分形导数、分数阶导数与q变形微积分

Airton Deppman

圣保罗大学物理研究所，圣保罗，巴西 *05508-090*。

Eugenio Meg´ıas

格拉纳达大学原子、分子与核物理系及卡洛斯一世理论与计算物理研究所，西班牙格拉纳达市新泉大道（*Avenida de Fuente Nueva*）*s/n*，邮编*18071*。

Roman Pasechnik

隆德大学物理系，*S¨olvegatan 14A*，瑞典隆德 *SE-22362*

arXiv:2305.04633v2 [math-ph] 7 Nov 2023

摘要

本文分析了分数阶导数和分形导数，并探讨了二者的异同。分形导数与豪斯多夫的分数维几何概念密切相关。本文区分了定义在分形域上的函数的导数，以及像空间为分形空间的分形函数的导数。文中讨论了分形导数的不同连续近似，并指出q微积分导数是分形函数的分形导数的一种连续近似。对于定义在分形空间上的函数的导数，也可以得到类似的形式。Caputo导数也与分形导数的一种连续近似成正比，而分数阶函数的导数的相应近似则导出类Caputo导数。本文的研究结果对分形系统中的分数阶微分方程、反常扩散、信息传播与疫情传播研究，以及分形几何研究具有启示意义。

1. 引言

分数阶微分方程已被用于描述复杂系统的行为。人们对这一数学工具日益增长的兴趣，使得亟需分析其基础。分数阶微分方程在流体动力学、金融学及其他复杂系统中的广泛应用，促使人们深入研究分数阶导数的性质及其几何和物理意义。分数阶导数常与分形几何联系在一起，但迄今为止，分数阶导数与分形导数之间的联系尚未得到阐明。分数阶导数已用于许多应用领域 [1, 2],，因此有必要加深我们对其几何意义及其与分形之间关系的理解。q演算常用于描述分形系统的统计性质 [3, 4]。然而，q演算与分形导数之间的关系尚未得到充分理解。

本文回顾了分形导数的基础，并阐明了它们与分数阶导数及q-微积分之间的联系。将标准微积分推广至包含分数阶导数和积分，是一个令人振奋的研究领域，已有许多相关研究。

分数阶推广有多种不同方案，分数阶导数已应用于多个领域。分数阶微分方程常用于描述复杂系统的行为。在参考文献 [5, 6], 中，作者分析了不同形式的分数阶导数，并讨论了它们的性质。Caputo导数是最常用的导数之一，其定义为

$$D_C^{\nu} h(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \int_{x-\delta}^{x} (x-t)^{-\nu} \frac{dh}{dt} dt\,, \tag{1}$$

它是黎曼–刘维尔分数阶导数 [7] 的一个特例。

豪斯多夫建立了分数维空间的基本理论，关于这一主题的介绍可见 [8]。与分形空间相关的重要量之一是豪斯多夫测度，记为$\mathcal{H}_s(\mathbb{F})$。其定义基于测度 $\mathcal{H}_{s\delta}(\mathbb{F})$，定义如下：

$$\mathcal{H}^s(\mathbb{F}) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta(\mathbb{F})\,, \tag{2}$$

其中，该测度依赖于博雷尔子集$\mathbb{F} \subseteq \mathbb{R}^n$的 δ-覆盖。空间 $\mathbb{F}$ 将称为分形空间，其豪斯多夫维数记为 α，定义为

$$\alpha = \inf\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(\mathbb{F}) = 0\} = \sup\{s : \mathcal{H}^s(\mathbb{F}) = \infty\}\,. \tag{3}$$

如果 $0 < \alpha < \infty$，则称 δ^α-覆盖的豪斯多夫测度为质量分布，记作 $\gamma^\alpha(\mathbb{F},a,b)$ [9, 10, 11],

电子邮箱地址： deppman@usp.br (Airton Deppman), emegias@ugr.es (Eugenio Meg´ıas), Roman.Pasechnik@hep.lu.se (Roman Pasechnik)

将在下文讨论。分形导数与分数阶导数是不同的概念 [12], , 而非局域性是分形导数的显著特点。关于这一主题及其应用的全面综述，请参见参考文献 [13]。Parvate–Gangal 导数定义于分形域上的函数。本研究表明，将相同的概念扩展到像为分形的函数，可以为探究分形导数在复杂系统研究中的作用带来新的见解。

Tsallis 统计学最初被提出，用于描述分形系统的统计特性。它引入了一种非加性熵，通过常规热力学形式体系，可以得到非广延热力学 [14, 15]。为处理非加性问题，人们提出了 q-微积分 [16]。q-微积分的一个重要结果是 q-导数，其表达式为:

$$\frac{\bar{d}f}{dx} = f^{q-1}\frac{df}{dx}. \tag{4}$$

注意，如果函数 f 是一个q-指数函数，那么上面的特殊导数 与q-指数函数的标准导数完全相同。这个导数可以直接与共形导数 [17] 联系起来。

上述三个不同的理论领域一直以来都是独立研究的，并行发展。尽管它们存在许多共同之处，但迄今为止，这些领域之间的联系尚未得到证明 [18]。本研究旨在通过 Parvate 和 Gangal 提出的分形导数的连续近似，建立 Caputo导数与q微积分之间的联系。在本研究中，我们假设分形导数是按照 Parvate、Gangal 及其合作者提出的定义正确计算的 [9, 10, 11], , 并讨论如何将分数阶导数的一些相关形式以及q变形导数作为分形导数的连续近似来获得。

2. 分形导数

引理1. 若 $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ 且 $f = (f_1(x), \cdots, f_m(x)) \in \mathbb{R}^m$ 是一个 m 维向量场 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$。那么，$m \le n$。

证明： 假设 $m > n$，那么 $(f_1(x), \cdots, f_n(x))$ 构成一组新的n 个独立变量，它们是n 个关于x的独立变量的函数。因此，$f_{n+1}(x)$ 与该集合中的函数不独立。

定义1. 维数为 $m = 1$ 的向量场是一个函数。

引理2. 若存在反函数 $f^{-1}(f(x)) = x$，则 $m = n$。

证明： 由引理1可立即得出。

引理3。 若 f 是一个分形向量场 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\alpha$，且 $\alpha \in \mathbb{R}$，则 $\alpha \le n$。

证明： 直接应用引理1即可得出。

定义 2。 维数为 $\alpha \le 1$ 的分形向量场是一个分形函数。

定义 3. 若 α 维函数满足 $\alpha > 1$，则它是分形向量场；若满足 $\alpha \le 1$，则它是分形函数。

定义 4. 如果 $\gamma(\mathbb{F}, a, b)$ 是覆盖 F 的豪斯多夫质量分布，其中 $a, b \in F$，则阶梯函数 $S^{\alpha}_{F,\,a_o}$ 定义为

$$S^{\alpha}_{F,a_o} = \begin{cases} \gamma(\mathbb{F}, a_o, x) & for\ x > a_o \\ \gamma(\mathbb{F}, x, a_o) & for\ x < a_o \end{cases}. \tag{5}$$

引理4. 阶梯函数是标量。

证明： 阶梯函数与豪斯多夫质量函数成正比，后者是由 $\delta^{\alpha}(x) \in \mathbb{F}$ 的并集所产生的体积，因此它是一个标量。

定义 5. 如果 $\mathbb{F}$ 是 δ^{α}-覆盖，且 $f: \mathbb{F} \to \mathbb{R}$，那么 $f(x)$ 的分形导数是

$$D^{\alpha}_{\mathbb{F},a_o} f(x_o) = \begin{cases} F \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{S^{\alpha}_{F,a_o}(x) - S^{\alpha}_{F,a_o}(x_o)} & x, x_o \in \mathbb{F} \\ 0 \quad otherwise \end{cases}. \tag{6}$$

定理 1. 反函数存在分形导数，且该导数是分形导数的反函数。

证明： 考虑x、$x_o \in \mathbb{F}$。假设存在函数$g: \mathbb{R} \to \mathbb{F}$，使得$g(f(x)) = x$。那么，

$$D^{\alpha}_{\mathbb{F},a_o} g(f_{x_o}) = F \lim_{x \to x_o} \frac{g(f_x) - g(f_{x_o})}{f(x) - f(x_o)} \frac{f(x) - f(x_o)}{S^{\alpha}_{F',a_o}(x) - S^{\alpha}_{F',a_o}(x_o)} = 1, \tag{7}$$

这里采用了简化记法$f_x = f(x)$。由此可得

$$F \lim_{x \to x_o} \frac{g(f_x) - g(f_{x_o})}{f(x) - f(x_o)} = F \lim_{x \to x_o} \frac{S^{\alpha}_{F',a_o}(x) - S^{\alpha}_{F',a_o}(x_o)}{f(x) - f(x_o)}. \tag{8}$$

反函数的分形导数可应用于任意分形函数h: $\mathbb{R} \to \mathbb{F}$。在这种情况下，阶梯函数应用于函数$h$的分形像空间。函数$f$ 可以任意定义，但需满足其存在反函数f^{-1}这一约束。一个特别值得关注的情形是恒等函数$f(x) = x$，此时有

$$[D^{\alpha}_{\mathbb{F},\varphi}]^{-1} h(x_o) = F \lim_{x \to x_o} \frac{S^{\alpha}_{F,\varphi}[h(x)] - S^{\alpha}_{F,\varphi}[h(x_o)]}{x - x_o}, \tag{9}$$

其中 $\varphi = h(a_o)$。

注意，在这种情况下，函数h 的像空间与定义域相同，即h: $\mathbb{F} \to \mathbb{F}$。

定义6. 上述结果可以推广为定义反函数的分形导数，或者等价地，定义分形导数的反函数，如下

$$[D^{\alpha}_{\mathbb{F},\varphi}]^{-1} h(f_{x_o}) = \begin{cases} F \lim_{x \to x_o} \frac{S^{\alpha}_{F,\varphi}[h(x)] - S^{\alpha}_{F,\varphi}[h(x_o)]}{x - x_o} & x, x_o \in \mathbb{F}. \\ 0 \quad otherwise \end{cases} \tag{10}$$

推论1.1. 只有当一个分形函数在区间 $[a,b]$ 上几乎处处不发散时，其导数才有定义（遵循该领域的标准术语，若一个函数发散点的集合的勒贝格测度为零，我们就称该函数几乎处处不发散）。

证明： 根据定义 4，只有在质量分布函数可以定义时，阶梯函数才是良定义的。当豪斯多夫维数为 $0 < \alpha < \infty$时，质量分布等于豪斯多夫测度。仅当该函数几乎处处不发散时，这一条件才得到满足。

定理 2。 如果函数 $h(x)$ 在 $\mathbb{F}$ 中几乎处处连续且不发散，并且 $h'(x) = [D^{\alpha}_{\mathbb{F},\varphi}]^{-1}h(x)$，那么 $h(x)$ 与 $h'(x)$的豪斯多夫维数相同。

证明： 设 $\mathbb{F}$ 为分形函数$h(x)$ 的 δ^{α}-覆盖，$\mathbb{F}'$ 为分形导数逆的 δ^{β}-覆盖。对于任意$\delta^{\alpha}[h(x)] \in \mathbb{F}$，存在一个 $\delta^{\beta}[h'(x)] \in \mathbb{F}'$，因此 $\beta \geq \alpha$。对于 $\delta^{\beta}[h'(x)] \in \mathbb{F}'$，存在一个 $\delta^{\alpha}[h(x)] \in \mathbb{F}$；因此，$\alpha \leq \beta$。所以，$\alpha = \beta$。

定义 7. 我们将 α 维分形函数的逆记为 $D^{\alpha}_{\mathbb{F},\varphi}h(x)$，并将其称为 α 维分形函数（或简称分形函数）的分形导数，而该分形导数则称为分形空间上的分形导数。

De定义 8. 分形函数的偏导数】【。 *ion is*

$$D^{\alpha}_{\mathbb{F},\varphi}|_i h(f_x) = \begin{cases} F\lim_{x_i \to x_{o,i}} \frac{S^{\alpha}_{F,\varphi}[h(x)] - S^{\alpha}_{F,\varphi}[h(x_o)]}{x_i - x_{o,i}} & x, x_o \in \mathbb{F}, \\ 0 \qquad otherwise \end{cases} \tag{11}$$

其中，索引 i 表示向量 x 的分量 x_i。

推论 2.1。 $D^{\alpha}_{\mathbb{F},\varphi}|_i\, h(f_x)$ 的维数为 $\alpha \leq 1$。

证明： 这直接由引理1和定理2得出。

定义 9. 阶梯函数微分定义为

$$dS^{\alpha}_{F,a_o}(x) = \begin{cases} F\lim_{dx \to 0} \left[S^{\alpha}_{F,a_o}(x + dx) - S^{\alpha}_{F,a_o}(x) \right] & if\ x, x + dx \in \mathbb{F} \\ 0 \qquad otherwise \end{cases} \tag{12}$$

定理 3。 阶梯函数微分可以近似为

$$dS^{\alpha}_{F,a_o}(x) = \frac{A(\alpha)}{\alpha} dx^{\alpha}, \tag{13}$$

其中

$$A(\alpha) := 2\pi^{\alpha/2}/\Gamma(\alpha/2). \tag{14}$$

证明： 对于任意体积 $(\delta x)^n \in \mathbb{R}^n$，它与 $\mathbb{F}$的交集具有体积 $(\delta x)^{\alpha}$。考虑半径为 x 的n维球体的体积，其表达式为

$$V(x) = \frac{A(n)}{n} x^n, \tag{15}$$

其中，$A(n) = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ 为表面积项，其中 $\Gamma(z)$ 为欧拉伽马函数，且 $x = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$。因此，有限宽度为 δx 的球壳的体积为

$$\delta V(x) = \frac{A(n)}{n} ((x + \delta x)^n - x^n). \tag{16}$$

在 $\delta x \to dx$ 的极限下，此时 dx 为无穷小量，得到的是

$$dV(x) = A(n)x^{n-1}dx = \frac{A(n)}{n} dx^n, \tag{17}$$

其中$dx^n := d(x^n)$。

$\delta V(x)$ 与 $\mathbb{F}$ 的交集，记为 $\delta V_{\alpha}(x)$，是

$$\delta V_{\alpha}(x) = \frac{A(\alpha)}{\alpha} ((x + \delta x)^{\alpha} - x^{\alpha}). \tag{18}$$

在极限 $\delta x \to dx$ 下，这将导出

$$\delta V_{\alpha}(x) \to dV_{\alpha}(x) = A(\alpha)x^{\alpha-1}dx = \frac{A(\alpha)}{\alpha} dx^{\alpha}. \tag{19}$$

另一方面，$dS^{\alpha}_{F,a_o}(x)$ 是无穷小体积$dV \in \mathbb{R}^n$ 与 $\mathbb{F}$的交集的体积。（此处使用的乘法系数 $A(\alpha)$ 适用于整数维数。分数维数的情况更具挑战性，因此需要谨慎考虑该系数。在这项工作中，我们关注连续近似的形状。）

$$dS^{\alpha}_{F,a_o}(x) = \frac{A(\alpha)}{\alpha} dx^{\alpha} = A(\alpha)x^{\alpha-1}dx. \tag{20}$$

定义10。 分形函数的连续近似被定义为一组无穷小元素 dx，使得方程(20)得到满足。

定理 4. 函数分形导数的连续近似是

$$D^{\alpha}_{\mathbb{F},\varphi}h(x) = \frac{A(\alpha)}{\alpha} \frac{dh^{\alpha}}{dx} = A(\alpha)h^{\alpha-1}(x)\frac{dh}{dx}(x). \tag{21}$$

定理 5。 分形函数的分形导数的连续近似为

$$D^{\alpha}_{\mathbb{F},\varphi}h(x) = \frac{A(\alpha)}{\alpha} \frac{dh^{\alpha}}{dx} = A(\alpha)h^{\alpha-1}(x)\frac{dh}{dx}(x). \tag{22}$$

证明： 这直接由函数的分形导数和连续近似的定义得出。

定理 6. 考虑一个分形函数 f：$\mathbb{R}^n \to \mathbb{F}$，其中$\mathbb{F}$ 是一个 δ^α-覆盖，满足 $n-1<\alpha<n$，对于 $n>1$。它定义了一组分形函数 $\{f_i(x_i)\}$，其维数为 $\{\alpha_i\}$，使得$\alpha=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$。

证明：考虑分形函数 $f_k(x_k)=f(a,\cdots,x_k,\cdots,z)$，其中 a、⋯、z 为常数。对于任意区间 $I=[x_k, x_k+\delta x_k]$，I 与 $\mathbb{F}$ 的交集为 $(\delta x_k)^{\alpha_k}$，其中 $\alpha_k<1$。对于一个 α_{k-1} 维函数 $h_{k-1}(x1,\cdots,x_{k-1},k,l,\cdots,z)$，若对任意体积 $(\delta x)^{k-1}$，其与 $\mathbb{F}$ 的交集为 $(\delta x)^{\alpha_{k-1}}$，则函数 $h_k(x1,\cdots,x_{k-1},x_k,l,\cdots,z)$ 的维数为 $(\delta x)^{\alpha_{k-1}}\delta x=(\delta x)^{\alpha_k}$，其中 $\alpha_k=\alpha_{k-1}+\alpha_k$。定理由归纳法得证。

定义 11. 考虑一个维数为$\alpha<1$的分形函数 h。分形函数的梯度定义为

$$\mathbf{D}^\alpha_{\mathbb{F},\varphi}h(x_o)=\left(D^{\alpha_1}_{\mathbb{F},\varphi}|_1\,h(x_o),\cdots,D^{\alpha_n}_{\mathbb{F},\varphi}|_n\,h(x_o)\right),\qquad(23)$$

其中 $\alpha=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$。

定义 12. 对于 $\alpha>1$，函数的偏分形导数为

$$\mathbf{D}^\alpha_{\mathbb{F},\varphi}|_i h(x_o)=\left(D^{\alpha_1}_{\mathbb{F},\varphi}|_i\,h(x_o),\cdots,D^{\alpha_n}_{\mathbb{F},\varphi}|_i\,h(x_o)\right),\qquad(24)$$

其中 $\alpha=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$。

定理 7. 对于有限的 δ，分形函数在区间 $[x-\delta,x]$ 上的导数为

$$D^\alpha_{[\delta],\varphi}h(x)=\frac{A(\alpha)}{\alpha}\int_{x-\delta}^{x}h^{\alpha-1}(t)\frac{dh}{dt}dt.\qquad(25)$$

证明： 区间 $[x-\delta,x]$ 中的导数是

$$D^\alpha_{[\delta],\varphi}h(x)=\int_{x-\delta}^{x}D^\alpha_{\mathbb{F},\varphi}h(t)dt.\qquad(26)$$

利用定义10，定理得证。

定理 8. 对于有限的 δ，在分形空间中，区间 $[x-\delta,\ x]$ 内函数的导数是

$$D^\alpha_{[\delta],a}h(x)=\frac{A(\alpha)}{\alpha}\int_{x-\delta}^{x}[h(x)-h(t)]^{\alpha-1}\frac{dh}{dt}dt.\qquad(27)$$

证明： 证明通过将方程 (20) 中的连续近似应用于定义 5 中分形空间上的导数来完成。

请注意，对于分形函数的分形导数，α 维球体不必以 φ 为中心；对于分形空间上的导数，球体也不必以 a 为中心。计算导数的点x可以设为球体的中心。

定义13。 基于以 x 为中心的 α维球体，对分形空间上函数的导数进行连续近似，记作 $D^\alpha_{\mathbb{F}},{}_xh(x)$。

定理9。 分形空间上函数的导数的连续近似，$D^\alpha_{\mathbb{F}},{}_xh(x)$ 在区间 $[x-\delta,\ x]$,内，对于有限的 δ，由下式给出

$$D^\alpha_{\mathbb{F},x}h(x)=\frac{A(\alpha)}{\alpha}\int_{x-\delta}^{x}(x-t)^{1-\alpha}\frac{dh}{dt}dt,\qquad(28)$$

它与 *Caputo*导数成正比。

证明： 根据定理 5，考虑球壳的半径为 $x-t$，可得局部连续近似为

$$D^\alpha_{\mathbb{F},x}h(t)=A(\alpha)(x-t)^{1-\alpha}\frac{dh}{dx}(t).\qquad(29)$$

根据定义13，可得

$$D^\alpha_{\mathbb{F}}h(x)=\int_{x-\delta}^{x}D^\alpha_{\mathbb{F},x}h(t)dt,\qquad(30)$$

由此即可证明该定理。

定义14. 以 x 为中心的 α 维球上的分形函数导数的连续近似记为 $D^\alpha_{\mathbb{F}}\,h(x)$。

定理10. 对于有限的 δ，区间 $[x-\delta,x]$，上分形函数导数 $D^\alpha_{\mathbb{F}},{}_{\varphi_x}h(x)$ 的连续近似为

$$D^\alpha_{\mathbb{F},\varphi_x}h(x)=\frac{A(\alpha)}{\alpha}\int_{x-\delta}^{x}(\varphi_x-h(t))^{\alpha-1}\frac{dh}{dt}dt,\qquad(31)$$

对于满足 $h(t)<\varphi_x=h(x)$ 的t。

证明： 证明过程与定理 9 的证明相同。

推论10.1。 定义 *10* 中的连续近似，与 *Caputo*导数在 $[x-\delta,x]$ *for* $\delta\to 0$ 范围内的连续近似极限成正比。

3. 讨论与结论

Parvate 和 Gangal 在定义 5 中提出的分形导数，是最接近豪斯多夫分数维空间概念的概念。因此，这里将其视为分析分形导数和分数阶导数的起点。

Parvate–Gangal 导数的逆存在是一个自然结果，即，对定义在定义域上的函数求导，而该函数的像空间具有分形结构；定义域可以是分形空间，也可以不是。这一点已在定理 1 中证明。

本研究表明，可以定义具有任意维数 α 的分形函数，例如维数为 $\alpha > 1$的分形向量场。不过，最受关注的是具有 $\alpha \leq 1$ 的情形，因为它们与本研究所涉及的物理问题相关。

在分形空间上对分形函数求导，可以得到连续近似，如定理 4 所示。此外，如定理 5 所示，在分形空间中函数的导数也可以得到类似的连续近似。这种近似与参考文献 [19] 中用于推导 Plastino–Plastino 方程的特殊导数 相同。Plastino–Plastino 方程是 Fokker–Planck 方程针对具有非局域关联的系统的推广。

为了说明连续近似的行为，我们采用广为人知的康托尔集，其维数为$\alpha = 0.631$。我们旨在展示连续近似如何与该分形集的质量分布$S^{\alpha}_{\mathbb{F}}$，$_0(x)$相吻合。为此，我们数值计算了该分形集截至第 4 层的质量分布。换言之，分形集的最小组成部分的线性长度为$l = 3^{-4}$。我们采用δ-覆盖，取 $\delta = 0.01$，以计算质量分布。

接下来，我们拟合一个幂律函数$y(x) = ax^b$。根据本文给出的理论结果，指数b应当非常接近康托尔集的分形维数 α 。所得结果如图 1 所示，最佳拟合对应于$b = 0.636$，与预期值十分接近。这一结果有效地展示了连续近似的应用，并为以连续近似替代质量分布提供了见解。需要指出的是，构造分形测度连续近似的方法还有许多，而这些方法各自将

会产生不同的分数阶导数。研究阶梯函数不同近似形式的一致性和便利性，是一个有趣的研究方向，但超出了本研究的范围。

连续近似导数用标准导数算子表示，并可与 q 变形微积分 [16] 相关联。与分形导数不同，连续近似是局部导数，而连续近似的非线性行为则是分形导数非局部性质的遗留。

通过考虑有限的 δ-覆盖，可以将非局域性显式引入连续近似中。在非局域连续近似中，导数是通过在有限范围 δ 内对局部连续导数积分得到的。

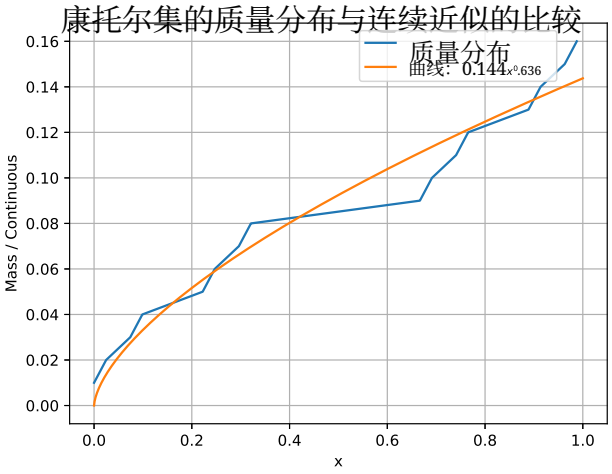

图 1：采用 $\delta = 0.01$ 的 δ-覆盖计算的康托尔集第 4 次迭代的质量分布（蓝线），并与连续近似（橙线）进行比较。连续近似由拟合质量分布的函数 $y(x) = ax^b$ 表示。最佳拟合结果为 $b = 0.636$，与康托尔集维数 $\alpha = 0.631$ 一致。

这种非局部连续近似在定理9中给出，它正是Caputo分数阶导数。

分形空间中函数的导数与分形函数的导数会产生不同的连续近似。前者可与 Caputo分数阶导数相关联，如定理9所示；后者则会产生类Caputo导数，如定理10所示。在 [20]中也可以找到类似于 Caputo导数的导数。

本研究的结果揭示了分形导数与一些最常用分数阶导数之间的关系。将定理 5 的结果与方程 (4) 进行比较，可以清楚地看出，分形函数导数的局部连续近似等于q导数。因此，我们首次证明，q微积分导数是分形导数的一种连续近似。

由q导数与分形函数导数的局部连续近似之间的关系（定理 5），以及分形函数导数与类Caputo分数阶导数之间的联系（定理10）可知，q导数与类Caputo导数之间的联系，是通过改变计算非局部连续近似时所围绕的 α 维球的中心而建立的。由此可以得出结论：通过考虑连续近似的不同形式以及分数阶导数的非局部性，可以从 Parvate–Gangal 分形导数得到不同形式的分数阶导数。

还可以沿着本文采用的思路探索其他分形导数。黎曼–刘维尔导数与 Caputo导数密切相关 [21]，有趣的是，可以观察参考文献 [22, 23]提出的分形导数与本研究所考察的连续近似之间的相似之处。参考文献 [24]中使用的分数阶导数，等于本研究所得到的分形空间中函数的分形导数的局部连续近似

。参考文献 [25]研究了这一分数阶导数及其与 q-导数的关系。通过明确建立 Parvate–Gangal 分形导数与 Caputo 分数阶导数之间的联系，本研究为深入理解分数阶微分方程的应用开辟了可能性；这类方程在许多不同领域中十分常见。在这方面需要指出，分形和分数阶微分方程已应用于多种场景，例如多孔介质或非均质介质中的系统动力学 [26, 27, 28], 扩散流 [29, 30, 31, 32, 33], 孤子 [34], 复杂系统控制 [35], 流行病过程 [36], 聚合物等离子体 [37]以及其他许多领域。本研究对这些物理系统的影响值得在未来进一步探讨。本研究对这些物理系统的影响值得在未来进一步探讨。其对分形函数研究与应用的意义 [38]也值得进一步探讨。

4. 致谢

作者感谢与 Alireza K. Golmankhaneh 博士进行的富有成效的讨论，并感谢 M.S. Josu´e 和 M. P. Policarpo 绘制图1。A.D. 的研究获得了 INCT-FNA 项目（应用核物理科学技术国家研究所）项目编号 464898/2014-5、巴西国家科学技术发展委员会（CNPq-Brazil）项目编号 304244/2018- 0、INCT- FNA 项目项目编号 464 898/2014-5 以及巴西圣保罗州研究基金会（FAPESP）项目编号 2016/17612-7 的资助。E.M. 的工作获得了西班牙科学与创新部/国家研究署（MCIN/AEI/10.13039/501100011033）资助的项目 PID2020-114767GB-I00、欧洲区域发展基金/安达卢西亚自治区政府经济与知识部 2014—2020 运营计划（资助编号 A-FQM-178-UGR18）以及安达卢西亚自治区政府资助编号 FQM-225 的支持。E.M. 的研究还获得了西班牙科学与创新部（Spanish MICIN）Ramón y Cajal 计划资助，资助编号 RYC-2016-20678。R.P. 的部分研究获得瑞典研究理事会资助，合同编号为 621-2013-4287 和 2016-05996；此外还获得欧洲研究理事会（ERC）通过欧盟“地平线2020”研究与创新计划提供的资助（资助协议编号 668679）。

参考文献

[1] J. A. Tenreiro Machado、M. F. Silva、R. S. Barbosa、I. S. Jesus、C. M. Reis、M. G. Marcos 和 A. F. Galhano，“分数阶微积分在工程学中的一些应用”，数学问题与工程，第 2010 卷，第 1–34 页，2010 年。[2] L. Debnath，“分数阶微积分在科学与工程学中的最新应用”，国际数学与数学科学杂志，第 2003 卷，3442，2003 年 54，3413，无页码。[3] A. Deppman 和 E. O. Andrade-II，“ 分形网络中 Tsallis 统计的涌现 ”，*PLoS One*，第 16 卷，第 9 期，文章编号 e0257855，2021 年。[4] A. Deppman，“热分形、非加性熵与 q 微积分”，物理学，第 3 卷，第 2 期，第 290–301 页，2021 年。[5] D. Val´erio、J. J. Trujillo、M. Rivero、J. A. T. Machado 和 D. Baleanu，“分数阶微积分：实用公式综述”，欧洲物理学杂志专题，第 222 卷，第 1827–1846 页，2013 年 9 月。[6] D. Val´erio、M. D. Ortigueira 和 A. M. Lopes，“分数阶导数有多少种？ ”，数学，第 10 卷，第 5 期，文章编号 737，2022 年。[7] T. Abdeljawad，《黎曼与 Caputo 分数阶差分》，Com- put. Math. Appl.，第 62 卷，第 3 期，第 1602–1611 页，2011 年。[8] K. Falconer，《分形几何》。田纳西州纳什维尔：John Wiley & Sons，第 3 版，2014 年 1 月。[9] A. Parvate 和 A. D. Gangal，《实数轴分形子集上的微积分——i：构建》，Fractals，第 17 卷，第 53–81 页，2009 年。[10] A. Parvate 和 A. D. Gangal，《实数轴分形子集上的微积分——ii：与普通微积分的共轭》，Fractals，第 19 卷，第 03 期，第 271–290 页，2011 年。[11] A. Parvate、S. Satin 和 A. D. Gangal，《rn 中分形曲线上的微积分》，Fractals，第 19 卷，第 15–27 页，2011 年。[12] A. K. Golmankhaneh 和 D. Baleanu，《分形集上的非局部积分与导数及其应用》，Open Phys.，第 14 卷，第 1 期，第 542–548 页，2016 年。[13] A. K. Golmankhaneh，《分形微积分及其应用：F-alpha-微积分》。World Scientific，2023 年。[14] C. Tsallis，《玻尔兹曼-吉布斯统计的一种可能推广》，Journal of Statistical PhysicsJ，第 52 卷，第 1-2 期，第 479–487 页，1988 年。[15] C. Tsallis，《非广延统计力学导论》。纽约：Springer，2009 年。[16] E. P. Borges，《受非广延热统计学启发的一种可能的变形代数与微积分》，Physica A: Statistical Mechanics and its Applications，第 340 卷，第 1 期，第 95–101 页，2004 年。[17] R. Khalil、M. Al Horani、A. Yousef 和 M. Sababheh，《分数阶导数的新定义》，J. Comput. Appl. Math.，第 264 卷，第 70 页，2014 年，第 65 页–。[18] C. Cattani，《分形与分数阶》，Fractal Fract.，第 1 卷，第 1 页，2017 年 3 月。[19] A. Deppman、A. Khalili Golmankhaneh、E. Meg´ıas 和 R. Pasechnik，《从具有非局域关联的玻尔兹曼方程到标准非线性福克-普朗克方程》，Phys. Lett. B，第 839 卷，第 137752 页，2023 年 4 月。[20] R. Almeida，《相对于另一函数的函数 Caputo分数阶导数》，Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.，第 44 卷，第 460–481 页，2017 年。[21] H. M. Srivastava，《分数阶导数与积分：入门概述及最新进展》，Kyungpook Mathematical Journal，第 60 卷，第 1 期，第 73–116 页，2020 年。[22] J.-H. He，《分形微积分及其几何解释》，Results Phys.，第 10 卷，第 272–276 页，2018 年。[23] J.-H. He，《分形时空与分数阶微积分教程式综述》，Int. J. Theor. Phys.，第 53 卷，第 3698–3718 页，2014 年 11 月。[24] W. Chen，《反常扩散背后的时空结构》，Chaos Solitons Fractals，第 28 卷，第 4 期，第 923–929 页，2006 年。[25] J. Weberszpil、M. J. Lazo 和 J. A. Helay¨el-Neto，《一类 q变形代数与具有分形度量的介质中的豪斯多夫导数之间的联系》，Physica A，第 436 卷，第 399–404 页，2015 年。[26] Q. Yin、Y. Zhao、W. Gong、G. Dai、M. Zhu、W. Zhu 和 F. Xu，《粉质黏土的分形阶蠕变损伤本构模型》，Acta Geotech.，2023 年。[27] Y. Bouras 和 Z. Vrcelj，《恒定及随时间变化荷载下混凝土的分数阶与分形导数蠕变模型》，Constr. Build. Mater.，第 367 卷，第 130324 期，第 130324 页，2023 年。[28] Y. Liang 和 P. Guan，《用于表征混凝土超慢蠕变的改进麦克斯韦模型及结构阻尼器》，Constr. Build. Mater.，第 329 卷，第 127181 期，第 127181 页，2022 年。[29] F. Liu、L. Yang 和 M. Nadeem，《一种用于求解具有分形导数的 Drinfeld–Sokolov–Wilson模型近似解的新型分形变换》，Fractals，第 31 卷，第 01 期，第 2350007 页，2023 年。[30] K.-L. Wang，《具有变系数的修正分形气体动力学模型的新型解析方法》，Z. Angew. Math. Mech.，2022 年。[31] H. Sun、S. Nie、A. I. Packman、Y. Zhang、D. Chen、C. Lu 和 C. Zheng，《豪斯多夫分形导数在确定垂向沉积物浓度分布中的应用》，Int. J. Sediment Res.，第 38 卷，第 1 期，第 12–23 页，2023 年。[32] K.-L. Wang，《流体动力学中分形 Swift–Hohenberg模型的一种新型变分方法》，Fractals，第 30 卷，第 07 期，2022 年。[33] R. A. El-Nabulsi 和 W. Anukool，《流体动力学中的分形维数及其对瑞利问题、伯格斯涡旋和开尔文–亥姆霍兹不稳定性的影响》，Acta Mech.，第 233 卷，第 381 页，2022 年，第 1, 363 期，第 1, 363 页–。[34] K. Manikandan、D. Aravinthan、J. B. Sudharsan 和 R. Vadivel，《光学

子在广义时空分数阶三次-五次非线性 schr¨odinger 方程及其 PT 对称势中的行为》，*Optik (Stuttg.)*，第 271 卷，第 170105 期，2022 年。[35] L. Sadek，《分形线性动力系统的可控性与可观测性》，*J. Vib. Control*，第 10775463221123354 页，2022 年。[36] J. M. P. Policarpo、A. A. G. F. Ramos、C. Dye、N. R. Faria、F. E. Leal、O. J. S. Moraes、K. V. Parag、P. S. Peixoto、L. Buss、E. C. Sabino、V. H. Nascimento 和 A. Deppman，《巴西一座城市中 COVID-19 的无尺度动力学》，*Appl. Math. Model.*，第 121 卷，第 166–184 页，2023 年。[37] M.-A. Paun 、 V.-A. Paun 和 V.-P. Paun，《聚合物等离子体激光烧蚀、等离子体羽流 Tsallis 熵及其 q 统计学解释的分形建模，第一部分：理论》，*Entropy (Basel)*，第 24 卷，第 342 页，2022 年。[38] A. Gowrisankar、A. Khalili Golmankhaneh 和 C. Serpa，《分形插值函数上的分形微积分》，*Fractal Fract.*，第 5 卷，第 157 页，2021 年 10 月。