arXiv:2305.04627v1 [math.GT] 8 May 2023

关于 Teichmüller 距离的随机游走速度界

Aitor Azemar*

摘要

考虑一个具有负欧拉示性数的闭曲面 S，以及其基本群上一个可容许的概率测度；该测度相对于 S 上某个双曲度量具有有限一阶矩。Teichmüller 空间中的每个点都对应着双曲平面上的一个随机游走。Azemar–Gadre–Gouëzel–Haettel–Lessa–Uyani 证明，该随机游走的漂移是 Teichmüller 空间上的适当函数，并且相对于 Teichmüller 距离至少线性增长。本文进一步完善了这一结果。一方面，通过考察 Jenkins-Strebel 方向，我们证明线性下界是精确的。另一方面，我们证明，对于几乎处处的 Teichmüller 测地线，漂移呈指数函数增长。我们还展示了漂移增长在近乎线性和指数函数之间振荡的 Teichmüller 测地线。此外，我们证明漂移在相差一个乘法常数的意义下是拟凸函数。

1 引言

设 S 是一个具有负欧拉示性数的闭定向曲面，并令 $p \in S$ 为一个基点。此外，设 $\Gamma = \pi_1(S, p)$，并令 μ 为定义在 Γ 上的概率测度，且该测度是可容许的，即由 μ 的支撑生成的半群等于 Γ。对于 S 上的每个双曲度量 ρ，我们可以将元素 $g \in \Gamma$ 的长度定义为同伦类 g 中自由环的最小 ρ-长度，并将其记为 $|g|_\rho$。接下来假设 μ 关于 ρ 具有有限一阶矩（因此，关于任何其他双曲度量 ρ' 也具有有限一阶矩；详见第 2 节）。考虑随机游走 $Z_n^\mu = g_1 \cdots g_n$，其中 g_i 是服从分布 μ 的 Γ 中的独立同分布元素。由 μ 驱动的、定义在 Γ 上并关于 ρ 的随机游走的 漂移（或速度） 定义为

$$\mathrm{Drift}_\mu(\rho) \coloneqq \lim_{n\to\infty} \frac{|Z_n^\mu|_\rho}{n}$$

上述极限几乎必然存在，且为常数。也就是说，漂移是随机游走的一个定义良好的性质，仅取决于 Γ、μ 和 ρ。

将 S 的 Teichmüller 空间记为 $\mathcal{T}(S)$。Azemar–Gadre–Gouëzel–Haettel– Lessa–Uyanik 已证明 [AGG+nt，定理 B]：函数 Drift：$\mathcal{T}(S) \to \mathbb{R}_+$ 相对于 Teichmüller 距离至少线性增长。本文将进一步详细探讨这一关系。

在基点 $o \in \mathcal{T}(S)$ 所定义的共形结构下，单位面积二次微分 $Q^1(o)$ 的集合与从 o 出发的泰希米勒测地射线集合之间存在一种自然的对应关系。对于给定的 $q \in Q^1(o)$，我们将其对应的测地线记为 $\mathcal{R}(q;\cdot) : [0,\infty) \to \mathcal{T}(S)$。我们发现，每当二次微分为詹金斯–施特雷贝尔二次微分时，增长的线性下界都是精确的。更准确地说，我们证明如下结论。

定理 1.1。设 μ 是定义在 $\pi_1(S, p)$ 上的可容许测度，且具有有限一阶矩。此外，设 $o \in \mathcal{T}(S)$ 为一个基点，并设 $q \in Q^1(o)$ 为詹金斯–施特雷贝尔。则存在常数 $c(o)\ C(q, o) > 0$，使得沿着测地射线 $\mathcal{R}(q; \cdot)$，

$$c(o)t \le \mathrm{Drift}_\mu(\mathcal{R}(q;t)) \le C(q,o)t$$

*Aitor.Azemar@glasgow.ac.uk，数学与统计学，格拉斯哥大学 G128QQ，英国

对于所有 $t \geq 1$。

此外，我们发现这并非典型行为。只要方向集上的测度满足厚度性质，那么沿着典型测地线，漂移就会呈指数增长。例如，我们得到如下结果。

定理 1.2。设 μ 是 $\pi_1(S, p)$ 上的一个具有有限一阶矩的可容许测度。此外，设$o \in \mathcal{T}(S)$ 是一个基点，$\theta < 1$ 且 λ 是 $Q^1(o)$上的勒贝格测度。那么，对于 λ-几乎所有方向$q \in Q^1(o)$，我们有

$$e^{\theta t} < \mathrm{Drift}_\mu(\mathcal{R}(q; t)) < e^{\frac{1}{\theta}t},$$

对于任意 $t > t(q)$，其中 $t(q)$ 是依赖于 q的某个有限时间。

更一般的版本见定理 4.7；该结果也适用于由映射类群上的有限一阶矩随机游走所产生的 $Q^1(o)$ 上的调和测度。我们还发现，这两种行为并非仅有的行为；事实上，还存在许多介于两者之间的行为。具体而言，我们得到如下结果。

定理 1.3。令 $o \in \mathcal{T}(S)$ 为一个固定的基点。存在常数 $c(o) > 0$，使得对于任意递增发散函数 $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$，都存在某个 $q \in Q^1(o)$ 以及递增发散序列 (t_n)、(s_n)，使得

$$\mathrm{Drift}_\mu(\mathcal{R}(q; t_n)) > c(o)e^{t_n}$$

and

$$\mathrm{Drift}_\mu(\mathcal{R}(q; s_n)) < f(s_n)s_n.$$

也就是说，存在一些方向，使得漂移沿一个子序列呈指数增长，而沿另一个子序列则几乎呈线性增长。

我们还证明，Lenzhen–Rafi [LR11] 所证明的沿 Teichmüller 测地线的双曲长度拟凸性，可以推广到漂移。

推论 1.4。设 μ 是定义在 $\pi_1(S, p)$ 上的一个具有有限一阶矩的可容许测度。存在常数$K' > 0$，使得对于任意 *Teichmüller* 测地线 G 以及沿 G按此顺序出现的点 $x, y, z \in \mathcal{T}(S)$，均有

$$\mathrm{Drift}_\mu(y) \leq K' \max(\mathrm{Drift}_\mu(x), \mathrm{Drift}_\mu(z)).$$

随机游走的漂移与命中测度的维数密切相关。令 $\mathbb{H}$ 为双曲平面。每个度量 ρ 都可以解释为一个表示 $\rho : \pi_1(S, p) \to \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H})$，随后可以将其延拓为 $\pi_1(S, p)$ 在 Gromov 边界 $\partial\mathbb{H}$ 上的作用。然后，我们在 $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H})$ 上定义测度 μ_ρ，它是 μ 通过 ρ 得到的推前测度。如果对于每个可测的$A \subset \partial\mathbb{H}$ 都有，则称测度 $\nu \in \partial\mathbb{H}$ 是 μ_ρ-平稳的

$$\nu(A) = \sum_{g \in \rho(\pi_1(S,p))} \mu(\rho^{-1}(g))\nu(g^{-1}A).$$

测度 ν 也可以解释为由 μ_ρ 驱动的、作用于 $\mathbb{H}$ 上的随机游走的命中测度。每个 μ_ρ 都有唯一的平稳测度，我们将其记为 ν_ρ。令 $\dim(\nu_\rho) \in [0, 1]$ 表示 ν_ρ 的 Hausdorff 维数。Deroin–Kleptsyn–Navas [DKN09, 猜想 1.21], 以及 Karlsson–Ledrappier [KL11] 更一般地猜想，只要 μ 的支撑是有限的，该维数就与 1 保持有界距离。Kosenko–Tiozzo[KT22] 和 Azemar–Gadre–Gouëzel–Haettel–Lessa–Uyani [AGG$^+$nt] 最近在这一猜想方面取得了一些部分进展，但该问题仍未解决。

Tanaka [Tan19] 表明

$$\dim(\nu_\rho) = \frac{h}{\mathrm{Drift}_\mu(\rho)},$$

其中 h 是随机游走的熵，其值仅取决于测度 μ。鉴于这一关系，任何关于漂移值的结果都可以转化为关于平稳测度维数的结果。例如，根据定理 1.2，我们有以下结论。

推论 1.5. 设 μ 是 $\pi_1(S,p)$ 上的可容许测度，具有有限一阶矩和有限熵。此外，设 $o \in \mathcal{T}(S)$ 为一个基点，$0 < \theta < 1$ 而 λ 是 $Q^1(o)$上的勒贝格测度。那么，对于λ-几乎所有方向 $q \in Q^1(o)$，我们有

$$e^{-\frac{1}{\theta}t} < \dim(\nu_{\mathcal{R}(q;t)}) < e^{-\theta t},$$

对于任意 $t > t(q)$，其中 $t(q)$ 是一个取决于 q 的有限时间。

1.1 证明概述

Azemar–Gadre–Gouëzel–Haettel–Lessa–Uyani [AGG+nt] 证明，随机游走的漂移在相差一个乘法常数的意义下，大于某个固定有限填充曲线集的最大长度。本文的核心观察是，这个不等式可以改进为相差一个常数倍的等式。也就是说，我们首先证明以下结果。

定理 1.6. 设 μ 是 $\pi_1(S,p)$ 上的一个可容许测度，且具有有限一阶矩。此外，设 F 是 S 中的有限填充曲线集，M_ρ^F是这些曲线相对于双曲度量 ρ的最大双曲长度。那么，存在某个仅取决于 μ 和 F 的 $K < \infty$，使得

$$\frac{1}{K} M_\rho^F \leq \mathrm{Drift}_\mu(\rho) \leq K M_\rho^F.$$

关于双曲长度行为的许多已知性质，都可以直接转化为关于漂移行为的性质。尤其相关的是 Masur [Mas82], 、Choi–Rafi [CR07] 和 Lenzhen–Rafi [LR11], 的研究：他们分别确定了沿 Jenkins–Strebel 方向的双曲长度增长率，揭示了 Teichmüller 空间厚部分之间双曲曲线长度的关系，并证明双曲长度在相差一个常数的意义下具有拟凸性。

Choi–Rafi 对厚部分中双曲长度的估计，结合 Lenzhen–Rafi 的拟凸性，可以用来证明沿整条测地线呈指数增长，前提是该测地线在厚部分之外所花费的连续时间占比（相对于从起点起算的总时间）不太大。关于共同测地线在厚部分之外所花连续时间的控制，在许多类勒贝格型测度的情形下，由 Dowdall–Duchin–Masur [DDM14] 的估计给出；对于有限一阶矩的映射类群随机游走所产生的调和测度，则由 Azemar–Gadre–Jeffreys [AGJ22] 的估计给出。

最后，我们利用詹金斯–施特雷贝尔方向和复现方向都稠密这一事实，构造一条测地线，使其交替趋近于詹金斯–施特雷贝尔方向的线性增长和复现方向的指数增长。

致谢

作者谨向 Maxime Fortier Bourque 和 Vaibhav Gadre 致谢，感谢他们进行的许多有益讨论并提出了修正意见。

2 背景

2.1 Teichmüller 空间

本节中，我们固定记号，并引入本文其余部分所需的一些概念。关于 Teichmüller 理论的详细介绍，可以在许多文献中找到，例如 Farb–Margalit [FM12]或 Gardiner [GL00]的著作。设 S 为一个具有负欧拉示性数的闭曲面。S 的*Teichmüller* 空间 定义为由数对 (X, f) 构成的等价类集合，其中 X 是一个黎曼曲面，$f\colon S \to X$ 是一个保向同胚。若存在一个共形微分同胚 $h\colon X \to Y$，使得 $g^{-1} \circ h \circ f$ 与恒等映射同伦，则称数对 (X, f) 和 (Y, g) 等价。

两点 $[(X,f)],[(Y,g)]\in\mathcal{T}(S)$ 之间的***Teichmüller*** 距离定义为 $d_{\mathrm{Teich}}([(X,f)],[(Y,g)]) = \frac{1}{2}\log\inf K$，其中下确界取遍所有满足以下条件的 $K\geq 1$：存在一个 K-拟共形同胚 $h\colon X\to Y$，且 $g^{-1}\circ h\circ f$ 与恒等映射同伦。存在一个拟共形映射可达到该下确界。

设 γ 是 S 中本质曲线的一个同伦类，且 $[(X,f)]\in\mathcal{T}(S)$。我们通常会在实际指其同伦类时，简称为曲线。根据一致化定理，X 上存在唯一的双曲度量。我们将 $[(X,f)]$ 中 γ 的双曲长度定义为：在 X 上唯一的双曲度量中，同伦类 $f(\gamma)$ 的最短长度。我们将此值记为 $\mathrm{Hyp}_{[(X,f)]}(\gamma)$。

给定一个 $\varepsilon>0$，Teichmüller 空间 $\mathcal{T}_\varepsilon(S)\subset\mathcal{T}(S)$ 的**-厚部是由带标记的双曲度量构成的子集，其中所有本质闭曲线的双曲长度都至少为 ε。

设 TX 是 X 上的切丛。黎曼曲面 X 上的二次微分是一个映射$q\colon TX\to\mathbb{C}$，满足对于每个 $\lambda\in\mathbb{C}$ 和 $v\in TX$，都有 $q(\lambda v)=\lambda^2 q(v)$。我们用 $Q([(X,f)])$ 表示在 $[(X,f)]$ 的共形结构下具有有限面积的全纯二次微分。$Q([(X,f)])$ 与 $[(X,f)]$, 处的余切空间之间存在自然的对应，因此对于每个 $q\in Q([(X,f)])$，我们将与之关联的测地线记作 $\mathcal{R}(q;\cdot)\colon\mathbb{R}_+\to\mathcal{T}(S)$。若限于面积为 1 的二次微分（记作 $Q^1([(X,f)])$），则关联的测地线速度为 1。也就是说，对于 $q\in Q^1([(X,f)])$，$d_{\mathrm{Teich}}(\mathcal{R}(q;t)\,\mathcal{R}(q;s)) = |t-s|$。给定一个二次微分 q，我们可以将其垂直叶层 $V(q)$ 定义为由光滑路径 γ 确定的测度叶状结构，其中对定义域内部的每个 t，都有 $q(\gamma'(t))<0$；其横向测度则由 $|\mathrm{Re}\sqrt{q}|$ 给出。如果每条非临界轨迹都是闭曲线，则称该二次微分为詹金斯–施特雷贝尔二次微分。詹金斯–施特雷贝尔二次微分的集合在微分的集合中稠密。

考虑以点 o 为中心、半径为一的球面，我们得到 $Q^1(o)$ 到 $\mathcal{T}(S)$ 的嵌入，因此可以在 $Q^1(o)$ 上赋予勒贝格测度。另一方面，Kaimonovich–Masur [KM96, 定理 2.2.4]证明，对于映射类群上的非初等随机游走，典型样本路径会收敛到 Teichmüller 空间的 Thurston 边界，且由此得到的平稳测度支撑在唯一遍历的测地测度上。正如 Masur [Mas82] 所证明的，$Q^1(o)$ 中垂直叶层唯一遍历的微分会收敛到该叶层在 Thurston 边界上的射影类。因此，可以将平稳测度拉回，从而在 $Q^1(o)$ 上得到另一个测度。

2.2 随机游走

设 Γ 为一个群，μ 为 Γ 上的一个概率测度。若由其支撑生成的半群等于 Γ，则称 μ 为**可容许**。我们将始终假设 μ 是可容许的。由 μ 决定的 Γ 上的随机游走是由随机变量序列 $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 定义的：

$$Z_n = g_1 g_2 \dots g_n,$$

其中 g_i 是具有分布 μ 的 Γ 的元素。

令 \((\mathbb{H},d)\) 为双曲平面，令 $G=\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H})$ 为 $\mathbb{H}$ 的保向等距变换群。此外，令 $\Gamma=\pi_1(S,p)$ 为以 p 为基点的 S 的基本群，并令 $\rho\colon\Gamma\to G$ 为一个离散忠实表示。元素 $g\in\Gamma$ 关于 ρ 的长度定义为 $|g|_\rho = \inf_{x\in\mathbb{H}} d(x,\rho(g)x)$。等价地，$|g|_\rho$ 是双曲圆柱 $\mathbb{H}/\rho(g)$ 的核心曲线长度，或者是 $\mathbb{H}/\rho(\Gamma)$ 中与 $\rho(g)$ 相关的曲线同伦类中的最小长度。若 μ 满足**有限一阶矩**，则称其关于 ρ 具有该性质，即 $\sum_{g\in\Gamma}|g|_\rho\mu(g)<\infty$。我们始终假设 μ 关于某个 ρ 具有有限一阶矩。随机游走的线性漂移随后定义为

$$\mathrm{Drift}_\mu(\rho) := \lim_{n\to\infty}\frac{|Z_n|_\rho}{n}.$$

根据金曼次可加遍历定理，漂移是良定义的；由于测度相对于 ρ 具有有限一阶矩，因此漂移是有限的。

对于每个点 $[(X,f)]\in\mathcal{T}(S)$，我们都可以选取一个忠实表示 $\rho\colon\Gamma\to G$，使得 $\mathbb{H}/\rho(\Gamma)=X$，且 $\rho(\gamma)$ 是与 $f(\gamma)$ 相关联的覆盖变换。虽然这种指派并不唯一，但

元素 $\gamma \in \Gamma$ 的长度是该指派的良定义函数，因此漂移 Drift$_\mu(\rho)$ 也是如此。事实上，对于适当选取的表示，与 $\rho(\gamma)$ 相关联的曲线是 $f(\gamma)$，因此 $|\gamma|_\rho = \mathrm{Hyp}_{[(X,f)]}(\gamma)$。因此， $\mathcal{T}(S)$ 的元素可以视为离散忠实表示 $\rho: \Gamma \to G$ 的等价类。稍微滥用一下记号，我们将把 $\mathcal{T}(S)$ 的元素视为每个等价类中的任意一个代表元，因为我们将讨论的性质在等价类内保持不变。

令 F 为 S上一个固定的有限填充闭曲线集。尽管我们要求 μ 的支撑生成 Γ 作为半群，但对于任意 $k \geq 1$， F 可能并不完全包含在 μ^k 的支撑中，因为 μ^k 的支撑中的元素恰好是由 μ支撑中的 k 个元素连接而成的。为避免这种情况，我们按如下方式将单位元加入 μ 的支撑中。令 $\varepsilon > 0$，并令$\mu_\varepsilon = (1-\varepsilon)\mu + \varepsilon\delta_e$ 为 μ的一个松弛版本，其中引入每一步随机游走都不移动的微小概率。对于任意 $\rho \in \mathcal{T}(S)$，我们有 Drift$_{\mu_\varepsilon}(\rho) = (1-\varepsilon)$ Drift$_\mu(\rho)$。此外，由于 μ是可容许的，存在某个 $k \in \mathbb{N}$，使得与 supp(μ_ε^k) 中群元素相关联的曲线包含 F。于是，Drift$_{\mu_\varepsilon^k}(\rho) = k(1-\varepsilon)$ Drift$_\mu(\rho)$。由于本文关于漂移的所有结果都只在乘法常数意义下成立，我们将假设 supp(μ) 已经包含 F。记 $M_\rho^F = \max_{\gamma \in F}(\mathrm{Hyp}_\rho(\gamma))$。我们首先证明以下众所周知的结果。该证明与 Minsky [Min93，引理 4.7] 中的证明相似。

引理 2.1。设 F 是 S 中的有限填充曲线集，且 $o \in \mathcal{T}(S)$ 是一个固定基点。那么，存在常数 K，使得对于任意 $\rho \in \mathcal{T}(S)$ 以及 S 中的自由曲线 γ，有：

$$Hyp_\rho(\gamma) \leq K M_\rho^F Hyp_o(\gamma).$$

证明。设 D_ρ 是由曲线 F 的距离最小化配置所形成的多边形的最大直径， ∂D_ρ 是其周长。由于 F 中的曲线将 S 切分成多边形，Hyp$_\rho(\gamma)$ 的值不超过曲线 γ 与 F 的交点数乘以多边形的最大直径。也就是说，

$$\mathrm{Hyp}_\rho(\gamma) \leq D_\rho \sum_{\alpha \in F} i(\gamma,\alpha) \leq \partial D_\rho \sum_{\alpha \in F} i(\gamma,\alpha).$$

在由 o 定义的度量下，对于任意闭曲线 α，我们可以将一个厚度为 $\delta_o(\alpha) > 0$ 的环带等距嵌入到 α 周围。于是，对于任意其他曲线 γ，有 $i(\alpha,\gamma)\delta_o(\alpha) \leq \mathrm{Hyp}_o(\gamma)$。因此，

$$\mathrm{Hyp}_\rho(\gamma) \leq \partial D_\rho \sum_{\alpha \in F} \frac{1}{\delta(\alpha)} \mathrm{Hyp}_o(\gamma).$$

最后，多边形的最大周长小于 F 中所有曲线长度之和的两倍，因此，记 F 的基数为 $|F|$，

$$\partial D_p \leq 2 \sum_{\alpha \in F} \mathrm{Hyp}_p(\alpha) \leq M_p^F 2|F|.$$

令 $K = 2|F| \sum_{\alpha \in F} \delta^{-1}_{\alpha()}$，即可得到该结果。 □

由于 F中的曲线数量有限，因此对所有 $\rho \in \mathcal{T}(S)$， M_ρ^F都是有限的。于是，对于任意其他的 $\rho \in \mathcal{T}(S)$，我们有

$$\sum_{g \in \Gamma} |g|_\rho \mu(g) \leq K M_\rho^F \sum_{g \in \Gamma} |g|_o \mu(g) < \infty.$$

因此，如果 μ 相对于某个基点 $o \in \mathcal{T}(S)$具有有限一阶矩，那么相对于所有 $\rho \in \mathcal{T}(S)$也具有有限一阶矩。也就是说，只要测度 μ 相对于 $\mathcal{T}(S)$中的至少一个点具有有限一阶矩，说它具有有限一阶矩就是有意义的。

我们有如下下界。

定理 2.2 (Azemar–Gadre–Gouëzel–Haettel–Lessa–Uyani [AGG$^+$nt，第 3 定理3])。设 μ 是 $\pi_1(S,p)$ 上的一个可容许测度，且具有有限一阶矩；设 F 是 S 中的有限填充曲线集。存在常数 $c > 0$，使得对所有 $[\rho] \in \mathcal{T}(S)$，都有 漂移$_\mu(\rho) \geq c M_\rho^F$。

利用引理 2.1，可以相对直接地验证，值 M_ρ^F 也可用来给出一个上界。

定理 *1.6* 的证明。 由定理 2.2 可知，存在 $c > 0$，使得 $\text{Drift}_\mu(\rho) \geq cM_\rho^F$，因此我们只需证明上界。固定一个基点 $o \in \mathcal{T}(S)$。由引理 2.1 可知，存在某个 $C < \infty$，使得$|Z_n|_\rho \leq CM_p|Z_n|_o$。因此，

$$\text{Drift}_\mu(\rho) = \lim_{n\to\infty} \frac{|Z_n|_\rho}{n} \leq CM_p \lim_{n\to\infty} \frac{|Z_n|_o}{n} = CM_p \,\text{Drift}_\mu(o),$$

因此，结果可由设定 $K = \max\left(C\text{漂移}_\mu(o)\ \frac{1}{c}\right)$得出。 □

3 线性增长

我们回顾一下，增长至少必须是线性的。

定理 3.1 (Azemar–Gadre–Gouëzel–Haettel–Lessa–Uyani)**.** 给定一个基点 $o \in \mathcal{T}(S)$，存在某个常数 c，使得漂移$_\mu(\rho) \geq cd_{\text{Teich}}(\rho, o)$。

本节我们证明这一界是尖锐的。主要工具是以下结果，该结果由 Masur [Mas82, 定理 1 证明的结尾 1], 建立，给出了沿詹金斯–施特雷贝尔二次微分的双曲长度的极限值。

定理 3.2 (Masur)。 设 q 为单位面积的詹金斯–施特雷贝尔二次微分，其核心曲线为 $\alpha_1, .., \alpha_k$。那么，对于任意一个在视觉紧化中收敛到 q 的序列 $(\rho_n) \subset \mathcal{T}(S)$，以及 S 中的任意曲线 γ，我们都有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Hyp_{\rho_n}(\gamma)}{4d_{\text{Teich}}(o, \rho_n)} = \sum_{i=1}^{k} i(\alpha_i, \gamma).$$

定理 *1.1* 的证明。根据定理 3.1，我们只需证明上界。令 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ 为 q 的垂直叶层的核心曲线，令 $\gamma_1, \ldots, \gamma_l$ 为填充集 F 中的曲线。令 $\delta > 0$。那么，根据定理 3.2，对于每个 γ_j，我们都有一个 t_j，使得对于所有 $t > t_j$，我们有

$$\text{Hyp}_{\mathcal{R}(q;t)}(\gamma_j) < 4\left(\sum_{i=1}^{k} i(\alpha_i, \gamma_j) + \delta\right) t.$$

因此，我们可以取足够大的 $C(q, j)$，使得对所有 $t \geq 1$，Hyp$^{\mathcal{R}(q;t)}(\gamma_j) < C(q, j)t$。令 $C(q) = K \max_{j\leq k} C(q, j)$，其中 K 是定理 1.6 给出的常数，即得定理。 □

4 指数增长

本节的目标是证明，漂移的标准行为是相对于 Teichmüller 距离呈指数增长。我们首先注意到，作为 Wolpert 引理的直接结果，增长不可能高于指数函数。

命题 4.1。 给定一个基点 $o \in \mathcal{T}(S)$，存在某个常数 $C(o)$，使得 漂移$_\mu(\rho) \leq$ 漂移$_\mu(o)e^{2d_{\text{Teich}}(\rho,o)}$。

证明。正如 Wolpert [Wol79, 引理 3.1] 所证明的，对于任意两点 $o, \rho \in \mathcal{T}(S)$ 以及环 γ，我们有

$$\text{Hyp}_\rho(\gamma) \leq e^{2d_{\text{Teich}}(o,\rho)}\text{Hyp}_o(\gamma).$$

因此，

$$\text{Drift}_\mu(\rho) = \lim_{n\to\infty} \frac{\text{Hyp}_\rho(Z_n)}{n} \leq e^{2d_{\text{Teich}}(o,\rho)} \lim_{n\to\infty} \frac{\text{Hyp}_o(Z_n)}{n} = e^{2d_{\text{Teich}}(o,\rho)}\,\text{Drift}_\mu(o).$$

□

Choi–Rafi 的以下结果 [CR07, 定理 B] 使我们能够改进先前的上界，并得到 Teichmüller 空间厚部分中各点漂移增长的下界。回想一下， $\mathcal{T}_\varepsilon(S)$ 表示 Teichmüller 空间的 ε-厚部分。

定理 4.2 (Choi–Rafi)。 固定 $\varepsilon > 0$ 和 $o \in \mathcal{T}_\varepsilon(S)$。存在一个由闭曲线组成的有限填充集 G 和一个常数 $D > 0$，使得对于任意 $\rho \in T_\varepsilon(S)$，我们有

$$\left| d_{\mathrm{Teich}}(\rho, o) - \log\left(\max_{\alpha \in G} \frac{Hyp_\rho(\alpha)}{Hyp_o(\alpha)} \right) \right| \leq D.$$

命题 4.3。 设 $\varepsilon > 0$，并令 $o \in \mathcal{T}_\varepsilon(S)$。那么，存在常数 $c, C > 0$，使得对于任意$\rho \in \mathcal{T}_\varepsilon(S)$，我们有

$$ce^{d_{\mathrm{Teich}}(\rho,o)} \leq \mathrm{Drift}_\mu(\rho) \leq Ce^{d_{\mathrm{Teich}}(\rho,o)}.$$

*Pro*的。 设 G 为定理 4.2 中的曲线填充集。对于任意曲线 $\gamma \in G$，我们有

$$\mathrm{Hyp}_\rho(\gamma) = \mathrm{Hyp}_o(\gamma) \frac{\mathrm{Hyp}_\rho(\gamma)}{\mathrm{Hyp}_o(\gamma)} \leq \mathrm{Hyp}_o(\gamma) \max_{\alpha \in G} \frac{\mathrm{Hyp}_\rho(\alpha)}{\mathrm{Hyp}_o(\alpha)}.$$

那么，取 m 在前一个不等式中所有 $\gamma \in G$ 上的最大值，根据定理 1.6，我们得到某个 e $K > 0$ 使得

$$\mathrm{Drift}_\mu(\rho) \leq K \max_{\alpha \in G} \mathrm{Hyp}_\rho(\alpha) \leq K \max_{\alpha \in G} \mathrm{Hyp}_o(\alpha) e^D e^{d_{\mathrm{Teich}}(\rho,o)},$$

其中最后一个不等式是由定理 4.2 得出的。另一方面，

$$\frac{\max_{\alpha \in G} \mathrm{Hyp}_\rho(\alpha)}{\min_{\alpha \in G} \mathrm{Hyp}_o(\alpha)} \geq \max_{\alpha \in G} \frac{\mathrm{Hyp}_\rho(\alpha)}{\mathrm{Hyp}_o(\alpha)},$$

因此，同理可得

$$\mathrm{Drift}_\mu(\rho) \geq \frac{1}{K} \max_{\alpha \in G} \mathrm{Hyp}_\rho(\alpha) \geq \frac{1}{K} \min_{\alpha \in G} \mathrm{Hyp}_o(\alpha) e^{-D} e^{d_{\mathrm{Teich}}(\rho,o)}.$$

因此，令 $c = \frac{1}{K} \min_{\alpha \in G}(\mathrm{Hyp}_o(\alpha)) e^{-D}$ 和 $C = K \max_{\alpha \in G}(\mathrm{Hyp}_o(\alpha)) e^D$，即可得到该结果。 □

根据 Mumford 紧性，模空间中每个有界子集的原像都包含于 Teichmüller 空间的某个ε-厚部分中，只要 ε 足够小。因此我们得到以下结果。

推论 4.4. 令 $\gamma\colon [0, \infty) \to \mathcal{T}(S)$ 为一条 *Teichmüller* 射线，且其在模空间中的像有界。那么，存在 $c, C > 0$ 使得

$$ce^t \leq \mathrm{Drift}_\mu(\gamma(t)) \leq Ce^t.$$

为了证明几乎所有方向上的增长都是指数函数增长，我们首先注意到，漂移的增长在时间足够长时，除去一个常数因子后不会损失。证明中要用到的主要工具如下。

定理 4.5 (Lenzhen–Rafi [LR11, 定理 A])。 存在一个常数 $K > 0$，使得对于每条闭曲线 γ、任意一条 *Teichmüller* 测地线 G 以及沿 G按此顺序出现的点 x， y， $z \in \mathcal{T}(S)$，我们有

$$Hyp_y(\gamma) \leq K \max(Hyp_x(\gamma), Hyp_z(\gamma)).$$

由定理 1.6，Lenzhen–Rafi 的结果可直接转化为漂移。也就是说，我们有推论 1.4。

推论 *1.4* 的证明。 由定理 1.6 和定理 4.5，存在常数 $C, K > 0$，使得

$$\mathrm{Drift}_\mu(y) \leq C \max_{\gamma \in F} \mathrm{Hyp}_y(\gamma) \leq KC \max_{\gamma \in F} (\max(\mathrm{Hyp}_x(\gamma), \mathrm{Hyp}_z(\gamma))$$

交换最大值的顺序，我们得到

$$\mathrm{Drift}_\mu(y) \leq KC \max\left(\max_{\gamma \in F} \mathrm{Hyp}_x(\gamma), \max_{\gamma \in F} \mathrm{Hyp}_z(\gamma) \right) \leq KC^2 \max(\mathrm{Drift}_\mu(x), \mathrm{Drift}_\mu(z)).$$

□

此外，漂移是一个适当函数，因此沿着任意 Teichmüller 射线 $\mathcal{R}(q;\cdot)$，$\mathrm{Drift}_\mu(\mathcal{R}(q;t))$ 的值最终会大于 $\mathrm{Drift}_\mu(\mathcal{R}(q;0))$。因此，我们有如下结论。

引理 4.6. 存在某个常数 $K>0$，使得对于任意基点 $o\in\mathcal{T}(S)$，都存在某个时刻 t_o，使得

$$\mathrm{Drift}_\mu(\mathcal{R}(q;s))\le K\,\mathrm{Drift}_\mu(\mathcal{R}(q;t))$$

对于任意 $t>t_o$、$t>s>0$ 和 $q\in Q^1(o)$。

证明。取足够大的 t_o，使得对于任意满足 $d_{\mathrm{Teich}}(\rho,o)>t_o$ 的 ρ，均有 $\mathrm{Drift}_\mu(\rho)>\mathrm{Drift}_\mu(o)$。根据定理 3.1，这样的 t_o 存在。于是，对于以 o 为基点的任意二次微分 q，以及 $t>t_o$ 和 $t>s>0$，由推论 1.4 可得，

$$\mathrm{Drift}_\mu(\mathcal{R}(q;s))\le K\max\left(\mathrm{Drift}_\mu(\mathcal{R}(q;0),\mathrm{Drift}_\mu(\mathcal{R}(q;t))\right))=K\,\mathrm{Drift}_\mu(\mathcal{R}(q;t))$$

□

引理 4.6 与命题 4.3 结合起来，给出了沿测地线的漂移增长的上界和下界，前提是该测地线在厚部分之外连续停留的时间不太长。对于给定的测地线 $\mathcal{R}(q;\cdot)$、$\varepsilon>0$ 和 $t>0$，我们希望对最大的 $s_q^{bot}(t)\le t$ 以及最小的$s_q^{top}(t)\ge t$ 找到某种控制，使得 $\mathcal{R}(q;s_q^{bot}(t))\ \mathcal{R}(q;s_q^{top}(t))\in\mathcal{T}_\varepsilon(S)$。给定一条测地射线 $\gamma:\mathbb{R}_+\to\mathcal{T}(S)$，定义截至时刻 t 在厚部分中度过的时间比例为

$$\mathrm{Thick}_\varepsilon^{\%}(\gamma,t):=\frac{|\{0\le s\le t:\gamma(s)\in\mathcal{T}_\varepsilon(S)\}|}{t}.$$

定理 4.7。设 $o\in\mathcal{T}(S)$ 是 *Teichmüller* 空间中的一个基点。此外，设 σ 是定义在 $Q^1(o)$上的一个测度，使得对所有 $0<\xi<1$，都存在某个 $\varepsilon(\xi)>0$，使得对 σ-几乎处处的 q，都存在 $t_q^\xi<\infty$，满足

$$\mathrm{Thick}_{\varepsilon(\xi)}^{\%}(\mathcal{R}(q;\cdot),t)\ge\xi$$

对所有 $t\ge t_q^\xi$。

于是固定 $0<\theta<1$。对于 σ-几乎所有方向 $q\in Q^1(o)$，都存在 $t(q,\ \theta)<\infty$，使得

$$e^{\theta t}<\mathrm{Drift}_\mu(\mathcal{R}(q;t))<e^{\frac{1}{\theta}t}$$

对所有 $t>t(q,\ \theta)$。

证明。给定 $0<\theta<1$，令 $\xi=\frac{1+\theta}{2}$。对于给定的 $q\in Q^1(o)$ 和 $t>0$，令 $s_q^{top}(t)\ge t$ 为大于 t 且满足 $\mathcal{R}(q;s_q^{top}(t))\in\mathcal{T}_{\varepsilon(\xi)}(S)$ 的最小时间。紧接在 t 之后，处于 $\mathcal{T}_{\varepsilon(\xi)}(S)$ 之外的时间为 $s_q^{top}(t)-t$。因此，$s_q^{top}(t)-(s_q^{top}(t)-t)\frac{s_q^{top}(t)}{t}>\xi$。所以，$s_q^{top}(t)<\frac{1}{\xi}t$。因此，由引理 4.6 可知，存在 $K,t_o>0$，使得对所有 $t>t_o$，

$$\mathrm{Drift}_\mu(\mathcal{R}(q;t))\le K\,\mathrm{Drift}_\mu(\mathcal{R}(q;s_q^{top}(t))).$$

Since $\mathcal{R}(q;s_q^{top}(t))$ 位于 Teichmüller 空间的 ε-厚部分，因此根据命题 4.3，

$$\mathrm{Drift}_\mu(\mathcal{R}(q;t))\le K\,\mathrm{Drift}_\mu(\mathcal{R}(q;s_q^{top}(t))\le CKe^{s_q^{top}(t)}\le CKe^{\frac{1}{\xi}t}.$$

类似地，记 $s_q^{bot}(t)$ 为小于 t 的最大时间，使得 $\mathcal{R}(q;s_q^{top}(t))\in\mathcal{T}_{\varepsilon(\xi)}(S)$，我们得到 $s_q^{bot}(t)>\xi t$。按照相同的推理，我们得到

$$\mathrm{Drift}_\mu(\mathcal{R}(q;t))\ge\frac{1}{K}\,\mathrm{Drift}_\mu(\mathcal{R}(q;s_q^{bot}(t))\ge\frac{c}{K}e^{s_q^{bot}(t)}\ge\frac{c}{K}e^{\xi t}.$$

由于 $\xi<\theta<1$，存在某个 t_θ，使得 $e^{\theta t}>\frac{c}{K}e^{\xi t}$，且对于所有 $t\ge t_\theta$，都有 $e^{\frac{1}{\theta}t}<CKe^{\frac{1}{\xi}t}$。因此，令 $t(q,\theta)=\max(t_q,t_\theta,t_o)$，即可得出该定理。 □

根据 Downdall–Duchin–Masur [DDM14，命题 5.5]，定理 4.7 的假设对多种勒贝格类测度均成立，从而得出定理 1.2 的证明。此外，根据 Azemar–Gadre–Jeffreys [AGJ22，命题 3.3]，对于映射类群上有限一阶矩的非初等测度所生成的调和测度，该性质也成立。

推论 4.8. 设 σ 是定义在 $Q^1(o)$ 上的测度，并满足定理 *4.7* 的假设。那么，对于任意 $\varepsilon > 0$，对于 σ-几乎处处的 $q \in Q^1(o)$，

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Drift}_\mu(\mathcal{R}(q;t))}{e^{(1-\varepsilon)t}} = \infty$$

and

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Drift}_\mu(\mathcal{R}(q;t))}{e^{(1+\varepsilon)t}} = 0.$$

此外，σ-几乎必然存在某个 $0 < c(q) < \infty$，使得

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Drift}_\mu(\mathcal{R}(q;t))}{e^{t}} \le c(q) \le \limsup_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Drift}_\mu(\mathcal{R}(q;t))}{e^{t}}.$$

证明。令 $\theta = 1-\varepsilon$。那么，由定理 1.2，存在某个 $c > 0$，使得对于 σ-几乎处处的 $q \in Q^1(o)$，我们有

$$\mathrm{Drift}_\mu(\mathcal{R}(q;t)) \ge e^{(1-\varepsilon)t}$$

对于所有足够大的 t 均成立。因此，第一个关系得证。类似地，对于 $\theta = \frac{1}{1+\varepsilon}$，我们得到第二个关系。最后一个关系可由取一个发散的时间序列 (t_n)，使得 $\mathcal{R}(q;t_n) \in \mathcal{T}_\varepsilon(S)$，并应用命题 4.3 得出。

□

5 变动增长

本节证明存在一条测地线，使得沿着它会出现变动增长。证明的基本思路是交替应用命题 4.3 和定理 1.1，利用这两个结果都适用于稠密方向集这一事实。

定理 *1.3* 的证明。固定 $\delta, \varepsilon > 0$，使基点 $o \in \mathcal{T}(S)$ 位于 Teichmüller 空间的 ε-厚部分。我们将归纳构造一列二次微分 (j_k)，以及时间序列 (s_k)、(t_k)，使得对每个 $i \le k$，$\mathrm{Drift}_\mu(\mathcal{R}(j_k;\, s_i)) < \big(f(s_i) - \delta 2^{-2(k-i)}\big)\, s_i$，并且对每个 $i \le k$，$(\mathcal{R};\, t_i)$ 与 $\mathcal{T}_\varepsilon$ 的距离至多为 $\delta\left(2 - 2^{-2(k-i)}\right)$。取这列序列的一个聚点即可得到定理。

对于 $k = 0$，令 $j_0 \in Q^1(o)$ 为 Jenkins-Strebel 二次微分。根据定理 1.1，存在常数$C(j_0)$ $t(j_0)$，使得对于所有 $t > t(j_0)$，漂移$_\mu(\mathcal{R}(j_0;\, t)) < C(j_0)t$。令 s_0 足够大，使得 $f(s_0) > C(j_0) + \delta$ 且 $s_0 > t(j_0)$。最后，令 $t_0 = 0$。

那么，假设我们已经有了截至 k 的序列。复现方向到 $\mathcal{T}_\varepsilon$ 的集合是稠密的，因此我们可以取一个二次微分序列 $(q^n) \subset Q^1(o)$，它们生成复现测地线，并收敛到 j_k。由于 $q^n \to j_k$，测地线 $\mathcal{R}(q^n;\cdot)$ 逐点收敛于测地线 $\mathcal{R}(j_k;\cdot)$。漂移是关于 Teichmüller 空间的连续函数，因此对于每个 $i \le k$，有 Drift$_\mu(\mathcal{R}(q^n;\, s_i)) \to$ Drift$_\mu(\mathcal{R}(j_k;\, s_i)) \le (f(s_i) - \delta 2^{-2(k-i)})s_i$。令 q 为序列 (q^n) 中满足以下条件的第一个元素：

$$\mathrm{Drift}_\mu(\mathcal{R}(q;s_i)) < (f(s_i) - \delta 2^{-(2(k-i)+1)})s_i$$

and

$$d_{\mathrm{Teich}}(\mathcal{R}(q;t_i), \mathcal{R}(j_k;t_i)) < \delta 2^{-(2(k-i)+1)}$$

对于所有 $i \le k$。测地线 $\mathcal{R}(q;\cdot)$ 是回归的，因此我们可以固定 $t_{k+1} > s_k + 1$，使得 $\mathcal{R}(q;t_{k+1}) \in \mathcal{T}_\varepsilon$。

詹金斯–施特雷贝尔方向的集合是稠密的，因此我们可以取一个收敛于 q 的序列 (j^n)。和之前一样，序列内的收敛是逐点的，因此对于每个 μ，$\mathrm{Drift}_\mu(\mathcal{R}(j^n;\ s_i)) \to \mathrm{Drift}_\mu(\mathcal{R}(q;\ s_i)) \le (f(s_i)$ 。令 $\delta 2^{-(2(k-i)+1)} s_i$ 为序列 (j^n) 中满足以下条件的第一个元素。

$$\mathrm{Drift}_\mu(\mathcal{R}(j_{k+1};s_i)) \le (f(s_i) - \delta 2^{-2(k+1-i)})s_i$$

and

$$d_{\mathrm{Teich}}(\mathcal{R}(j_{k+1};t_i),\mathcal{R}(q;t_i)) < \delta 2^{-2(k+1-i)}$$

对于所有 $i \le k+1$。与之前一样，存在某个 $C(j_{k+1})$，使得 $\mathrm{Drift}_\mu(\mathcal{R}(j_{k+1};t)) < C(j_{k+1})t$，因此令 s_{k+1} 为大于 t_{k+1} 的第一个满足 $f(s_{k+1}) > C(s_{k+1}) + \delta$ 的时刻。此外，对于 $i \le k$

$$d_{\mathrm{Teich}}(\mathcal{R}(j_{k+1};t_i)\ \mathcal{T}_\varepsilon) \le d_{\mathrm{Teich}}(\mathcal{R}(j_{k+1};t_i)\ \mathcal{R}(q;t_i)) + d_{\mathrm{Teich}}(\mathcal{R}(q;t_i)\ \mathcal{R}(j_k;t_i)) + d_{\mathrm{Teich}}(\mathcal{R}(j_k;t_i)\ \mathcal{T}_\varepsilon)$$

$$< \delta\left(2^{-(2(k-i)+1)} + 2^{-2(k+1-i)} + 2 - 2^{-(2(k-i))}\right) = \delta\left(2 - 2^{-2(k+1-i)}\right)$$

且对于 $i = k+1$，由于 $\mathcal{R}(q_{k+1};t_{k+1}) \in \mathcal{T}_\varepsilon$,

$$d_{\mathrm{Teich}}(\mathcal{R}(j_{k+1};t_{k+1}),\mathcal{T}_\varepsilon) \le d_{\mathrm{Teich}}(\mathcal{R}(j_{k+1};t_{k+1}),\mathcal{R}(q_{k+1};t_{k+1})) < \delta.$$

因此，我们已经完成了归纳步骤。

设 q_f 为序列 (j_k) 的一个聚点。因此，存在一个子序列，重新记作 (j_k)，收敛于 q_f。由逐点收敛性，$\mathrm{Drift}_\mu(\mathcal{R}(j_k;\ s_i)) \to \mathrm{Drift}_\mu(\mathcal{R}(q_f;\ s_i)$，因此对于每个 i，$\mathrm{Drift}_\mu(\mathcal{R}(q_f;\ s_i) < f(s_i)s_i$。此外，$\mathcal{R}(j_k;\ t_i) \to \mathcal{R}(q_f;\ t_i)$，因此对于每个 i，点 $\mathcal{R}(q_f;\ t_i)$ 到 $\mathcal{T}_\varepsilon$ 的距离至多为 2δ。因此，存在某个 ε'，使得对于所有 i，$\mathcal{R}(q_f;\ t_i) \in T_{\varepsilon'}$。于是，由命题 4.3，存在某个 $c > 0$，使得 $\mathrm{Drift}_\mu(\mathcal{R}(q_f;\ t_i)) > ce^{t_i}$。此外，$t_{k+1} > s_k + 1 > t_k + 1$，因此序列 (t_k) 发散至无穷大，(s_k) 也如此。最后，测地线 $\mathcal{R}(q_f;\ \cdot)$ 是常返的，因此由 Masur 判据 [Mas92，定理 1.1]，q_f 的垂直叶层是唯一遍历的。 □

6 结论

定理 4.7 表明，沿着典型测地线，漂移呈指数函数增长。然而，它并未精确确定这种指数增长中的波动。此外，定理 1.3 表明，沿测地线的漂移行为可能千差万别，因此自然会问，典型测地线内部是否也存在某种变化。

问题 6.1. 设 ν 是 $Q^1(o)$ 上的一个测度，且满足定理 *4.7* 的假设。我们是否有

$$0 < \liminf_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Drift}_\mu(\mathcal{R}(q;t))}{e^t} = \limsup_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Drift}_\mu(\mathcal{R}(q;t))}{e^t} < \infty$$

ν-几乎必然成立？

注意，根据推论 4.8，我们有 $\limsup_{t\to\infty} \frac{\mathrm{漂移}_\mu(\mathcal{R}(q;t))}{e^t} > 0$ 以及 $\liminf_{t\to\infty} \frac{\mathrm{漂移}_\mu(\mathcal{R}(q;t))}{e^t} < \infty$。在定理 4.7 的证明中，我们通过一个函数对漂移与指数函数 e^t 之间的商进行了界定，该函数取决于截至时间t在 Teichmüller 空间的薄部中所花费的最长连续时间。这些最大离开时长的增长可能因测度而异。一方面，根据 Gadre [Gad17，Lemma 5.5]的工作，对于勒贝格测度，可以合理地猜想最大离开时长的增长略快于 $\log(t)$。另一方面，由于调和测度下子曲面投影的指数衰减，可以预期（尽管这仍未得到证明），对于一条调和测度典型的 Teichmüller 测地线，在薄部中所花费的最长连续时间的量级为 $\log(\log(t))$。因此，对于勒贝格测度和调和测度，上一个问题的答案可能不同。

参考文献

[AGG+nt] Aitor Azemar、Vaibhav Gadre、Sébastien Gouëzel、Thomas Haettel、Pablo Lessa 和 Caglar Uyanik。随机游走速度是 Teichmüller 空间上的适当函数，2022，预印本。[AGJ22] Aitor Azemar、Vaibhav Gadre 和 Luke Jeffreys。调和测度的统计双曲性。《国际数学研究通知》IMRN，（8）：6289–6309，2022。[CR07] Young-Eun Choi 和 Kasra Rafi。Teichmüller 度量与 Lipschitz 度量的比较。《伦敦数学学会杂志》（2），76(3)：739–756，2007。[DDM14] Spencer Dowdall、Moon Duchin 和 Howard Masur。Teichmüller 空间中的统计双曲性。《几何与泛函分析》，24(3)：748–795，2014。[DKN09] Bertrand Deroin、Victor Kleptsyn 和 Andrés Navas。关于圆上的极小群作用的遍历性问题。《莫斯科数学杂志》，9(2)：263–303，附录，2009。[FM12] Benson Farb 和 Dan Margalit。《映射类群入门》，普林斯顿数学丛书第 49 卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2012。[Gad17] Vaibhav Gadre。沿随机测地线的游程部分和与二次微分模空间薄部的体积渐近。《欧洲数学学会杂志》（JEMS），19(10)：3053–3089，2017。[GL00] Frederick P. Gardiner 和 Nikola Lakic。《拟共形 Teichmüller 理论》，数学调查与专著第 76 卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2000。[KL11] Anders Karlsson 和 François Ledrappier。非交换遍历定理。载于《几何、刚性与群作用》，芝加哥数学讲义，页 396–418。芝加哥大学出版社，芝加哥，伊利诺伊州，2011。[KM96] Vadim A. Kaimanovich 和 Howard Masur。映射类群的泊松边界。《数学发明》，125(2)：221–264，1996。[KT22] Petr Kosenko 和 Giulio Tiozzo。余紧福克斯群的基本不等式。《Forum Mathematicum Sigma》，10：e102，2022。[LR11] Anna Lenzhen 和 Kasra Rafi。沿 Teichmüller 测地线，曲线长度是拟凸的。《微分几何杂志》，88(2)：267–295，2011。[Mas82] Howard Masur。Teichmüller 空间的两个边界。《杜克数学杂志》，49(1)：183–190，1982。[Mas92] Howard Masur。二次微分的非遍历叶状结构集合的 Hausdorff 维数。《杜克数学杂志》，66(3)：387–442，1992。[Min93] Yair N. Minsky。Teichmüller 测地线与双曲三维流形的端。《拓扑学》，32(3)：625–647，1993。[Tan19] Ryokichi Tanaka。双曲空间中调和测度的维数。《遍历理论与动力系统》，39(2)：474–499，2019。[Wol79] Scott Wolpert。长度谱作为紧黎曼曲面的模。《数学年刊》（2），109(2)：323–351，1979。