right), \tag{2.16}$$

我们得到
的是

$$\partial_b \partial_d g^B = \bar{\Gamma}^c_{bd} \partial_c g^B - \Gamma^B_{ED} \partial_b g^E \partial_d g^D$$

and

$$\begin{aligned} \partial_b g^{(-1)B} &= -\nabla_b K \bar{\nabla}^c \hat{f} \partial_c g^B - K \bar{\nabla}_b \bar{\nabla}^c \hat{f} \partial_c g^B + K \bar{\nabla}^d \hat{f} \Gamma^B_{ED} \partial_b g^E \partial_d g^D \\ &= K^{-1} \nabla_b K g^{(-1)B} - K \bar{\nabla}_b \bar{\nabla}^c \hat{f} \partial_c g^B - \Gamma^B_{ED} \partial_b g^E g^{(-1)D}. \end{aligned}$$

由于 $\sigma_{AB} \partial_a g^A = \bar{\sigma}_{ac} \partial_B g^c$，我们得到

$$\begin{aligned} & K^{-2} \sigma_{AB} \left(\partial_a g^A \partial_b g^{(-1)B} + \partial_a g^{(-1)A} \partial_b g^B \right) \\ &= -2K^{-1} \bar{\nabla}_a \bar{\nabla}_b \hat{f} - K^{-2} \nabla^b K \nabla_a \hat{f} - K^{-2} \nabla_a K \nabla_b \hat{f} \\ &\quad + K^{-1} \bar{\nabla}^d \hat{f} \sigma_{AB} \left(\partial_a g^A \Gamma^B_{ED} \, \partial_b g^E + \partial_b g^B \Gamma^A_{ED} \partial_a g^E \right) \partial_d g^D \end{aligned}$$

由于 $\partial_C \sigma_{AB} = \sigma_{AD} \Gamma^D_{BC} + \sigma_{BD} \Gamma^D_{AC}$，我们得到

$$g^{(1)}_{ab} = 2K^{-1} \rho^{(0)} \bar{\sigma}_{ab} - 2K^{-1} \bar{\nabla}_a \bar{\nabla}_b \hat{f} + K^{-1} C_{AB} \partial_a g^A \partial_b g^B$$

并从 $\sigma^{ab} g^{(1)}_{ab} = 0$ 求解 $\rho^{(0)}$。 □

因此，我们得到剪切和新闻张量的变换。

推论 2.7. 剪切张量的变换规律为

$$g^{(1)}_{ab}(u,x) = -K^{-1} \left(2 \bar{\nabla}_a \bar{\nabla}_b \hat{f} - \bar{\Delta} \hat{f} \bar{\sigma}_{ab} \right) + K^{-1} C_{AB}(\hat{f}(u,x), g(x)) \partial_a g^A \partial_b g^B \tag{2.17}$$

新闻张量的变换规律为

$$\partial_u g^{(1)}_{ab} = \partial_{\bar{u}} C_{AB}(\hat{f}(u,x), g(x)) \partial_a g^A \partial_b g^B. \tag{2.18}$$

2.3 爱因斯坦真空方程与出射辐射条件

在本文余下部分中，我们假设时空满足真空爱因斯坦方程 $Ric = 0$. 参见 M¨adler-Winicour [13, 截面 3]，其中对 Bond-Sachs 形式主义中的爱因斯坦方程进行了详细总结。在本小节中，我们回顾本文后续部分将用到的一些公式。

首先，在 Bondi-Sachs 坐标中，真空爱因斯坦方程意味着

$$U^{(-2)} = -\frac{1}{16} C_{DE} C^{DE} \tag{2.19}$$

$$W^{A(-2)} = \frac{1}{2} \nabla_B C^{AB}. \tag{2.20}$$

在前面的小节中，我们假设时空度规在 r 中具有幂级数展开。众所周知，在 Bondi-Sachs 形式体系中，展开通常会出现对数项。为了保证展开中不存在对数项，从而确实具有幂级数展开，我们假设满足“出射辐射条件”。

结合爱因斯坦方程，可得

$$d_{AB} = \frac{1}{2} C_A^D C_{DB} \tag{2.21}$$

3 质量方面和角动量方面的变换

假　设 (u, r, x^a) 和 $(\bar{u}, \bar{r}, \bar{x}^A)$ 坐标系中的度规张量分别为

$$\begin{aligned} &-\mathcal{U}\mathcal{V} du^2 - 2\mathcal{U} du dr + g_{ab} \left(dx^a + \mathcal{W}^a du\right) \left(dx^b + \mathcal{W}^b du\right) \\ &\text{and} \\ &-UV d\bar{u}^2 - 2U d\bar{u} d\bar{r} + \bar{r}^2 h_{AB} \left(d\bar{x}^A + W^A d\bar{u}\right) \left(d\bar{x}^B + W^B d\bar{u}\right) \end{aligned} \tag{3.22}$$

分别。

我们首先推导质量方面的变换公式。

定理 3.1. 质量方面的变换为

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}(u, x) = K^3 \Big(m + \bar{\nabla}^a \hat{f} \partial_a g^A \partial_{\bar{u}} W_A^{(-2)} + \frac{1}{4} \bar{\nabla}^a \hat{f} \bar{\nabla}^b \hat{f} \partial_a g^A \partial_b g^B \partial_{\bar{u}} \partial_{\bar{u}} C_{AB} \\ + \frac{1}{4} \bar{\nabla}^a \bar{\nabla}^b \hat{f} \partial_a g^A \partial_b g^B \partial_{\bar{u}} C_{AB} \Big) \end{aligned} \tag{3.23}$$

其中，m、$\partial_{\bar{u}} W_{(-2)A}$、$\partial_{\bar{u}} C_{AB}$、$\partial_{\bar{u}} \partial_{\bar{u}} C_{AB}$ 均在 $(\hat{f}(u, x)\ g(x))$ 处取值。

回顾 (2.20) 中 $W_A^{(-2)}$ 的定义，我们得到 (1.8)。

证明。设 φ 是一个 BMS 变换。曲率张量的张量性质意味着

$$R_{urru} = \widetilde{R}(\varphi_*(\partial_u), \varphi_*(\partial_r), \varphi_*(\partial_r), \varphi_*(\partial_u)).$$

这里 $\bar{R}$ 表示（$\bar{u}, \bar{r}, \bar{x}^A$）坐标系中的曲率张量。由（2.14）和命题 2.2，我们得到

$$R_{urru} = \bar{R}_{\bar{u}\bar{r}\bar{r}\bar{u}} - K \frac{g^{(-1)A}}{r^2} \bar{R}_{\bar{u}\bar{r}A\bar{u}} - K \frac{g^{(-1)A}}{r^2} \bar{R}_{\bar{u}A\bar{r}\bar{u}} + K^2 \frac{1}{r^4} g^{(-1)A} g^{(-1)B} \bar{R}_{\bar{u}AB\bar{u}} + O(r^{-4}).$$

根据命题 2.2，我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^3}\left(2\mathfrak{m}-2\partial_u\mathcal{U}^{(-2)}\right)+O(r^{-4})=\frac{1}{\bar{r}^3}\left(2m-2\partial_{\bar{u}}U^{(-2)}\right)\\ -\frac{2K}{r^2}g^{(-1)A}\cdot\frac{1}{\bar{r}}\partial_{\bar{u}}W_A^{(-2)}\\ +\frac{K^2}{r^4}g^{(-1)A}g^{(-1)B}\cdot\frac{\bar{r}}{2}\partial_{\bar{u}}\partial_{\bar{u}}C_{AB}+O(r^{-4}).\end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}+\frac{1}{16}\partial_u\left(\sigma^{ac}\sigma^{bd}g^{(1)}_{ab}g^{(1)}_{cd}\right)=K^3\left(m+\frac{1}{16}\partial_{\bar{u}}(C_{DE}C^{DE})\right)+K^3\bar{\nabla}^a\hat{f}\partial_a g^A\partial_{\bar{u}}W_A^{(-2)}\\ +\frac{1}{4}K^3\bar{\nabla}^a\hat{f}\bar{\nabla}^b\hat{f}\partial_a g^A\partial_b g^B\partial_{\bar{u}}\partial_{\bar{u}}C_{AB}\end{aligned}$$

该组装件这一推论可通过注意到下述等式得到，该等式可由（2.17）推导得出。 .

$$\partial_u\left(\sigma^{ac}\sigma^{bd}g^{(1)}_{ab}g^{(1)}_{cd}\right)=K^3\partial_{\bar{u}}(C_{DE}C^{DE})-4K^3\partial_{\bar{u}}C_{AB}\partial_a g^A\partial_b g^B\bar{\nabla}^a\bar{\nabla}^b\hat{f}$$

□

如果用 [17] 中讨论的修正质量方面函数$m-\frac{1}{4}\nabla^A\nabla^B C_{AB}$来表示，上述公式会更简洁。

定理 3.2。

$$\mathfrak{m}-\frac{1}{4}\nabla^a\nabla^b g^{(1)}_{ab}=K^3\left(m-\frac{1}{4}\nabla^A\nabla^B C_{AB}+\frac{1}{4}\bar{\Delta}(\bar{\Delta}+2)\hat{f}\right),\tag{3.24}$$

其中，右侧的 m 和 $\nabla^A\nabla^B C_{AB}$ 均在 ($\bar{u}=\hat{}f(u,x^a)$ $\bar{x}^A=g^A(x^a)$) 处取值。

证明。容易验证，对称无迹张量的双重散度变换为

$$\nabla^a\nabla^b g^{(1)}_{ab}=K^3\bar{\nabla}^a\bar{\nabla}^b(Kg^{(1)}_{ab}).$$

由推论 2.17 可得

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}^a\bar{\nabla}^b(Kg^{(1)}_{ab})&=\bar{\nabla}^a\left(\partial_{\bar{u}}C_{AB}\bar{\nabla}^b\hat{f}\partial_a g^A\partial_b g^B+\nabla^B C_{AB}\partial_a g^A-\bar{\nabla}_a(\bar{\Delta}+2)\hat{f}\right)\\ &=\partial_{\bar{u}}\partial_{\bar{u}}C_{AB}\bar{\nabla}^a\hat{f}\bar{\nabla}^b\hat{f}\partial_a g^A\partial_b g^B+\partial_{\bar{u}}\nabla^A C_{AB}\bar{\nabla}^b\hat{f}\partial_b g^B\\ &\quad+\partial_{\bar{u}}C_{AB}\bar{\nabla}^a\bar{\nabla}^b\hat{f}\partial_a g^A\partial_b g^B\\ &\quad+\partial_{\bar{u}}\nabla^B C_{AB}\bar{\nabla}^a\hat{f}\partial_a g^A+\nabla^A\nabla^B C_{AB}-\bar{\Delta}(\bar{\Delta}+2)\hat{f}.\end{aligned}$$

根据定理 3.1 和 $W_{(-2)\,A}\quad=\frac{1}{2}\nabla^B C_{AB}$，断言得证。 □

接下来我们推导角动量方面的变换公式。 .

定理 3.3. 角动量方面的变换由以下公式给出。

$$\begin{aligned}\mathfrak{N}_a(u,x) &= K^2\partial_a g^A N_A + 3mK^2\nabla_a\hat{f}\\ &+ \frac{3}{2}K\partial_a g^A\left(\nabla_B W_A^{(-2)} - \nabla_A W_B^{(-2)}\right)g^{(-1)B} - \frac{3}{2}K^2\partial_a g^A\partial_{\bar{u}}W_A^{(-2)}|\bar{\nabla}\hat{f}|^2\\ &- \frac{3}{4}K\partial_{\bar{u}}C_D^B C_{AB}\partial_a g^A g^{(-1)D} + \frac{1}{2}\partial_{\bar{u}}\partial_{\bar{u}}C_{AB}g^{(-1)A}g^{(-1)B}\nabla_a\hat{f}\\ &- 3K\partial_{\bar{u}}W_A^{(-2)}g^{(-1)A}\nabla_a\hat{f} + \frac{1}{4}K\partial_{\bar{u}}\partial_{\bar{u}}C_{AB}\partial_a g^A g^{(-1)B}|\bar{\nabla}\hat{f}|^2\end{aligned} \tag{3.25}$$

其中 $N_A, m, C_{AB}, \partial_{\bar{u}}W^{(-2)}{}_A, \partial_{\bar{u}}C_{AB}, \partial_{\bar{u}}\partial_{\bar{u}}C_{AB}$ 在 $(\hat{f}(u,x)\ g(x))$ 处取值， $g^{(-1)A}$ 由 (2.15) 给出， $W_A^{(-2)}$ 由 (2.20) 给出。

回顾 (2.20) 中 $W_A^{(-2)}$ 的定义以及 (2.4) 中 $g^{(-1)A}$ 的定义，我们得到 (1.9)。

证明。设 φ 为一个 BMS变换。曲率张量的张量性质意味着

$$R_{arru} = \bar{R}\left(\varphi_*(\partial_a), \varphi_*(\partial_r), \varphi_*(\partial_r), \varphi_*(\partial_u)\right).$$

这里， $\bar{R}$ 表示 $(\bar{u}, \bar{r}, \bar{x}^A)$ 坐标系中的曲率张量。由 (2.14) 和命题 2.2，我们得到

$$\begin{aligned}R_{arru} &= K^{-1}\nabla_a\hat{f}\bar{R}_{\bar{u}\bar{r}\bar{r}\bar{u}} - \frac{1}{r^2}\nabla_a\hat{f}g^{(-1)A}\bar{R}_{\bar{u}\bar{r}A\bar{u}}\\ &- \frac{1}{r^2}\nabla_a\hat{f}g^{(-1)A}\bar{R}_{\bar{u}A\bar{r}\bar{u}} + \frac{1}{r^4}K\nabla_a\hat{f}g^{(-1)A}g^{(-1)B}\bar{R}_{\bar{u}AB\bar{u}}\\ &- \frac{1}{r^2}a^{(-1)}\partial_a g^A\bar{R}_{A\bar{u}\bar{r}\bar{u}} + \frac{1}{r^4}Ka^{(-1)}\partial_a g^A g^{(-1)B}\bar{R}_{A\bar{u}B\bar{u}}\\ &+ K^{-1}\partial_a g^A\bar{R}_{A\bar{r}\bar{r}\bar{u}} - \frac{1}{r^2}\partial_a g^A g^{(-1)B}\bar{R}_{A\bar{r}B\bar{u}}\\ &- \frac{1}{r^2}\partial_a g^A g^{(-1)B}\bar{R}_{AB\bar{r}\bar{u}} + \frac{1}{r^4}K\partial_a g^A g^{(-1)B}g^{(-1)D}\bar{R}_{ABD\bar{u}} + O(r^{-4}).\end{aligned}$$

由命题 2.2 可得

$$\begin{aligned}&\frac{3}{2}\left(g_{ua}^{(-1)} - \partial_a\mathcal{U}^{(-2)}\right)\\ &= K^2\left(2m - 2\partial_{\bar{u}}U^{(-2)}\right)\nabla_a\hat{f} - 2K\partial_{\bar{u}}W_A^{(-2)}g^{(-1)A}\nabla_a\hat{f}\\ &- 2K\partial_{\bar{u}}W_A^{(-2)}g^{(-1)A}\nabla_a\hat{f} + \frac{1}{2}\partial_{\bar{u}}C_{AB}g^{(-1)A}g^{(-1)B}\nabla_a\hat{f}\\ &- \frac{1}{2}K^2\partial_{\bar{u}}W_A^{(-2)}\partial_a g^A|\bar{\nabla}\hat{f}|^2 + \frac{1}{4}K\partial_{\bar{u}}\partial_{\bar{u}}C_{AB}\partial_a g^A g^{(-1)B}|\bar{\nabla}\hat{f}|^2\\ &+ K^2\partial_a g^A\cdot\frac{3}{2}\left(\bar{g}_{\bar{u}A}^{(-1)} - \partial_A U^{(-2)}\right)\\ &- K\partial_a g^A g^{(-1)B}\left(m\sigma_{AB} - \frac{1}{4}C_{BD}\partial_{\bar{u}}C_A^D + \frac{1}{2}\partial_{\bar{u}}d_{AB} + \frac{1}{2}\nabla_A W_B^{(-2)} - \frac{1}{2}\nabla_B W_A^{(-2)}\right)\\ &- K\partial_a g^A g^{(-1)B}\left(-\frac{1}{4}C_{BD}\partial_{\bar{u}}C_A^D + \frac{1}{4}C_{AD}\partial_{\bar{u}}C_B^D + \nabla_A W_B^{(-2)} - \nabla_B W_A^{(-2)}\right)\\ &+ \partial_a g^A g^{(-1)B}g^{(-1)D}\cdot\frac{1}{2}\partial_{\bar{u}}(\nabla_A C_{BD} - \nabla_B C_{AD})\end{aligned}$$

由引理 A.1，最后一项等于

$$-K^2\partial_{\bar{u}}W_A^{(-2)}\partial_a g^A|\bar{\nabla}\hat{f}|^2 - K\partial_{\bar{u}}W_B^{(-2)}g^{(-1)B}\nabla_a\hat{f}$$

由此得到

$$\begin{aligned}
\mathfrak{N}_a &= \frac{3}{2}\left(g_{ua}^{(-1)} + \frac{1}{16}\partial_a\left(\sigma^{bd}\sigma^{ce}g_{bc}^{(1)}g_{de}^{(1)}\right)\right) \\
&= K^2\left(3m - 2\partial_{\bar{u}}U^{(-2)}\right)\nabla_a\hat{f} - 3K\partial_{\bar{u}}W_A^{(-2)}g^{(-1)A}\nabla_a\hat{f} \\
&\quad + \frac{1}{2}\partial_{\bar{u}}\partial_{\bar{u}}C_{AB}g^{(-1)A}g^{(-1)B}\nabla_a\hat{f} - \frac{3}{2}K^2\partial_{\bar{u}}W_A^{(-2)}\partial_a g^A|\bar{\nabla}\hat{f}|^2 \\
&\quad + \frac{1}{4}K\partial_{\bar{u}}\partial_{\bar{u}}C_{AB}\partial_a g^A g^{(-1)B}|\bar{\nabla}\hat{f}|^2 + K^2\partial_a g^A N_A + \frac{1}{8}K^2\partial_{\bar{u}}(C_{DE}C^{DE})\nabla_a\hat{f} \\
&\quad - \frac{K}{4}C_{AD}\partial_{\bar{u}}C_B^D\partial_a g^A g^{(-1)B} + \frac{K}{2}C_{BD}\partial_{\bar{u}}C_A^D\partial_a g^A g^{(-1)B} \\
&\quad - \frac{3}{2}K\partial_a g^A g^{(-1)B}\left(\nabla_A W_B^{(-2)} - \nabla_B W_A^{(-2)}\right)
\end{aligned}$$

这里用到了对称无迹二阶张量满足的事实 $d_{AB} = \frac{1}{2}C_A^D C_{DB} = \frac{1}{4}C^{DE}C_{DE}\sigma_{AB}$。

注意到倒数第二行等于

$$-\frac{3K}{4}C_{AD}\partial_{\bar{u}}C_B^D\partial_a g^A g^{(-1)B} - \frac{K^2}{4}\partial_{\bar{u}}(C_{DE}C^{DE})\nabla_a\hat{f},$$

我们得到

$$\begin{aligned}
\mathfrak{N}_a &= K^2\partial_a g^A N_A + 3mK^2\nabla_a\hat{f} \\
&\quad + \frac{3}{2}K\partial_a g^A\left(\nabla_B W_A^{(-2)} - \nabla_A W_B^{(-2)}\right)g^{(-1)B} - \frac{3}{2}K^2\partial_a g^A\partial_{\bar{u}}W_A^{(-2)}|\bar{\nabla}\hat{f}|^2 \\
&\quad - \frac{3}{4}K\partial_{\bar{u}}C_D^B C_{AB}\partial_a g^A g^{(-1)D} + \frac{1}{2}\partial_{\bar{u}}\partial_{\bar{u}}C_{AB}g^{(-1)A}g^{(-1)B}\nabla_a\hat{f} \\
&\quad - 3K\partial_{\bar{u}}W_A^{(-2)}g^{(-1)A}\nabla_a\hat{f} + \frac{1}{4}K\partial_{\bar{u}}\partial_{\bar{u}}C_{AB}\partial_a g^A g^{(-1)B}|\bar{\nabla}\hat{f}|^2 \\
&\quad - 2K^2\partial_{\bar{u}}U^{(-2)}\nabla_a\hat{f} - \frac{1}{8}K^2\partial_{\bar{u}}(C_{DE}C^{DE})\nabla_a\hat{f}.
\end{aligned}$$

根据 (2.19)，最后一行为零，证明至此完成。 □

4 从度量分量推导变换公式

在上文中，我们通过从曲率张量中直接读出质量方面函数和角动量方面函数的变换，推导了它们的变换规律。这种方法利用了张量性质，与传统方法相比，计算更为简便。为完整起见，本节将介绍传统方法，其中变换公式是从度量分量中读出的。为此，我们需要将度量展开到更高阶。

4.1 设置

在本小节中，我们概述直接从度规系数获得变换公式所需的步骤。我们有

$$
\begin{aligned}
\bar{r}^2 h_{AB} &= \bar{r}^2 \sigma_{AB}(\bar{x}) + \bar{r} C_{AB}(\bar{u},\bar{x}) + \frac{1}{4}(C_{DE}C^{DE})(\bar{u},\bar{x})\sigma_{AB}(\bar{x}) + O(\bar{r}^{-1}) \\
&= \left(K^{-2}r^2 + 2K^{-1}\rho^{(0)}r + 2K^{-1}\rho^{(-1)} + \rho^{(0)2}\right)\cdot \\
&\qquad \left(\sigma_{AB} + \frac{1}{r}\partial_D\sigma_{AB}g^{(-1)D} + \frac{1}{r^2}\partial_D\sigma_{AB}g^{(-2)D} + \frac{1}{2r^2}\partial_D\partial_E\sigma_{AB}g^{(-1)D}g^{(-1)E}\right) \\
&\quad + \left(K^{-1}r + \rho^{(0)}\right)\left(C_{AB} + \frac{1}{r}\partial_D C_{AB}g^{(-1)D} + \frac{1}{r}\partial_{\bar{u}}C_{AB}a^{(-1)}\right) + \frac{1}{4}(C_{DE}C^{DE})\sigma_{AB} \\
&\quad + O(r^{-1}) \\
&= r^2K^{-2}\sigma_{AB} + r\left(2K^{-1}\rho^{(0)}\sigma_{AB} + K^{-1}C_{AB} + K^{-2}\partial_D\sigma_{AB}g^{(-1)D}\right) \\
&\quad + \left(2K^{-1}\rho^{(-1)} + \rho^{(0)2}\right)\sigma_{AB} + 2K^{-1}\rho^{(0)}\partial_D\sigma_{AB}g^{(-1)D} \\
&\quad + K^{-2}\left(\partial_D\sigma_{AB}g^{(-2)D} + \frac{1}{2}\partial_D\partial_E\sigma_{AB}g^{(-1)D}g^{(-1)E}\right) + \rho^{(0)}C_{AB} \\
&\quad + K^{-1}\left(\partial_D\sigma_{AB}g^{(-1)D} + \partial_{\bar{u}}C_{AB}a^{(-1)}\right) + \frac{1}{4}C_{DE}C^{DE}\sigma_{AB} \\
&\quad + O(r^{-1}).
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&d\bar{x}^A + W^A d\bar{u} \\
&= \left(\partial_a g^A + \frac{1}{r}\partial_a g^{(-1)A} + \frac{1}{r^2}\left(\partial_a g^{(-2)A} + K^2 W^{(-2)A}\nabla_a\hat{f}\right)\right)dx^a \\
&\quad + \left(\frac{1}{r}\partial_u g^{(-1)A} + \frac{1}{r^2}\left(\partial_u g^{(-2)A} + K^3 W^{(-2)A}\right)\right)du \\
&\quad + \frac{1}{r^3}\Bigg(\partial_u g^{(-3)A} + K^4 W^{(-3)A} - 2K^4\rho^{(0)}W^{(-2)A} + K^2\partial_u a^{(-1)}W^{(-2)A} \\
&\qquad\qquad + K^3\partial_D W^{(-2)A}g^{(-1)D} + K^3\partial_{\bar{u}}W^{(-2)A}a^{(-1)}\Bigg)du \\
&\quad + \left(-\frac{g^{(-1)A}}{r^2} - \frac{2g^{(-2)A}}{r^3} - \frac{3g^{(-3)A}}{r^4} - \frac{K^2 a^{(-1)}W^{(-2)A}}{r^4}\right)dr
\end{aligned}
$$

在上述方程中， σ_{AB}、 $\partial_D\sigma_{AB}$、 $\partial_D\partial_E\sigma_{AB}$在 $g(x)$处取值，而 C_{AB}、 $\partial_D C_{AB}$.....则在($f(u,x)$ $g(x)$)处取值。

因此，(u、 r、 x^a)坐标系中的度量分量为

$$
\begin{aligned}
g_{ra} = & -K^{-1}\nabla_a\hat{f} - K^{-2}\sigma_{AB}\partial_a g^A g^{(-1)B} \\
& + \frac{1}{r}\Big[- K^{-1}\nabla_a a^{(-1)} - K^{-2}\nabla_a K a^{(-1)} \\
& \qquad - \left(2K^{-1}\rho^{(0)}\sigma_{AB} + K^{-1}C_{AB} + K^{-2}\partial_D\sigma_{AB}g^{(-1)D}\right)\partial_a g^A g^{(-1)B} \\
& \qquad - K^{-2}\sigma_{AB}\left(2\partial_a g^A g^{(-2)B} + \partial_a g^{(-1)A} g^{(-1)B}\right)\Big] \\
& + O(r^{-2}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{rr} = & \frac{1}{r^2}\left(2K^{-1}a^{(-1)} + K^{-2}\sigma_{AB}g^{(-1)A}g^{(-1)B}\right) \\
& + \frac{1}{r^3}\Big[4K^{-1}a^{(-2)} + \left(2K^{-1}\rho^{(0)}\sigma_{AB} + K^{-2}\partial_D\sigma_{AB}g^{(-1)D} + K^{-1}C_{AB}\right)g^{(-1)A}g^{(-1)B} \\
& \qquad + 4K^{-2}\sigma_{AB}g^{(-1)A}g^{(-2)B}\Big] \\
& + O(r^{-4}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{ab} = & r^2\sigma_{ab} \\
& + r\Big[K^{-2}\nabla_a K\nabla_b\hat{f} + K^{-2}\nabla_b K\nabla_a\hat{f} + 2K\rho^{(0)}\sigma_{ab} \\
& \qquad + K^{-2}\sigma_{AB}\left(\partial_a g^A\partial_b g^{(-1)B} + \partial_a g^{(-1)A}\partial_b g^B\right) \\
& \qquad + \left(K^{-2}\partial_D\sigma_{AB}g^{(-1)D} + K^{-1}C_{AB}\right)\partial_a g^A\partial_b g^B\Big] \\
& + g^{(0)}_{ab} + O(r^{-1}),
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
g^{(0)}_{ab} = & -\nabla_a\hat{f}\nabla_b\hat{f} - \nabla_a\hat{f}\nabla_b\rho^{(0)} - \nabla_b\hat{f}\nabla_a\rho^{(0)} + K^{-2}\nabla_a a^{(-1)}\nabla_b K + K^{-2}\nabla_b a^{(-1)}\nabla_a K \\
& + \left(2K^{-1}\rho^{(-1)} + \rho^{(0)2}\right)\bar{\sigma}_{ab} \\
& + \left(K^{-2}\partial_D\sigma_{AB}g^{(-2)D} + \frac{1}{2}K^{-2}\partial_D\partial_E\sigma_{AB}g^{(-1)D}g^{(-1)E}\right)\partial_a g^A\partial_b g^B \\
& + \left(K^{-1}\partial_D C_{AB}g^{(-1)D} + \frac{1}{4}C_{DE}C^{DE}\sigma_{AB} + K^{-1}\partial_{\bar{u}}C_{AB}a^{(-1)}\right)\partial_a g^A\partial_b g^B \\
& + K^{-2}\sigma_{AB}\left(\partial_a g^A\partial_b g^{(-2)B} + \partial_b g^B\partial_a g^{(-2)A} + \partial_a g^{(-1)A}\partial_b g^{(-1)B}\right) \\
& + \sigma_{AB}\left(\partial_a g^A W^{(-2)B}\nabla_b\hat{f} + \partial_b g^B W^{(-2)A}\nabla_a\hat{f}\right) \\
& + 2\rho^{(0)}K^{-1}\partial_D\sigma_{AB}g^{(-1)D}\partial_a g^A\partial_b g^B + \rho^{(0)}C_{AB}\partial_a g^A\partial_b g^B \\
& + 2K^{-1}\rho^{(0)}\sigma_{AB}\left(\partial_a g^A\partial_b g^{(-1)B} + \partial_b g^B\partial_a g^{(-1)A}\right) \\
& + \left(K^{-2}\partial_D\sigma_{AB}g^{(-1)D} + K^{-1}C_{AB}\right)\left(\partial_a g^A\partial_b g^{(-1)B} + \partial_b g^B\partial_a g^{(-1)A}\right).
\end{aligned}
$$

除了 $g^{(-1)A}$、 $a^{(-1)}$、 $\rho^{(0)}$ 之外，我们还将归纳地求解

1. $g^{(-2)A}$ 来自 $g_{ra}^{(-1)}=0$,
2. $\rho^{(-1)}$来自

$$g_{ab}^{(0)}=\frac{1}{2}\sigma^{cd}g_{ac}^{(1)}g_{bd}^{(1)}, \tag{4.26}$$

3. $a^{(-2)}$ 来自 $g_{rr}^{(-3)}=0$，以
及 4. $g^{(-3)A}$ 来自 $g_{ra}^{(-2)}=0$.

提醒读者，(4.26)来自出射辐射条件。参见 Madler- Winicour [13, 第 13 页-14]。

4.2 质量方面函数

若将质量方面函数视为度规系数，要得到变换公式，需要计算 BMS变换展开式中的 $g^{(-2)B}$ 和 $\rho^{(-1)}$。

引理 4.1。

$$g^{(-2)B}=-K\rho^{(0)}g^{(-1)B}-\frac{1}{2}\Gamma_{ED}^{B}g^{(-1)E}g^{(-1)D}-\frac{1}{2}K\sigma^{BD}C_{DE}g^{(-1)E}$$

证明。方程 $g_{rr}^{(-2)}=0$ 意味着

$$2K^{-1}a^{(-1)}+K^{-2}\sigma_{AB}g^{(-1)A}g^{(-1)B}=0$$

and

$$\begin{aligned}-K^{-1}\nabla_a a^{(-1)}-K^{-2}\nabla_a K a^{(-1)}&=-K^{-2}\nabla_a\left(Ka^{(-1)}\right)\\&=K^{-2}\left(\frac{1}{2}\partial_a g^D\partial_D\sigma_{AB}g^{(-1)A}g^{(-1)B}+\sigma_{AB}\partial_a g^{(-1)A}g^{(-1)B}\right)\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}g_{ra}^{(-1)}=&-\left(2K^{-1}\rho^{(0)}\sigma_{AB}+K^{-1}C_{AB}+K^{-2}\partial_D\sigma_{AB}g^{(-1)D}\right)\partial_a g^A g^{(-1)B}\\&+\frac{1}{2}K^{-2}\partial_A\sigma_{DB}\partial_a g^A g^{(-1)D}g^{(-1)B}-2K^{-2}\sigma_{AB}\partial_a g^A g^{(-2)B}\end{aligned}$$

方程 $g_{ra}^{(-1)}=0$ 变为

$$\begin{aligned}\sigma_{AB}\partial_a g^A g^{(-2)B}=&-K\rho^{(0)}\sigma_{AB}\partial_a g^A g^{(-1)B}-\frac{1}{2}KC_{AB}\partial_a g^A g^{(-1)B}\\&+\left(\frac{1}{4}\partial_A\sigma_{DB}-\frac{1}{2}\partial_D\sigma_{AB}\right)\partial_a g^A g^{(-1)D}g^{(-1)B}\end{aligned}$$

并且很容易验证， $g^{(-2)B}$ 具有所述形式。 □

定义 4.2。我们将剪切张量的拉回记为

$$\mathcal{C}_{ab}(u,x) = C_{AB}\left(\hat{f}(u,x), g(x)\right)\partial_a g^A(x)\partial_b g^B(x). \tag{4.27}$$

$\mathcal{C}_{ab}$ 的导数在定理 3.2 的证明中计算得出

引理 4.3。剪切张量的导数满足

$$\bar{\nabla}_a \mathcal{C}_{de}(u,x) = \left(\partial_{\bar{u}} C_{DE}\nabla_a \hat{f} + \nabla_A C_{DE}\partial_a g^A\right)\partial_d g^D \partial_e g^E.$$

这里，$\partial_{\bar{u}} C_{DE}$ 和 $\nabla_A C_{DE}$ 在 $\left(\hat{f}(u,x),\ g(x)\right)$ 处取值

引理 4.4。

$$\begin{aligned}\rho^{(-1)} = {}& \frac{1}{2}K|\bar{\nabla}\hat{f}|^2 + \frac{1}{4}K\left(\bar{\nabla}_a\bar{\nabla}_b\hat{f} - \frac{1}{2}\bar{\Delta}\hat{f}\bar{\sigma}_{ab}\right)\left(\bar{\nabla}^a\bar{\nabla}^b\hat{f} - \frac{1}{2}\bar{\Delta}\hat{f}\bar{\sigma}^{ab}\right)\\ & - \frac{1}{4}K^{-1}\partial_{\bar{u}}C_{AB}g^{(-1)A}g^{(-1)B} + \sigma_{AB}W^{(-2)A}g^{(-1)B} - \frac{1}{4}K\mathcal{C}_{ab}\bar{\nabla}^a\bar{\nabla}^b\hat{f}.\end{aligned}$$

这里，$\partial_{\bar{u}} C_{DE}$ 和 $W^{(-2)A}$ 在 $\left(\hat{f}(u,x),\ g(x)\right)$ 处取值

证明。在证明中，我们在 x_0 处取正规坐标，在 $g(x_0)$ 处取值，并将所有张量在 x_0. 处求值。这意味着 $\bar{\Gamma}^c_{ab}(x_0) = \Gamma^C_{AB}(g(x_0)) = \partial_a\partial_b g^A(x_0) = 0$. 我们将其写为 $g^{(0)}_{ab} = 2K^{-1}\rho^{(-1)}\bar{\sigma}_{ab} + \mathrm{I} + \mathrm{II}$，其中涉及 C_{AB} 的项归入 II。

我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{I} = {}& -\nabla_a\hat{f}\nabla_b\hat{f}\underline{-\nabla_a\hat{f}\nabla_b\rho^{(0)} - \nabla_b\hat{f}\nabla_a\rho^{(0)}} + K^{-2}\nabla_a a^{(-1)}\nabla_b K + K^{-2}\nabla_b a^{(-1)}\nabla_a K\\ & + \rho^{(0)2}\bar{\sigma}_{ab} + \frac{1}{2}K^{-2}\partial_D\partial_E\sigma_{AB}g^{(-1)D}g^{(-1)E}\partial_a g^A\partial_b g^B\\ & + K^{-2}\sigma_{AB}\partial_a g^A\left(\underline{\partial_b\left(-K\rho^{(0)}g^{(-1)B}\right)} + \partial_b\left(-\frac{1}{2}\Gamma^B_{DE}\right)g^{(-1)D}g^{(-1)E}\right)\\ & + K^{-2}\sigma_{AB}\partial_b g^B\left(\underline{\partial_a\left(-K\rho^{(0)}g^{(-1)A}\right)} + \partial_a\left(-\frac{1}{2}\Gamma^A_{DE}\right)g^{(-1)D}g^{(-1)E}\right)\\ & + K^{-2}\sigma_{AB}\partial_a g^{(-1)A}\partial_b g^{(-1)B} + \underline{2K^{-1}\rho^{(0)}\sigma_{AB}\left(\partial_a g^A\partial_b g^{(-1)B} + \partial_b g^B\partial_a g^{(-1)A}\right)}.\end{aligned}$$

根据引理 2.4，带下划线的项变为 $-2\rho^{(0)}\bar{\nabla}_a\bar{\nabla}_b\hat{f}$。根据引理 2.4 和引理 2.6，我们有

$$K^{-2}\nabla_a a^{(-1)}\nabla_b K + K^{-2}\nabla_b a^{(-1)}\nabla_a K + K^{-2}\sigma_{AB}\partial_a g^{(-1)A}\partial_b g^{(-1)B} = \bar{\nabla}_a\bar{\nabla}^c\hat{f}\bar{\nabla}_b\bar{\nabla}_c\hat{f}.$$

最后，根据 $\partial_b\Gamma^B_{DE} = \partial_b g^F\partial_F\Gamma^B_{DE}$ 和 $\partial_D\partial_E\sigma_{AB} = \partial_D\Gamma^F_{EA}\sigma_{FB} + \partial_D\Gamma^F_{EB}\sigma_{FA}$，涉及 σ 的二阶导数的项可以得到简化。

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}K^{-2}\left(\partial_D\partial_E\sigma_{AB}\partial_a g^A\partial_b g^B - \sigma_{AB}\left(\partial_a g^A\partial_b\Gamma^B_{DE} + \partial_b g^B\partial_a\Gamma^A_{DE}\right)\right)g^{(-1)D}g^{(-1)E}\\ &= -\frac{1}{2}K^{-2}\left(\partial_F\Gamma^B_{DE} - \frac{1}{2}\partial_D\Gamma^B_{FE} - \frac{1}{2}\partial_E\Gamma^B_{DF} + \partial_F\Gamma^A_{DE} - \frac{1}{2}\partial_D\Gamma^A_{FE} - \frac{1}{2}\partial_E\Gamma^A_{DF}\right)g^{(-1)D}g^{(-1)E}\\ &= -\frac{1}{2}\left(R_{FD}{}^B{}_E + R_{FD}{}^A{}_E\right)\partial_d g^D\partial_e g^E\bar{\nabla}^d\hat{f}\bar{\nabla}^e\hat{f}\\ &= -|\bar{\nabla}\hat{f}|^2\bar{\sigma}_{ab} + \nabla_a\hat{f}\nabla_b\hat{f}.\end{aligned}$$

将这些结合起来，我们得到

$$\mathrm{I} = -|\bar{\nabla}\hat{f}|^2\bar{\sigma}_{ab} + \left(\bar{\nabla}_a\bar{\nabla}^c\hat{f} - \frac{1}{2}\bar{\nabla}\Delta\hat{f}\delta_a^c\right)\left(\bar{\nabla}_b\bar{\nabla}_c\hat{f} - \frac{1}{2}\Delta\hat{f}\bar{\sigma}_{bc}\right).$$

接下来，我们对 II 进行简化。根据引理 4.3，我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{II} = &\left(K^{-1}\nabla_D C_{AB}g^{(-1)D} + K^{-1}\partial_{\bar{u}}C_{AB}a^{(-1)}\right)\partial_a g^A\partial_b g^B \\
&+ K^{-2}\sigma_{AB}\partial_a g^A\partial_b\left(-\frac{1}{2}K\sigma^{BD}C_{DE}g^{(-1)E}\right) + K^{-2}\sigma_{AB}\partial_b g^B\partial_a\left(-\frac{1}{2}K\sigma^{AD}C_{DE}g^{(-1)E}\right) \\
&+ \sigma_{AB}\left(\partial_a g^A W^{(-2)B}\nabla_b\hat{f} + \partial_b g^B W^{(-2)A}\nabla_a\hat{f}\right) \\
&+ K^{-1}C_{AB}\left(\partial_a g^A\partial_b g^{(-1)B} + \partial_b g^B\partial_a g^{(-1)A}\right) \\
&+ \frac{1}{4}C_{DE}C^{DE}\bar{\sigma}_{ab} + \rho^{(0)}\mathcal{C}_{ab} \\
= &-\bar{\nabla}_d\mathcal{C}_{ab}\bar{\nabla}^d\hat{f} + \frac{1}{2}\partial_{\bar{u}}C_{AB}|\bar{\nabla}\hat{f}|^2\partial_a g^A\partial_b g^B \\
&+ K^{-1}\nabla_b K\mathcal{C}_{ae}\bar{\nabla}^e\hat{f} + \frac{1}{2}\bar{\nabla}_b\mathcal{C}_{ae}\bar{\nabla}^e\hat{f} + \frac{1}{2}\mathcal{C}_{ae}\bar{\nabla}_b\bar{\nabla}^e\hat{f} \\
&+ K^{-1}\nabla_a K\mathcal{C}_{be}\bar{\nabla}^e\hat{f} + \frac{1}{2}\bar{\nabla}_a\mathcal{C}_{be}\bar{\nabla}^e\hat{f} + \frac{1}{2}\mathcal{C}_{be}\bar{\nabla}_a\bar{\nabla}^e\hat{f} \\
&+ \frac{1}{2}\bar{\nabla}^d\mathcal{C}_{ad}\nabla_b\hat{f} + \frac{1}{2}\bar{\nabla}^d\mathcal{C}_{bd}\nabla_a\hat{f} - \frac{1}{2}\partial_{\bar{u}}C_{AD}\bar{\nabla}^d\hat{f}\partial_d g^D\partial_a g^A\nabla_b\hat{f} - \frac{1}{2}\partial_{\bar{u}}C_{BD}\bar{\nabla}^d\hat{f}\partial_d g^D\partial_b g^B\nabla_a\hat{f} \\
&- K^{-1}\nabla_b K\mathcal{C}_{ae}\bar{\nabla}^e\hat{f} - \mathcal{C}_{ae}\bar{\nabla}_b\bar{\nabla}_e\hat{f} - K^{-1}\nabla_a K\mathcal{C}_{be}\bar{\nabla}^e\hat{f} - \mathcal{C}_{be}\bar{\nabla}_a\bar{\nabla}^e\hat{f} \\
&+ \frac{1}{4}C_{DE}C^{DE}\bar{\sigma}_{ab} + \rho^{(0)}\mathcal{C}_{ab}
\end{aligned}$$

By 引理 A.1 中，涉及 $\mathcal{C}$ 的协变导数的项是 $\bar{\sigma}_{ab}$ 的倍数。 :

$$\left(-\bar{\nabla}_d\mathcal{C}_{ab} + \frac{1}{2}\bar{\nabla}_b\mathcal{C}_{ad} + \frac{1}{2}\bar{\nabla}_a\mathcal{C}_{bd} + \frac{1}{2}\bar{\nabla}^e\mathcal{C}_{ae}\bar{\sigma}_{bd} + \frac{1}{2}\bar{\nabla}^e\mathcal{C}_{be}\bar{\sigma}_{ad}\right)\bar{\nabla}^d\hat{f} = \bar{\nabla}^e\mathcal{C}_{de}\bar{\nabla}^d\hat{f}\bar{\sigma}_{ab}.$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{II} = &\bar{\nabla}^e\mathcal{C}_{de}\bar{\nabla}^d\hat{f}\bar{\sigma}_{ab} + \frac{1}{4}C_{DE}C^{DE}\bar{\sigma}_{ab} \\
&+ \frac{1}{2}\left(\partial_{\bar{u}}C_{AB}\partial_a g^A\partial_b g^B|\bar{\nabla}\hat{f}|^2 - \partial_{\bar{u}}C_{AD}\partial_a g^A\partial_d g^D\nabla_b\hat{f}\bar{\nabla}^d\hat{f} - \partial_{\bar{u}}C_{BD}\partial_b g^B\partial_d g^D\nabla_a\hat{f}\bar{\nabla}^d\hat{f}\right) \qquad (4.28a) \\
&+ \rho^{(0)}\mathcal{C}_{ab} - \frac{1}{2}\mathcal{C}_{ae}\bar{\nabla}_b\bar{\nabla}^e\hat{f} - \frac{1}{2}\mathcal{C}_{be}\bar{\nabla}_a\bar{\nabla}^e\hat{f}. \qquad (4.28b)
\end{aligned}$$

将引理 A.2 应用于 $T_{ab} = \partial_{\bar{u}}C_{AB}\partial_a g^A\partial_b g^B, S_{ab} = \nabla_a\hat{}f\nabla_b\hat{}f$和 $T_{ab} = \mathcal{C}_{ab}, S_{ab} =^{-}\ {}^{-}\hat{}\nabla_a\nabla_b f,$ 我们推断 (4.28a) 和 (4.28b) 均为 $\bar{\sigma}_{ab}.$ 的倍数。

我们得出结论：

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}^{ab}g_{ab}^{(0)} = &\, 4K^{-1}\rho^{(-1)} - 2|\bar{\nabla}\hat{f}|^2 + \bar{\nabla}^a\bar{\nabla}^b\hat{f}\bar{\nabla}_a\bar{\nabla}_b\hat{f} - \frac{1}{2}\left(\bar{\Delta}\hat{f}\right)^2 \\
&+ 2\bar{\nabla}^e\mathcal{C}_{de}\bar{\nabla}^d\hat{f} + \frac{1}{2}C_{DE}C^{DE} - \partial_{\bar{u}}C_{AB}\partial_a g^A\partial_b g^B\bar{\nabla}^a\hat{f}\bar{\nabla}^b\hat{f} - \mathcal{C}_{ab}\bar{\nabla}^a\bar{\nabla}^b\hat{f}
\end{aligned}$$

另一方面，我们有

$$\frac{1}{2}\bar{\sigma}^{ab}\sigma^{cd}g^{(1)}_{ac}g^{(1)}_{bd}=\frac{1}{2}\bar{\sigma}^{ab}\bar{\sigma}^{cd}\mathcal{C}_{ac}\mathcal{C}_{bd}-2\mathcal{C}_{ab}\bar{\nabla}^a\bar{\nabla}^b\hat{f}+2\bar{\nabla}_a\bar{\nabla}_b\hat{f}\bar{\nabla}^a\bar{\nabla}^b\hat{f}-\left(\bar{\Delta}\hat{f}\right)^2.$$

由 $\bar{\sigma}^{ab}g^{(0)}_{ab}=\frac{1}{2}\bar{\sigma}^{ab}\sigma^{cd}g^{(1)}_{ac}g^{(1)}_{bd}$ 可得

$$\begin{aligned}\rho^{(-1)}&=\frac{1}{2}K|\bar{\nabla}\hat{f}|^2+\frac{1}{4}K\left(\bar{\nabla}_a\bar{\nabla}_b\hat{f}-\frac{1}{2}\bar{\Delta}\hat{f}\bar{\sigma}_{ab}\right)\left(\bar{\nabla}^a\bar{\nabla}^b\hat{f}-\frac{1}{2}\bar{\Delta}\hat{f}\bar{\sigma}^{ab}\right)\\&\quad-\frac{1}{2}K\bar{\nabla}^d\mathcal{C}_{de}\bar{\nabla}^d\hat{f}+\frac{1}{4}K\partial_{\bar{u}}C_{AB}\partial_a g^A\partial_b g^B\bar{\nabla}^a\hat{f}\bar{\nabla}^b\hat{f}-\frac{1}{4}K\mathcal{C}_{ab}\bar{\nabla}^a\bar{\nabla}^b\hat{f}\\&=\frac{1}{2}K|\bar{\nabla}\hat{f}|^2+\frac{1}{4}K\left(\bar{\nabla}_a\bar{\nabla}_b\hat{f}-\frac{1}{2}\bar{\Delta}\hat{f}\bar{\sigma}_{ab}\right)\left(\bar{\nabla}^a\bar{\nabla}^b\hat{f}-\frac{1}{2}\bar{\Delta}\hat{f}\bar{\sigma}^{ab}\right)\\&\quad-\frac{1}{4}K^{-1}\partial_{\bar{u}}C_{AB}g^{(-1)A}g^{(-1)B}+\sigma_{AB}W^{(-2)A}g^{(-1)B}-\frac{1}{4}K\mathcal{C}_{ab}\bar{\nabla}^a\bar{\nabla}^b\hat{f}\end{aligned}$$

第二个等式中用到了引理 4.3。 □

注。在证明中，我们证明了 $g^{(0)}_{ab}$ 与 σ_{ab}成正比。这与爱因斯坦方程和出射辐射条件相符。

我们现在可以计算质量方面函数的变换。我们有

$$\begin{aligned}\partial_u\rho^{(-1)}&=K\bar{\nabla}^cK\nabla\hat{f}-\frac{1}{2}K\partial_u\left(\bar{\nabla}^e\mathcal{C}_{de}\right)\bar{\nabla}^d\hat{f}-\frac{1}{2}K\bar{\nabla}^e\mathcal{C}_{de}\bar{\nabla}^dK\\&\quad+\frac{1}{4}K^2\partial_{\bar{u}}\partial_{\bar{u}}C_{AB}\partial_a g^A\partial_b g^B\bar{\nabla}^a\hat{f}\bar{\nabla}^b\hat{f}+\frac{1}{2}K\partial_{\bar{u}}C_{AB}\partial_a g^A\partial_b g^B\bar{\nabla}^aK\bar{\nabla}^b\hat{f}\\&\quad-\frac{1}{4}K\partial_u\mathcal{C}_{ab}\bar{\nabla}^a\bar{\nabla}^b\hat{f}\end{aligned}$$

质量方面函数按定义是系数 $g^{(-1)}_{uu}$，其变换为

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}&=mK^3-K\partial_ua^{(-1)}-\partial_ua^{(-1)}\partial_u\rho^{(0)}\\&\quad-K\partial_u\rho^{(-1)}+K^{-2}\sigma_{AB}\partial_ug^{(-1)A}\partial_ug^{(-2)B}+K\sigma_{AB}\partial_ug^{(-1)A}W^{(-2)B}\\&\quad+K^{-1}\rho^{(0)}\sigma_{AB}\partial_ug^{(-1)A}\partial_ug^{(-1)B}\\&\quad+\frac{1}{2}\left(K^{-2}\partial_D\sigma_{AB}g^{(-1)D}+K^{-1}C_{AB}\right)\partial_ug^{(-1)A}\partial_ug^{(-1)B}\\&=mK^3+\frac{1}{2}K^2\partial_u\bar{\nabla}^d\mathcal{C}_{de}\bar{\nabla}^e\hat{f}-\frac{1}{4}K^3\partial_{\bar{u}}\partial_{\bar{u}}C_{AB}\partial_a g^A\partial_b g^B\bar{\nabla}^a\hat{f}\bar{\nabla}^b\hat{f}\\&\quad+\frac{1}{4}K^2\partial_u\mathcal{C}_{ab}\bar{\nabla}^a\bar{\nabla}^b\hat{f}-\frac{1}{2}K^2\partial_{\bar{u}}C_{AB}\partial_a g^A\partial_b g^B\bar{\nabla}^aK\bar{\nabla}^b\hat{f}\\&=mK^3+\frac{1}{4}K^3\partial_{\bar{u}}\partial_{\bar{u}}C_{AB}\partial_a g^A\partial_b g^B\bar{\nabla}^a\hat{f}\bar{\nabla}^b\hat{f}\\&\quad+K^3\partial_{\bar{u}}W^{(-2)}_A\partial_a g^A\bar{\nabla}^a\hat{f}+\frac{1}{4}K^3\partial_{\bar{u}}C_{AB}\partial_a g^A\partial_b g^B\bar{\nabla}^a\bar{\nabla}^b\hat{f}\end{aligned}$$

在最后一个等式中，我们使用了引理 4.3。由此可得定理 3.1。

4.3 角动量方面

若将角动量方面视为度量系数来推导变换公式，还需要进一步计算 $a^{(-2)}$ 和 $g^{(-3)A}$。首先，$g_{rr}^{(-3)}=0$ 和引理 4.1给出$a^{(-2)}$。

引理 4.5。

$$a^{(-2)}=\frac{1}{2}\rho^{(0)}\sigma_{AB}g^{(-1)A}g^{(-1)B}+\frac{1}{4}C_{AB}g^{(-1)A}g^{(-1)B}$$

接下来我们从 $g_{ra}^{(-2)}=0$ 求解 $g^{(-3)A}$。由于之后只需要 $\partial_u g^{(-3)B}$，因此只需在正规坐标中进行讨论。

引理 4.6。在 $\Gamma_{BC}^{A}=0$ 位于 $g(x_0)$ 的正规坐标中，我们有

$$\begin{aligned}
g^{(-3)B}(x_0)=&\left(-K\rho^{(-1)}-\frac{1}{12}\partial_{\bar{u}}C_{DE}g^{(-1)D}g^{(-1)E}+\frac{1}{16}K^2C_{DE}C^{DE}+\frac{1}{2}K\nabla^A C_{AD}g^{(-1)D}\right)g^{(-1)B}\\
&-\frac{1}{4}K\nabla^B C_{DE}g^{(-1)D}g^{(-1)E}\\
&-\frac{1}{4}K^3\nabla^A C_A^B|\bar{\nabla}\hat{f}|^2+K^2\rho^{(0)}C_D^Bg^{(-1)D}+\frac{1}{6}K^2\partial_{\bar{u}}C_D^Bg^{(-1)D}|\bar{\nabla}\hat{f}|^2\\
&+\frac{1}{6}K^2|\bar{\nabla}\hat{f}|^2g^{(-1)B}+K^2\rho^{(0)2}g^{(-1)B}-\frac{1}{6}\partial_D\Gamma_{EF}^Bg^{(-1)D}g^{(-1)E}g^{(-1)F}.
\end{aligned}$$

证明。我们有

$$\begin{aligned}
&g_{ra}^{(-2)}\\
&=a^{(-1)}\nabla_a\hat{f}+\rho^{(-1)}\nabla_a\hat{f}-K^{-1}\nabla_a a^{(-2)}+a^{(-1)}\partial_a\rho^{(0)}-2K^{-2}a^{(-2)}\nabla_a K-KU^{(-2)}\nabla_a\hat{f}\\
&\quad-K^{-2}\sigma_{AB}\left(3\partial_a g^A g^{(-3)B}+K^2a^{(-1)}\partial_a g^AW^{(-2)B}+2\partial_a g^{(-1)A}g^{(-2)B}\right)\\
&\quad-K^{-2}\sigma_{AB}\left(\partial_a g^{(-2)A}g^{(-1)B}+K^2W^{(-2)A}g^{(-1)B}\partial_a\hat{f}\right)\\
&\quad-\left(2K^{-1}\rho^{(0)}\sigma_{AB}+K^{-1}C_{AB}+K^{-2}\partial_D\sigma_{AB}g^{(-1)D}\right)\left(2\partial_a g^Ag^{(-2)B}+\partial_a g^{(-1)A}g^{(-1)B}\right)\\
&\quad-\left(2K^{-1}\rho^{(-1)}+\rho^{(0)2}\right)\sigma_{AB}\partial_a g^Ag^{(-1)B}\\
&\quad-\partial_a g^Ag^{(-1)B}\left(2K^{-1}\rho^{(0)}\partial_D\sigma_{AB}g^{(-1)D}+K^{-2}(\partial_D\sigma_{AB}g^{(-2)D}+\frac{1}{2}\partial_D\partial_E\sigma_{AB}g^{(-1)D}g^{(-1)E})\right)\\
&\quad-\partial_a g^Ag^{(-1)B}\left(\rho^{(0)}C_{AB}+K^{-1}\left(\partial_D C_{AB}g^{(-1)D}+\partial_{\bar{u}}C_{AB}a^{(-1)}\right)+\frac{1}{4}C_{DE}C^{DE}\sigma_{AB}\right)\\
&=-3K^{-2}\sigma_{AB}\partial_a g^Ag^{(-3)B}+3\rho^{(-1)}\nabla_a\hat{f}+\mathrm{I}+\mathrm{II},
\end{aligned}$$

其中我们将包含 C_{AB} 的项归为 I 中的一组。我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} = &-\frac{1}{4}K^{-1}\left(\partial_{\bar{u}}C_{AB}\nabla_a\hat{f} + \nabla_D C_{AB}\partial_a g^D\right) g^{(-1)A}g^{(-1)B} + \frac{1}{16}KC_{DE}C^{DE}\nabla_a\hat{f} \\
&+ \frac{1}{4}K\nabla^B C_{AB}|\bar{\nabla}\hat{f}|^2\partial_a g^A \\
&+ \frac{1}{2}K^{-1}\left(\partial_{\bar{u}}C_{BE}\nabla_a\hat{f} + \nabla_D C_{BE}\partial_a g^D\right) g^{(-1)B}g^{(-1)E} - \frac{1}{2}\nabla^A C_{AB}\nabla_a\hat{f}g^{(-1)B} \\
&+ 4\rho^{(0)}C_{AB}\partial_a g^A g^{(-1)B} + \frac{1}{2}C_{DE}C^{DE}\sigma_{AB}\partial_a g^A g^{(-1)B} \\
&- \rho^{(0)}C_{AB}\partial_a g^A g^{(-1)B} - K^{-1}\left(\nabla_D C_{AB}g^{(-1)D} + \partial_{\bar{u}}C_{AB}a^{(-1)}\right)\partial_a g^A g^{(-1)B} \\
&- \frac{1}{4}C_{DE}C^{DE}\sigma_{AB}\partial_a g^A g^{(-1)B} \\
= &\frac{1}{4}K^{-1}\partial_{\bar{u}}C_{AB}g^{(-1)A}g^{(-1)B}\nabla_a\hat{f} - \frac{3}{16}KC_{DE}C^{DE}\nabla_a\hat{f} \\
&+ \frac{1}{4}K\partial_a g^A\nabla^B C_{AB}|\bar{\nabla}\hat{f}|^2 - \frac{1}{2}\nabla^B C_{AB}g^{(-1)A}\nabla_a\hat{f} + 3\rho^{(0)}C_{AB}\partial_a g^A g^{(-1)B} \\
&+ \frac{1}{2}\partial_{\bar{u}}C_{AB}\partial_a g^A g^{(-1)B}|\bar{\nabla}\hat{f}|^2 \\
&+ K^{-1}g^{(-1)B}g^{(-1)D}\partial_a g^A\left(\frac{1}{4}\nabla_A C_{DB} - \nabla_D C_{AB}\right),
\end{aligned}$$

根据引理 A.1，我们重新排列最后一项。

$$-\nabla_D C_{AB}g^{(-1)B}g^{(-1)D} = \left(-\nabla_A C_{BD} - \nabla^E C_{AE}\sigma_{BD} + \nabla^E C_{DE}\sigma_{AB}\right)g^{(-1)B}g^{(-1)D}$$

以获得

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} = &\frac{1}{4}K^{-1}\partial_{\bar{u}}C_{AB}g^{(-1)A}g^{(-1)B}\nabla_a\hat{f} - \frac{3}{16}KC_{DE}C^{DE}\nabla_a\hat{f} \\
&- \frac{3}{4}K\partial_a g^A\nabla^B C_{AB}|\bar{\nabla}\hat{f}|^2 - \frac{3}{2}\nabla^B C_{AB}g^{(-1)A}\nabla_a\hat{f} + 3\rho^{(0)}C_{AB}\partial_a g^A g^{(-1)B} \\
&+ \frac{1}{2}\partial_{\bar{u}}C_{AB}\partial_a g^A g^{(-1)B}|\bar{\nabla}\hat{f}|^2 \\
&- \frac{3}{4}K^{-1}\nabla_A C_{BD}\partial_a g^A g^{(-1)B}g^{(-1)D}.
\end{aligned}$$

接下来，我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{II} = &\, a^{(-1)}\nabla_a\hat{f} - K^{-1}\nabla_a\left(\frac{1}{2}\rho^{(0)}\sigma_{AB}g^{(-1)A}g^{(-1)B}\right) + a^{(-1)}\nabla_a\rho^{(0)} - K^{-2}\rho^{(0)}\sigma_{AB}g^{(-1)A}g^{(-1)B}\nabla_a K \\
&+ 2K^{-1}\rho^{(0)}\sigma_{AB}\partial_a g^{(-1)A}g^{(-1)B} + K^{-2}\sigma_{AB}\partial_a\left(K\rho^{(0)}g^{(-1)A} + \frac{1}{2}\Gamma^A_{ED}g^{(-1)E}g^{(-1)D}\right)g^{(-1)B} \\
&+ 4\rho^{(0)2}\sigma_{AB}\partial_a g^A g^{(-1)B} - 2K^{-1}\rho^{(0)}\sigma_{AB}\partial_a g^{(-1)A}g^{(-1)B} - \rho^{(0)2}\sigma_{AB}\partial_a g^A g^{(-1)B} \\
&- \frac{1}{2}K^{-2}\partial_D\partial_E\sigma_{AB}\partial_a g^A g^{(-1)B}g^{(-1)D}g^{(-1)E}.
\end{aligned}$$

我们简化涉及度量二阶导数的项。

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}K^{-2}\left(\sigma_{FB}\partial_A\Gamma^F_{ED}-\partial_D\partial_E\sigma_{AB}\right)\partial_a g^A g^{(-1)B}g^{(-1)D}g^{(-1)E}\\&=\frac{1}{2}K^{-1}\left(R_{ADBE}-\partial_D\Gamma^F_{EB}\sigma_{AF}\right)\partial_a g^A g^{(-1)B}g^{(-1)D}g^{(-1)E}\end{aligned}$$

从而得到

$$\mathrm{II}=-\frac{1}{2}K|\bar{\nabla}\hat{f}|^2\nabla_a\hat{f}+3\rho^{(0)2}\sigma_{AB}\partial_a g^A g^{(-1)B}-\frac{1}{2}K^{-2}\partial_D\Gamma^F_{EB}\sigma_{AF}g^{(-1)B}g^{(-1)D}g^{(-1)E}\partial_a g^A.$$

因此，$g^{(-2)}_{ra}=0$ 蕴含

$$\begin{aligned}&K^{-2}\sigma_{AB}\partial_a g^A g^{(-3)B}\\&=\rho^{(-1)}\nabla_a\hat{f}+\frac{1}{12}K^{-1}\partial_{\bar{u}}C_{AB}g^{(-1)A}g^{(-1)B}\nabla_a\hat{f}-\frac{1}{16}KC_{DE}C^{DE}\nabla_a\hat{f}\\&\quad-\frac{1}{4}K^{-1}\nabla_A C_{BD}\partial_a g^A g^{(-1)B}g^{(-1)D}-\frac{1}{4}K\partial_a g^A\nabla^B C_{AB}|\bar{\nabla}\hat{f}|^2\\&\quad-\frac{1}{2}\nabla^B C_{AB}g^{(-1)A}\nabla_a\hat{f}+\rho^{(0)}C_{AB}\partial_a g^A g^{(-1)B}\\&\quad+\frac{1}{6}\partial_{\bar{u}}C_{AB}\partial_a g^A g^{(-1)B}|\bar{\nabla}\hat{f}|^2+\frac{1}{2}K^{-1}\Gamma^F_{DE}\sigma_{AF}C^E_B\partial_a g^A g^{(-1)B}g^{(-1)D}\\&\quad-\frac{1}{6}K|\bar{\nabla}\hat{f}|^2\nabla_a\hat{f}+\rho^{(0)2}\sigma_{AB}\partial_a g^A g^{(-1)B}-\frac{1}{6}K^{-2}\partial_D\Gamma^F_{EB}\sigma_{AF}g^{(-1)B}g^{(-1)D}g^{(-1)E}\partial_a g^A\end{aligned}$$

并得到

$$\begin{aligned}g^{(-3)B}=&\left(-K\rho^{(-1)}-\frac{1}{12}\partial_{\bar{u}}C_{DE}g^{(-1)D}g^{(-1)E}+\frac{1}{16}K^2C_{DE}C^{DE}+\frac{1}{2}K\nabla^A C_{AD}g^{(-1)D}\right)g^{(-1)B}\\&-\frac{1}{4}K\nabla^B C_{DE}g^{(-1)D}g^{(-1)E}\\&-\frac{1}{4}K^3\nabla^A C^B_A|\bar{\nabla}\hat{f}|^2+K^2\rho^{(0)}C^B_D g^{(-1)D}+\frac{1}{6}K^2\partial_{\bar{u}}C^B_D g^{(-1)D}|\bar{\nabla}\hat{f}|^2\\&+\frac{1}{6}K^2|\bar{\nabla}\hat{f}|^2g^{(-1)B}+K^2\rho^{(0)2}g^{(-1)B}-\frac{1}{6}\partial_D\Gamma^B_{EF}g^{(-1)D}g^{(-1)E}g^{(-1)F}.\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

下一个命题给出了角动量方面的变换，并通过

$$N_A=\frac{3}{2}\left(\bar{g}^{(-1)}_{\bar{u}A}+\frac{1}{16}\partial_A(C_{DE}C^{DE})\right).$$

命题 4.7。

$$
\begin{aligned}
&g_{ua}^{(-1)}+\frac{1}{16}\nabla_a\left(\sigma^{bd}\sigma^{ce}g_{bc}^{(1)}g_{de}^{(1)}\right)\\
&=K^2\partial_a g^A\left(\bar{g}_{\bar{u}A}^{(-1)}+\frac{1}{16}\nabla_A\left(C_{DE}C^{DE}\right)\right)+2mK^2\nabla_a\hat{f}\\
&\quad+K\partial_a g^A\left(\nabla_B W_A^{(-2)}-\nabla_A W_B^{(-2)}\right)g^{(-1)B}-K^2\partial_a g^A\partial_{\bar{u}}W_A^{(-2)}|\bar{\nabla}\hat{f}|^2\\
&\quad-\frac{1}{2}K\partial_{\bar{u}}C_D^B C_{AB}\partial_a g^A g^{(-1)D}+\frac{1}{3}\partial_{\bar{u}}\partial_{\bar{u}}C_{AB}g^{(-1)A}g^{(-1)B}\nabla_a\hat{f}\\
&\quad-2K\partial_{\bar{u}}W_A^{(-2)}g^{(-1)A}\nabla_a\hat{f}+\frac{1}{6}K\partial_{\bar{u}}\partial_{\bar{u}}C_{AB}\partial_a g^A g^{(-1)B}|\bar{\nabla}\hat{f}|^2
\end{aligned}
$$

证明。度量分量 $g_{ua}^{(-1)}$ 等于

$$
\begin{aligned}
&2mK^2\nabla_a\hat{f}-\partial_u a^{(-1)}\nabla_a\hat{f}-K\nabla_a a^{(-1)}\\
&-\nabla_a a^{(-1)}\partial_u\rho^{(0)}-\nabla_a\hat{f}\partial_u\rho^{(-1)}-K\nabla_a\rho^{(-1)}-\partial_u a^{(-1)}\nabla_a\rho^{(0)}+\underline{K^{-2}\nabla_a K\partial_u a^{(-2)}}+KU^{(-2)}\nabla_a K\\
&+K^{-2}\sigma_{AB}\partial_a g^A\Big(\partial_u g^{(-3)B}+K^4W^{(-3)B}+K^2\partial_u a^{(-1)}W^{(-2)B}\\
&\qquad\qquad-2K^4\rho^{(0)}W^{(-2)B}+K^3\partial_D W^{(-2)B}g^{(-1)D}+K^3\partial_{\bar{u}}W^{(-2)B}a^{(-1)}\Big)\\
&+K^{-2}\sigma_{AB}\partial_a g^{(-1)A}\left(\partial_u g^{(-2)B}+K^3W^{(-2)B}\right)\\
&+K^{-2}\sigma_{AB}\left(\underline{\partial_a g^{(-2)A}}+K^2W^{(-2)A}\nabla_a\hat{f}\right)\partial_u g^{(-1)B}\\
&+\left(2K^{-1}\rho^{(0)}\sigma_{AB}+K^{-1}C_{AB}+K^{-2}\partial_D\sigma_{AB}g^{(-1)D}\right)\cdot\\
&\qquad\qquad\left(\underline{\partial_a g^A\partial_u g^{(-2)B}}+K^3\partial_a g^A W^{(-2)B}+\partial_a g^{(-1)A}\partial_u g^{(-1)B}\right)\\
&+\partial_a g^A\partial_u g^{(-1)B}\left[\left(2K^{-1}\rho^{(-1)}+\rho^{(0)2}\right)\sigma_{AB}+2K^{-1}\rho^{(0)}\partial_D\sigma_{AB}g^{(-1)D}\right]\\
&+\partial_a g^A\partial_u g^{(-1)B}\left[K^{-2}\left(\partial_D\sigma_{AB}g^{(-2)D}+\frac{1}{2}\partial_D\partial_E\sigma_{AB}g^{(-1)D}g^{(-1)E}\right)+\underline{\rho^{(0)}C_{AB}}\right]\\
&+\partial_a g^A\partial_u g^{(-1)B}\left[K^{-1}\left(\partial_D C_{AB}g^{(-1)D}+\partial_{\bar{u}}C_{AB}a^{(-1)}\right)+\underline{\frac{1}{4}C_{DE}C^{DE}\sigma_{AB}}\right].
\end{aligned}
$$

我们在以 g（x_0）为中心的正规坐标 $\bar{x}^A$ 中工作。由引理 4.1 和引理 4.5 可得

上一表达式中带下划线的各项相互抵消，得到

$$
\begin{aligned}
g_{ua}^{(-1)} = {} & K^2\partial_a g^A \bar{g}_{\bar{u}A}^{(-1)} + 2mK^2\nabla_a \hat{f} - \nabla_a \hat{f}\partial_u \rho^{(-1)} - \nabla_a(K\rho^{(-1)}) \\
& + \rho^{(-1)}\nabla_a K + \partial_a g^A \partial_u g^{(-1)B} \cdot 2K^{-1}\rho^{(-1)}\sigma_{AB} + K^{-2}\sigma_{AB}\partial_a g^A \partial_u g^{(-3)B} \\
& - \partial_u a^{(-1)}\nabla_a \hat{f} - K\nabla_a a^{(-1)} \\
& - \nabla_a a^{(-1)}\partial_u \rho^{(0)} - \partial_u a^{(-1)}\nabla_a \rho^{(0)} + \frac{1}{4}K^{-1}\nabla_a K \partial_{\bar{u}} C_{AB} g^{(-1)A} g^{(-1)B} + KU^{(-2)}\nabla_a K \\
& + \sigma_{AB}\partial_a g^A \Big(\partial_u a^{(-1)} W^{(-2)B} + K\nabla_D W^{(-2)B} g^{(-1)D} + K\partial_{\bar{u}} W^{(-2)B} a^{(-1)} \Big) \\
& + K^{-2}\sigma_{AB}\partial_a g^{(-1)A} \left(-\frac{1}{2}K^2 \partial_{\bar{u}} C_D^B g^{(-1)D} \right) + K\partial_a g^{(-1)A} W_A^{(-2)} \\
& + K^{-2}\sigma_{AB} \left(-\partial_a \left(K\rho^{(0)} g^{(-1)B} \right) - \frac{1}{2}\partial_a \Gamma_{ED}^B g^{(-1)E} g^{(-1)E} - \frac{1}{2}K\partial_a C_D^A g^{(-1)D} \right) \partial_u g^{(-1)B} \\
& + W_B^{(-2)} \partial_u g^{(-1)B} \nabla_a \hat{f} \\
& + 2\rho^{(0)}\sigma_{AB}\partial_a g^A \left(-K\partial_u(\rho^{(0)} g^{(-1)B}) - \frac{1}{2}\partial_u C_D^B g^{(-1)D} + K^{-1}\partial_a g^{(-1)A}\partial_u g^{(-1)B} \right) \\
& + C_{AB}\partial_a g^A \left(-\partial_u(\rho^{(0)} g^{(-1)B}) - \frac{1}{2}\partial_u C_D^B g^{(-1)D} \right) \\
& + \partial_a g^A \partial_u g^{(-1)B} \sigma_{AB} \rho^{(0)2} \\
& + \partial_a g^A \partial_u g^{(-1)B} \cdot \frac{1}{2}K^{-2}\partial_D \partial_E \sigma_{AB} g^{(-1)D} g^{(-1)E} \\
& + \partial_a g^A \partial_u g^{(-1)B} \cdot K^{-1} \left(\nabla_D C_{AB} g^{(-1)D} + \partial_{\bar{u}} C_{AB} a^{(-1)} \right),
\end{aligned}
$$

其中，我们在前两行汇总了 $\rho^{(-1)}$ 和 $g^{(-3)B}$ 项。

我们将其写作 $g_{ua}^{(-1)} = K^2\partial_a g^A \bar{g}_{\bar{u}A}^{(-1)} + 2mK^2\nabla_a \hat{} f + \mathrm{I} + \mathrm{II}$，其中 I 汇集了涉及剪切张量 C_{AB} 的项。根据引理 4.4 和引理 4.6，I 包含

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{4}K^{-1}\nabla_a K \partial_{\bar{u}} C_{AB} g^{(-1)A} g^{(-1)B} + KU^{(-2)}\nabla_a K \\
& - K\nabla_b K \bar{\nabla}^b \hat{f} p l_a g^A W_A^{(-2)} + K\partial_a g^A \nabla_D W_A^{(-2)} g^{(-1)D} - \frac{1}{2}K^2 \partial_a g^A \partial_{\bar{u}} W_A^{(-2)} |\bar{\nabla}\hat{f}|^2 \\
& \underbrace{-\frac{1}{2}\partial_{\bar{u}} C_{AB}\partial_a g^{(-1)A} g^{(-1)B}} + \underbrace{K\partial_a g^{(-1)A} W_A^{(-2)}} \\
& - \frac{1}{2}K^{-1}\partial_a C_{BD} g^{(-1)D}\partial_u g^{(-1)B} + \underbrace{W_B^{(-2)}\partial_u g^{(-1)B}\nabla_a \hat{f}} \\
& \underline{-\rho^{(0)}\partial_a g^A \partial_u C_{AD} g^{(-1)D} - C_{AB}\partial_a g^A \partial_u(\rho^{(0)} g^{(-1)B})} - \frac{1}{2}K\partial_{\bar{u}} C_D^B C_{AB} g^{(-1)D}\partial_a g^A \\
& + K^{-1}\nabla_D C_{AB} g^{(-1)D}\partial_a g^A \partial_u g^{(-1)B} - \frac{1}{2}\partial_{\bar{u}} C_{AB}\partial_a g^A \partial_u g^{(-1)B} |\bar{\nabla}\hat{f}|^2
\end{aligned}
$$

plus terms in $-\nabla_a\hat{f}\partial_u\rho^{(-1)}-\nabla_a(K\rho^{(-1)})+\rho^{(-1)}\nabla_a K+K^{-2}\sigma_{AB}\partial_a g^A\partial_u g^{(-3)B}$:

$$\frac{1}{4}\partial_a g^A\partial_{\bar{u}}\nabla_A C_{BD}g^{(-1)B}g^{(-1)D}+\frac{1}{4}\partial_{\bar{u}}\partial_{\bar{u}}C_{BD}\nabla_a\hat{f}g^{(-1)B}g^{(-1)D}+\frac{1}{2}\partial_{\bar{u}}C_{AB}\partial_a g^{(-1)A}g^{(-1)B}$$
$$-\nabla_a KW_A^{(-2)}g^{(-1)A}-K\partial_a g^A\nabla_A W_B^{(-2)}g^{(-1)B}-K\partial_{\bar{u}}W_B^{(-2)}g^{(-1)B}\nabla_a\hat{f}$$
$$-KW_A^{(-2)}\partial_a g^{(-1)A}+\partial_a\left(\frac{1}{4}K^2\mathcal{C}_{de}\bar{\nabla}^d\bar{\nabla}^e\hat{f}\right)$$
$$+\frac{1}{12}\partial_{\bar{u}}\partial_{\bar{u}}C_{AB}g^{(-1)A}g^{(-1)B}\nabla_a\hat{f}+\frac{1}{6}\partial_{\bar{u}}C_{AB}g^{(-1)A}\partial_u g^{(-1)B}\nabla_a\hat{f}+\frac{1}{12}K^{-1}\nabla_a K\partial_{\bar{u}}C_{AB}g^{(-1)A}g^{(-1)B}$$
$$-\frac{1}{16}K^2\partial_{\bar{u}}(C_{DE}C^{DE})\nabla_a\hat{f}-\frac{1}{16}KC_{DE}C^{DE}\nabla_a K$$
$$-\frac{1}{4}\partial_{\bar{u}}\nabla_A C_{BD}\partial_a g^A g^{(-1)B}g^{(-1)D}-\frac{1}{2}K^{-1}\nabla_A C_{BD}\partial_a g^A\partial_u g^{(-1)B}g^{(-1)D}$$
$$-\frac{1}{2}K^2\partial_a g^A\partial_{\bar{u}}W_A^{(-2)}|\bar{\nabla}\hat{f}|^2-K\partial_b K\bar{\nabla}^b\hat{f}\partial_a g^A W_A^{(-2)}$$
$$-K\partial_{\bar{u}}W_A^{(-2)}g^{(-1)A}\partial_a\hat{f}-W_A^{(-2)}\partial_u g^{(-1)A}\nabla_a\hat{f}-W_A^{(-2)}g^{(-1)A}\nabla_a K+\partial_u\left(\rho^{(0)}C_{AB}\partial_a g^A g^{(-1)B}\right)$$
$$+\frac{1}{6}K\partial_{\bar{u}}\partial_{\bar{u}}C_{AB}\partial_a g^A g^{(-1)B}|\bar{\nabla}\hat{f}|^2+\frac{1}{6}\partial_a g^A\partial_u g^{(-1)B}\partial_{\bar{u}}C_{AB}|\bar{\nabla}\hat{f}|^2+\frac{1}{3}\nabla_b K\bar{\nabla}^b\hat{f}\partial_a g^A\partial_{\bar{u}}C_{AB}g^{(-1)B}$$

其中我们用下划线标出了相互抵消的项。

接下来，根据引理 4.1，II 包含，

$$-\partial_u a^{(-1)}\nabla_a\hat{f}-K\nabla_a a^{(-1)}-\nabla_a a^{(-1)}\partial_u\rho^{(0)}-\partial_u a^{(-1)}\nabla_a\rho^{(0)}$$
$$+K^{-2}\nabla_a K\left(\frac{1}{2}\partial_u\rho^{(0)}\sigma_{AB}g^{(-1)A}g^{(-1)B}+\rho^{(0)}\sigma_{AB}g^{(-1)A}\partial_u g^{(-1)B}\right)$$
$$+K^{-2}\sigma_{AB}\partial_a g^{(-1)A}\left(-K\partial_u\rho^{(0)}g^{(-1)B}-K\rho^{(0)}\partial_u g^{(-1)B}\right)$$
$$+K^{-2}\sigma_{AB}\left(-\nabla_a K\rho^{(0)}g^{(-1)A}-K\nabla_a\rho^{(0)}g^{(-1)A}\right)\partial_u g^{(-1)B}$$
$$+K^{-2}\sigma_{AB}\left(-K\rho^{(0)}\partial_a g^{(-1)A}-\frac{1}{2}\partial_a\Gamma^A_{ED}g^{(-1)E}g^{(-1)D}\right)\partial_u g^{(-1)B}$$
$$+2K^{-1}\rho^{(0)}\sigma_{AB}\partial_a g^A\left(-K\partial_u\rho^{(0)}g^{(-1)B}-K\rho^{(0)}\partial_u g^{(-1)B}+\partial_a g^{(-1)A}\partial_u g^{(-1)B}\right)$$
$$+\partial_a g^A\partial_u g^{(-1)B}\left(\rho^{(2)2}\sigma_{AB}+\frac{1}{2}K^{-2}\partial_D\partial_E\sigma_{AB}g^{(-1)D}g^{(-1)E}\right)$$

加上 te rms 来自 $-\nabla_a\hat{}f\partial_u\rho^{(-1)}-\nabla_a(K\rho^{(-1)})+\rho^{(-1)}\nabla_a K+K^{-2}\sigma_{AB}\partial_a g^A\partial_u g^{(-3)B}$:

$$\nabla_a\left(Ka^{(-1)}\right)-\nabla_a\left(\frac{1}{4}K^2\left(\bar{\nabla}_b\bar{\nabla}_c\hat{f}-\frac{1}{2}\bar{\Delta}\hat{f}\sigma_{bc}\right)\left(\bar{\nabla}^b\bar{\nabla}^c\hat{f}-\frac{1}{2}\bar{\Delta}\hat{f}\bar{\sigma}^{bc}\right)\right)$$
$$+\partial_u\left(\frac{1}{3}a^{(-1)}\nabla_a\hat{f}\right)+2\partial_u\rho^{(0)}\rho^{(0)}\sigma_{AB}\partial_a g^A g^{(-1)B}+\rho^{(0)2}\sigma_{AB}\partial_a g^A\partial_u g^{(-1)B}$$
$$-K^{-2}\left(\frac{1}{6}\partial_D\Gamma^F_{EB}\sigma_{AF}g^{(-1)B}\partial_u g^{(-1)D}\partial_a g^A+\frac{1}{3}\partial_D\Gamma^F_{EB}\sigma_{AF}\partial_u g^{(-1)B}g^{(-1)D}\right)g^{(-1)E}\partial_a g^A$$

其中我们将相互抵消的项用下划线标出。因此，

$$\begin{aligned}\mathrm{II} = &-\frac{1}{4}\nabla_a\left(K^2\left|\bar{\nabla}\bar{\nabla}\hat{f}-\frac{1}{2}\bar{\Delta}\hat{f}\bar{\sigma}\right|^2\right)\\ &+\partial_u\rho^{(0)}\left(-\nabla_a a^{(-1)}+\frac{1}{2}|\bar{\nabla}\hat{f}|^2\nabla_a K-\frac{1}{2}K^{-1}\nabla_a\left(K^2|\bar{\nabla}\hat{f}|^2\right)\right)\\ &+\nabla_a\rho^{(0)}\left(-\partial_u a^{(-1)}-K^{-1}\sigma_{AB}g^{(-1)A}\partial_u g^{(-1)B}\right)\\ &-\frac{2}{3}\partial_u a^{(-1)}\nabla_a\hat{f}+\frac{4}{3}a^{(-1)}\nabla_a K\\ &+K^{-2}\left[-\frac{1}{2}\sigma_{FB}\partial_A\Gamma^F_{ED}+\frac{1}{2}\partial_D\partial_E\sigma_{AB}-\frac{1}{6}\partial_B\Gamma^F_{ED}\sigma_{AF}-\frac{1}{3}\partial_D\Gamma^F_{EB}\sigma_{AF}\right]\cdot\\ &\qquad\qquad g^{(-1)D}g^{(-1)E}\partial_a g^A\partial_u g^{(-1)B}.\end{aligned}$$

很容易看出，第二行和第三行都消失了。我们断言最后两行相互抵消。事实上，我们有 $\partial_D\partial_E\sigma_{AB}=\partial_D\left(\Gamma^F_{EA}\sigma_{FB}+\Gamma^F_{EB}\sigma_{AF}\right)$，而最后一行中的括号变为

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\partial_D\Gamma^F_{EA}\sigma_{FB}-\frac{1}{2}\partial_A\Gamma^F_{ED}\sigma_{FB}+\frac{1}{6}\partial_D\Gamma^F_{EB}\sigma_{AF}-\frac{1}{6}\partial_B\Gamma^F_{ED}\sigma_{AF}&=\frac{1}{2}R_{DABE}+\frac{1}{6}R_{DBAE}\\ &=\frac{1}{2}\left(\sigma_{DB}\sigma_{AE}-\sigma_{DE}\sigma_{AB}\right)+\frac{1}{6}\left(\sigma_{DA}\sigma_{BE}-\sigma_{DE}\sigma_{BA}\right).\end{aligned}$$

此外，我们注意到这些项

$$\begin{aligned}KU^{(-2)}\nabla_a K+\frac{1}{4}\nabla_a\left(K^2\mathcal{C}_{de}\bar{\nabla}^d\bar{\nabla}^e\hat{f}\right)-\frac{1}{16}K^2\partial_{\bar{u}}(C_{DE}C^{DE})\nabla_a\hat{f}-\frac{1}{16}KC_{DE}C^{DE}\nabla_a K\\ -\frac{1}{4}\nabla_a\left(K^2\left|\bar{\nabla}\bar{\nabla}\hat{f}-\frac{1}{2}\bar{\Delta}\hat{f}\bar{\sigma}\right|^2\right)\end{aligned}$$

可重新排列为

$$-\frac{1}{16}\nabla_a\left(\sigma^{bd}\sigma^{ce}g^{(1)}_{bc}g^{(1)}_{de}\right)+\frac{1}{16}K^2\partial_a\nabla_A(C_{DE}C^{DE}).$$

综合以上结果，我们得到

$$
\begin{aligned}
&g_{ua}^{(-1)}+\frac{1}{16}\nabla_a\left(\sigma^{bd}\sigma^{ce}g_{bc}^{(1)}g_{de}^{(1)}\right)\\
&=K^2\partial_a g^A\left(\bar{g}_{\bar{u}A}^{(-1)}+\frac{1}{16}\nabla_A\left(C_{DE}C^{DE}\right)\right)+2mK^2\nabla_a\hat{f}\\
&\quad+K\partial_a g^A\left(\nabla_B W_A^{(-2)}-\nabla_A W_B^{(-2)}\right)g^{(-1)B}-K^2\partial_a g^A\partial_{\bar{u}}W_A^{(-2)}|\bar{\nabla}\hat{f}|^2\\
&\quad-\frac{1}{2}K\partial_{\bar{u}}C_D^B C_{AB}\partial_a g^A g^{(-1)D}+\frac{1}{3}\partial_{\bar{u}}\partial_{\bar{u}}C_{AB}g^{(-1)A}g^{(-1)B}\nabla_a\hat{f}\\
&\quad-2K\partial_{\bar{u}}W_A^{(-2)}g^{(-1)A}\nabla_a\hat{f}+\frac{1}{6}K\partial_{\bar{u}}\partial_{\bar{u}}C_{AB}\partial_a g^A g^{(-1)B}|\bar{\nabla}\hat{f}|^2\\
&\quad+\frac{1}{3}K^{-1}\nabla_a K\partial_{\bar{u}}C_{AB}g^{(-1)A}g^{(-1)B}-2K\nabla_b K\bar{\nabla}^b\hat{f}\partial_a g^A W_A^{(-2)}\\
&\quad+\partial_a g^A\partial_u g^{(-1)B}\left(K^{-1}\nabla_D C_{AB}g^{(-1)D}-K^{-1}\nabla_A C_{BD}g^{(-1)D}-\frac{1}{3}\partial_{\bar{u}}C_{AB}|\bar{\nabla}\hat{f}|^2\right)\\
&\quad-\frac{1}{3}K^{-1}\partial_{\bar{u}}C_{AB}g^{(-1)A}\partial_u g^{(-1)B}\nabla_a\hat{f}-2\nabla_a K W_A^{(-2)}g^{(-1)A}+\frac{1}{3}\nabla_b K\bar{\nabla}^b\hat{f}\partial_a g^A\partial_{\bar{u}}C_{AB}g^{(-1)B}.
\end{aligned}
$$

我们声称最后三行消失。事实上，直接检查可知，涉及 $\partial_{\bar{u}}C_{AB}$ 的项根据引理 2.4 消失。剩下的是

$$
-K\nabla_b K\bar{\nabla}^b\hat{f}\partial_a g^A\nabla^B C_{AB}-\partial_a g^A\partial_b g^B\bar{\nabla}^b K(\nabla_D C_{AB}-\nabla_A C_{BD})g^{(-1)D}-\nabla_a K\nabla^B C_{AB}g^{(-1)A},
$$

根据 [12]、$\nabla_D C_{AB}-\nabla_A C_{DB}=\nabla^E C_{AE}\sigma_{DB}-\nabla^E C_{DE}\sigma_{AB}$ 中的命题 A.1，该项消失。证明完成。 □

5 Dr一般截面的 ay-Streubel 角动量 n

作为变换公式的一个应用，我们研究一般截面的 Dray-Streubel 角动量[9] 。考虑 $\mathscr{I}^+$ 中的一个 $u=$常数截面，记为 $u=0$，它在 Bondi-Sachs 坐标系（u， r， x^A）中对应于$r=\infty$。其 Dray-Streubel 角动量定义为

$$
J(u=0)=\int_{S^2}Y^A\left(N_A(0,x)-\frac{1}{4}\left(C_{AB}\nabla_D C^{BD}\right)(0,x)\right).
$$

这里， Y^A 是 S^2 上的一个旋转Killing向量场，积分$\int_{S^2}$是相对于标准度量 σ_{AB} 进行的（我们省略面积形式）。

设 $f(x)$ 是 S^2 上的一个正函数。截面$u=f(x)$ 的 Dray-Streubel 角动量定义为截面 $u=0$ 的角动量加上 Ashtekar-Streubel 通量 [1]

$$
J(u=f)=J(u=0)-\frac{1}{4}\int_\Omega N^{AB}\mathcal{L}_Y C_{AB} \tag{5.29}
$$

其中， $\mathcal{L}$ 表示李导数。此处，Ω 是 $\mathcal{I}^+$ 中由 $u=0$ 和 $u=f(x)$ 截面围成的区域。在 $\mathcal{I}^+$ 上函数 $F(u,\ x)$ 的积分定义为 $\int_\Omega F(u,\ x) = \int_{S^2}\left(\int^{f(x)}_0 F(u',\ x)\,du'\right)$。

还有另一种对 $J(u=f)$ 的定义，见 [11, 3]。考虑超平移 $u = u' + f(x)$，在该变换下，$u=f(x)$ 截面对应于 $u'=0$ 截面。$u=f(x)$ 的 Dray-Streubel 角动量也可以定义为

$$J(u=f)=\int_{S^2} Y^A\left(N'_A-\frac{1}{4}C'_{AB}\nabla_D C'^{BD}\right)-2Y^A\nabla_A f m' \tag{5.30}$$

其中，N'_A、C'_{AB}、m' 是 Bondi-Sachs 坐标系（u'、r'、x^A）中 $u'=0$ 超曲面的 Bondi数据。右侧在物理上是与 BMS 向量场 $Y^A\frac{\partial}{\partial X^A}-Y^A\nabla_A f\frac{\partial}{\partial u'}$相关联的 $u'=0$ 截面的荷。

众所周知，这两个定义是等价的。在第一小节中，我们利用Bondi数据的变换公式直接证明这一事实。在第二小节中，我们用微分形式重新表述计算，并得到一般截面的Drey-Streubel角动量的显式公式。在第三小节中，将结果推广到一般截面的BMS荷。

5.1 两种定义的等价性

本小节的目标是利用 Bondi 数据的变换公式证明以下定理，该定理断言 (5.29) 与 (5.30) 等价:

定理5.1.

$$\begin{aligned}&\int_{S^2} Y^A\left(N'_A-\frac{1}{4}C'_{AB}\nabla_D C'^{BD}-2Y^A\nabla_A f m'\right)\\&=\int_{S^2} Y^A\left(N_A(0,x)-\frac{1}{4}\left(C_{AB}\nabla^D C_{BD}\right)(0,x)\right)-\frac{1}{4}\int_\Omega N^{AB}\mathcal{L}_Y C_{AB}\end{aligned}$$

证明依赖于两个引理。为使表述更加简洁，在证明中，如果不会引起混淆，我们将省略第二个槽位中对 $x\in S^2$ 的依赖。例如，$C_{AB}(f)$ 表示 $C_{AB}(f(x)\ x)$。此外，我们将使用以下关于旋转Killing矢量 Y^A 的恒等式:

$$\nabla_A Y^A=0,\nabla^B Y^A=-\nabla^A Y^B,\Delta Y^A=-Y^A.$$

引理 5.2。

$$\partial_u\left(Y^A\left(N_A-\frac{1}{4}C_{AB}\nabla_D C^{BD}\right)\right)-\nabla_D V^D=-\frac{1}{4}N^{AB}\mathcal{L}_Y C_{AB} \tag{5.31}$$

其中，向量场 V 在 $\mathscr{I}^+$ 上的散度具有如下形式

$$\nabla_D V^D=\nabla_A\left(Y^A m\right)+\frac{1}{2}\nabla_D\left(Y^A C_{AB}N^{BD}\right)-\frac{1}{4}Y^A\nabla^B P_{BA}$$

与 $P_{BA}=\nabla_B\nabla^D C_{DA}-\nabla_A\nabla^D C_{DB}$。

证明。根据 N_A 的演化公式（例如参见 [7, (5.103)] ）

$$\partial_u N_A = \nabla_A m - \frac{1}{4}\nabla^B P_{BA} + \frac{1}{4}\nabla_A(C_{BE}N^{BE}) - \frac{1}{4}\nabla_B(C^{BD}N_{DA}) + \frac{1}{2}C_{AB}\nabla_D N^{DB},$$

我们有

$$\begin{aligned}
&\partial_u\left(Y^A\left(N_A - \frac{1}{4}C_{AB}\nabla_D C^{BD}\right)\right)\\
&= Y^A\left[\nabla_A m - \frac{1}{4}\nabla^B P_{BA} + \frac{1}{4}\nabla_A(C_{BE}N^{BE})\right]\\
&+ Y^A\left[-\frac{1}{4}\nabla_B(C^{BD}N_{DA}) + \frac{1}{4}C_{AB}\nabla_D N^{DB} - \frac{1}{4}N_{AB}\nabla_D C^{BD}\right].
\end{aligned}$$

最后一行可以改写为

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{4}\nabla_B\left(Y^A C^{BD}N_{DA}\right) + \frac{1}{4}\nabla_B Y^A C^{BD}N_{DA} + \frac{1}{4}\nabla_D\left(Y^A C_{AB}N^{DB}\right) - \frac{1}{4}\nabla_D Y^A C_{AB}N^{DB}\\
&- \frac{1}{4}Y^A\nabla_D C_{AB}N^{DB} - \frac{1}{4}N_{AB}Y^A\nabla_D C^{BD}
\end{aligned}$$

重新排列指标并应用引理 A.1，我们得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\nabla_B Y^A C^{BD}N_{DA} - \frac{1}{4}\nabla_D Y^A C_{AB}N^{BD} - \frac{1}{4}Y^A\nabla_D C_{AB}N^{BD} - \frac{1}{4}N_{AB}Y^A\nabla_D C^{BD}\\
&= \frac{1}{4}N_{AB}\nabla_D Y^A C^{BD} - \frac{1}{4}N_{AB}\nabla^A Y^D C_{DB} - \frac{1}{4}Y^A\nabla_A C_{BD}N^{BD}.
\end{aligned} \tag{5.32}$$

回顾李导数的定义

$$\mathcal{L}_Y C_{AB} = Y^D\nabla_D C_{AB} + \nabla_A Y^D C_{DB} + \nabla_B Y^D C_{AD},$$

我们注意到，(5.32) 的最后一行正是 $-\frac{1}{4}N^{AB}\mathcal{L}_Y C_{AB}$。因此

$$\begin{aligned}
&\partial_u\left(Y^A\left(N_A - \frac{1}{4}C_{AB}\nabla_D C^{BD}\right)\right)\\
&= \nabla_A(Y^A m) - \frac{1}{4}Y^A\nabla^B P_{BA} - \frac{1}{4}N^{AB}\mathcal{L}_Y C_{AB}\\
&\quad + \frac{1}{4}\nabla_A\left(Y^A C_{BD}N^{BD}\right) - \frac{1}{4}\nabla_A\left(Y^B C^{AD}N_{DB}\right) + \frac{1}{4}\nabla_A\left(Y^B C_{BD}N^{DA}\right)
\end{aligned}$$

并且根据 (A.45)，最后一行等于 $\frac{1}{2}\nabla_A\left(Y^B C_{BD}N^{DA}\right)$。 □

V^D 可显式表示为

$$V^D = Y^D m + \frac{1}{2}Y^A C_{AB}N^{BD} - \frac{1}{4}Y^A P^D{}_A + \frac{1}{2}\nabla^D Y^A\nabla^B C_{BA} + \frac{1}{2}Y^A C^D{}_A \tag{5.33}$$

其中我们使用的是

$$\frac{1}{4}\nabla^B Y^A P_{BA} = \frac{1}{2}\nabla^B Y^A\nabla_B\nabla^D C_{DA} = \frac{1}{2}\nabla_B\left(\nabla^B Y^A\nabla^D C_{DA}\right) + \frac{1}{2}Y^A\nabla^D C_{DA}$$

引理 5.3。

$$\int_{S^2} Y^A \left(N'_A - 2m' \nabla_A f - \frac{1}{4} C'_{AB} \nabla_D C'^{DB} \right) = \int_{S^2} Y^A \left(N_A - \frac{1}{4} C_{AB} \nabla_D C^{DB} \right) + \int_{S^2} V^D \nabla_D f,$$

其中， V^D 由（5.33）给出。右侧的Bondi数据 N_A、 m、 C_{AB}、 N_{AB}、 P_{BA} 在（f（x） x）处取值，然后对 S^2积分。

证明。根据角动量方面的变换公式 (3.25)，我们有

$$\begin{aligned} N'_A(x) = N_A + 3m\nabla_A f - \frac{3}{4} P_{BA} \nabla^B f - \frac{3}{4} \nabla^B N_{AB} |\nabla f|^2 + \frac{3}{4} N_D^B C_{AB} \nabla^D f \\ + \frac{1}{2} \partial_u N_{DB} \nabla^D f \nabla^B f \nabla_A f + \frac{3}{2} \nabla^B N_{DB} \nabla^D f \nabla_A f - \frac{1}{4} \partial_u N_{AB} \nabla^B f |\nabla f|^2 \end{aligned}$$

其中，右侧的 Bondi数据在 ($f(x)$ x) 处取值。我们利用下述关系改写上述方程右侧的三项:

$$-\frac{3}{4} \nabla^B N_{AB} - \frac{1}{4} \partial_u N_{AB} \nabla^B f = -\frac{1}{2} \nabla^B N_{AB} - \frac{1}{4} \nabla^B \left(N_{AB}(f) \right)$$

and

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \partial_u N_{DB} \nabla^D f \nabla^B f = \frac{1}{2} \nabla^B \nabla^D \left(C_{BD}(f) \right) - \frac{1}{2} (\nabla^B \nabla^D C_{BD})(f) - \nabla^D N_{BD}(f) \nabla^B f \\ - \frac{1}{2} N_{BD}(f) \nabla^B \nabla^D f. \end{aligned}$$

根据质量方面的变换公式 (3.23)，我们有

$$m'(x) = m(f) + \frac{1}{4} \nabla^B \nabla^D \left(C_{BD}(f) \right) - \frac{1}{4} (\nabla^B \nabla^D C_{BD})(f).$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned} N'_A(x) - 2m'(x) \nabla_A f = N_A + m \nabla_A f - \frac{3}{4} P_{BA} \nabla^B f - \frac{1}{2} \nabla^B N_{AB} |\nabla f|^2 - \frac{1}{4} \nabla^B (N_{AB}(f)) |\nabla f|^2 \\ + \frac{3}{4} N_D^B C_{AB} \nabla^D f + \frac{1}{2} \nabla^D N_{BD} \nabla^B f \nabla_A f - \frac{1}{2} N_{BD} \nabla^B \nabla^D f \nabla_A f \end{aligned} \tag{5.34}$$

其中，等式右侧的 Bondi数据是在 \(($f(x)$ x)\) 处取值的。

回顾 $P_{BA} = \nabla_B \nabla^D C_{DA} - \nabla_A \nabla^D C_{DB}$，在 ($f(x)$ x) 处，我们重新排列得到

$$\begin{aligned} & -\frac{3}{4} P_{BA} \\ & = -\frac{1}{4} P_{BA} - \frac{1}{2} \nabla_B \left(\nabla^D C_{DA}(f) \right) + \frac{1}{2} \nabla^D N_{DA} \nabla_B f + \frac{1}{2} \nabla_A \left(\nabla^D C_{DB}(f) \right) - \frac{1}{2} \nabla^D N_{DB} \nabla_A f. \end{aligned} \tag{5.35}$$

将其代入 (5.34)，我们得到

$$\begin{aligned}N'_A - 2m'\nabla_A f = N_A + m\nabla_A f - \frac{1}{4}P_{BA}\nabla^B f \\ - \frac{1}{2}\nabla_B\left(\nabla^D C_{DA}(f)\nabla^B f\right) + \frac{1}{2}\nabla^D C_{DA}\Delta f \\ + \frac{1}{2}\nabla_A\left(\nabla^D C_{DB}(f)\nabla^B f\right) - \frac{1}{2}\nabla^D C_{DB}\nabla_A\nabla^B f \\ - \frac{1}{4}\nabla^B\left(N_{AB}(f)|\nabla f|^2\right) + \frac{1}{2}N_{AB}\nabla^B\nabla_D f\nabla^D f \\ + \frac{3}{4}N^B_D C_{AB}\nabla^D f - \frac{1}{2}N_{BD}\nabla^B\nabla^D f\nabla_A f,\end{aligned}$$

其中，右侧的第二行来自（5.35）右端的 $-\frac{1}{2}\nabla_B\left(\nabla^D C_{DA}(f)\right)$，右侧的第三行来自（5.35）右端的 $\frac{1}{2}\nabla_A\left(\nabla^D C_{DB}(f)\right)$，而第四行则来自（5.34）右端的 $-\frac{1}{4}\nabla^B\left[N_{AB}(f(x)\ x)\right]|\nabla f|^2$。注意，在对 Y^A 进行积分时，$\frac{1}{2}\nabla_A\left(\nabla^D C_{DB}(f)\nabla^B f\right)$ 和 $-\frac{1}{4}\nabla^B(N_{AB}(f)|\nabla f|^2)$ 这两项均为零。另一方面，

$$\begin{aligned}-\frac{1}{4}C'_{AB}\nabla_D C'^{DB} = -\frac{1}{4}C_{AB}\nabla_D C^{BD} - \frac{1}{4}C_{AB}N^{BD}\nabla_D f + \frac{1}{4}C_{AB}\nabla^B(\Delta+2)f \\ + \frac{1}{2}\nabla_D C^{BD}F_{AB} + \frac{1}{2}N^{BD}F_{AB}\nabla_D f \\ - \frac{1}{2}F_{AB}\nabla^B(\Delta+2)f,\end{aligned}$$

其中 $F_{AB} = \nabla_A\nabla_B f - \frac{1}{2}\Delta f\sigma_{AB}$。请注意，最后一行在与 Y^A 积分时为零。

将这些结果合并起来，我们得到

$$\begin{aligned}&\int_{S^2} Y^A\left(N'_A - 2m'\nabla_A f - \frac{1}{4}C'_{AB}\nabla_D C'^{DB}\right) \\ &= \int_{S^2} Y^A\left(N_A + m\nabla_A f - \frac{1}{4}C_{AB}\nabla_D C^{DB} - \frac{1}{4}P_{BA}\nabla^B f + \frac{1}{2}C_{AB}N^{BD}\nabla_D f - \frac{1}{2}\nabla_B\left(\nabla^D C_{DA}(f)\nabla^B f\right)\right) \\ &+ \int_{S^2} Y^A\Xi_A\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\Xi_A =&\frac{1}{2}\nabla^D C_{DA}\Delta f - \frac{1}{2}\nabla^D C_{DB}\nabla_A\nabla^B f + \frac{1}{4}C_{AB}\nabla^B(\Delta+2)f + \frac{1}{2}\nabla_D C^{BD}F_{AB} \\ &+\frac{1}{2}N_{AB}\nabla^B\nabla_D f\nabla^D f - \frac{1}{2}N_{BD}\nabla^B\nabla^D f\nabla_A f + \frac{1}{2}N^{BD}F_{AB}\nabla_D f\end{aligned}$$

我们简化

$$\frac{1}{2}\nabla^D C_{DA}\Delta f - \frac{1}{2}\nabla^D C_{DB}\nabla_A\nabla^B f + \frac{1}{2}\nabla_D C^{BD}F_{AB} = \frac{1}{4}\nabla^D C_{DA}\Delta f.$$

根据 $\nabla^D C_{AD} = \nabla^D(C_{AD}(f)) - N_{AD}\nabla^D f$，我们写作

$$\nabla^D C_{AD}\Delta f = \nabla^D\left(C_{AD}(f)\Delta f\right) - C_{AD}\nabla^D\Delta f - N_{AD}\nabla^D f\Delta f.$$

因此,

$$\begin{aligned}
&\int_{S^2} Y^A(\Xi_A - \frac{1}{2}C_{AB}\nabla^B f) \\
&= \int_{S^2} Y^A\left[-\frac{1}{4}N_{AD}\nabla^D f\Delta f + \frac{1}{2}N_{AB}\nabla^B\nabla_D f\nabla^D f - \frac{1}{2}N_{BD}\nabla^B\nabla^D f\nabla_A f + \frac{1}{2}N^{BD}F_{AB}\nabla_D f\right]
\end{aligned}$$

可以验证，最后一行中的括号项等于

$$\frac{1}{2}\left(N_{AB}F^B_D + N^B_D F_{BA} - N_{BE}F^{BE}\sigma_{AD}\right)\nabla^D f,$$

根据 (A.45)，该项为零。

综合以上各项，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_{S^2} Y^A\left(N'_A - 2m'\nabla_A f - \frac{1}{4}C'_{AB}\nabla_D C'^{DB}\right) \\
&= \int_{S^2} Y^A\left(N_A + m\nabla_A f - \frac{1}{4}C_{AB}\nabla_D C^{DB}\right) + \int_{S^2} -\frac{1}{4}Y^A P_{BA}\nabla^B f + \frac{1}{2}\nabla_B Y^A\nabla^D C_{DA}\nabla^B f \\
&\quad + \int_{S^2} Y^A\left(\frac{1}{2}C_{AB}N^{BD}\nabla_D f + \frac{1}{2}C_{AB}\nabla^B f\right).
\end{aligned}$$

□

定理5.1的证明。对Ω上的式 (5.41) 进行积分，并应用引理 5.6，即可得到定理5.1。

□

5.2 微分形式中的解释

在本小节中，我们将通量积分 $-\frac{1}{4}\int_\Omega N^{AB}\mathcal{L}_Y C_{AB}$（见式 (5.29)）重新诠释为在 $\mathscr{I}+$ 上对微分 3-形式 (5.37) 的积分，并用微分 2-形式 (5.36) 给出一般截面的Drey-Streubel角动量的精确表达式。

我们先用微分形式改写 (5.41)。令 $\not\epsilon = \epsilon_{AB}dx^A dx^B$ 表示 (S^2,σ) 的面积形式，令 $\not d$ 表示 S^2 的微分。

定义 $\mathscr{I}^+$ 上的 2-形式 $\omega(u,x)$

$$\omega = Y^A\left(N_A - \frac{1}{4}C_{AB}\nabla_D C^{BD}\right)\not\epsilon - (V\lrcorner\not\epsilon)\wedge du. \tag{5.36}$$

应用恒等式

$$\not d\,(V\lrcorner\not\epsilon) = (\nabla_A V^A)\not\epsilon$$

对 S^2 上的时变向量场应用该恒等式，可知 (5.41) 等价于

$$d\omega = -\frac{1}{4}N^{AB}\mathcal{L}_Y C_{AB}\not{\epsilon} \wedge du. \tag{5.37}$$

根据斯托克斯定理,

$$\int_\Omega -\frac{1}{4}N^{AB}\mathcal{L}_Y C_{AB} = \int_{u=f(x)} \omega - \int_{S^2} Y^A \left(N_A(0,x) - \frac{1}{4}(C_{AB}\nabla_D C^{BD})(0,x) \right).$$

在截面 $u = f(x)$ 上，我们有

$$(V \lrcorner \not{\epsilon}) \wedge du = \sum_{A<B} \left(V^D \epsilon_{DA}\nabla_B f - V^D \epsilon_{DB}\nabla_A f \right) dx^A \wedge dx^B = -V^D \nabla_D f \not{\epsilon}$$

因此

$$\int_{u=f(x)} \omega = \int_{S^2} Y^A \left(N_A - \frac{1}{4}C_{AB}\nabla_D C^{BD} \right) + V^D \nabla_D f$$

其中 N_A、C_{AB}、V^D 在（f（x） x）处求值。因此，我们得到以下显式公式。 :

命题 5.4. 截面 $u = f(x)$ 的 Drey-Streubel角动量由二形式 $\omega(u,x)$ (5.36) 在截面 $u = f(x)$ 上的限制的积分给出。

5.3 推广至一般截面的 BMS 荷

在本小节中，我们将前两个小节中的结果推广到零无穷远一般截面的 BMS 荷。考虑 Bondi-Sachs 坐标系（u, r, x^A）中的一个 $u =$ 常数截面，例如 $u = u_0$，它对应于 $\mathscr{I}^+$ 中的 $r = \infty$。BMS 向量场（$Y^0 + uY^1$） $\partial_u + Y^A\partial_A$ 对应的 $u = u_0$ 截面的 BMS 荷 [9]（另见 [10, (3.5)]）定义为

$$Q(u = u_0) = \int_{S^2} Y^A \left(N_A - \frac{1}{4}C_{AB}\nabla_D C^{BD} \right) + \frac{1}{8}Y^1 C_{BD}C^{BD} + \left(Y^0 + u_0 Y^1 \right) \cdot 2m. \tag{5.38}$$

其中，Bondi数据 N_A、C_{AB}、m 在 (u_0, x) 处取值，积分 $\int_{S^2}$ 是相对于标准度量 σ_{AB} 进行的（我们省略了面积形式）。这里， Y^0 是定义在 S^2 上的函数， Y^A 是定义在 S^2 上的共形 Killing 向量场，且满足 $\nabla_A Y^A = 2Y^1$。

设 $f(x)$ 是定义在 S^2 上的正函数。对于一个 BMS 向量场 $uY^1\partial_u + Y^A\partial_A$，截面 $u = u_0 + f(x)$ 的 BMS 荷有两种等价定义。第一种定义为截面 $u = u_0$ 的 BMS 荷加上 Ashtekar-Streubel通量 [1]

$$Q_1(u = u_0 + f) = Q(u = u_0) + \int_\Omega -\frac{1}{4}N^{AB}\mathcal{L}_Y C_{AB} - \frac{1}{4}uY^1 N_{BD}N^{BD} + \frac{1}{4}Y^1 C_{BD}N^{BD} \tag{5.39}$$

其中， $\mathcal{L}$ 表示李导数，Ω 是 $\mathscr{I}^+$ 中由 $u=u_0$ 和 $u=u_0+f(x)$ 截面围成的区域。考虑超平移 $u=u'+f(x)$，在该超平移下，截面 $u=u_0+f(x)$ 对应于截面 $u'=u_0$。第二种定义为

$$\begin{aligned} Q_2(u=u_0+f)=&\int_{S^2}Y^A\left(N'_A-\frac{1}{4}C'_{AB}\nabla_D C'^{BD}\right)+\frac{1}{8}Y^1C'_{BD}C'^{BD}\\ &+\int_{S^2}\left(-Y^A\nabla_A f+u_0Y^1+fY^1\right)\cdot 2m' \end{aligned} \tag{5.40}$$

其中， N'_A、C'_{AB}、m' 是 Bondi-Sachs 坐标系（u'、r'、x^A）中 $u'=u_0$ 超曲面的 Bondi 数据。右端在物理上表示 BMS 向量场 $Y^A\frac{\partial}{\partial X^A}+\left(fY^1+u_0Y^1-Y^A\nabla_A f\right)\frac{\partial}{\partial u'}$ 对应的 $u'=u_0$ 截面的 BMS 荷。

这两个定义的等价性最初由 Shaw [16] 和 Dray [8] 利用旋量演算证明。我们将利用 Bondi数据的变换公式和张量演算给出等价性的证明。

为简化表述，在不引起混淆的情况下，我们省略 $x\in S^2$ 在第二个槽位中的依赖。例如，$C_{AB}(f)$ 表示 $C_{AB}(u_0+f(x)\ x)$。此外，我们将使用以下关于共形 Killing 向量场 Y^A 的恒等式：

$$\nabla^A Y^B+\nabla^B Y^A=2Y^1\sigma^{AB},\nabla_A Y^A=2Y^1,\Delta Y^A=-Y^A,\nabla_A\nabla_B Y^1=-Y^1\sigma_{AB}.$$

我们首先给出式 (5.38) 中被积函数的演化公式。

引理 5.5。

$$\begin{aligned} &\partial_u\left(Y^A\left(N_A-\frac{1}{4}C_{AB}\nabla_D C^{BD}\right)+\frac{1}{8}Y^1C_{BD}C^{BD}+uY^1\cdot 2m\right)-\nabla_D\widetilde{V}^D\\ &=-\frac{1}{4}N^{AB}\left(\mathcal{L}_Y C_{AB}+uY^1N_{AB}-Y^1C_{AB}\right) \end{aligned} \tag{5.41}$$

~其中，向量场 V在 $\mathscr{I}^+$ 上的散度具有如下形式

$$\begin{aligned} \nabla_D\widetilde{V}^D=&\nabla_A\left(Y^Am\right)-\frac{1}{4}\nabla^B(Y^AP_{BA})+\frac{1}{2}\nabla_D\left(Y^AC_{AB}N^{BD}\right)\\ &+\frac{1}{2}\nabla_B(\nabla^BY^A\nabla^DC_{DA})+\frac{1}{2}\nabla^D(Y^AC_{DA})\\ &-\frac{1}{2}\nabla_A\left(Y^1\nabla_BC^{BA}\right)+\frac{1}{2}\nabla^D\left(\nabla^AY^1C_{DA}\right)\\ &+\nabla_B\left(\frac{u}{2}Y^1\nabla_DN^{BD}\right)-\nabla_A\left(\frac{u}{2}\nabla_BY^1N^{AB}\right) \end{aligned} \tag{5.42}$$

其中 $P_{BA}=\nabla_B\nabla^DC_{DA}-\nabla_A\nabla^DC_{DB}$。

证明。根据 N_A 的演化公式（例如参见 [7, (5.103)] ）

$$\partial_uN_A=\nabla_Am-\frac{1}{4}\nabla^BP_{BA}+\frac{1}{4}\nabla_A(C_{BE}N^{BE})-\frac{1}{4}\nabla_B(C^{BD}N_{DA})+\frac{1}{2}C_{AB}\nabla_DN^{DB},$$

我们有

$$\partial_u\left(Y^A\left(N_A-\frac{1}{4}C_{AB}\nabla_D C^{BD}\right)+\frac{1}{8}Y^1C_{BD}C^{BD}+uY^1\cdot 2m\right)$$
$$=Y^A\left[-\frac{1}{4}\nabla^B P_{BA}+\frac{1}{4}\nabla_A(C_{BE}N^{BE})-\frac{1}{4}\nabla_B(C^{BD}N_{DA})+\frac{1}{4}C_{AB}\nabla_D N^{DB}-\frac{1}{4}N_{AB}\nabla_D C^{BD}\right] \tag{5.43}$$
$$+Y^A\nabla_A m+\frac{1}{4}Y^1C_{BD}N^{BD}+Y^1\cdot 2m+uY^1\left(-\frac{1}{4}N_{BD}N^{BD}+\frac{1}{2}\nabla^B\nabla^D N_{BD}\right) \tag{5.44}$$

将 (5.43) 的最后 4 项记为 $\frac{1}{4}I$，则有

$$I=\nabla_A\left(Y^AC_{BD}N^{BD}\right)-2Y^1C_{BD}N^{BD}-\nabla_B\left(Y^AC^{BD}N_{DA}\right)+\nabla_BY^AC^{BD}N_{DA}$$
$$+\nabla_D\left(Y^AC_{AB}N^{DB}\right)-\nabla^DY^AC_{AB}N^{BD}-Y^A\nabla_DC_{AB}N^{BD}-N_{AB}Y^A\nabla_DC^{BD}$$

对第二行倒数第二项应用引理 A.1，我们得到 t

$$I=\nabla_A\left(Y^AC_{BD}N^{BD}\right)-\nabla_B\left(Y^AC^{BD}N_{DA}\right)+\nabla_D\left(Y^AC_{AB}N^{DB}\right)$$
$$+\left(-2Y^1C_{AB}\right)N^{AB}+N_{AB}\nabla_DY^AC^{BD}-N_{AB}\nabla^AY^DC_{DB}-Y^A\nabla_AC_{BD}N^{BD}.$$

回忆李导数的定义

$$\mathcal{L}_YC_{AB}=Y^D\nabla_DC_{AB}+\nabla_AY^DC_{DB}+\nabla_BY^DC_{AD},$$

我们看出，最后一行就是 $-\mathcal{L}_YC_{AB}N^{AB}$。

因此，(5.43) 等于

$$-\frac{1}{4}\nabla^B(Y^AP_{BA})+\frac{1}{4}\nabla^BY^AP_{BA}-\frac{1}{4}N^{AB}\mathcal{L}_YC_{AB}$$
$$+\frac{1}{4}\nabla_A\left(Y^AC_{BD}N^{BD}\right)-\frac{1}{4}\nabla_A\left(Y^BC^{AD}N_{DB}\right)+\frac{1}{4}\nabla_A\left(Y^BC_{BD}N^{DA}\right)$$

根据 (A.45)，最后一行等于 $\frac{1}{2}\nabla_A\left(Y^BC_{BD}N^{DA}\right)$。我们进一步化简

$$\frac{1}{4}\nabla^BY^AP_{BA}$$
$$=\frac{1}{8}\left(\nabla^BY^A-\nabla^AY^B\right)P_{BA}$$
$$=\frac{1}{4}\nabla^BY^A\nabla_B\nabla^DC_{DA}-\frac{1}{4}\nabla^AY^B\nabla_B\nabla^DC_{DA}$$
$$=\frac{1}{4}\nabla_B\left(\nabla^BY^A\nabla^DC_{DA}\right)+\frac{1}{4}Y^A\nabla^DC_{DA}-\frac{1}{4}\nabla_B\left(\nabla^AY^B\nabla^DC_{DA}\right)+\frac{1}{4}(\nabla_B\nabla^AY^B)\nabla^DC_{DA}$$
$$=\frac{1}{4}\nabla_B\left(\nabla^BY^A\nabla^DC_{DA}\right)-\frac{1}{4}\nabla_B\left(\nabla^AY^B\nabla^DC_{DA}\right)+\frac{1}{2}\nabla^D\left(\nabla^AY^1C_{DA}\right)+\frac{1}{2}\nabla^D\left(Y^AC_{DA}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\nabla_B\left(\nabla^BY^A\nabla^DC_{DA}\right)-\frac{1}{2}\nabla_A\left(Y^1\nabla_BC^{BA}\right)+\frac{1}{2}\nabla^D\left(\nabla^AY^1C_{DA}\right)+\frac{1}{2}\nabla^D\left(Y^AC_{DA}\right)$$

最后，(5.44) 等于

$$\nabla_A\left(Y^Am\right)-\frac{1}{4}uY^1|N|^2+\frac{1}{4}Y^1C_{BD}N^{BD}+\nabla_B\left(\frac{u}{2}Y^1\nabla_DN^{BD}\right)-\nabla_A\left(\frac{u}{2}\nabla_BY^1N^{AB}\right).$$

□

我们用微分形式重写 (5.41)。令 $\not\epsilon = \epsilon_{AB}dx^A dx^B$ 表示 (S^2,σ) 的面积形式，令 $\not d$ 表示 S^2 的微分。

在 $\mathscr{I}^+$ 上定义 2-形式 $\widetilde{\omega}(u,x)$

$$\widetilde{\omega} = \left(Y^A(N_A - \frac{1}{4}C_{AB}\nabla_D C^{BD}) + \frac{1}{8}Y^1 C_{BD}C^{BD} + uY^1\cdot 2m\right)\not\epsilon - (\widetilde{V}\lrcorner\not\epsilon)\wedge du.$$

应用恒等式

$$\not d\left(\widetilde{V}\lrcorner\not\epsilon\right) = (\nabla_A\widetilde{V}^A)\not\epsilon$$

对 S^2 上的时变向量场应用该恒等式，可知 (5.41) 等价于

$$d\widetilde{\omega} = \left(-\frac{1}{4}N^{AB}(\mathcal{L}_Y C_{AB} + uY^1 N_{AB} - Y^1 C_{AB})\right)\not\epsilon\wedge du.$$

由斯托克斯定理可知

$$Q_1(u = u_0 + f) = \int_{u=f(x)}\widetilde{\omega}.$$

在截面 $u = f(x)$ 上，有

$$\left(\widetilde{V}\lrcorner\not\epsilon\right)\wedge du = \sum_{A<B}\left(\widetilde{V}^D\epsilon_{DA}\nabla_B f - \widetilde{V}^D\epsilon_{DB}\nabla_A f\right)dx^A\wedge dx^B = -\widetilde{V}^D\nabla_D f\not\epsilon$$

因此

$$\int_{u=f(x)}\widetilde{\omega} = \int_{S^2}Y^A\left(N_A - \frac{1}{4}C_{AB}\nabla_D C^{BD} + \frac{1}{8}Y^1 C_{BD}C^{BD} + (u_0+f)Y^1\cdot 2m\right) + \widetilde{V}^D\nabla_D f$$

~其中，N_A、C_{AB}、m、V^D是在（u_0+f（x） x）處求得，且

$$\begin{aligned}\int_{S^2}\widetilde{V}^D\nabla_D f = &\int_{S^2}Y^A m\nabla_A f - \frac{1}{4}Y^A P_{BA}\nabla^B f + \frac{1}{2}\nabla_B Y^A\nabla^D C_{DA}\nabla^B f\\ &+\int_{S^2}Y^A\left(\frac{1}{2}C_{AB}N^{BD}\nabla_D f + \frac{1}{2}C_{AB}\nabla^B f\right)\\ &+\int_{S^2}-\frac{1}{2}Y^1\nabla_B C^{AB}\nabla_A f + \frac{1}{2}\nabla^A Y^1 C_{AB}\nabla^B f\\ &+\int_{S^2}\frac{1}{2}(u_0+f)Y^1\nabla_D N^{BD}\nabla_B f - \frac{1}{2}(u_0+f)\nabla_B Y^1 N^{AB}\nabla_A f.\end{aligned}$$

我们转向 $Q_2(u = u_0 + f(x))$。

引理 5.6。

$$\begin{aligned}\int_{S^2}Y^A\left(N'_A - 2m'\nabla_A f - \frac{1}{4}C'_{AB}\nabla_D C'^{DB}\right) = &\int_{S^2}Y^A\left(N_A + m\nabla_A f - \frac{1}{4}C_{AB}\nabla_D C^{DB}\right)\\ &+\int_{S^2}-\frac{1}{4}Y^A P_{BA}\nabla^B f + \frac{1}{2}\nabla_B Y^A\nabla^D C_{DA}\nabla^B f\\ &+\int_{S^2}Y^A\left(\frac{1}{2}C_{AB}N^{BD}\nabla_D f + \frac{1}{2}C_{AB}\nabla^B f\right)\\ &-\int_{S^2}Y^1\nabla_B C^{AB}\nabla_A f.\end{aligned}$$

在右侧，Bondi数据 N_A、 m、 C_{AB}、 N_{AB}、 P_{BA} 在 $(f(x)\ x)$ 处取值，然后对 S^2 积分。

证明。B 根据角动量和质量方面的变换公式，我们得到在线a in

$$\begin{aligned}
N'_A - 2m'\nabla_A f = N_A + m\nabla_A f - \frac{1}{4}P_{BA}\nabla^B f \\
&- \frac{1}{2}\nabla_B\left(\nabla^D C_{DA}(f)\nabla^B f\right) + \underline{\frac{1}{2}\nabla^D C_{DA}\Delta f} \\
&+ \frac{1}{2}\nabla_A\left(\nabla^D C_{DB}(f)\nabla^B f\right) - \frac{1}{2}\nabla^D C_{DB}\nabla_A\nabla^B f \\
&- \frac{1}{4}\nabla^B\left(N_{AB}(f)|\nabla f|^2\right) + \frac{1}{2}N_{AB}\nabla^B\nabla_D f\nabla^D f \\
&+ \frac{3}{4}N^B_D C_{AB}\nabla^D f - \frac{1}{2}N_{BD}\nabla^B\nabla^D f\nabla_A f
\end{aligned}$$

其中我们重新排列了

$$-\frac{3}{4}P_{BA} = -\frac{1}{4}P_{BA} - \frac{1}{2}\nabla_B\left(\nabla^D C_{DA}(f)\right) + \frac{1}{2}\nabla^D N_{DA}\nabla_B f + \frac{1}{2}\nabla_A\left(\nabla^D C_{DB}(f)\right) - \frac{1}{2}\nabla^D N_{DB}\nabla_A f.$$

另一方面，

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4}C'_{AB}\nabla_D C'^{DB} = &-\frac{1}{4}C_{AB}\nabla_D C^{BD} - \frac{1}{4}C_{AB}N^{BD}\nabla_D f + \frac{1}{4}C_{AB}\nabla^B(\Delta+2)f \\
&+ \frac{1}{4}\nabla_D C^{BD}(2\nabla_A\nabla_B f\underline{-\Delta f\sigma_{AB}}) + \frac{1}{4}N^{BD}(2\nabla_A\nabla_B f - \Delta f\sigma_{AB})\nabla_D f \\
&- \frac{1}{4}(2\nabla_A\nabla_B f - \Delta f\sigma_{AB})\nabla^B(\Delta+2)f.
\end{aligned}$$

注意，最后一行与 Y^A 积分时会消失。根据 $\nabla^D C_{AD} = \nabla^D(C_{AD}(f))\ -N_{AD}\nabla^D f$，带下划线的项可以重新排列为

$$\nabla^D C_{AD}\Delta f = \nabla^D\left(C_{AD}(f)\Delta f\right) - C_{AD}\nabla^D\Delta f - N_{AD}\nabla^D f\Delta f.$$

将这些结合起来，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_{S^2} Y^A\left(N'_A - 2m'\nabla_A f - \frac{1}{4}C'_{AB}\nabla_D C'^{DB}\right) \\
&= \int_{S^2} Y^A\left(N_A + m\nabla_A f - \frac{1}{4}C_{AB}\nabla_D C^{DB}\right) + \int_{S^2} -\frac{1}{4}Y^A P_{BA}\nabla^B f + \frac{1}{2}\nabla_B Y^A\nabla^D C_{DA}\nabla^B f \\
&\quad - \int_{S^2} Y^1\nabla^D C_{DB}\nabla^B f + \int_{S^2} Y^A\left(\frac{1}{2}C_{AB}N^{BD}\nabla_D f + \frac{1}{2}C_{AB}\nabla^B f\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{S^2} Y^A\left(N_{AB}F^B_D + N^B_D F_{BA} - N_{BE}F^{BE}\sigma_{AD}\right)\nabla^D f.
\end{aligned}$$

这里， $F_{AB} = \nabla_A\nabla_B f - \frac{1}{2}\Delta f\sigma_{AB}$，因此，根据公式 (A.45)，最后一个积分中的被积函数为零。 □

仍需证明,

引理 5.7.

$$\begin{aligned}
&\int_{S^2} \frac{1}{8} Y^1 C'_{BD} C'^{BD} + (u_0 + f) Y^1 \cdot 2m' \\
&= \int_{S^2} \frac{1}{8} Y^1 C_{BD} C^{BD} + (u_0 + f) Y^1 \cdot 2m \\
&\quad + \int_{S^2} \frac{1}{2} \nabla^A Y^1 C_{AB} \nabla^B f + \frac{1}{2} (u_0 + f) Y^1 \nabla_D N^{BD} \nabla_B f - \frac{1}{2} (u_0 + f) \nabla_B Y^1 N^{AB} \nabla_A f \\
&\quad + \int_{S^2} \frac{1}{2} Y^1 \nabla_B C^{AB} \nabla_A f
\end{aligned}$$

证明。在证明中，我们省略 Bondi数据 C_{AB}, m 对 $(u_0 + f)$ 的依赖。首先，我们有

$$C'_{BD} C'^{BD} = C_{BD} C^{BD} - 4 C_{AB} \nabla^A \nabla^B f + (-2 \nabla_A \nabla_B f + \Delta f \sigma_{AB})(-2 \nabla^A \nabla^B f + \Delta f \sigma^{AB})$$

并注意到，最后一项在对 Y^1 进行积分时会消失。接下来，我们将质量方面的变换重写为

$$2m' = 2m + \frac{1}{2} \nabla^B N_{AB} \nabla^A f + \frac{1}{2} \nabla^B (N_{AB} \nabla^A f)$$

以获得

$$\begin{aligned}
\int_{S^2} (u_0 + f) Y^1 \cdot 2m' = \int_{S^2} (u_0 + f) Y^1 \cdot \left(2m + \frac{1}{2} \nabla_D N^{BD} \nabla_B f \right) - \frac{1}{2} (u_0 + f) \nabla_B Y^1 N^{AB} \nabla_A f \\
- \int_{S^2} \frac{1}{2} Y^1 N^{AB} \nabla_A f \nabla_B f.
\end{aligned}$$

最后，我们得到的是

$$\int_{S^2} -\frac{1}{2} Y^1 C_{AB} (f) \nabla_A \nabla_B f = \int_{S^2} \frac{1}{2} \nabla^B Y^1 C_{AB} \nabla^B f + \frac{1}{2} Y^1 \left(\nabla^B C_{AB} + N_{AB} \nabla^B f \right) \nabla^A f.$$

□

A 对称无迹二阶张量的恒等式

引理 A.1. 设 σ 是 S^2上的高斯曲率为 1 的度量。设 T 是一个对称无迹二阶张量。则

$$\nabla_a T_{bc} + \nabla_b T_{ac} = 2 \nabla_c T_{ab} + 2 \nabla^d T_{cd} \sigma_{ab} - \nabla^d T_{ad} \sigma_{bc} - \nabla^d T_{bd} \sigma_{ac}.$$

证明。众所周知， T具有如下分解。

$$T_{ab} = \nabla_a \nabla_b h - \frac{1}{2} (\Delta h) \sigma_{ab} + \frac{1}{2} (\epsilon_{ad} \nabla_b \nabla^d f + \epsilon_{bd} \nabla_a \nabla^d f)$$

对于函数 h 和 f。证明见 [12] 的定理 B.2。

若 $T = \nabla_a\nabla_b h - \frac{1}{2}\Delta h\ \sigma_{ab}$ T_{ab} =( )，则该断言由 Ricci 恒等 $\frac{1}{2}\epsilon_{ad}\nabla_b\nabla^d f + \epsilon_{bd}\nabla_a\nabla^d f$ 1 [12] 式得出。若 ( )，则由 的命题 A. 推得

$$\nabla_a T_{bc} + \nabla_b T_{ac} - 2\nabla_c T_{ab} = -\frac{1}{2}\epsilon_{ac}\nabla_b(\Delta+2)f - \frac{1}{2}\epsilon_{bc}\nabla_a(\Delta+2)f.$$

另一方面，由关系式 $\sigma_{ab} = \frac{1}{2}(\epsilon_{ae}\epsilon_b{}^e + \epsilon_{be}\epsilon_a{}^e)$ 和 $\epsilon_{cd}\epsilon_{ae} = \sigma_{ca}\sigma_{de} - \sigma_{ce}\sigma_{da}$，可得

$$\begin{aligned}
&2\nabla^d T_{cd}\sigma_{ab} - \nabla^d T_{ad}\sigma_{bc} - \nabla^d T_{bd}\sigma_{ac} \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{cd}\nabla^d(\Delta+2)f\,(\epsilon_{ae}\epsilon_b{}^e + \epsilon_{be}\epsilon_a{}^e) - \frac{1}{2}\epsilon_{ad}\nabla^d(\Delta+2)f\sigma_{bc} - \frac{1}{2}\epsilon_{bd}\nabla^d(\Delta+2)f\sigma_{ac} \\
&= -\frac{1}{2}\epsilon_{ac}\nabla_b(\Delta+2)f - \frac{1}{2}\epsilon_{bc}\nabla_a(\Delta+2)f.
\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

以下结论是由这一事实推得的

$$T_{ad}S^d_b + T_{bd}S^d_a = T_{de}S^{de}\sigma_{ab} \tag{A.45}$$

对于曲面上的任意对称无迹二阶张量 T, S。

引理 A.2. 设 T 是对称无迹二阶张量， S 是对称二阶张量。则

$$(trS)T_{ab} - T_{ad}S^d_b - T_{bd}S^d_a = -T_{de}S^{de}\sigma_{ab}.$$

B 计算度规系数的一般方案

时空度规的形式为

$$\bar{g}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}d\bar{x}^{\bar{\alpha}}d\bar{x}^{\bar{\beta}},$$

其中 $\bar{\alpha}$、 $\bar{\beta} = \bar{u}$、 $\bar{r}$、 $\bar{x}^A$、 $A = 2$， 3。

用 (3.22) 中的 U、 V、 h_{AB}、 W^A 表示，我们有

$$\begin{aligned}
\bar{g}_{\bar{u}\bar{u}} &= -U(\bar{u},\bar{r},\bar{x})V(\bar{u},\bar{r},\bar{x}) + \bar{r}^2 h_{AB}(\bar{u},\bar{r},\bar{x})W^A(\bar{u},\bar{r},\bar{x})W^B(\bar{u},\bar{r},\bar{x}) \\
\bar{g}_{\bar{u}\bar{r}} &= -U(\bar{u},\bar{r},\bar{x}) \\
\bar{g}_{\bar{u}A} &= \bar{r}^2 h_{AB}(\bar{u},\bar{r},\bar{x})W^B(\bar{u},\bar{r},\bar{x}) \\
\bar{g}_{AB} &= \bar{r}^2 h_{AB}(\bar{u},\bar{r},\bar{x}).
\end{aligned}$$

U、 V、 h_{AB}、 W^A 的展开式意味着

$$\begin{aligned}
\bar{g}_{\bar{u}\bar{u}} &= \bar{g}^{(k)}_{\bar{u}\bar{u}}(\bar{u},\bar{x})\bar{r}^k \\
\bar{g}_{\bar{u}\bar{r}} &= \bar{g}^{(k)}_{\bar{u}\bar{r}}(\bar{u},\bar{x})\bar{r}^k \\
\bar{g}_{\bar{u}A} &= \bar{g}^{(k)}_{\bar{u}A}(\bar{u},\bar{x})\bar{r}^k \\
\bar{g}_{AB} &= \bar{g}^{(k)}_{AB}(\bar{u},\bar{x})\bar{r}^k
\end{aligned}$$

BMS 变换可写成关于 r^k 的展开式：

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \bar{u}^{(k)}(u,x)r^k, k = 0,-1,-2,\cdots \\ \bar{r} &= \bar{r}^{(k)}(u,x)r^k, k = 1,0,-1,-2,\cdots \\ \bar{x}^A &= \bar{x}^{A(k)}(u,x)r^k, k = 0,-1,-2,\cdots\end{aligned}$$

我们认为，可以利用上述展开式将其改写为

$$\bar{g}^{(k)}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(\bar{u},\bar{x})\bar{r}^k = g^{(k)}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(u,x)r^k,$$

其中，右侧完全由坐标变量 (u,r,x) 表示，特别是展开为 r^k 的形式。这是通过在 $r=\infty$ 附近作泰勒展开得到的。例如，对于函数 $h(\bar{u},\bar{x})$，我们得到：$h(\bar{u},\bar{x}) = h^{(0)}(u,x) + h^{(-1)}(u,x)r^{-1} + \cdots$，其中

$$h^{(0)}(u,x) = h(\bar{u}^{(0)}(u,x),\bar{x}^{(0)}(u,x))$$

and

$$h^{(-1)}(u,x) = \frac{\partial h}{\partial \bar{u}}(\bar{u}^{(0)}(u,x),\bar{x}^{(0)}(u,x))\bar{u}^{(-1)}(u,x) + \frac{\partial h}{\partial \bar{x}^A}(\bar{u}^{(0)}(u,x),\bar{x}^{(0)}(u,x))\bar{x}^{A(-1)}(u,x).$$

这就是 Section 4.1 中 $\bar{r}^2 h_{AB}$ 的第一个展开公式的推导方式。

C [7] 的附录 C.5

[7] 的附录 C.5 给出了质量和角动量方面在超平移下的变换公式。其方法是通过协变（逆）度量，更为自然。不过，角动量方面的公式中遗漏了若干项。我们重新梳理他们的论证，补充细节，并证明修正后的角动量方面变换公式与我们的定理 3.3 一致。为方便读者，方程编号沿用 [7] 中的编号。

设 $x = \frac{1}{r}$。协变（逆）度量的渐近形式为

$$g^{xx} = g(dx,dx) = x^4(1-2Mx) + O(x^6), \tag{C.102}$$

$$g^{xu} = g(dx,du) = x^2\left(1 + \frac{1}{16}x^2\chi^{AB}\chi_{AB}\right) + O(x^5), \tag{C.103}$$

$$g^{xA} = g(dx,dx^A) = x^4\left[-\frac{1}{2}\chi^{AB}{}_{\|B} + x(2N^A_{(CJK)} + B^A)\right] + O(x^6), \tag{C.104}$$

$$g^{BA} = g(dx^B,dx^A) = x^2\left[\breve{h}^{AB} - x\chi^{AB} + \frac{1}{2}x^2\chi^{AC}\chi^B{}_C\right] + O(x^5), \tag{C.105}$$

其中

$$B^A := \frac{1}{2}\chi^A{}_B\chi^{BC}{}_{\|C} + \frac{1}{16}(\chi^{CD}\chi_{CD})^{\|A}. \tag{C.106}$$

这里，$\breve{h}^{AB}$ 是 S^2 上单位度量的逆度量，我们据此升降指标；$\|A$ 表示关于 $\breve{h}$的协变导数。

我们考虑如下形式的坐标变换。

$$\bar{u} = u - \lambda + xu_1 + x^2u_2 + x^3u_3 + \cdots, \tag{C.107}$$
$$\bar{x} = x + x^2\rho_2 + x^3\rho_3 + \cdots, \tag{C.108}$$
$$\bar{x}^A = x^A + xx_1^A + x^2x_2^A + x^3x_3^A + \cdots, \tag{C.109}$$

保持 Bondi-Sachs 坐标的。

可以在[7] 的 (C.112)、(C.113)、(C.114)、(C.115) 中找到 (x_1^A, u_1)、(x_2^A, ρ_2) u_2、 ρ_3 的公式，以及剪切张量和质量方面的变换规则

$$\bar{\chi}_{AB} = \chi_{AB} - 2\lambda_{\|AB} + \breve{h}_{AB}\Delta\lambda, \tag{C.117}$$
$$\bar{M} = M + \frac{1}{2}\chi^{AB}{}_{,u\|B}\lambda_{\|A} + \frac{1}{4}\chi^{AB}{}_{,u}\lambda_{\|AB} + \frac{1}{4}\chi^{AB}{}_{,uu}\lambda_{\|A}\lambda_{\|B} \tag{C.119}$$

其中，$\bar{\chi}_{AB}$ 和 $\bar{M}$ 在 $(u-\lambda, x^A)$ 处取值，而右端的 Bondi 函数在 (u, x^A) 处取值。

为使坐标变换的系数与我们的系数一致，令 $g^{(-2)A} = x_2^A$，设置 $\lambda = -f$ 并使用带有 $\bar{\chi}_{AB} = C_{AB}$ 的 (C.117)。另一方面，由于超平移 (C.107) 是 (1.5) 的逆变换，为验证 Bondi 函数变换公式的一致性，只需将 (C.117) 和 (C.119) 与 (2.17) 及定理 3.1 进行比较，并假设 $\lambda = f$，即可看出 Bondi 函数的变换公式一致。

要获得角动量方面的变换，我们需要时间导数 $\dot{x}_3^A$。根据[7], 中的（C.112），我们有

$$d\bar{u} = (1 + x^2\dot{u}_2)du + u_1dx + (-\lambda_{\|B} + x\partial_Bu_1 + x^2\partial_Bu_2)dx^B + \cdots,$$
$$d\bar{x}^A = \left(\delta_C^A + x\partial_Cx_1^A + x^2\partial_Cx_2^A\right)dx^C + \left(x_1^A + 2xx_2^A + 3x^2x_3^A\right)dx + x^2\dot{x}_2^Adu + \cdots$$

而 $g(d\bar{u}, d\bar{x}^A)$ 的 x^4 项 $= 0$ 得到

$$\begin{aligned}
0 = {} & x_1^A \cdot \frac{1}{16}\chi^{BC}\chi_{BC} + 3x_3^A + x_1^A\dot{u}_2 \\
& + u_1\left(-\frac{1}{2}\chi^{AB}{}_{\|B} + x_1^A + \dot{x}_2^A\right) \\
& - \lambda_{\|B}\left(\frac{1}{2}\chi^{AC}\chi^B{}_C - \partial_Cx_1^A\chi^{BC} + \breve{h}^{BC}\partial_Cx_2^A\right) \\
& + \partial_Bu_1\left(-\chi^{AB} + \breve{h}^{BC}\partial_Cx_1^A\right) \\
& + \partial_Bu_2\breve{h}^{AB} + \frac{1}{2}\lambda^{\|A}x_1^B\chi_{BC}{}^{\|C}.
\end{aligned}$$

对 u 求导，并利用 [7], 中的 (C.112-C.114)，我们得到

$$\begin{aligned}\dot{x}_3^A = &-\frac{1}{12}\ddot{\chi}^{CB}\lambda_{\|C}\lambda_{\|B}\lambda^{\|A} - \frac{1}{12}\ddot{\chi}^{CA}\lambda_{\|C}\lambda_{\|B}\lambda^{\|B} - \frac{1}{12}\left(\dot{\chi}^{CB}\lambda_C\lambda_B\right)^{\|A}\\ &-\frac{1}{24}\chi_{CB}\dot{\chi}^{CB}\lambda^{\|A} - \frac{1}{6}\lambda_{\|C}\left(\lambda_{\|B}\dot{\chi}^{BA}\right)^{\|C} + \frac{1}{6}\lambda^{\|C}\left(\dot{\chi}_{CB}\chi^{BA} + \chi_{CB}\dot{\chi}^{BA}\right)\\ &-\frac{1}{3}\lambda^{\|C}\partial_B\left(\lambda^{\|A}\right)\dot{\chi}_C^{\ B} - \frac{1}{6}\left(\lambda_{\|C}\lambda^{\|C}\right)_{\|B}\dot{\chi}^{BA} - \frac{1}{6}\lambda_{\|C}\lambda^{\|A}\dot{\chi}^{BC}{}_{\|B}\\ &-\frac{1}{12}\lambda_{\|C}\lambda^{\|C}\dot{\chi}^{BA}{}_{\|B},\end{aligned}$$

(C修正形式 o C.116)

请注意，上述修正形式右侧的第四项与 (C.116) 原始形式右侧的第四项不同。

角动量方面的变换由 $g(d\bar{x}, d\bar{x}^A)$ 得到。从

$$d\bar{x} = (1+2\rho_2)dx + (x^2\partial_B\rho_2 + x^3\partial_B\rho_3)dx^B + x^3\dot{\rho}_3 du + \cdots,$$

根据 (C.102-C.105)，我们得到：

$$\begin{aligned}g(d\bar{x}, d\bar{x}^A) = x^4&\left(-\frac{1}{2}\chi^{AB}{}_{\|B} + \dot{x}_2^A + x_1^A + \rho_2{}^{\|A}\right)\\ &+ x^5\Big[-\rho_2\chi^{AB}{}_{\|B} + \partial_c x_1^A\left(-\frac{1}{2}\chi^{CB}{}_{\|B} + 2N^A + B^A\right)\\ &\quad + 2\rho_2\dot{x}_2^A + \dot{x}_3^A\\ &\quad + 2\rho_2 x_1^A + 2x_2^A - 2Mx_1^A\\ &\quad + \rho_3{}^A + \rho_2{}^B\partial_B x_1^A - \partial_B\rho_2\chi^{BA} + \dot{\rho}_3 x_1^A\Big] + \cdots.\end{aligned}$$

另一方面，我们根据 (C.107-C.109) 展开 $g(d\bar{x}, d\bar{x}^A) = \bar{x}^4(-\frac{1}{2}\bar{\nabla}_B\bar{\chi}^{AB}) + \bar{x}^5(2\bar{N}^A + \bar{B}^A)$（右侧在 $(\bar{u}, \bar{x}^A)$ 处求值），得到

$$\begin{aligned}g(d\bar{x}, d\bar{x}^A) = &\, x^4(-\frac{1}{2}\bar{\nabla}_B\bar{\chi}^{AB})\\ &+ x^5\left[4\rho_2(-\frac{1}{2}\bar{\nabla}_B\bar{\chi}^{AB}) + u_1\partial_{\bar{u}}(-\frac{1}{2}\bar{\nabla}_B\bar{\chi}^{AB}) + x_1^C\frac{\partial}{\partial\bar{x}^C}\right] + \cdots.\end{aligned}$$

因此，

$$\bar{\nabla}_B\bar{\chi}^{AB} = \chi^{AB}{}_{\|B} - 2\dot{x}_2^A - 2\rho_2{}^{\|A} - 2x_1^A \tag{C.118}$$

and

$$\begin{aligned}2\bar{N}^A + \bar{B}^A = &\, 2N^A + B^A - 2Mx_1^A - 4\rho_2\rho_2{}^{\|A} + \rho_2\chi^{AB}{}_{\|B} - 2\rho_2 x_1^A - 2\rho_2\dot{x}_2^A\\ &+ 2x_2^A - \frac{1}{2}\chi^{CB}{}_{\|C}x_1^A{}_{,B} + \dot{\rho}_3 x_1^A + \rho_3{}^{\|A} + \dot{x}_3^A - \rho_{2,B}\chi^{AB} + \rho_2{}^{,B}x_1^A{}_{,B}\\ &+ \frac{1}{2}\left[\left(u_1 + x_1^C\lambda_{\|C}\right)\partial_u + x_1^C\partial_C\right]\left(\chi^{AB}{}_{\|B} - 2\dot{x}_2^A - 2\rho_2{}^{\|A} - 2x_1^A\right)\end{aligned} \tag{C.120}$$

其中，等式左侧是在 $(u-\lambda, x^A)$ 处计算的。请注意，在推导 (C.120) 时，我们使用了

$$\partial_{\bar{u}}\bar{\nabla}_B\bar{\chi}^{AB} = \partial_u(\chi^{AB}{}_{\|B} - 2\dot{x}_2^A - 2\rho_2{}^{\|A} - 2x_1^A),$$
$$\partial_{\bar{u}}\bar{\nabla}_B\bar{\chi}^{AB}(-\lambda_{\|C}) + \frac{\partial}{\partial\bar{x}^C}\bar{\nabla}_B\bar{\chi}^{AB} = \partial_C(\chi^{AB}{}_{\|B} - 2\dot{x}_2^A - 2\rho_2{}^{\|A} - 2x_1^A),$$

对 (C.118) 求导后得到的这些式子，与 [7] 中的 (C.121) 等价。

由 [7], 中的 (C.122)，我们得到 $N^A_{(CJK)}$ 的修正变换公式：

$$\begin{aligned}
2\bar{N}^A_{(CJK)} = {} & 2N^A_{(CJK)} - 2M\lambda^{\|A} + \frac{1}{2}\lambda^{\|C}\chi^{AB}{}_{\|BC} - \frac{1}{2}\lambda^{\|C}\chi_{CB}{}^{\|BA} \\
& + \frac{1}{6}\lambda^{\|C}\dot{\chi}^{AB}\chi_{BC} - \frac{1}{12}\left(\dot{\chi}^{BC}\lambda_{\|B}\lambda_{\|C}\right)^{\|A} \\
& + \frac{1}{3}\lambda^{\|C}\dot{\chi}^{AB}{}_{\|C}\lambda_{\|B} + \frac{2}{3}\lambda^{\|C}\dot{\chi}_{CB}\lambda^{\|AB} - \frac{2}{3}\lambda^{\|A}\lambda_{\|C}\dot{\chi}^{BC}{}_{\|B} \\
& + \frac{1}{6}\lambda^{\|C}\lambda_{\|C}\dot{\chi}^{AB}{}_{\|B} - \frac{1}{6}\lambda^{\|A}\dot{\chi}^{CD}\chi_{CD} - \frac{1}{3}\lambda_{\|C}\dot{\chi}^{BC}\chi^A{}_B \\
& + \frac{1}{6}\lambda^{\|C}\lambda_{\|C}\ddot{\chi}^{AB}\lambda_{\|B} - \frac{1}{3}\lambda^{\|A}\lambda_{\|C}\ddot{\chi}^{BC}\lambda_{\|B} \\
& - \frac{1}{4}\left(\dot{\chi}^{BC}\lambda_{\|B}\lambda_{\|C}\right)^{\|A},
\end{aligned}$$

(C修正形式 (C.123))

请注意，上述 (C.123) 的修正形式与原形式在第一、第二和第五行存在差异；原形式 (C.123) 中遗漏了来自 $\rho_3{}^{\|A}$ 的最后一项（位于最后一行）。

利用恒等式 $\dot{\chi}^{AB}\chi_{BC} + \dot{\chi}_{CB}\chi^{BA} = \dot{\chi}^{BD}\chi_{BD}\delta^A_C$ 重写上述 (C.123) 修正形式中的项 $\frac{1}{6}\lambda^{\|C}\dot{\chi}^{AB}\chi_{BC}$，并利用引理 A.1 重写项 $\frac{1}{3}\lambda^{\|C}\dot{\chi}^{AB}{}_{\|C}\lambda_{\|B}$，公式变为

$$\begin{aligned}
2\bar{N}^A_{(CJK)} = {} & 2N^A_{(CJK)} - 2M\lambda^{\|A} + \frac{1}{2}\lambda^{\|C}\chi^{AB}{}_{\|BC} - \frac{1}{2}\lambda^{\|C}\chi_{CB}{}^{\|BA} \\
& - \frac{1}{2}\dot{\chi}^{BC}\chi^A{}_B\lambda_{\|C} - \cancel{\frac{1}{3}\left(\dot{\chi}^{BC}\lambda_{\|B}\lambda_{\|C}\right)^{\|A}} \\
& + \frac{1}{3}\left(\cancel{\dot{\chi}^{BC\|A}\lambda_{\|B}\lambda_{\|C}} + \dot{\chi}^{AB}{}_{\|B}\lambda_{\|C}\lambda^{\|C} - \dot{\chi}^{BC}{}_{\|B}\lambda_{\|C}\lambda^{\|A}\right) + \cancel{\frac{2}{3}\lambda^{\|C}\dot{\chi}_{CB}\lambda^{\|AB}} - \frac{2}{3}\lambda^{\|A}\lambda_{\|C}\dot{\chi}^{BC}{}_{\|B} \\
& + \frac{1}{6}\lambda^{\|C}\lambda_{\|C}\dot{\chi}^{AB}{}_{\|B} + \frac{1}{6}\lambda^{\|C}\lambda_{\|C}\ddot{\chi}^{AB}\lambda_{\|B} - \frac{1}{3}\lambda^{\|A}\lambda_{\|C}\ddot{\chi}^{BC}\lambda_{\|B},
\end{aligned}$$

其中三个划去的项相互抵消。比较 [7] 中的 (C.104) 与方程 (1.3)，我们得到 $N^A = -3N^A{}_{(CJK)}$。在方程 (1.9) 中，令 $K \equiv 1$ 并代入N^A与 $N^A{}_{(CJK)}$之间的关系，我们得到

$$\begin{aligned}
2\bar{N}^A_{(CJK)} = {} & 2N^A_{(CJK)} - 2M\lambda^{\|A} + \frac{1}{2}\lambda^{\|C}\chi^{AB}{}_{\|BC} - \frac{1}{2}\lambda^{\|C}\chi_{CB}{}^{\|BA} \\
& + \frac{1}{2}\dot{\chi}^{AB}{}_{\|B}\lambda_{\|C}\lambda^{\|C} - \frac{1}{2}\dot{\chi}^{BC}\chi^A{}_B\lambda_{\|C} - \frac{1}{3}\ddot{\chi}^{BC}\lambda_{\|B}\lambda_{\|C}\lambda^{\|A} \\
& - \dot{\chi}^{BC}{}_{\|C}\lambda_{\|B}\lambda^{\|A} + \frac{1}{6}\ddot{\chi}^A{}_B\lambda^{\|B}\lambda_{\|C}\lambda^{\|C}.
\end{aligned}$$

因此，(C.123) 的修正形式与我们的方程 (1.9) 一致。

作者谨此感谢 Jordan Keller 在本研究早期阶段所进行的讨论。P.-N. Chen 受到 NSF 项目 DMS-1308164 和西蒙斯基金会合作项目 #584785 的资助，M.-T. Wang 受到 NSF 项目 DMS-1810856 和 DMS-2104212 的资助，Y.-K. Wang 受到台湾科技部项目 107-2115-M-006-001-MY2、109-2628-M-006-001-MY3 的资助。作者谨此感谢国立台湾大学国家理论科学中心，本研究的部分工作即在此完成。本研究工作得到美国国家科学基金会项目 DMS-1810856 和 DMS-2104212（Mu-Tao Wang）的资助。

参考文献

[1] A. Ashtekar 和 M. Streubel，零无穷远处辐射模的辛几何与守恒荷，Proc. Roy. Soc. London Ser. A 376 (1981)，第 1767 期，585–607。Proc. R. Soc. A 376，585–607 (1981)。[2] H. Bondi、M. G. J. van der Burg 和 A. W. K. Metzner，广义相对论中的引力波。VII. 轴对称孤立系统发出的波，Proc. Roy. Soc. London Ser. A 269 (1962)，21–52。[3] P.-N. Chen、D. E. Paraizo、R. M. Wald、M.-T. Wang、Y.-K. Wang 和 S.-T. Yau，角动量定义关于截面的连续性，Classical Quantum Gravity 40 (2023)，第 2 期，论文编号 025007，共 11 页。[4] P.-N. Chen、M.-T. Wang、Y.-K. Wang 和 S.-T. Yau，无超平移歧义的 BMS 荷，Comm. Math. Phys. 393 (2022)，第 3 期，1411–1449。[5] P.-N. Chen、M.-T. Wang、Y.-K. Wang 和 S.-T. Yau，角动量的超平移不变性，Adv. Theor. Math. Phys. 25 (2021)，第 3 期，777–789。[6] P.-N. Chen、J. Keller、M.-T. Wang、Y.-K. Wang 和 S.-T. Yau，零无穷远处角动量与质心的演化，Comm. Math. Phys. 386 (2021)，第 1 期，551–588。[7] P. T. Chru´sciel、J. Jezierski 和 J. Kijowski，辐射区域中的哈密顿场论，Lecture Notes in Physics. Monographs，70，Springer，柏林，2002。[8] T. Dray，零无穷远处的动量通量，Classical Quantum Gravity 2 (1985)，第 1 期，L7–L10。[9] T. Dray 和 M. Streubel，零无穷远处的角动量，Classical Quantum Gravity 1 (1984)，第 1 期，15–26。[10] Flanagan 和 D. A. Nichols，扩展邦迪-梅茨纳-萨克斯代数的守恒荷，Phys. Rev. D 95 (2017)，第 4 期，044002，共 19 页。[11] R. P. Geroch，时空的渐近结构，载于《时空的渐近结构》（1976 年辛辛那提大学辛辛那提研讨会论文集），1–105，Plenum，纽约。

[12] J. Keller、Y.-K. Wang 和 S.-T. Yau，《在零无穷远处计算拟局部角动量和质心》，Adv. Theor. Math. Phys. 24 (2020)，第 6 期，1423–1473 页。[13] T. M¨adler 和 J. Winicour，《Bondi-Sachs 形式体系》，Scholarpedia，11 (12)：33528，2016。arXiv:1609.01731[14] R. K. Sachs，《广义相对论中的引力波。VIII. 渐近平坦时空中的波》，Proc. Roy. Soc. London Ser. A 270 (1962)，103–126 页。[15] R. K. Sachs，《引力理论中的渐近对称性》，Phys. Rev. (2) 128 (1962)，2851–2864 页。[16] W. T. Shaw，《零无穷远的辛几何与双曲面扭量》，Classical Quantum Gravity 1 (1984)，第 4 期，L33–L37 页。[17] M.-T. Wang，《未来零无穷远处的总质量与拟局部质量的极限》，载于《2018 年国际华人数学家联盟会议论文集》，89–102 页，Int. Press，波士顿，马萨诸塞州。[18]M.-T. Wang，《广义相对论中的角动量与超平移》，arXiv:2303.02424