曲面四边形分解

Kostiantyn Cherkashyn，基辅塔拉斯·舍甫琴科国立大学

2023年4月

arXiv:2305.04622v2 [math.GT] 3 Aug 2023

摘要

关于二维曲面上 Morse 函数及其梯度场（Morse场）的分类，有许多不同的方法。本文研究四边形的粘合，以及通过粘合四边形图的边而得到的拓扑曲面的分类。这些四边形图由梯度场上的轨线构成，其顶点为焦点临界点，中心处有一个鞍点，用于对鞍点和焦点型临界点进行分类。我们回顾与粘合相关的嵌入曲面的图、可能的粘合数量，以及一些基于基本多边形标记方案、可用于计算这些数量的算法。

1 引言

本文探讨拓扑图论在曲面上 Morse 流分类中的应用。在研究图在曲面上的嵌入时，既采用拓扑方法，也采用代数方法。其主要构造可追溯至 Peixoto 的研究，包括构造判别图，其顶点为源点，边为一维流形。

关于图的拓扑理论的经典著作包括书籍 [56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 73, 74, 76]。

闭曲面上流的拓扑不变量——嵌入图——在[7, 19, 23, 24, 25, 43, 1, 32, 35, 48, 33, 34, 41, 31], 中构造；而带边界曲面上的嵌入图则见于 [5, 8, 21, 20,35, 32, 28, 40, 25, 41, 44]。对于 3-流形，Heegaard图是曲面中的一个嵌入四价图 [49, 51, 39, 27, 29, 13, 4, 3]。

Morse流线是 Morse 函数的梯度流线。若固定函数在特殊点处的值，则流的结构决定了函数的结构 [22, 47]。

定向曲面上的函数的拓扑不变量（如 Reeb图）在[18] 和 [45] 中构造；非定向曲面上的相关结果见 [22] ，带边界曲面上的见 [10, 16, 17, 30] ，非紧曲面上的见 [38] 。

论文[6, 9, 17, 16, 38, 37, 42, 22, 27, 55, 50, 2, 46], 研究了作为光滑函数拓扑不变量的嵌入图，讨论了带边界流形；论文 [14, 17, 15],则研究了三维和四维流形上的情形，见 [36, 26]。

若想了解函数与动力系统的拓扑理论，我们推荐 [30, 52, 53, 54, 55]。

本文旨在研究通过粘合四边形的边而构造的拓扑曲面，这是一个经典问题的变体，该问题在许多不同的应用中都会出现：一个 2N 边形的边可以通过多少种方式两两粘合，从而得到某个特定的曲面？我们考虑完整和不完整的情形（即部分边对保持未粘合），包括可定向和不可定向的情形，但仅考虑连通曲面。本研究的重点是作用于标记方案的算法、标记方案的分类，以及二面体群 D_n作用下标记方案等价类的枚举。

类似问题的一般解法可见于 [81] ，其中对于闭可定向曲面，将基本多边形的旋转和反射视为不同的粘合方式。 [82]则给出了可定向曲面的解法，包括具有一个或多个边界分支的曲面；该解法将曲面旋转视为同一个等价类，但保留定向，即将多边形的反射对称性视为不同的嵌入图。

2 定义

设 X 为一个多边形区域，将粘合 X 的两条不同边 a 和 b，得到该多边形的一个商空间

$$X/\sim,\ g(x) \sim h(x)\ or\ g(x) \sim h(1-x), \quad x \in [0,1]$$

其中 g： $[0,1] \to X$ 是 X 中的一条路径，由边 a 上的所有点组成； h： $[0,1] \to X$ 是与边 b对应的一条路径。

两种等价关系 $g(x) \sim h(x)$ 和 $g(x) \sim h(1-x)$ 分别对应两种粘合两条边的可能方式，这可能产生可定向或不可定向的曲面。对于表示多边形边界的图 G 而言，这种粘合是图 G_f 的合并，其中 f 是一个图同构，将边 $a \leftrightarrow b$ 及其顶点 $a_1 \leftrightarrow b_1$ 和 $a_2 \leftrightarrow b_2$，或 $a_1 \leftrightarrow b_2$ 和 $a_2 \leftrightarrow b_1$ 1 进行映射。本文计算了以这种方式在相应曲面上生成的不同嵌入图的数量。

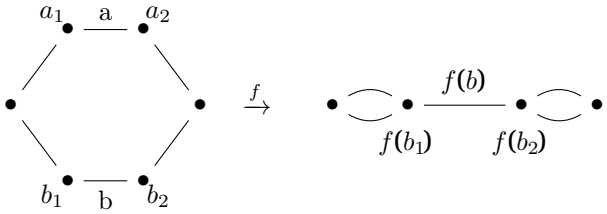
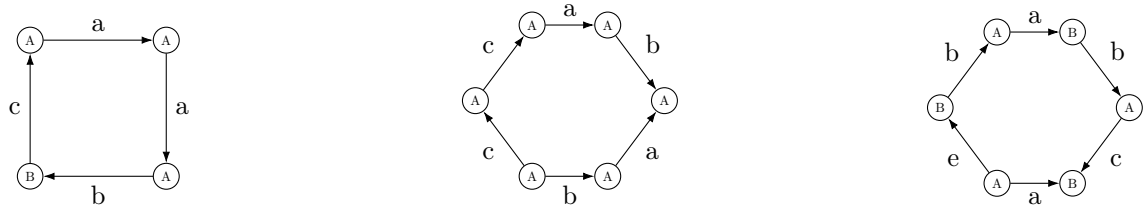


图1：图合并

这类粘合的一种常见且实用的表示方式是粘合方案：一个多边形，其边上标记有标签和定向，同一标签的边最多出现两次2。对于本文的目的，我们认为多边形的所有旋转和反射对称性都是等价的，即在群 D_{2n} 对 $2n$ 边形的所有作用下保持不变。



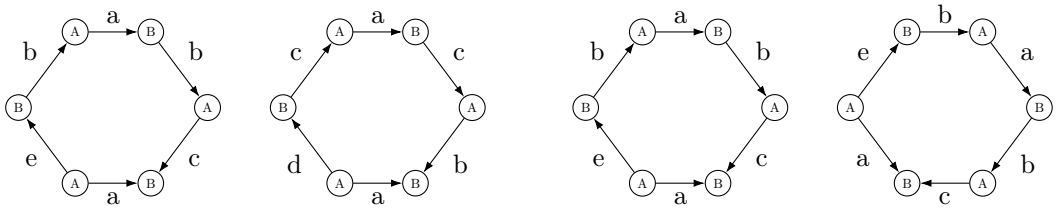
(a) $aabc$ (b) $aba^{-1}b^{-1}cc$ (c) $abca^{-1}eb$

图 2：粘合方案

粘合的另一种表示方式是一个标记方案：沿多边形的边界书写一个单词，从而为所有边进行标记。如果某条边 a 的方向与所选方向相反，则将其写为字母的逆元 a^{-1} 。如果同一个字母及其逆元同时出现在一个单词中，则表示相应边之间的粘合是不可定向的。一个字母及其逆元在单词中出现的次数不能超过两次。只出现一次的字母对应于自由边，即曲面的边界。

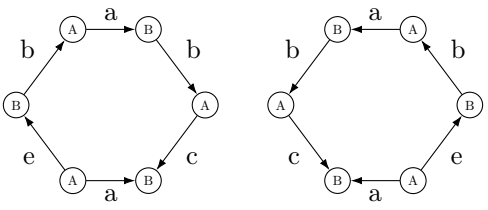
标记方案上定义了一些不会影响其生成曲面的操作。本文只使用其中一部分，即:

1. 重新标记：将单词中每个相同字母的所有出现形式替换为另一个字母，同时保持指数不变。也可以翻转某个给定字母的所有指数，例如，如果将 a 更改为a^{-1}，那么如果原本存在 a^{-1}，则必须将其更改为 a 3a。 2. 置换：对单词中的所有字母进行循环置换，例如， $aba^{-1}b^{-1}$ 可以更改为$ba^{-1}b^{-1}a$ 或 $a^{-1}b^{-1}ab$。如果我们固定空间中第一个边的位置，此操作对应于多边形的旋转 3b。 3. 翻转：反转单词的顺序，并翻转所有指数，例如， $aba^{-1}b^{-1}$ 翻转后变为 $bab^{-1}a^{-1}$。此操作对应于将多边形翻转，即反射对称性 3c。



(a) 重新标记

(b) 置换



(c) 翻转

3 曲面分类

曲面的分类是拓扑学中一个非常重要且经过深入研究的课题。对于闭曲面，这一问题由曲面分类定理加以概括。

设 S 是一个曲面。 S 与以下曲面中的且仅与其中一个同胚:

$$S^2 \# \underbrace{T\#T\#...\#T}_{n}, \quad n \geq 0$$

$$S^2 \# \underbrace{\mathbb{R}P^2\#\mathbb{R}P^2\#...\#\mathbb{R}P^2}_{m}, \quad m > 0$$

这个定理的证明在一定程度上可以在许多不同的教科书中找到，例如 [83]。上述曲面可以用标准标记方案表示:

$$S^2 \simeq aa^{-1}$$

$$\underbrace{T\#T\#...\#T}_{n} \simeq a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}...a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}$$

$$\underbrace{\mathbb{R}P^2\#\mathbb{R}P^2\#...\#\mathbb{R}P^2}_{m} \simeq a_1a_1a_2a_2...a_ma_m$$

为了补全对带边界曲面的定义，我们引入一些曲面的标记方案，其中某些字母只出现一次，且没有对应的逆元；这对应于移除了若干个圆盘的曲面，也就是说，具有若干个边界分支的曲面。

我们根据以下拓扑不变量对曲面进行分类:

1. 欧拉示性数 $\chi = V - E + F$，其中 E 是嵌入图的边数， V 是顶点数， F 是面数。对于可定向曲面，也可表示为 $\chi = 2 - 2G - B$；对于不可定向曲面，则可表示为 $\chi = 2 - G - B$，其中 G 是可定向曲面的亏格或不可定向曲面的半亏格， B 是边界分支数。

2. 可定向性：曲面的一种拓扑性质，可以粗略地定义为具有两侧（可定向）或仅具有一侧（不可定向）的曲面。如果一个曲面包含一个与莫比乌斯带同胚的子集，即具有一个交叉帽，则该曲面是不可定向的。如果标记方案包含两个具有相同指数的相同字母，则该标记方案属于不可定向类型。如果至少存在这样一组标记，则除可消去类型 aa^{-1} 外，其他每一组粘合对都会为曲面增加一个交叉帽，使其欧拉示性数减少一。

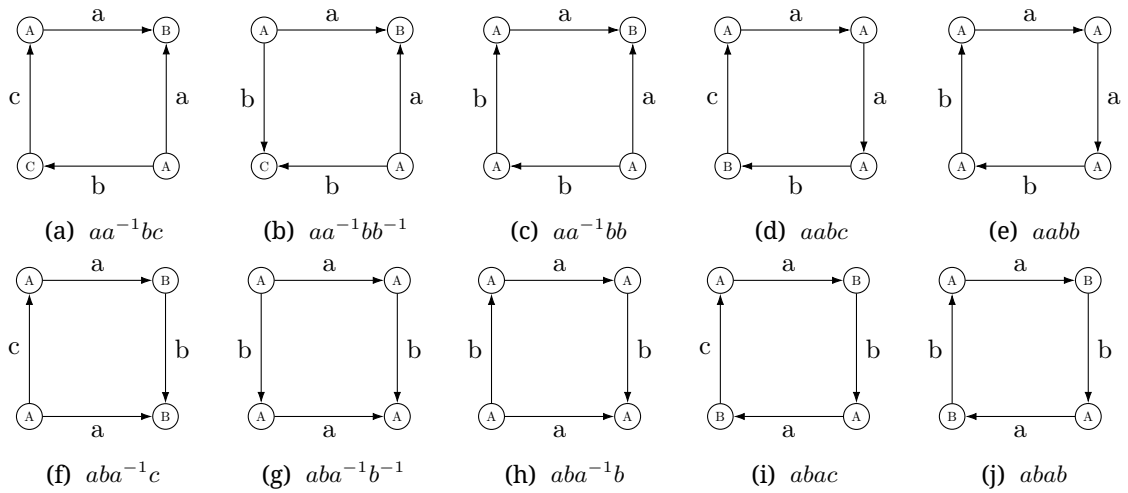
3. 边界分支的数量：具有 n 个边界分支的曲面同胚于挖去 n 个圆盘后的曲面。

以上列出的拓扑不变量可以用来确定曲面的拓扑类型，而且可以通过标记方案轻松推导出来。

4 嵌入图

在本文中，我们不仅对通过粘合多边形的边得到的曲面进行分类，还计算了用若干个四边形粘合这些曲面的多种方式。对于连通曲面，用 n 个四边形进行的粘合等价于用 $2n+2$ 边形进行的粘合，但这些粘合会在嵌入图中引入额外的边，这些边源自初始四边形的边界。

对于 $n=1$，这个问题很简单，所有粘合方式都可以轻松枚举 4。然而， $n>1$ 的情况并非如此。

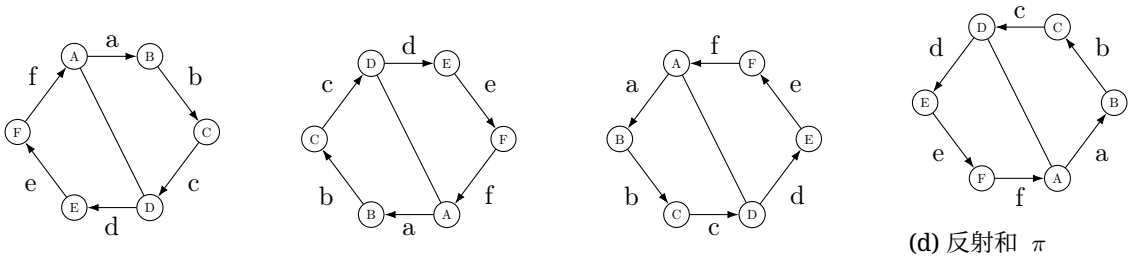


(a) $aa^{-1}bc$ (b) $aa^{-1}bb^{-1}$ (c) $aa^{-1}bb$ (d) $aabc$ (e) $aabb$

(f) $aba^{-1}c$ (g) $aba^{-1}b^{-1}$ (h) $aba^{-1}b$ (i) $abac$ (j) $abab$

图 4：所有四边形粘合方式

对于 $n=2$，由两个四边形粘合而成的六边形只有一种可能的构型。此外，该构型有 6 个可能的枢轴点和 4 种对称性，其中包括恒等映射 5。改变粘合构型的枢轴点相当于对多边形进行旋转。



(a) 恒等映射 (b) π 旋转 (c) 反射 (d) 反射和 π 旋转

图5：六边形粘合构型对称性

对于 $n=3$，由三个四边形粘合而成的八边形有两种可能的构型：6a 和 6b，每个四边形都由两条边组成。构型 6b 有 4 种对称性，而构型 6a 只有 2 种；每种构型都有 8 个可能的枢轴点。



（a）配置 1 （b）构型 2

图 6：八边形粘合构型

如果边位于不同的顶点之间，并且在所有将构型映射到同一枢轴点的对称性下，标记方案在重新标记后仍然不同，我们就认为这两种粘合是不同的。

5 算法

对于较小的 n，可以使用未经优化但易于实现的递归蛮力算法来解决该问题。下面简要介绍用于获得$n = 1$，2，3结果的算法。

首先，我们需要进行标准标记，以检查两个标记方案在重新标记后是否相等。

算法 1 重新标记

过程重新标记(w) ▷ 将标记方案 w 转换为其标准标记 w'
  $w' \leftarrow empty(w)$ ▷ 长度为 w 的空方案
  对于 i: $=1$ **到** $length(w)$ **执行**
    如果 $isset(w(i))$**则** ▷ i 处存在字母
      $continue$
    else
      $e \leftarrow nextLetter(w')$ ▷ 下一个不在 w' 中的字母
      $w'(i) \leftarrow e$
      如果 $occurrences\ (w,\ w\ (i)\ )\ > 1$ **那么**
        $j \leftarrow gluedIndex(w, i)$
        如果 $exponent(w(i)) = exponent(w(j))$ **那么**
          $w'(j) \leftarrow e$
        else
          $w'(j) \leftarrow inverse(w(e))$
        结束 if
      结束 if
    结束 if
  结束 for
  返回 w' ▷ 标准标记 w
结束过程

重新标记算法输入和输出的示例：

$$ba^{-1}cdc^{-1}d^{-1}b^{-1}a \mapsto abcdc^{-1}d^{-1}a^{-1}b^{-1}$$

$$a^{-1}b^{-1}ad^{-1}e^{-1}fg^{-1}f \mapsto aba^{-1}cdefe$$

算法 2 边粘合

过程 粘合$(w, i_1, i_2, orientable?)$ ▷ 粘合标记方案 w中指标 i_1 和 i_2 处的边
  $e \leftarrow w(i_1)$
  如果 $orientable? \ = true$ **则**
    $w(i_2) \leftarrow inverse(e)$
  else
    $w(i_2) \leftarrow e$
  结束 if
  $w \leftarrow relabel(w)$
  返回 w ▷ 在 i_1 处具有边并在 i_2 处粘合的标记方案
结束过程

顶点标记算法是利用标记方案 3 求出曲面欧拉示性数的关键部分。

算法 3 顶点标记

过程顶点(w) ▷ 获取 w 的顶点序列
    $V \leftarrow empty(w)$ ▷ 顶点空集合，与 w 大小相同
    函数 $updateEquivalence(eq, w, i)$
        对于 e： $adjacentEdges$（w， i）**执行**
            如果 $isGlued$（e）**则**
                $j \leftarrow gluedVertexIdx$（$e$， i）
                $addVertex$（eq， j）
                $eq \leftarrow updateEquivalence(eq, w, j)$ ▷ 粘合顶点的递归更新
            结束条件判断
        结束循环
        返回 eq
    结束函数
    对于i: $=1$ **到** $length(w)$ **执行**
        如果 $V(i)$ **则**
            $continue$
        结束 if
        $eq := set()$ ▷ 顶点索引的等价类
        $eq \leftarrow updateEquivalence(eq, w, i)$
        $V \leftarrow setVertices(V,\ eq)$▷将等价类中的索引设为下一个字母表字母，而不是 in V
    结束 for
    返回 V
结束过程

6 胶合方式的分类

对于 $n = 1$，我们有 7 种拓扑上不同的曲面：

χ	2	0	1	0	1	0	0
可定向	true	true	true	true	假	假	false
边界	0	0	1	2	0	0	1
n	1	1	1	1	2	2	2

对于 $n = 2$，我们有 11 种拓扑不同的结构；嵌入每个曲面的不同图的数量，是根据将两个四边形粘合成基本六边形的不同构型计算的。

χ	0	1	1	-1	2	-1	-1	0	0	-1	0
可定向	true	true	false	false	true	true	false	假	false	false	true
边界	0	1	0	1	0	1	2	1	0	0	2
n	5	9	10	15	3	5	7	22	14	8	10

对于 $n = 3$，我们有更多可能的粘合配置，以及 17 个非同胚曲面。

χ	-1	1	0	-1	1	0	0	-1	-2	-1	-2	2	-1	-2	0	-2	-2
o	t	f	f	f	t	t	t	f	f	t	f	t	f	f	f	t	t
b	3	0	0	2	1	2	0	0	0	1	2	0	1	1	1	0	2
n	19	59	145	219	65	113	43	197	47	122	95	16	451	256	263	4	25

7 结论

本文提出了一种对由 Morse 场（莫尔斯叶状结构）上的有界四边形区域构成的分类图进行分类的方法。这项工作的成果可应用于许多领域。例如，这类叶状结构由 Morse 流生成。

参考文献

[1] O. Akchurin、S. Bilun 和 A. Prishlyak。三色图作为 2-球面三角剖分的 1-骨架。*arXiv* 预印本 *arXiv:2209.05737*，2022年。doi:10.48550/ARXIV.2209.05737。[2] S. Bilun 和 A. Prishlyak。闭曲面上的闭 Morse 1-形式。塔拉斯·舍甫琴科基辅大学学报：数学与力学，2002(8):77–81，2002年。[3] S. Bilun 和 A. Prishlyak。3-球面图中含两个鞍点的 Morse 流的可视化。*arXiv* 预印本 *arXiv:2209.12174*，2022年。doi:10.48550/ARXIV.2209.12174。[4] S. Bilun、A. Prishlyak 和 A. Prus。3-流形边界上具有不动点的 Morse 流。*arXiv* 预印本 *arXiv:2209.04019*，2022年。doi:10.48550/arXiv.2209.04019。[5] S. Bilun、M. Hrechko、O. Myshnova、A. Prishlyak。曲面上具有一个或两个临界胞腔的最优离散梯度向量场结构。*arXiv* 预印本 *arXiv:2303.07258*，2023年。doi:10.48550/arXiv.2303.07258。[6] S. Bilun、A. Prishlyak、S. Stas、A. Vlasenko。射影平面上 Morse 函数的拓扑结构。*arXiv* 预印本 *arXiv:2303.03850*，2023年。doi:10.48550/arXiv.2303.03850。[7] S. Bilun、B. Hladysh、A. Prishlyak、V. Sinitsyn。2-球面上至多具有十个奇点的余维一梯度向量场。*arXiv* 预印本 *arXiv:2303.10929*，2023年。doi:10.48550/arXiv.2303.10929。[8]S. Bilun、M. Loseva、O. Myshnova、A. Prishlyak。带孔的 2-球面上至多具有六个奇点的梯度流的典型单参数分岔。*arXiv* 预印本 *arXiv:2303.14975*，2023年。doi:10.48550/arXiv.2303.14975。[9] S. Bilun、B. Hladysh、A. Prishlyak、M. Roman。浸入的 2-球面上具有四个临界点的 Morse 函数。*arXiv* 预印本 *arXiv:2304.04392*，2023年。doi:10.48550/arXiv.2304. 04392。[10] A.V. Bolsinov 和 A.T. Fomenko。可积哈密顿系统：几何、拓扑与分类。CRC 出版社公司，博卡拉顿、伦敦、纽约、华盛顿特区，2004年。724页。[11] M. Borodzik、A. N´emethi 和 A. Ranicki。带边界流形的 Morse 理论。代数与几何拓扑，16(2):971–1023，2016年。doi:10.2140/agt.2016.16.971。[12] M. Goresky 和 R. MacPherson。分层 *Morse* 理论。施普林格，1988年。doi:10.1007/978-3-642-71714-7。[13] C. Hatamian 和 A. Prishlyak。亏格 1 和亏格 2 的不可定向 3-流形上的 Heegaard 图与最优 Morse 流。国际几何中心论文集，13(3):33–48，2020 年。doi:10.15673/tmgc.v13i3.1779。[14] B. I. Hladysh 和 A. O. Pryshlyak。曲面边界上具有非退化临界点的函数。《乌克兰数学杂志》，68(1):29–41，2016年。doi:10.1007/s11253-016-1206-5。[15] B. I. Hladysh 和 A. O. Pryshlyak。带边界定向曲面上最优函数的一般位置变形。《乌克兰数学杂志》，71(8):1173– 1185，2020年。doi:10.1007/s11253-019-01706-8。[16] B.I. Hladysh 和 A.O. Prishlyak。2 维流形边界上具有孤立临界点的函数的拓扑。*SIGMA*。对称性、可积性与几何：方法与应用，13:050，2017年。doi:0.3842/SIGMA.2017.050。[17]B.I. Hladysh 和 A.O. Prishlyak。带边界定向曲面上的简单 Morse 函数。《数学物理、分析与几何杂志》，15(3):354–368，2019年。doi:10.15407/mag15.03.354。[18] A.S. Kronrod。二元函数。《俄罗斯数学综述》，5:24–134，1950年。[19] Z. Kybalko、A. Prishlyak 和 R. Shchurko。闭曲面上最优 Morse 流的轨道等价。国际几何中心论文集，11(1):12–26，2018年。doi:10.15673/tmgc.v11i1.916。

[20] M. Loseva、A. Prishlyak。女孩曲面上最优流的拓扑结构。《国际几何中心论文集》，15(3-4)：184–202，2022年。doi:10.15673/tmgc. v15i3-4.2338。[21]M. Losieva 和 A. Prishlyak。二维圆盘边界上带奇点的莫尔斯–斯梅尔流的拓扑。《国际几何中心论文集》，9(2)：32–41，2016年。doi:10.15673/tmgc.v9i2.279。[22] D.P. Lychak 和 A.O. Prishlyak。不可定向曲面上的 Morse 函数与流。《泛函分析与拓扑方法》，15(03)：251–258，2009年。[23] A.A. Oshemkov 和 V.V. Sharko。二维流形上莫尔斯–斯梅尔流的分类。《数学文集》，189(8)：93–140，1998年。[24] M.M. Peixoto。关于二维流形上的流的分类。《动力系统》（巴伊亚大学研讨会论文集，萨尔瓦多，巴西，1971年），1973年，第389–419页。[25] A.O. Prishlyak。关于嵌入曲面的图。《俄罗斯数学综述》，52(4)：844，1997年。doi:10.1070/RM1997v052n04ABEH002074。[26] A.O. Prishlyak。四维流形上 Morse 函数的共轭。《俄罗斯数学综述》，56(1)：170，2001年。[27] A.O. Prishlyak。流形上没有闭轨道的莫尔斯–斯梅尔向量场。《数学札记》，71(1-2)：230–235，2002年。doi:10.1023/A:1013963315626。[28] A.O. Prishlyak。分层集上带孤立不动点的流的指标之和。《数学物理、分析与几何杂志》 /《数学物理、分析与几何杂志》/, 10(1)：106–115，2003年。[29] A.O. Prishlyak。莫尔斯–斯梅尔流的完备拓扑不变量与三维流形的把手分解。《数学科学杂志》，144：4492–4499，2007年。[30] A.O. Prishlyak。二维和三维流形上函数的拓扑性质。Palmarium Academic Pablishing，2012年。[31] A. Prishlyak 和 L. Di Beo。博伊曲面上具有最少奇点数的流。《国际几何中心论文集》，15(1)：32–49，2020年。[32] A. Prishlyak 和 M. Loseva。女孩曲面上最优流的拓扑结构。《国际几何中心论文集》，15(3-4)：184–202，2022年。[33] A. Prishlyak、A. Prus 和 S. Huraka。球面上的集体动力学流。《国际几何中心论文集》，14(1)：61–80，2021年。doi:10.15673/tmgc.v14i1.1902。[34] A. Prishlyak 和 M. Loseva。闭可定向曲面上具有集体动力学的最优流的拓扑。《国际几何中心论文集》，13(2)：50–67，2020年。doi:10.15673/tmgc.v13i2.1731。[35] A. Prishlyak 和 A. Prus。带孔环面上的莫尔斯–斯梅尔流。《国际几何中心论文集》，10(1)：47–58，2017年。doi:10.15673/tmgc.v1i10.549。[36] A.O. Prishlyak。三维流形上 Morse 函数的等价性。《泛函分析与拓扑方法》，5(3)：49–53，1999年。[37] A.O. Prishlyak。取值于直线和圆上的曲面 Morse 函数的共轭。《乌克兰数学杂志》，52(10)：1623–1627，2000年。doi:10.1023/A: 1010461319703。[38] A.O. Prishlyak。平面上具有有限个奇点的 Morse 函数。《泛函分析与拓扑方法》，8：75–78，2002年。[39] A.O. Prishlyak。三维流形上带 beh2 的莫尔斯–斯梅尔向量场的拓扑等价性。《乌克兰数学杂志》，54(4)：603–612，2002年。[40] A.O. Prishlyak。带边界的二维和三维流形上 m-场的拓扑分类。《乌克兰数学杂志》，55(6)：966–973，2003年。

[41] A.O. Prishlyak 和 M.V. Loseva。曲面边界上带奇点的最优莫尔斯–斯梅尔流。《数学科学杂志》，243：279–286，2019年。[42] A.O. Prishlyak 和 K.I. Mischenko。带边界的非紧曲面分类。《泛函分析与拓扑方法》，13(01)：62–66，2007年。[43]A.O. Prishlyak 和 A.A. Prus。带边界紧曲面上的莫尔斯流三色图。《数学科学杂志》，249(4)：661–672，2020年。doi:10.1007/ s10958-020-04964-1。[44] A. Prishlyak 和 S. Stas。二维圆盘上具有唯一奇点的流的结构。arXiv 预印本 arXiv:2304.00751，2023年。doi:10.48550/ARXIV.2304.00751。[45] G. Reeb。关于完全可积 Pfaff 形式或数值函数的奇点。´《巴黎科学院报告》，222：847—849，1946年。´V.V. Sharko。流形上的函数：代数与拓扑方面。第131卷《数学专著译丛》。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛，1993年。´S. Smale。关于梯度动力系统。《数学年刊》，74：199–206，1961年。[46] В.М. Кузаконь、В.Ф. Кириченко 和 О.О. Пришляк。光滑流形：几何与拓扑方面。《乌克兰国家科学院数学研究所论文集》—2013年—97—500页，2013年。[47] А.О. Пришляк。三维流形上具有有限个特殊轨线的莫尔斯–斯梅尔向量场。《乌克兰国家科学院学报》，(6)：43–47，1998年。[48] А.О. Пришляк。Morse 函数的共轭性。《现代数学的一些问题》。乌克兰科学院数学研究所，基辅，1998年。[49] А.О. Пришляк。三维流形上 Morse–Smale 函数与向量场的拓扑等价性。《拓扑与几何：乌克兰数学大会论文集》，第29–38页，2001年。[50] О.О. Пришляк。Morse 理论。基辅大学，2002年。[51]О.О. Пришляк。微分几何。基辅大学，2004年。[52] О.О. Пришляк。现代拓扑学基础。基辅大学，2006年。[53] О.О. Пришляк。流形的拓扑。基辅大学，2015年。[54] P. Angelini、G. Da Lozzo、G. Di Battista、F. Frati、M. Patrignani 和 I. Rutter。图的线性面积绘图。《Algorithmica》，80(1)：174–197，2018年。doi:10.1007/s00453-017-0341-8。[55] K. Appel 和 W. Haken。每个平面图都是四色可着色的。I. 放电。《伊利诺伊数学杂志》，21(3)：429–490，1977年。doi:10.1215/ijm/1256049011。[56] J. Bang-Jensen 和 G. Gutin。有向图：理论、算法与应用。施普林格，2008年。doi:10.1007/978-1-84628-970-5。[57] B. Bollob’as。现代图论。《数学研究生教材》，第184卷。施普林格，1998年。doi:10.1007/978-1-4612-0619-4。[58] J.A. Bondy 和 U.S.R. Murty。图论。《数学研究生教材》，第244卷。施普林格，2008年。doi:10.1007/978-1-84628-970-5。[59] M. Chrobak 和 M.T. Goodrich。具有最优面积的平面正交绘图。《计算几何：理论与应用》，4(3)：195–204，1994年。doi:10.1016/0925-7721(94)90014-0。[60] R. Diestel。图论。《数学研究生教材》，第173卷。施普林格，2005年。doi:10.1007/978-3-662-48541-6。[61] M.B. Dillencourt、D.E. Knuth 和 M. Rosenstiehl。图布局问题。《SIAM 评论》，35(3)：315–347，1993年。doi:10.1137/1035095。

[64]D. Eppstein. 准平面图. 美国数学会汇刊, 351(12):5247–5275, 1999年. doi:10.1090/S0002-9947-99-02342-5.[65] C. Godsil and G. Royle. 代数图论. 数学研究生教材, 第207卷. 施普林格, 2001年. doi:10.1007/978-1-4757-3797-1.[66] J.L. Gross and T.W. Tucker. 拓扑图论. In L.W. Beineke and R.J. Wilson, editors, 拓扑图论专题, 数学及其应用百科全书第128卷, pages 1–101. 剑桥大学出版社, 1999年. doi:10.1017/ CBO9781139171329.[67] G. Liotta and H. Meijer. 超越伪三维：平面图绘制的新方向. In 国际图绘制与网络可视化研讨会第26届会议论文集, pages 317–331, 2018年. doi:10.1007/978-3-030-04414-5_26.[68] L. Lov'asz. 图论. 图论, 数学及其应用百科全书第2卷, pages 1–434. 剑桥大学出版社, 2001年. doi:10.1017/CBO9780511806291.[69] B. Mohar. 图的曲面嵌入. 组合理论杂志B辑, 51(2):150–163, 1991. doi:10.1016/0095-8956(91)90043-N.[70] B. Mohar. 曲面上的图. 约翰斯·霍普金斯大学出版社, 2001年.[71] B. Mohar. 细分后小亏格图的同构. 组合理论杂志B辑, 70(1):16–46, 1997. doi:10.1006/jctb.1997.1752.[72]B. Mohar. 图的拉普拉斯特征值的一些应用. In L.W. Beineke and R.J. Wilson, editors, 拓扑图论专题, 数学及其应用百科全书第128卷, pages 174–202. 剑桥大学出版社, 1999年. doi:10.1017/CBO9781139171329.[73] A. Neumann, D. Prestel, and A. Schulz. 拓扑图论. CRC 出版社, 2015.[74] J. Pach, R. Radoiˇci'c, and G. Toth. 图在曲面上的平面嵌入. 图与组合, 34(1):151–185, 2018年. doi:10.1007/s00373-017-1833-3.[75] N. Robertson, D.P. Sanders, P.D. Seymour, and R. Thomas. 四色定理. 组合理论杂志B辑, 70(1):2–44, 1997年. doi:10.1006/jctb.1997.1750.[76] C. Thomassen. 曲面上的图：对偶性、嵌入与刻画. 施普林格科学与商业媒体, 2009年.[77] C. Thomassen. 平面无环图. 组合理论杂志B辑, 62(1):180–187, 1994. doi:10.1006/jctb.1994.1078.[78] C. Thomassen. 有限图与无限图的平面性与对偶性. 组合理论杂志B辑, 41(3):291–319, 1986. doi:10.1016/0095-8956(86)90089-9.[79] W.T. Tutte. 关于图着色的代数理论. 组合理论杂志, 11(3):267–275, 1961. doi:10.1016/S0021-9800(61)80063-4.[80] D.B. West. 图论导论. 普伦蒂斯霍尔, 2001年.[81] J. Harer, D. Zagier 曲线模空间的欧拉示性数. 《数学发明》, 85(1):457–485, 1986. doi:10.1007/BF01390325[82] E. T. Akhmedov and Sh. Shakirov 带多边形边界曲面的粘合. arXiv预印本 arXiv:0712.2448, 2008 doi:10.48550/arXiv.0712.2448[83] C. Kosniowski 代数拓扑初步. 剑桥大学出版社, 1980