arXiv:2305.04624v1 [math.SP] 8 May 2023

加权零序列空间上 Rhaly 算子的谱性质及相关算子理想

ARNAB PATRA、JYOTI RANI 和 SANJAY KUMAR MAHTO

Abstract. 本文全面研究了 H. C. Rhaly, Jr. 引入的下三角阶梯矩阵在权有界且严格为正的加权零序列空间上的连续性、紧性和谱。文中还讨论了点谱、剩余谱和连续谱等若干谱分解。此外，本文利用 s-数的概念定义了与 Rhaly 算子在加权 c_0 空间上相关的一类新算子理想 $\chi_{c_0}^{(s)}(r)$，并证明在一定条件下，$\chi_{c_0}^{(s)}(r)$ 构成一个准巴拿赫闭算子理想。

1. Introduction

将实数或复数序列 $\{x_n\}$ 映射为其平均值序列 $\{\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\}$ 的线性映射 C，是众所周知的离散 Ces`aro 算子。关于定义在 $c_0$、$c$、$\ell_p$、$bv_p\,(1 \le p < \infty)$、$bv_0$ 等序列空间上的 $C$ 的连续性和谱，文献中已有大量研究 [19, 1, 8, 13,2, 17]。最近，Albanese 等人研究了定义在加权序列空间 [3, 4, 5] 上的 Ces`aro 算子的谱性质。此外，Ces`aro 算子的若干推广形式也得到了研究，例如 $p$–Ces`aro 算子 [20, 7]，离散广义 Ces`aro 算子 [21, 30, 31]、$q$–Ces`aro 算子 [28, 10, 11]，等。对于一个实数或复数序列 $a = \{a_n\}$，Rhaly [20] 引入了阶梯矩阵 R_a，也称为 Rhaly 矩阵，其中

$$R_a = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_2 & a_2 & 0 & 0 & \cdots \\ a_3 & a_3 & a_3 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

由上述矩阵表示的算子称为 Rhaly 算子。Ces`aro 算子 C 可通过取 $a_n = \frac{1}{n}$. Rhaly [20] 得到；$a_n = \frac{1}{n^p}$, $p \in \mathbb{R}$ 还考虑了 p-Cesaro 算子。许多研究者考察了定义在若干经典序列空间（如 c_0 [25, 27, 24], ℓ_p [26], bv_0 [29]等）上的 Rhaly 算子的谱。据我们所知，迄今尚无人研究加权序列空间上的 Rhaly 算子的谱性质。本文尝试在这一方向开展研究。本文旨在

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：47A10，47B37；次要分类：46B45。
Key words and phrases. Rhaly 算子，无限矩阵，精细谱，序列空间。

研究定义在加权零序列空间 $c_0(r)$ 上的 Rhaly 算子的连续性、紧性和谱，其中 $r = \{r_n\}$ 为权向量。此外，利用 s-数列的概念，我们引入一类与作用于加权 c_0 空间上的 Rhaly 算子 R_a 相关的新算子理想 $\chi_{c_0}^{(s)}(r)$。我们证明，在对数列 $a = \{a_n\}$作出某些假设的条件下，该类构成一个准巴拿赫闭算子理想。此外，还证明了算子理想之间的一种包含关系。

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍一些记号和若干有用的结果。第 3 节讨论定义在加权 c_0空间上的 Rhaly 算子的连续性、紧性以及各种谱细分。第 4 节引入一类新的算子理想 $\chi_{c_0}^{(s)}(r)$，并讨论其若干性质。

2. Preliminaries and Notations

本文中，所有无限序列和矩阵均以自然数集 $\mathbb{N}$. 为指标。设 $T: X \to Y$ 是一个有界线性算子，其中X 和 Y 是复巴拿赫空间。 T 的值域空间和 T的零空间分别记为 $R(T)$和 $N(T)$。 T的巴拿赫伴随记为T^*，它是一个有界线性算子 $T^*: Y^* \to X^*$，定义如下:

$$(T^*\phi)(x) = \phi(Tx) \quad \text{for all } \phi \in Y^* \text{ and } x \in X,$$

其中， X^* 和 Y^* 分别是 X 和 Y的对偶空间。 $\mathcal{B}(X,Y)$和$\mathcal{K}(X,Y)$分别表示从 X 到 Y的所有有界线性算子空间和所有紧算子构成的理想。若 $X = Y$，则 $\mathcal{B}(X,Y)$ 和 $\mathcal{K}(X,Y)$分别记作 $\mathcal{B}(X)$和 $\mathcal{K}(X)$。对于任意 $T \in \mathcal{B}(X)$，算子范数记作 $\|T\|$，而范数 $\|.\|_\infty$ 表示序列空间 c_0上的上确界范数。对于任意算子 $T \in \mathcal{B}(X)$， T的预解集是所有复数λ 构成的集合，其中算子 $T - \lambda I$ 在 X 上有有界逆， I 是 X. 上的恒等算子。 T的预解集记作 $\rho(T,X)$。复平面 $\mathbb{C}$ 中预解集的补集称为 T 的谱，记作 $\sigma(T,X)$。使得 $N(T-\lambda I) \neq \{0\}$ 的点 $\lambda \in \mathbb{C}$ 构成的集合称为 T 的点谱，记作 $\sigma_p(T,X)$。使得$N(T-\lambda I) = \{0\}$且 $R(T-\lambda I) = X$，但 $R(T-\lambda I) \neq X$的点 $\lambda \in \mathbb{C}$ 构成的集合称为 T 的连续谱，记作 $\sigma_c(T,X)$；使得$N(T-\lambda I) = \{0\}$ 且 $R(T-\lambda I) \neq X$的点 $\lambda \in \mathbb{C}$ 构成的集合称为T的剩余谱，记作 $\sigma_r(T,X)$。三个集合 $\sigma_p(T,X)$、$\sigma_c(T,X)$和 $\sigma_r(T,X)$彼此不相交，且其并集为整个谱 $\sigma(T,X)$。

令 $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 表示所有复数序列构成的空间。对于无限正实数序列 $r = \{r_k\}$，加权零序列空间 $c_0(r)$ 定义为

$$c_0(r) = \{\{x_k\} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \lim_{k\to\infty} r_k x_k = 0\}$$

赋予范数 $\|x\|_r = \sup_k |x_k| r_k$。若 D_r 是对角矩阵，且其第i个对角元为 r_i，那么，D_r 是从 $c_0(r)$ 到 c_0 的等距同构，因为$x = \{x_k\} \in c_0(r)$ 蕴含 $D_r x = \{x_k r_k\} \in c_0$，并且 $\|x\|_r = \|D_r x\|_\infty$. 因此， $\|x\|_r$在 $c_0(r)$ 上定义了一个范数，而 $(c_0(r)\ \|x\|_r)$ 在此范数下是一个巴拿赫空间。 $c_0(r)$ 的对偶空间与加权序列空间 $\ell_1(r^{-1})$ 线性等距，其中 $r^{-1} = \{\frac{1}{r_n}\}$. 。还需注意，若 $\inf_k r_k > 0$，则 $c_0(r) = c_0$，且这些范数等价。因此，我们关注 $\inf_k r_k = 0$. 的情形。

我们列出以下引理，它们在后文中很有用。

引理 2.1. [22] 矩阵 $A=(a_{nk})$ 当且仅当满足以下条件时，导出一个有界线性算子 $T\in\mathcal{B}(c_0)$,

(i) A 的行属于 ℓ_1，且其 ℓ_1 范数有界；(ii) A 的列属于 c_0。

T 的算子范数由各行的 ℓ_1 范数的上确界给出。

引理 2.2. [6, 定理 1] 对于两个权向量 $r=\{r_n\}$、$s=\{s_n\}$ 和一个无限矩阵 $A=(a_{nk})$，矩阵 $A\in\mathcal{B}(c_0(r)\ c_0(s))$ 当且仅当以下条件成立,

(i) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} s_n\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\frac{a_{nk}}{r_k}|<\infty$,
(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} s_k a_{nk}=0\ \forall\ k\in\mathbb{N}$.
那么，A 的范数为$\|A\|_{r,s}=$上确界$_{n\in\mathbb{N}}\ s_n\sum\limits_{k=1}|\frac{a_{nk}}{r_k}|$。

引理 2.3. [12, p. 59] 有界线性算子 $T\colon X\to Y$ 具有稠密值域，当且仅当 T^* 是单射。

3. Boundedness and compactness of R_a

设 $r=\{r_n\}$ 和 $s=\{s_n\}$ 是序列空间 $c_0(r)$ 和 $c_0(s)$ 的两个有界且严格正的权向量。对于任意算子 $T\colon c_0(r)\to c_0(s)$，其算子范数记为$\|T\|_{r,\ s}$ 若 T 定义在 $c_0(s)$ 到 $c_0(s)$ 上，则 $\|T\|_{r,\ s}=\|T\|_s$。下面的定理是引理 2.2 的直接推论。

定理 3.1. Rhaly 算子 $R_a\colon c_0(r)\to c_0(s)$ 有界，当且仅当

$$\left\{s_n a_n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{r_k}\right\}_{n\in\mathbb{N}}\in\ell_\infty,$$

且在此情形下，$\|R_a\|_{r,\ s}=\sup_n s_n|a_n|\sum\limits_{k=1}\frac{1}{r_k}$.

证明。由引理 2.2 可知，Rhaly 算子 R_a 是从 $c_0(r)$ 到 $c_0(s)$ 的有界线性算子，当且仅当

$$\sup_n s_n|a_n|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{r_k}<\infty\ \text{and}\ \lim_{n\to\infty}a_n s_n=0.$$

若 $\sup_n s_n|a_n|\sum\limits_{k=1}\frac{1}{r_k}<\infty$，则存在一个正实数 M，使得,

$$s_n|a_n|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{r_k}<M\ \ \text{for all}\ \ n\in\mathbb{N}. \tag{3.1}$$

由于 $r=\{r_k\}$ 是严格正实数构成的有界序列，因此存在一个实数 $M_1>0$，使得 $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{r_k}>n\frac{1}{M_1}.$$

最后，由（3.1）可得，

$$0 < s_n \left|a_n\right| < \frac{MM_1}{n} \quad \text{for all} \quad n \in \mathbb{N},$$

$_n$因此，$\lim_{n\to\infty} a_n s_n = 0$.。于是，$\sup_n s_n \left|a_n\right| \sum_{k=1} \frac{1}{r_k} < \infty$ 意味着$\lim_{n\to\infty} a_n s_n = 0$。此外，$\left\|R_a\right\|_{r,s}$ 的表达式可直接由引理 2.2 得出。□

定理3.2. Rhaly 算子 R_a： $c_0(r) \to c_0(s)$ 是紧算子，当且仅当

$$\left\{ s_n a_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{r_k} \right\}_{n\in\mathbb{N}} \in c_0.$$

证明。考虑线性算子 $T_{r,s}$： $\mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$，其定义为

$$T_{r,s}(x) = \left\{ a_n s_n \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{r_k} \right\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

那么 $D_s R_a = T_{r,\ s} D_r$ 因此 $R_a : c_0(r) \to c_0(s)$ 是紧映射，当且仅当 $T_{r,\ s} \in \mathcal{K}(c_0)$。令 $\left\{ a_n s_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{r_k} \right\}_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$。定义算子序列$\{T_{r,s}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$，其中 $T_{r\ s,\ }^{(k)}$： $c_0 \to c_0$ 且

$$T_{r,s}^{(k)}(x) = \left\{ a_1 s_1 \frac{x_1}{r_1}, a_2 s_2 \left(\frac{x_1}{r_1} + \frac{x_2}{r_2} \right), \cdots, a_k s_k \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i}{r_i}, 0, 0, \cdots \right\}.$$

对于每个 $k \in \mathbb{N}$，算子 $T_{r\ ,s}^{(k)}$ 是一个有限秩算子。现在

$$\left\| (T_{r,s} - T_{r,s}^{(k)})x \right\|_\infty = \sup_{n>k} \left|a_n\right| s_n \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{r_i} \le \left\|x\right\|_\infty \sup_{n>k} \left|a_n\right| s_n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i}.$$

因此

$$\left\| T_{r,s} - T_{r,s}^{(k)} \right\| \le \sup_{n>k} \left|a_n\right| s_n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i}.$$

$_n$由于 $a_n s_n \sum_{i=1} \frac{1}{r_i} \to 0$ 当 $n \to \infty$时，通过对上述关系两边取 $k \to \infty$，我们得到

$$\left\| T_{r,s} - T_{r,s}^{(k)} \right\| \to 0.$$

因此，算子序列 $\{T_{r,s}^{(k)}\}$ 在算子范数意义下收敛到 $T_{r,\ s}$，这意味着 $T_{r,\ s} \in \mathcal{K}(c_0)$。

对于逆向部分，我们采用与命题 2.2 [4] 中类似的方法。令R_a： $c_0(r) \to c_0(s)$ 是一个紧算子。这意味着 $T_{r,s} \in \mathcal{K}(c_0)$。这也意味着 $T_{r,s}(B_{c_0}[0,1])$ 是一个相对紧集，其中 $B_{c_0}[0,1]$ 表示 c_0. 中的闭单位球。因此，利用 [9, 第 15] 页的结果，存在一个序列$y = \{y_n\} \in c_0$ 使得

$$\left|(T_{r,s}(x))_n\right| \le \left|y_n\right| \quad \text{for all} \quad n \in \mathbb{N},\ x \in B_{c_0}[0,1].$$

由于 $y \in c_0$，对于每个 $\epsilon > 0$，都存在一个 $n_0 \in \mathbb{N}$，使得，

$$\left|(T_{r,s}(x))_n\right| < \epsilon \quad \text{for all} \quad n > n_0.$$

对于每个 $n \in \mathbb{N}$，考虑满足 $\{u_k^{(n)}\}_{k\in\mathbb{N}} \in B_{c_0}[0,1]$ 的序列 $\{u^{(n)}\}$，其中当 $k \in \{1,2,\cdots,n\}$ 时，$u_k^{(n)} = 1$，否则为 0。然后

$$\left|(T_{r,s}(u^{(n)}))_n\right| = s_n\,|a_n| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{r_k} < \epsilon \ \text{ for all } \ n > n_0.$$

因此，$\left\{a_n s_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{r_k}\right\}_n \in c_0$ 这就证明了该定理。

□

备注 3.3。下面列出关于上述结果的几点重要说明。

(a) 如果对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $r_n = s_n = 1$，那么加权序列空间 $c_0(r)$ 和 $c_0(s)$ 都退化为经典序列空间 c_0. 。在这种情况下，定理 3.1 得出，Rhaly 算子 R_a： $c_0 \to c_0$ 有界，当且仅当 $\{na_n\} \in \ell_\infty$. 。该结果由 Leibowitz [14] 在命题 3.2 中证明。(b) 由于 $|a_n| s_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{s_k} \geq |a_n|, \quad n \in \mathbb{N}$，因此 $R_a \in \mathcal{B}(c_0(s))$ 和 $R_a \in \mathcal{K}(c_0(s))$ 的一个必要条件分别是 $a_n \in \ell_\infty$ 和 $a_n \in c_0$ 。

设 $s = \{s_n\}$ 是一个递减的严格正实数序列。那么

$$s_n\,|a_n| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{s_k} \leq n\,|a_n|\,.$$

因此，当 $\{na_n\} \in \ell_\infty$ 时，$R_a \in \mathcal{B}(c_0(s))$；当 $\{na_n\} \in c_0$. 时，$R_a \in \mathcal{K}(c_0(s))$。另设 $\{e_n\}$ 是 $c_0(r)$ 中的一个序列，其第 n 项为 1，其余各项均为 0。那么对于 $n \in \mathbb{N}$,

$$\|R_a e_n\|_s = \sup_{k\geq n} s_k\,|a_k| \geq a_n s_n = |a_n|\,\|e_n\|_s\,.$$

由此得到以下推论。

推论 3.4. 设 $s = \{s_n\}$ 是一个有界、递减的严格正实数序列。那么，当 $\{na_n\} \in \ell_\infty$ 时，$R_a \in \mathcal{B}(c_0(s))$；当 $\{na_n\} \in c_0$. 时，$R_a \in \mathcal{K}(c_0(s))$。此外

$$\sup_n |a_n| \leq \|R_a\|_s \leq \sup_n n\,|a_n|\,.$$

以下例子表明，上述推论仅是一个充分条件。

例 3.5. 对于 $n \in \mathbb{N}$，令 $a_n = \quad {}^{1}\log(n+1)$, 且 $s_n = \frac{1}{2^n}$. 。那么 $s_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{s_k} = \frac{2^{n+1}-2}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$. 。因此

$$a_n s_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{s_k} = \frac{2^{n+1}-2}{2^n \log(n+1)} \to 0 \text{ as } n \to \infty.$$

这里，$\{s_n\}$ 是一个有界的严格递减序列，而 $\{na_n\}$ 无界，但$R_a \in \mathcal{K}(c_0(s))$.

4. Spectral properties of R_a

从现在起，设 $\{a_n\}$ 是一个正实数序列，使得 $\lim_{n\to\infty} na_n$ 存在且有限，并等于 $\chi \neq 0$ 和 $S = \{a_n : \ n \in \mathbb{N}\}$。以下引理（[29, 引理 2.7], [19, 引理 7]）在下文中很有用。

引理 4.1. 设 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus S$ 和 $\alpha = \Re\left(\frac{1}{\lambda}\right)$。则以下关系成立

$$\prod_{k=1}^{n} \left|1 - \frac{a_k}{\lambda}\right| \simeq \frac{1}{n^{\alpha\chi}},$$

其中，记号 $a_n \simeq b_n$ 表示序列 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 和 $\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\}$ 有界，且对于任意 $z \in \mathbb{C}$， $\Re(z)$ 表示 z. 的实部。

采用与 [19, 引理 7], 相似的概念，我们证明一个略作修改的结果。

引理 4.2. 对于固定的 $m \in \mathbb{N}$，令 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{a_k \colon k = m+1, m+2, \cdots\}$ 和 $\alpha = \Re(\frac{1}{\lambda})$。则以下关系成立。

$$\prod_{k=m+1}^{n} \left|1 - \frac{a_k}{\lambda}\right| \simeq \frac{1}{n^{\alpha\chi}}.$$

证明。设 $\frac{1}{\lambda} = \alpha + i\beta$，其中 α、 $\beta \in \mathbb{R}$，且 $\lim_{n\to\infty} n a_n = \chi$ 意味着 $a_n \simeq \frac{\chi}{n}$。仿照 [19] 中引理 7 的计算，并利用对所有 $x \in \mathbb{R}$ 都有 $e^x \geq 1 + x$ 这一事实，我们得到以下关系。

$$\prod_{k=m+1}^{n} \left|1 - \frac{a_k}{\lambda}\right| \leq \mathcal{O}(1) \exp \sum_{k=m+1}^{n} \left(-\frac{\chi}{k}\alpha + \frac{(\alpha^2+\beta^2)}{2}\frac{\chi^2}{k^2}\right). \tag{4.1}$$

现在我们使用以下不等式

$$\sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k} \geq \int_{m}^{n} \frac{1}{x+1} dx = \log(n+1) - \log(m+1) \geq \log n - \log(m+1).$$

因此，由（4.1）可推得

$$\prod_{k=m+1}^{n} \left|1 - \frac{a_k}{\lambda}\right| \leq \frac{\mathcal{O}(1)}{n^{\chi\alpha}}.$$

另外，注意到

$$\sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_{m-1}^{n-1} \frac{1}{x+1} dx = \log n - \log m.$$

利用上述不等式，可以用类似的方法证明

$$\prod_{k=m+1}^{n} \left|1 - \frac{a_k}{\lambda}\right|^{-1} \leq \mathcal{O}(1) n^{\chi\alpha}.$$

这就证明了该结果。 □

接下来我们推导 R_a的点谱。

定理 4.3. 设 $s = \{s_n\}$ 是一个有界、严格正序列，使得$R_a \in \mathcal{B}(c_0(s))$. 那么

$$\sigma_p(R_a, c_0(s)) = \{\lambda \in S : \lim_{n\to\infty} a_n s_n n^{\alpha\chi} = 0\}$$

其中 $\alpha = \Re\ (\frac{1}{\lambda})\ = \frac{1}{\lambda}$.

证明。考虑 $R_a x = \lambda x$ ，其中 $\lambda \in \mathbb{C}$ ，且 $x.$ 非零。这给出了以下方程组。

$$\left.\begin{aligned} a_1 x_1 &= \lambda x_1 \\ a_2(x_1 + x_2) &= \lambda x_2 \\ &\vdots \\ a_k(x_1 + x_2 + \cdots + x_k) &= \lambda x_k \\ &\vdots \end{aligned}\right\}. \tag{4.2}$$

如果 $\lambda \notin S$，那么由上述方程可得 $x_k = 0$，对于所有 $k \in \mathbb{N}.$ 均成立。因此，$\sigma_p(R_a, c_0(s))$ $\subseteq S$。元素 λ 属于 S，当且仅当对于某个非零的 $x = \{x_n\} \in c_0(s)$，$R_a x = \lambda x$ 成立时，它才属于 $\sigma_p(R_a, c_0(s))$。化简 $R_a x = \lambda x$，我们得到，

$$x_n = \prod_{j=m+1}^{n} \left(\frac{\lambda a_{j-1}^{-1}}{\lambda a_j^{-1} - 1} \right) x_m, \ n = m+1, m+2, \cdots, \tag{4.3}$$

其中， x_m 是 $\{x_n\}.$ 的第一个非零项。现在，我们将上述方程右端重新排列如下；

$$\begin{aligned} x_n = \prod_{j=m+1}^{n} \left(\frac{\lambda a_{j-1}^{-1}}{\lambda a_j^{-1} - 1} \right) x_m = \prod_{j=m+1}^{n} \left(\frac{a_j a_{j-1}^{-1}}{1 - \frac{a_j}{\lambda}} \right) x_m &= \frac{\prod_{j=m+1}^{n} a_j a_{j-1}^{-1}}{\prod_{j=m+1}^{n} \left(1 - \frac{a_j}{\lambda}\right)} x_m \\ &= \frac{\frac{a_n}{a_m}}{\prod_{j=m+1}^{n} \left(1 - \frac{a_j}{\lambda}\right)} x_m. \end{aligned}$$

由引理 4.2 可推得， $\lambda \in \sigma_p(R_a, c_0(s))$ 当且仅当

$$\lim_{n \to \infty} a_n s_n n^{\alpha\chi} = 0,$$

其中 $\alpha = \Re\ (\frac{1}{\lambda})\ = \frac{1}{\lambda}.$

□

备注 4.4. 这里我们提及一些与点谱相关的重要观察结果。

(i) 由于权向量 $s = \{s_n\}$ 是有界序列，并且对于任意满足 $\lambda > \chi$ 的 $\lambda \in S$，我们有 $a_n \simeq \frac{\chi}{n}$。

$$a_n n^{\alpha\chi} \simeq \chi n^{\alpha\chi - 1}$$

其中 $\alpha = \Re(\ \frac{1}{\lambda})\ = \frac{1}{\lambda}.$ 这证明了 $a_n s_n n^{\alpha\chi} \to 0$ 当 $n \to \infty$ 时，因此 $\lambda \in \sigma_p(R_a, c_0(s))$。关于这一点，我们有以下包含关系。

$$\{\lambda \in S : \lambda > \chi\} \subseteq \sigma_p(R_a, c_0(s)).$$

(ii) 设 $\lambda \in \sigma_p(R_a, c_0(s))$。那么，对于所有满足 $\lambda \leq \mu$ 的 $\mu \in S$，以下关系对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立。

$$a_n s_n n^{\frac{\chi}{\mu}} \leq a_n s_n n^{\frac{\chi}{\lambda}}.$$

这表明，对于所有 $\lambda \leq \mu.$， $\mu \in \sigma_p(R_a, c_0(s))$

(iii) 如果对于所有 $n \in \mathbb{N}$， $a_n = \frac{1}{n}$ 和 $s_n = 1$，那么 $\chi = 1$。在这种情况下，对于任意 $k \in \mathbb{N}$， $a_n s_n n^{\frac{\chi}{a_k}}$ 都不会收敛到零，因此 $\sigma_p(R_a, c_0(s)) = \emptyset$.。这反映了 Ces`aro 矩阵在 c_0 空间上的点谱情形，该结果由 Reade [19, 定理 1] 得到。

定理 4.5。设 $s = \{s_n\}$ 是一个有界严格正序列，使得 $R_a \in \mathcal{B}(c_0(s))$。则以下陈述成立

(i) $0 \notin \sigma_p(R_a^*, c_0(s)^*)$, （ii） $S \subseteq \sigma_p(R_a^*, c_0(s)^*)$,

（iii）设 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{S}.$，则当且仅当 $\lambda \in \sigma_p(R_a^*, c_0(s)^*)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{s_n n^{\alpha\chi}} < \infty,$$

其中 $\alpha = \Re(\frac{1}{\lambda})$。

证明。（i）设关系 $R_a^* x = 0$ 对某个 $x.$ 成立。这意味着对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $\sum_{k=n}^{\infty} a_k x_k = 0$, 最终我们得到对所有 $n \in \mathbb{N}.$ 都有 $x_n = 0$ 。这表明 $0 \notin \sigma_p(R_a^*, c_0(s)^*)$。

(ii) 考虑方程 $R_a^* x = \lambda x$，其中 $\lambda \in \mathbb{C}.$。由此得到以下方程组

$$\left.\begin{aligned} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + \cdots &= \lambda x_1 \\ a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + \cdots &= \lambda x_2 \\ a_3 x_3 + a_4 x_4 + \cdots &= \lambda x_3 \\ &\vdots \end{aligned}\right\}. \tag{4.4}$$

由上述方程组可知，对所有 $n \in \mathbb{N}$ 和 $n \geq 2$

$$x_n = \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 - \frac{a_j}{\lambda}\right) x_1. \tag{4.5}$$

若 $\lambda = a_l$，其中 $l \in \mathbb{N}$，则由上述方程可知

$$x_{l+1} = x_{l+2} = \cdots = 0.$$

因此 $\{x_k\} \in \ell_1\ (s^{-1})$ 。由此可得 $S \subseteq \sigma_p\ (R_a^*,\ c_0\ (s)\ ^*)$ 。

(iii) 现在令 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{S}$。那么 $R_a^* x = \lambda x$ 意味着方程 (4.5) 对 $\{x_n\}.$ 成立。接着利用引理 4.1，可得对 $n \in \mathbb{N}$,

$$|x_n| = \left| \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 - \frac{a_j}{\lambda}\right) x_1 \right| \simeq \frac{1}{n^{\alpha\chi}} |x_1|,$$

其中 $\alpha = \Re\ (\frac{1}{\lambda})$ 。因此， $\lambda \in \sigma_p\ (R_a^*,\ c_0\ (s)\ ^*)$ 当且仅当 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{s_n n^{\alpha\chi}} < \infty.$ □

注 4.6。以下事实用于推导下一个引理。对于 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 和固定的 $\chi > 0$，以下陈述成立

(i) $\left|\lambda - \frac{\chi}{2}\right| < \frac{\chi}{2}$ 当且仅当 $\Re\left(\frac{1}{\lambda}\right) > \frac{1}{\chi}$,

(ii) $\left|\lambda - \frac{\chi}{2}\right| = \frac{\chi}{2}$ 当且仅当 $\Re\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\chi}$,

(iii) $\left|\lambda - \frac{\chi}{2}\right| > \frac{\chi}{2}$ 当且仅当 $\Re\left(\frac{1}{\lambda}\right) < \frac{1}{\chi}$.

引理 4.7. 设 $s = \{s_n\}$ 为一个有界严格正序列，满足$R_a \in \mathcal{B}(c_0(s))$。那么

$$\sigma_p(R_a^*, c_0(s)^*) \subseteq \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \left|\lambda - \frac{\chi}{2}\right| < \frac{\chi}{2}\right\} \cup S.$$

证明。已证明，对于所有 $n \in \mathbb{N}.$， $a_n \in \sigma_p(R_a^*, c_0(s)^*)$。令 $\lambda \notin S$ 满足 $\lambda \in \sigma_p(R_a^*, c_0(s)^*)$。由定理 4.5 可得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{s_n n^{\alpha\chi}} < \infty$，其中 $\alpha = \Re(\frac{1}{\lambda})$。现在

$$\frac{1}{s_n n^{\alpha\chi}} \geq ||s||_\infty^{-1} \frac{1}{n^{\alpha\chi}}.$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$均成立。因此

$$\lambda \in \sigma_p(R_a^*, c_0(s)^*) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha\chi}} < \infty \Rightarrow \alpha\chi > 1,$$

因此， λ 满足 $\left|\lambda - \frac{\chi}{2}\right| < \frac{\chi}{2}.$。这就证明了该引理。 □

下一个结果给出了算子 R_a.的谱的一个估计

定理 4.8。设 $s = \{s_n\}$ 是一个有界的正实数递减序列，且满足 $R_a \in \mathcal{B}(c_0(s))$，则

$$\sigma(R_a, c_0(s)) \subseteq \left\{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \bar{S} : \left|\lambda - \frac{\chi}{2}\right| \leq \frac{\chi}{2}\right\} \cup \bar{S}.$$

证明。由定理 4.5 中的包含关系 (ii)，我们有 $S \subseteq \sigma_p(R_a^*, c_0(s)^*)$。此外，已知对于巴拿赫空间 X， $\sigma_p(T^*, X^*) \subseteq \sigma(T, X)$。因此，由于 $\sigma(R_a, c_0(s))$ 是 $\mathbb{C}.$ 的闭子集，我们有 $S \subseteq \sigma(R_a, c_0(s))$。于是对于 $\lambda \notin \overline{S}$，逆 $(R_a - \lambda I)^{-1}$ 存在，且其矩阵表示为

$$(R_a - \lambda I)^{-1} = (b_{nk}) = \begin{cases} \dfrac{1}{a_n - \lambda}, & n = k \\ \dfrac{-a_n}{\lambda^2 \prod\limits_{j=k}^{n} (1 - \frac{a_j}{\lambda})}, & 1 \leq k < n \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4.6}$$

由引理 2.2 可知，$(R_a - \lambda I)^{-1} = (b_{nk}) \in \mathcal{B}(c_0(s))$ 当且仅当以下两个条件均成立: $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} s_n \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{|b_{nk}|}{s_k} < \infty$，以及 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n |b_{nk}| = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$。令 $\lambda \in \left\{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \bar{S} : \left|\lambda - \frac{\chi}{2}\right| > \frac{\chi}{2}\right\}$。那么对于 $n \in \mathbb{N}$，我们有

$$\begin{aligned} s_n \sum_{k=1}^{n} \frac{|b_{nk}|}{s_k} &= s_n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{|b_{nk}|}{s_k} + |b_{nn}| \\ &= s_n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_n}{\left|\lambda^2 \prod\limits_{j=k}^{n} (1 - \frac{a_j}{\lambda})\right| s_k} + \left|\frac{1}{a_n - \lambda}\right|. \end{aligned} \tag{4.7}$$

此外，由于对所有实数 a，$\lim_{n\to\infty} \frac{n^a}{(n+1)_a} = 1$，由引理 4.2 可得

$$\frac{D_1}{(n+1)^{\alpha\chi}} \leq \prod_{k=1}^{n} \left|1 - \frac{a_k}{\lambda}\right| \leq \frac{D_2}{(n+1)^{\alpha\chi}}, \tag{4.8}$$

对于某些正常数 D_1 和 D_2，引理 4.2 和方程 (4.8) 一起意味着

$$M_1 a_n \frac{n^{\alpha\chi}}{k^{\alpha\chi}} \leq \frac{a_n}{\prod_{j=k}^{n} \left|1 - \frac{a_j}{\lambda}\right|} \leq M_2 a_n \frac{n^{\alpha\chi}}{k^{\alpha\chi}}, \tag{4.9}$$

对于某些正常数 M_1 和 M_2.，因此，将关系 (4.9)代入方程 (4.7)，可得 $n \in \mathbb{N}$

$$s_n \sum_{k=1}^{n} \frac{|b_{nk}|}{s_k} \quad \leq \quad M_2 \frac{s_n}{|\lambda|^2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_n n^{\alpha\chi}}{s_k k^{\alpha\chi}} + \frac{1}{d_\lambda},$$

¯其中 $d_\lambda = \text{dist}\,(\lambda, S)$。因此，我们有

$$\sup_n a_n s_n n^{\alpha\chi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{s_k k^{\alpha\chi}} < \infty \Rightarrow \sup_n s_n \sum_{k=1}^{n} \frac{|b_{nk}|}{s_k} < \infty.$$

由于 $\lambda \in \left\{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \bar{S} : \left|\lambda - \frac{\chi}{2}\right| > \frac{\chi}{2}\right\}$，这等价于 $\alpha\chi < 1$. 在这种情况下，对于 $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n n^{\alpha\chi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{s_n}{s_k k^{\alpha\chi}} \quad \leq \quad (na_n) n^{\alpha\chi - 1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^{\alpha\chi}} \leq D_1 n^{\alpha\chi - 1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^{\alpha\chi}} \tag{4.10}$$

对于某个正常数 D_1，因为 $\{na_n\}$ 是收敛数列，且 $\{s_n\}$ 是递减的。此外

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^{\alpha\chi}} \leq \int_0^{n-1} \frac{1}{x^{\alpha\chi}} dx = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_\epsilon^{n-1} \frac{1}{x^{\alpha\chi}} dx = \frac{(n-1)^{1-\alpha\chi}}{1 - \alpha\chi}.$$

上述不等式与（4.10）共同推出

$$\sup_n a_n s_n n^{\alpha\chi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{s_k k^{\alpha\chi}} < \infty.$$

此外，由（4.9）可知，对每个 $k \in \mathbb{N}$ 和充分大的 n

$$0 \leq s_n |b_{nk}| = \frac{s_n a_n}{\left|\lambda^2 \prod_{j=k}^{n} (1 - \frac{a_j}{\lambda})\right|} \leq M_2 a_n s_n \frac{n^{\alpha\chi}}{|\lambda|^2 k^{\alpha\chi}}.$$

因此 $\lim_{n\to\infty} a_n s_n n^{\alpha\chi} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n |b_{nk}| = 0$.

再次，由于 $\{na_n\}$ 和 $\{s_n\}$ 有界，对于某个正常数 D_2，当 $0 \leq a_n s_n n^{\alpha\chi} =$ 时，$0 \leq a_n s_n n^{\alpha\chi} = (na_n) s_n n^{\alpha\chi - 1} \leq D_2 n^{\alpha\chi - 1}$ 成立。这也证明了 $\lim_{n\to\infty} a_n s_n n^{\alpha\chi} = 0$。因此 $(R_a - \lambda I)^{-1}$ 存在，且 $(R_a - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{B}(c_0(s))$，从而 $\lambda \in \rho(R_a, c_0(s))$。最后，我们有

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \bar{S} : \left|\lambda - \frac{\chi}{2}\right| > \frac{\chi}{2}\right\} \subseteq \rho(R_a, c_0(s)).$$

这证明了该结果。

□

现在我们总结 Rhaly 算子在序列空间 $c_0(s)$ 上的谱和精细谱的所有结果。考虑以下集合。

$$A_1 = \left\{\lambda \in S : \lim_{n\to\infty} a_n s_n n^{\alpha\chi} = 0\right\},$$
$$A_2 = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \setminus (S \cup \{0\}) : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{s_n n^{\alpha\chi}} < \infty\right\},$$

其中 $\alpha = \Re\left(\frac{1}{\lambda}\right)$。在这种情形下，我们有以下结果。

定理 4.9. 设 $\{s_n\}$ 是一个有界且严格正的序列，使得 $R_a \in \mathcal{B}(c_0(s))$，并且 $\lim_{n\to\infty} na_n = \chi \neq 0$，则以下结论成立。

(i) $\sigma_p(R_a, c_0(s)) = A_1$, (ii) $\sigma_p(R_a^*, c_0(s)^*) = A_2 \cup S$,

(iii) $\sigma_r(R_a, c_0(s)) = (A_2 \cup S) \setminus A_1 = A_2 \cup (S \setminus A_1)$。

此外，如果序列 $\{s_n\}$ 是递减序列，那么

(iv) $\sigma(R_a, c_0(s)) \subseteq \left\{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \bar{S} : \left|\lambda - \frac{\chi}{2}\right| \leq \frac{\chi}{2}\right\} \cup \bar{S}$,

(v) $\{0\} \subseteq \sigma_c(R_a, c_0(s)) \subseteq \left(\left\{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \bar{S} : \left|\lambda - \frac{\chi}{2}\right| \leq \frac{\chi}{2}\right\} \cup \bar{S}\right) \setminus (A_2 \cup S)$.

证明。关系 (i) 和 (ii) 分别是定理 4.3 和定理 4.5 的直接推论。此外，由引理 2.3 可得 $\sigma_r(R_a, c_0(s)) = \sigma_p(R_a^*, c_0(s)^*) \setminus \sigma_p(R_a, c_0(s))$，由此得到 (iii) 中 $\sigma_r(R_a, c_0(s))$ 的表达式。关系 (iv) 由定理 4.8 得出。(v) 中的第一个包含关系由定理 4.3 和定理 4.5(i) 得出，而 (v) 中的另一个包含关系则由以下事实得出： $\sigma_p(R_a, c_0(s))$ $\sigma_r(R_a, c_0(s))$ 和 $\sigma_c(R_a, c_0(s))$ 构成 $\sigma(R_a, c_0(s))$. □ 的一个划分

5. Operator Ideal

算子理想理论在泛函分析中占有独特地位，因为它在谱理论、Banach 空间几何、特征值分布理论等领域有诸多应用。许多研究者针对作用于序列空间上的算子，发展出了相应的算子理想类 [15, 16, 23]。本节借助 s-数列引入一种新的算子理想类，并讨论其性质。设 X、 Y、 Z、 X_0 和 Y_0 为巴拿赫空间， $\mathcal{B}$ 表示任意一对巴拿赫空间之间所有有界线性算子构成的类， X' 表示 X 的对偶空间， x' 表示 X 上的连续线性泛函。序列 $r = \{r_n\}$、 $t = \{t_n\}$ 和 $u = \{u_n\}$ 分别是序列空间 $c_0(r)$、 $c_0(t)$ 和 $c_0(u)$ 对应的权向量。设 $x' \in X'$ 和 $y \in Y$，则映射 $(x' \otimes y)$: $X \to Y$ 定义为 $(x' \otimes y)(x) = x'(x)y$， $x \in X$。在继续之前，我们先列出一些已知定义和结果，它们是得出本文结果所必需的。

定义 5.1. [18, p.79] 若映射 s： $\mathcal{B} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 将每个算子 $\phi \in \mathcal{B}$对应到一个非负序列 $\{s_n(\phi)\}$，并满足以下性质，则称其为 s-数序列:

(i) $\|\phi\| = s_1(\phi) \geq s_2(\phi) \geq \cdots \geq 0$ 当 $\phi \in \mathcal{B}(X, Y)$ 时，(ii) $s_{m+n-1}(\phi + \psi) \leq s_m(\phi) + s_n(\psi)$ 当 $\phi, \psi \in \mathcal{B}(X, Y)$ 时，(iii) $s_n(\zeta\phi\eta) \leq \|\zeta\| s_n(\phi) \|\eta\|$ 当 $\zeta \in \mathcal{B}(Y, Y_0)$, $\phi \in \mathcal{B}(X, Y)$, $\eta \in \mathcal{B}(X_0, X)$ 时，(iv) 如果 rank$(\phi) < n$，那么 $s_n(\phi) = 0$,

(v) $s_n(I_2 : \ell_2^{(i)} \to \ell_2^{(i)}) = 1$，其中 I_2 表示i维希尔伯特空间 $\ell_2^{(i)}$ 上的恒等算子。

我们将 $s_n(\phi)$ 称为算子 ϕ的第 n 个 s-数。

定义 5.2。 [18, p.25] 对于 $\mathcal{B}(X,Y)$ 的子集 $\mathcal{A}(X,Y)$，类 $\mathcal{A} = \cup_{X,Y}\mathcal{A}(X,Y)$ 被称为算子理想，当且仅当每个分量 $\mathcal{A}(X,Y)$ 满足以下条件：

(i) 对于 $x' \in X'$ 和 $y \in Y$，$x' \otimes y \in \mathcal{A}(X,Y)$；(ii) 对于 ϕ，$\phi + \psi \in \mathcal{A}(X,Y)$，$\psi \in \mathcal{A}(X,Y)$；(iii) 对于 $\eta \in \mathcal{B}(X_0,X)$、$\phi \in \mathcal{A}(X,Y)$、$\zeta \in \mathcal{B}(Y,Y_0)$，$\zeta\phi\eta \in \mathcal{A}(X_0,Y_0)$。

定义 5.3。 [18, p.25] 函数 $\Gamma : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$ 为每个算子$\phi \in \mathcal{A}$ 赋予一个非负数 $\Gamma(\phi)$，若其满足以下性质，则称为算子理想 $\mathcal{A}$ 上的拟范数：

(i) $\Gamma(x' \otimes y) = \|x'\|\|y\|$ 对于 $x' \in X'$ 和 $y \in Y$，(ii) $\Gamma(\phi+\psi) \le c(\Gamma(\phi) + \Gamma(\psi))$ 对于 $\phi,\psi \in \mathcal{A}(X,Y)$，其中 $c \ge 1$ 为常数，(iii) $\Gamma(\zeta\phi\eta) \le \|\zeta\|\Gamma(\phi)\|\eta\|$ 对于 $\eta \in \mathcal{B}(X_0,X)$ $\phi \in \mathcal{A}(X,Y)$ $\zeta \in \mathcal{B}(Y,Y_0)$。

定义 5.4。 [18, p.81] 如果 s 数 s 满足可乘性，则称其为可乘的

$$s_{m+n-1}(\phi\psi) \le s_m(\phi)s_n(\psi) \text{ for } \psi \in \mathcal{L}(X,Y) \text{ and } \phi \in \mathcal{L}(Y,Z).$$

定义 5.5。 [18, p.26] 如果算子理想 $\mathcal{A}$ 的所有分量 $\mathcal{A}(X,Y)$ 都是 $\mathcal{B}(X,Y)$ 的闭线性子集，则称其为闭的。

下面的引理在此背景下很有用。

引理 5.6。 [18, p.80] 如果 $\phi,\psi \in \mathcal{B}(X,Y)$，则 $|s_i(\phi) - s_i(\psi)| \le \|\phi - \psi\|$, $i \in \mathbb{N}$.

现在我们定义与 Rhaly 算子 R_a 相关联的序列空间 $\chi_{c_0(r)}$ 如下

$$\chi_{c_0(r)} = \{v \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : R_a(v) \in c_0(r)\}.$$

Thus

$$\chi_{c_0(r)} = \left\{ v \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \lim_{i\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{i} a_i v_j \right) r_i = 0 \right\}.$$

如果算子 $\phi \in \mathcal{B}(X,Y)$ 是 s-型 $\chi_{c_0(r)}$ 算子，则称之为

$$\lim_{i\to\infty} \left(a_i \sum_{j=1}^{i} s_j(\phi) \right) r_i = 0$$

我们用 $\chi_{c_0}^{(s)}(r)$ 表示所有 s-型 $\chi_{c_0(r)}$ 算子组成的类，即

$$\chi_{c_0(r)}^{(s)} = \left\{ \phi \in \mathcal{B} : \lim_{i\to\infty} \left(a_i \sum_{j=1}^{i} s_j(\phi) \right) r_i = 0 \right\}.$$

如果 $\phi \in \mathcal{B}(X,Y)$，那么

$$\chi_{c_0(r)}^{(s)}(X,Y) = \left\{ \phi \in \mathcal{B}(X,Y) : \lim_{i\to\infty} \left(a_i \sum_{j=1}^{i} s_j(\phi) \right) r_i = 0 \right\}.$$

引理 5.7. 若对所有 n， $r_n \le t_n$，则 $\chi_{c_0}^{(s)}{}_t() \subseteq \chi_{c_0}^{(s)}(r)$。

证明。假设 $\phi \in \chi_{c_0}^{(s)}{}_{t()}$，则

$$\lim_{i\to\infty}\left(a_i\sum_{j=1}^{i}s_j(\phi)\right)t_i=0$$

Now,

$$\lim_{i\to\infty}\left(a_i\sum_{j=1}^{i}s_j(\phi)\right)r_i\leq\lim_{i\to\infty}\left(a_i\sum_{j=1}^{i}s_j(\phi)\right)t_i=0$$

因此 $\phi \in \chi_{c_0}^{(s)}{}_{(r)}$。 □

定理 5.8。以下陈述成立,

(i) $\chi_{c_0}^{(s)}{}_{(r)}$ 是算子理想，当 $\{a_n\} \in c_0(r)$ 时;

(ii) $\chi_{c_0}^{(s)}{}_{(r)}$ 是闭算子理想，当 $\{na_n\} \in c_0(r)$ 时。

证明。(i) 设 X 和 Y 是任意两个巴拿赫空间。设 $x' \in X'$ 和 $y \in Y$。则$x' \otimes y$ 是一个秩一算子，因此对所有 $i \geq 2$, $s_i(x' \otimes y) = 0$。考虑,

$$\begin{aligned}\lim_{i\to\infty}\left(a_i\sum_{j=1}^{i}s_j(x'\otimes y)\right)r_i&=\lim_{i\to\infty}a_is_1(x'\otimes y)r_i\\&=\|x'\otimes y\|\lim_{i\to\infty}a_ir_i\\&=0.\end{aligned}$$

因此，$(x' \otimes y) \in \chi_{c_0}^{(s)}{}_{(r)}(X, Y)$。

假设 $\phi, \psi \in \chi_{c_0}^{(s)}{}_{(r)}(X, Y)$。利用 s-数的性质，我们有

$$\begin{aligned}\lim_{i\to\infty}a_i\left(\sum_{j=1}^{i}s_j(\phi+\psi)\right)r_i&=\lim_{i\to\infty}\left(a_i\left(\sum_{j=1}^{i}s_{2j-1}(\phi+\psi)+\sum_{j=1}^{i}s_{2j}(\phi+\psi)\right)\right)r_i\\&\leq\lim_{i\to\infty}\left(a_i\left(\sum_{j=1}^{i}s_{2j-1}(\phi+\psi)+\sum_{j=1}^{i}s_{2j-1}(\phi+\psi)\right)\right)r_i\\&=2\lim_{l\to\infty}a_i\left(\sum_{j=1}^{i}s_{2j-1}(\phi+\psi)\right)r_i\\&\leq 2a_i\lim_{i\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{i}(s_j(\phi)+s_j(\psi))\right)r_i\\&=2\lim_{i\to\infty}a_i\left(\sum_{j=1}^{i}s_j(\phi)\right)r_i+2\lim_{i\to\infty}a_ia_n\left(\sum_{j=1}^{i}s_j(\psi)\right)r_i\\&=0.\end{aligned}$$

这意味着，$\lim_{i\to\infty} a_i \left(\sum_{j=1}^{i} s_j(\phi+\psi)\right) r_i = 0$。因此，$\phi+\psi \in \chi_{c_0}^{(s)}{}_{(r)}(X$ $Y)$.

设 $\zeta \in \mathcal{B}(Y,Y_0)$ $\eta \in \mathcal{B}(X_0,X)$ 且 $\phi \in \chi_{c_0}^{(s)}{}_{(r)}(X,Y)$。那么

$$\lim_{i\to\infty} a_i \left(\sum_{j=1}^{i} s_j(\zeta\phi\eta)\right) r_i = \|\zeta\|\|\eta\| \lim_{i\to\infty} a_i \left(\sum_{j=1}^{i} s_j(\phi)\right) r_i = 0.$$

因此，$\zeta\phi\eta \in \chi_{c_0}^{(s)}{}_{(r)}(X_0,Y_0)$。由此可知，$\chi_{c_0}^{(s)}{}_{(r)}$ 是一个算子理想。

(ii) 设 $\{\phi_k\}$ 是 $\chi_{c_0}^{(s)}{}_{(r)}(X,Y)$ 中任意一个序列，它关于算子范数收敛到 $\phi \in \mathcal{B}(X,Y)$。给定 $\epsilon>0$，我们可以固定 $k_0 \in \mathbb{N}$，使得

$$\|\phi-\phi_k\| \le \epsilon \text{ for } k \ge k_0.$$

Now,

$$\begin{aligned}
\lim_{i\to\infty} \left(a_i \sum_{j=1}^{i} s_j(\phi)\right) r_i &= \lim_{i\to\infty} \left(a_i \sum_{j=1}^{i} s_j(\phi-\phi_k+\phi_k)\right) r_i \\
&\le \lim_{i\to\infty} \left(a_i \sum_{j=1}^{i} s_1(\phi-\phi_k)\right) r_i + \lim_{i\to\infty} \left(a_i \sum_{j=1}^{i} s_j(\phi_k)\right) r_i \\
&= \|\phi-\phi_k\| \lim_{i\to\infty} i a_i r_i + \lim_{i\to\infty} \left(a_i \sum_{j=1}^{i} s_j(\phi_k)\right) r_i \\
&= 0.
\end{aligned}$$

因此，$\phi \in \chi_{c_0}^{(s)}{}_{(r)}(X,Y)$ 当 $\lim_{i\to\infty} \left(a_i \sum_{j=1}^{i} s_j(\phi)\right) r_i = 0$。所需结果得证。

□

定义映射 $Q^{(s)}: \chi_{c_0}^{(s)}{}_{r}() \to \mathbb{R}^+$，其中 $\mathbb{R}^+$ 是所有正实数的集合，定义如下：

$$Q^{(s)}(\phi) = \sup_i \left| a_i \sum_{j=1}^{i} s_j(\phi) \right| r_i \text{ where } \phi \in \chi_{c_0(r)}^{(s)}.$$

下面的结果证明，在满足某个条件时，$Q^{(s)}$ 在$\chi_{c_0}^{(s)}{}_{(r)}$上构成一个拟范数。

定理 5.9. 若 $\sup_i |a_i| r_i = 1$，则映射 $Q^{(s)}$ 在集合$\chi_{c_0}^{(s)}{}_{(r)}$ 上构成一个拟范数，并且算子理想 $\chi_{c_0}^{(s)}{}_{(r)}$ 在拟范数 $Q^{(s)}$下是完备的。

证明。设 X 和 Y 为任意两个巴拿赫空间，且 $x' \in X'$、$y \in Y$。现在

$$\begin{aligned}
Q^{(s)}(x'\otimes y) &= \sup_i \left| a_i \sum_{j=1}^{i} s_j(x'\otimes y) \right| r_i \\
&= \sup_i |a_i s_1(x'\otimes y)|\, r_i \\
&= \|x'\otimes y\| \sup_i a_i r_i \\
&= \|x'\otimes y\|.
\end{aligned}$$

显然 $\|x' \otimes y\| = \|x'\|\|y\|$, 因此 $Q^{(s)}(x' \otimes y)$ $= \|x'\|\|y\|$。假设 $\phi, \psi \in \chi_{c_0}^{(s)}{}_{(r)}(X, Y)$, 并考虑

$$\begin{aligned} Q^{(s)}(\phi+\psi) =& \sup_i \left| a_i \sum_{j=1}^{i} s_j(\phi+\psi) \right| r_i \\ \leq& 2 \sup_i \left| a_i \sum_{j=1}^{i} (s_j(\phi) + s_j(\psi)) \right| r_i \\ =& 2 \sup_i \left| a_i \left(\sum_{j=1}^{i} s_j(\phi) \right) r_i + a_i \left(\sum_{j=1}^{i} s_j(\psi) \right) r_i \right| \\ \leq& 2 \sup_i \left| a_i \sum_{j=1}^{i} s_j(\phi) \right| r_i + 2 \sup_i \left| a_i \sum_{j=1}^{i} s_j(\psi) \right| r_i \\ \leq& 2 \left(Q^{(s)}(\phi) + Q^{(s)}(\psi) \right). \end{aligned}$$

因此,

$$Q^{(s)}(\phi+\psi) \leq 2 \left(Q^{(s)}(\phi) + Q^{(s)}(\psi) \right).$$

令 $\phi \in \chi_{c_0}^{(s)}{}_{(r)}(X, Y)$ 且 $\zeta \in \mathcal{B}(Y, Y_0)$, $\eta \in \mathcal{B}(X_0, X)$】【。

$$\begin{aligned} Q^{(s)}(\zeta\phi\eta) =& \sup_i \left| a_i \sum_{j=1}^{i} s_j(\zeta\phi\eta) \right| r_i \\ \leq& \|\zeta\|\|\eta\| \sup_i \left| a_i \left(\sum_{j=1}^{i} s_j(\phi) \right) \right| r_i. \end{aligned}$$

这意味着,

$$Q^{(s)}(\zeta\phi\eta) \leq \|\zeta\| Q^{(s)}(\phi) \|\eta\|.$$

因此, $Q^{(s)}$ 是算子理想 $\chi_{c_0}^{(s)}{}_{(r)}$上的拟范数。

此外, 假设 $\phi \in \chi_{c_0}^{(s)}{}_{(r)}(X, Y)$。我们有

$$\begin{aligned} Q^{(s)}(\phi) =& \sup_i \left| a_i \sum_{j=1}^{i} s_j(\phi) \right| r_i \\ \geq& \sup_i s_1(\phi) a_i r_i \\ =& \|\phi\| \sup_i a_i r_i \\ =& \|\phi\|. \end{aligned}$$

这意味着,

$$\|\phi\| \leq Q^{(s)}(\phi) \text{ for } \phi \in \chi_{c_0(r)}^{(s)}(X, Y). \tag{5.1}$$

□

设 $\{\phi_n\}$ 为 $\chi_{c_0}^{(s)}{}_{(r)}(X,Y)$ 中的一个柯西序列。那么，对于 $\epsilon > 0$，存在 $k \in \mathbb{N}$，使得

$$Q^{(s)}(\phi_n - \phi_m) < \epsilon \text{ for all } n, m \geq k. \tag{5.2}$$

利用方程 (5.1)，我们有

$$\|\phi_n - \phi_m\| < \epsilon \text{ for all } n, m \geq k.$$

这意味着 $\{\phi_n\}$ 是 $\mathcal{B}(X,Y)$ 中的柯西序列。由于 $\mathcal{B}(X,Y)$ 是巴拿赫空间，因此存在 $\phi \in \mathcal{B}(X,Y)$，使得当 $n \to \infty$ 时，$\phi_n \to \phi$。利用引理 5.6，我们有

$$|s_i(\phi_n - \phi_m) - s_i(\phi - \phi_m)| \leq \|\phi_n - \phi\|,\ i \in \mathbb{N}.$$

由于 $\phi_n \to \phi$，取 $n \to \infty$ 并保持 m 不变，我们有

$$s_i(\phi_n - \phi_m) \to s_i(\phi - \phi_m),\ i \in \mathbb{N}. \tag{5.3}$$

现在，我们将证明当 $n \to \infty$ 时，$\phi_n \to \phi$ 在 $\chi_{c_0}^{(s)}{}_{(r)}(X,Y)$ 中成立。同样，由方程 (5.2)，我们有

$$\sup_i \left| a_i \sum_{j=1}^{i} s_j(\phi_n - \phi_m) \right| r_i < \epsilon \text{ for all } m \geq k.$$

固定 m 并令 $n \to \infty$，利用方程 (5.3) 可得

$$\sup_i \left| a_i \sum_{j=1}^{i} s_j(\phi - \phi_m) \right| r_i < \epsilon \text{ for all } n, m \geq k. \tag{5.4}$$

这给出 $Q^{(s)}(\phi - \phi_m) < \epsilon$ 对所有 $m \geq k$均成立。这意味着在拟范数 $Q^{(s)}$下，$\phi_m \to \phi$。再者，

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{i} s_j(\phi) = \sum_{j=1}^{i} s_{2j-1}(\phi) + \sum_{j=1}^{i} s_{2j}(\phi) \leq & 2\sum_{j=1}^{i} s_{2j-1}(\phi) \\
= & 2\sum_{j=1}^{i} s_{2j-1}(\phi - \phi_m + \phi_m) \\
\leq & 2\left(\sum_{j=1}^{i} s_j(\phi - \phi_m) + \sum_{j=1}^{i} s_j(\phi_m) \right).
\end{aligned}$$

因此，

$$\sum_{j=1}^{i} s_j(\phi) \leq 2\left(\sum_{j=1}^{i} s_j(\phi - \phi_m) + \sum_{j=1}^{i} s_j(\phi_m) \right). \tag{5.5}$$

上述不等式表明

$$\begin{aligned}
\left| a_i \sum_{j=1}^{i} s_j(\phi) \right| r_i \leq & 2\left| a_i \left(\sum_{j=1}^{i} s_j(\phi - \phi_m) + \sum_{j=1}^{i} s_j(\phi_m) \right) \right| r_i \\
\leq & 2\left| a_i \sum_{j=1}^{i} s_j(\phi - \phi_m) \right| r_i + 2\left| a_i \sum_{j=1}^{i} s_j(\phi_m) \right| r_i.
\end{aligned}$$

利用关系式 (5.4)，我们得到

$$\left|a_i\sum_{j=1}^{i}s_j(\phi)\right|r_i \leq 2\epsilon + 2\left|a_i\sum_{j=1}^{i}s_j(\phi_m)\right|r_i \ \forall m \geq k.$$

对两边取极限，得到

$$\lim_{i\to\infty}\left|a_i\sum_{j=1}^{i}s_j(\phi)\right|r_i \leq 2\epsilon + 2\lim_{i\to\infty}\left|a_i\sum_{j=1}^{i}s_j(\phi_m)\right|r_i$$

于是，

$$\lim_{i\to\infty}\left|a_i\sum_{j=1}^{i}s_j(\phi)\right|r_i \leq 2\epsilon.$$

因此， $\phi \in \chi_{c_0}^{(s)}{}_{(r)}(X,Y)$，这意味着 $\chi_{c_0}^{(s)}{}_{(r)}$ 在拟范数 $Q^{(s)}$ 下是完备的。

References

[1] Ali M Akhmedov 和 Feyzi Ba

$\grave{a}$ c_0 *Math.* sar。关于 *J. Ibaraki Univ.* 36 25 32, 2004̂

Cesaro 算子在 . , : – . 上的精细谱。[2] Ali M Akhmedov 和 Feyzi Ba.sar。Cesàro 算子在序列空间 bv_p, ($1 \leq p < \infty$) 上的精细谱。 *Math. J. Okayama Univ.*, 50:135–147, 2008。[3] Angela A Albanese、Jos´e Bonet 和 Werner J Ricker。加权 ℓ_p 空间上 Cesàro 算子的谱与紧性。 *J. Aust. Math. Soc.*, 99(3):287–314, 2015。[4] Angela A Albanese、Jos´e Bonet 和 Werner J Ricker。加权 c_0 空间上 Cesàro 算子的平均遍历性与谱。 *Positivity*, 20(4):761–803, 2016。[5] Angela A Albanese、Jos´e Bonet 和 Werner J Ricker。加权 ℓ_1 空间中的 Cesàro 算子。 *Math. Nachr.*, 291(7):1015–1048, 2018。[6] Riddhick Birbonshi、Arnab Patra 和 PD Srivastava。在加权 c_0 空间上有界的无限矩阵。载于 *International Conference on Mathematics and Computing*，第 331–338 页。Springer，2017。[7] C. Co.skun。 p-Cesaro 算子的谱与精细谱。 *Turkish J. Math.*, 21(2):207– 212, 1997。[8] Guillermo P Curbera 和 Werner J Ricker。Ces

$\grave{a}$ ℓ_p *Arch.* ro 算子在 *Math. (Basel)* 100 3 267 271, 2013

. , ( ): – . 上的谱。[9] Joseph Diestel。 *Sequences and series in Banach spaces*，第 92 卷。Springer Science & Business Media，2012。[10] Nuh Durna 和 MERVE ESRA Turkay。q-Cesaro 矩阵在 c 上的谱及其关于 $0 < q < 1$ 的各种谱分解。 *Oper. Matrices*, 15(3):795–813, 2021。[11] Saad R El-Shabrawy。关于 q ` *Numer.* - *Funct. Anal. Optim.* 42 9 1019 1037, 2021

cesaro 算子：有界性、紧性与谱。，( ): – .[12] Israel Gohberg、Seymour Goldberg 和 Marinus A. Kaashoek。 *Classes of linear operators*。Birkh¨auser，1990。[13] M. Gonzalez。Ces

$\grave{a}$ ℓ_p $1 < p < \infty$ *Arch. Math.* ro 算子在 *(Basel)* 44 4 355 358, 1985

( ) 中的精细谱。，( ): – .[14] G. Leibowitz。Rhaly 矩阵。 *J. Math. Anal. Appl.*, 128(1):272–286, 1987。[15] Amit Maji 和 PD Srivastava。利用加权 Cesaro 序列空间研究算子理想。 *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 22(3):446–452, 2014。[16] Amit Maji 和 PD Srivastava。广义 Musielak-Orlicz 序列空间及相应算子理想的一些几何性质。 *Banach Journal of Mathematical Analysis*, 9 4 14( ): –33, 2015。[17] J. I. Okutoyi。关于 C_1 bv_0 48 1 79 86, 作为 . 上 1990

算子的谱。 *J. Aust. Math. Soc.*, ( ): – .[18] Albrecht Pietsch。 *Eigenvalues and s-Numbers*。剑桥大学出版社，1986。[19] JB Reade。关于 Cesaro 算子的谱。 *Bull. Lond. Math. Soc.*, 17 267, 1985 3 263( ): – .

[20] H. C. Rhaly。 p - Cesà罗矩阵。 *Houston J. Math.*, 15(1):137–146, 1989。[21] HC Rhaly Jr. 离散广义 Cesaro 算子。 *Proc. Amer. Math. Soc.*, 第 405–409 页，1982。[22] A. Wilansky。 *Summability through functional analysis*。北荷兰数学研究丛书，第 85 卷，荷兰阿姆斯特丹，1984 年。[23] Taja Yaying、Bipan Hazarika 和 M Mursaleen。关于由空间中的 q ` ℓ_p *Journal of Mathematical*-Cesaro 矩阵的 *Analysis and Applications* 493 1 124453, 2021 定义域导出的序列空间及其相关算子理想。 , ( ): 。[24] M. Yildirim。关于紧 Rhaly 算子的谱与精细谱。 *Indian J.* , ( ): – 。[25] *Pure Appl. Math.* 27 8 779 784, 1996 M Yildirim。关于 c_0 和 c 上 Rhaly 算子的谱。 *Indian J. Pure Appl. Math.*, 29 12 1301( ): –1309, 1998。[26] M Yildirim。关于 ℓ_p 上 Rhaly 算子的谱。 *Indian J. Pure Appl. Math*, 32 2 191( ): –198, 2001。[27] M Yildirim。关于 c_0 26 3 273 282, 2002 上 Rhaly 算子的精细谱。 *Turkish J. Math.*, ( ): – 。[28] Merve Esra Yildirim。关于 c_0 上具有 $0 < q < 1$ 的 q-Ces`罗矩阵的谱与精细谱。 *Numer. Funct. Anal. Optim*, 41(3):361–377, 2020。[29] Mustafa Yildirim。关于 $bv_0$ *Commun. Korean Math.* 上 Rhaly 算子 *Soc.* 18 4 669 676, 2003 的谱。 , ( ): – 。[30] Mustafa Yildirim 和 N Durna。 $\ell_p$ 上离散广义 Ces`罗算子的谱及其若干谱子类，($1 < p < \infty$)。 *J. Inequal. Appl.*, 2007:193, 2007。[31] Mustafa Yildirim、Mohammad Mursaleen 和 N Durna。关于 c_0 和 c 上广义 Rhaly-Ces`罗矩阵的谱与精细谱。 *Oper. Matrices*, 12(4):955–975, 2018。

Department of mathematics, Indian Institute of Technology Bhilai, Chhattisgarh,India 492015*Email address*: arnabp@iitbhilai.ac.in Department of mathematics, Indian Institute of Technology Bhilai, Chhattisgarh, India 492015*Email address*: jyotir@iitbhilai.ac.inDepartment of mathematics, RNAR College Samastipur, LNMU Darbhanga, India*Email address*: skmahto0777@gmail.com