arXiv:2305.04640v1 [math.DS] 8 May 2023

耗散扭转映射中双曲拟周期不变环面的计算机辅助证明

maps

Victor Linroth *

2023年5月9日

摘要

本文概述了一种基于后验类KAM定理、利用计算机辅助方法证明双曲拟周期不变环面存在性的方法。我们按照这一方法将其应用于耗散标准映射，并给出了在某些参数取值下不变圆存在性的计算机辅助证明。

1 引言

严格证明不变环面的存在性这一问题在KAM理论领域受到了广泛关注。KAM理论以A.N. Kolmogorov、V.I. Arnold和J.K. Moser的名字命名，他们的研究表明，可积哈密顿系统中的某些不变环面在受到扰动后仍能保持存在。实现这一结果的一个关键思想是，只考虑其内部动力学满足某种形式的非共振条件的不变环面。自这些学者最初的研究以来，他们的方法得到了极大的拓展，并被应用于其他类型的系统。在这一领域，我们可以看到所谓的后验KAM理论，它不再要求底层系统必须具有可积系统受到小扰动的形式，而是以一个接近不变的环面的存在性作为替代条件，参见例如 [dlL01、dlLGJV05、CCdlL22] ，或著作 [HCF+16]。这极大地扩展了可供研究的不变环面的范围，但证明存在性所需的估计很快就会变得过于复杂，难以通过手工计算完成。因此，人们引入了计算机辅助方法来克服这一复杂性。在这方面，验证数值计算方法（例如区间分析及类似方法）得到了广泛应用。相关示例可参见 [FHL16、FHL20、CC07、VL22、CL20、CL21、FH12、CS12]。

KAM理论中所使用方法的核心思想是：给定某类函数方程的一个近似解，可以尝试通过添加一个修正项来改进它，而该修正项是通过求解一个线性化方程得到的，该方程描述了近似解与精确解之间的真实差异。这种方法与求可微函数零点的牛顿法非常相似，实际上可以将其视为一种推广到无限.....

*数学系，乌普萨拉大学，Box 480，751 06 乌普萨拉（瑞典）。victor.linroth@math.uu.se。

维设置。与牛顿法类似，KAM理论的方法既可用于证明解的存在性，也可在作为数值方案实现时用于获得高精度近似值。在这一领域已经开展了大量工作，特别是在参数化方法的范围内。

哈密顿动力学的原始设定给出由辛映射描述的系统，但 KAM 理论也已扩展到涵盖其他类型的映射，例如本文所研究的耗散映射。在此情形下，不能断言不变环面在任意足够光滑的扰动下都能持续存在；还必须为系统加入足够多的调节参数，以便对其进行调整来保持环面。有关不变环面何时能够持续存在的更多详情，请参见 [FHL20]。耗散系统的性质使其很可能包含作为吸引子的不变对象，而从数值计算的角度来看，这些对象可能非常方便。如果一个吸引子还是正规双曲流形，就意味着其吸引域中的点会以指数速度越来越接近该流形。对于具有传递内部动力学的吸引型正规双曲环面，这意味着只需简单地迭代映射，成本极低，单条轨道就能以极高精度逼近该环面。

问题由此变为：如何利用轨道上的点进行严格估计。为此，一个非常实用的方法是一系列论文 [DDS+16、DSSY17、DY18、SY18] 的主要研究主题。该方法称为加权伯克霍夫方法，其做法是利用从凸起函数中采样得到的权重，计算伯克霍夫遍历定理中的和。可以证明，无论凸起函数的形状如何，只要它与底层系统都是光滑的，并且不变环面的内部动力学满足KAM理论所需的同一非共振条件，加权和就会以超多项式速度收敛。该条件还保证了遍历性，这意味着该和会收敛到所选函数对应的积分。选择不同的函数，可得到描述环面各种有用动力学性质的积分，例如旋转向量、傅里叶系数和李雅普诺夫指数。特别值得注意的是，这使我们能够从轨道近似转向由傅里叶系数给出的近似，从而有可能运用后验KAM理论中的参数化方法，严格证明真实不变环面的存在性。

此时适合停下来思考：为计算吸引环面的近似而设计并实现这样一种方法，是否值得付出这些努力。毕竟，已有基于牛顿迭代的参数化方法，能够以很高的数值效率精确逼近更一般的不变环面，而不仅仅是吸引环面。对此，一种看法是，尽管这些参数化方法通常确实非常高效，但它们仍属于隐式方法，每一步都需要求解方程；而加权伯克霍夫方法则是完全显式的方法，因此有理由相信，在某些情况下，它的表现会优于隐式方法。这很可能在很大程度上取决于环面的维数和正则性。此外还应注意，牛顿迭代需要良好的初始猜测才能奏效，而对于复杂的环面，获得这样的猜测并不总是容易；相比之下，加权伯克霍夫方法只需要吸引域中的一个点。这对于研究环面变形成

非混沌奇异吸引子的情况可能具有重要意义，不过通常也完全可行的一种做法是，先从对应于非常规则的吸引子的参数值入手，再通过延拓逐步扩展近似，使其适用于对应于越来越复杂吸引子的参数值。最后还应指出，截至撰写本文时，似乎尚无现成可用的参数化方法软件包，因此需要用户自行实现；而在这方面，加权伯克霍夫方法应该更容易实现。

本文旨在概述如何首先利用加权伯克霍夫方法获得吸引环面的近似解，然后如何将这一近似解与耗散动力系统后验KAM理论中的一个结果相结合，从而证明真实不变环面的存在性。本文通过针对耗散标准映射这一特定情形实施该方法，并获得必要的估计，证明了在某些参数示例下不变环面的存在性。此前已有研究探讨过耗散标准映射的准周期吸引子，参见例如 [CC10、CF12]。利用共形辛映射的后验KAM理论证明准周期吸引子的存在性也已在 [CCDlL20], 中得到探讨，但正如该论文中所指出的，这项工作采用的是非严格的方法，作者建议通过使用区间算术实施验证，以获得严格的结果。

第2节介绍了表述该定理所需的背景知识。该定理给出了保证不变环面存在的条件。第3节介绍了一系列用于处理周期函数的数值方法，例如环面的参数化。这包括用于逼近傅里叶系数的加权伯克霍夫方法，以及若干基于离散傅里叶变换的严格方法，这些方法对于获得参数化的经验证估计是必不可少的。第4节以耗散标准映射为具体例子，逐步介绍如何建立算法，以证明对于给定的一组参数和用于近似的一个初始点，吸引环面的存在性。第5节则考察了算法的一种实现针对若干示例参数给出的结果。

2 设定与KAM型定理

本节旨在完整陈述文献[CH17]中的KAM型定理。为便于参照，我们尽量沿用相同的符号，并确保所有定义保持一致。我们首先介绍表述该定理所用的函数空间环境，然后给出准周期不变环面、正规双曲性和丢番图向量的定义；这些概念都是该定理的基础。

2.1 环带上的解析函数与映射空间

首先，我们明确表述其余定义和定理所需的函数空间环境。将宽度为 $\rho > 0$ 的 $\mathbb{T}^d_\rho$ 复条带记为

$$\mathbb{T}^d_\rho = \{\theta \in \mathbb{T}^d_{\mathbb{C}} \mid |\mathrm{Im}\theta_\ell| < \rho,\ \ell = 1, \ldots, d\},$$

其中 $\mathbb{T}^d_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^d/\mathbb{Z}^d$ 是复 d维环面。

令 $(A_\rho)^m$ 为连续函数 $f:\ \bar{\mathbb{T}}^d_\rho \to \mathbb{C}^m$构成的巴拿赫空间，这些函数在 $\mathbb{T}^d_\rho$ 上全纯，且满足 $f(\mathbb{T}^d_\rho) \in \mathbb{R}^m$，其范数为

$$\|f\|_\rho = \sup_{\theta\in\mathbb{T}^d_\rho} |f(\theta)|.$$

其中 $|v| = \max(|v_1|, \dots, |v_m|)$，$v \in \mathbb{C}^m$。

令 $(A^r_\rho)^m$ 为连续函数 $f:\ \bar{\mathbb{T}}^d_\rho \to \mathbb{C}^m$ 构成的巴拿赫空间，这些函数在 $\mathbb{T}^d_\rho$ 上全纯，满足 $f(\mathbb{T}^d_\rho) \in \mathbb{R}^m$，且其偏导数可连续延拓至 $\mathbb{T}^d_\rho$ 的边界，范数为

$$\|f\|_{\rho,C^r} = \max_{\ell=0,\dots,r} \sup_{\theta\in\mathbb{T}^d_\rho} |D^\ell f(\theta)|.$$

将范数 $|\cdot|$ 应用于多重线性映射时，所得范数是由 $\mathbb{C}^m$ 上的上确界范数诱导的范数。

连续函数 $f:\ \mathbb{T}^d \to \mathbb{C}^m$ 的平均值记为 $\langle f\rangle$，即

$$\langle f\rangle = \int_{\mathbb{T}^d} f(\theta)d\theta.$$

考虑一个环带 $\mathcal{A} \subset \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^n$，即一个与 $\mathbb{T}^d \times \mathcal{V}$ 同伦的开集，其中 $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ 是开集。于是，若 $\mathcal{B} \subset \mathbb{T}^d_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}^m$ 是 $\mathcal{A}$ 的复邻域$^{-}$，则我们用 $(A_\mathcal{B})^m$ 表示连续函数 $f:\ \mathcal{B} \to \mathbb{C}^m$ 构成的巴拿赫空间，这些函数在 $\mathcal{B}$ 上全纯，满足 $f(\mathcal{A}) \subseteq \mathbb{R}^m$（因此 f 是实解析的），范数为

$$\|f\|_\mathcal{B} = \sup_{z\in\mathcal{B}} |f(z)|.$$

$^{-}$令 $(A^r_\mathcal{B})^m$ 为连续函数 $f:\ \mathcal{B} \to \mathbb{C}^m$构成的巴拿赫空间，这些函数在 $\mathcal{B}$ 上全纯，满足 $f(\mathcal{A}) \in \mathbb{R}^m$，且其偏导数可连续延拓至 $\mathcal{B}$的边界，范数为

$$\|f\|_{\mathcal{B},C^r} = \max_{\ell=0,\dots,r} \sup_{z\in\mathcal{B}} |D^\ell f(z)|.$$

在定理 2.2 中，我们将考虑一族 C^2 实解析映射 F，它们定义在环带上（C^2-范数有界），且与恒等映射同伦，记作

$$F \in \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + C^2(\mathcal{U}, (A^2_\mathcal{B})^{d+n}),$$

其中 $\mathcal{U}$ 是一个参数开集。因此，对于每个参数值 $a \in \mathcal{U}$，我们得到一个映射 $F_a:\ \mathcal{B} \to \mathbb{T}^d \times \mathbb{C}^n$，由 $F_a := F(a)$ 给出。我们还将这些映射视为函数 $F:\ \mathcal{B} \times \mathcal{U} \to \mathbb{T}^d \times \mathbb{C}^n$，定义为 $F(z, a) := F_a(z)$，其中 $z \in \mathcal{B}, a \in \mathcal{U}$，并记作

$$F(z, a) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + F_p(z, a), \quad z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{B},\ a \in \mathcal{U},$$

其中 $F_p(\cdot, a) \in (A^2_\mathcal{B})^{d+n}$，对所有 $a \in \mathcal{U}$ 均成立。

主要研究对象是如下参数化 $K:\ \bar{\mathbb{T}}^d_\rho \to \mathcal{B}$ 实解析环面 $\mathcal{K} = K(\mathbb{T}^d)$（其导数有界），且与零截面同伦，即

$$K(\theta) = \begin{pmatrix} \theta \\ 0 \end{pmatrix} + K_p(\theta) \quad \text{such that} \quad K_p \in (A^1_\rho)^{d+n},$$

我们将其记作

$$K \in \begin{pmatrix} \theta \\ 0 \end{pmatrix} + (A_\rho^1)^{d+n}.$$

2.2 拟周期不变环面与正规双曲性

如果 ω 是无理数，即，我们称由 K 参数化的环面 $\mathcal{K}$ 为具有频率 $\omega \in \mathbb{R}^d$ 的拟周期 F_a-不变环面。

$$\omega \cdot q - p \neq 0 \quad \text{for all } q \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\} \text{ and } p \in \mathbb{Z},$$

并且二元组 (K, a) 满足方程

$$F(K(\theta), a) = K(\theta + \omega), \quad \text{for all } \theta \in \mathbb{T}^d.$$

这里需要注意，如果 K 是一个拟周期 F_a-不变环面的参数化，那么对于任意 $\alpha \in \mathbb{R}^d$，K_α 以及 $K_\alpha(\theta) = K(\theta + \alpha)$ 也同样是参数化。由于这种非唯一性，适宜添加一个附加条件

$$\langle K_\alpha^x(\theta) - \theta \rangle = 0,$$

其中上标 x 表示在角变量上的投影。

如果存在一个由 $N^0 \in (A_\rho^0)^{(d+n)\times n}$ 参数化的法丛，使得：我们称由 K 参数化的环面 $\mathcal{K}$ 为一个（实解析的）拟周期正规双曲近似 F_a-不变环面，其频率为 $\omega \in \mathbb{R}^d$：

- 由 $P(\theta) = (DK(\theta)\ N^0(\theta))$ 给出的标架 $P \in (A_\rho^0)^{(d+n)\times(d+n)}$ 对所有 $\theta \in \mathbb{T}^d$ 都是可逆的。
- 向量丛映射 (H, R_ω)：$\mathbb{C}^n \times \bar{\mathbb{T}}_\rho^d \to \mathbb{C}^n \times \bar{\mathbb{T}}_\rho^d$ 由下式给出

  $$(H, R_\omega)(v, \theta) = (H(\theta)v, \theta + \omega),$$

  其中

  $$H(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id}_n \end{pmatrix} P^{-1}(\theta) D_z F(K(\theta), a) N^0(\theta)$$

  是一致双曲的，即所诱导的传递算子 $\mathcal{H}$：$B(\bar{\mathbb{T}}_\rho^d, \mathbb{C}^n) \to B(\bar{\mathbb{T}}_\rho^d, \mathbb{C}^n)$ 作用于有界函数的巴拿赫空间 $B(\bar{\mathbb{T}}_\rho^d, \mathbb{C}^n)$，其定义为

  $$\mathcal{H}\vartheta(\theta) = H(\theta - \omega)\vartheta(\theta - \omega)$$

  是双曲的，意味着算子 $\mathcal{H} - \mathrm{Id}$ 在 $B(\bar{\mathbb{T}}_\rho^d, \mathbb{C}^n)$ 中是可逆的。

称 $\mathcal{H}$ 是双曲的一个等价条件是：对于每个 $\eta \in B(\bar{\mathbb{T}}_\rho^d, \mathbb{C}^n)$，上同调方程都有唯一解 $\xi \in B(\bar{\mathbb{T}}_\rho^d, \mathbb{C}^n)$

$$H(\theta)\xi(\theta) - \xi(\theta + \omega) = \eta(\theta), \quad \theta \in \mathbb{T}^d,$$

我们将其记为 $\xi = \mathcal{R}_H \eta$。这种等价性源于 $\mathcal{R}_H \eta(\theta) = (\mathcal{H} - \mathrm{Id})^{-1}\eta(\theta - \omega)$ 是上述方程的唯一解。因此，证明 $\mathcal{H}$ 是双曲的一种实用方法是为其找到一个界

$$\|\mathcal{R}_H\|_\rho := \|\mathcal{R}_H\|_{B(\bar{\mathbb{T}}_\rho^d, \mathbb{C}^n)}.$$

我们称一个频率为 $\omega \in \mathbb{R}^d$ 的（实解析）准周期正规双曲近似 F_a-不变环面 $\mathcal{K}$ 为非退化的，如果常矩阵 $\langle B^L - T\mathcal{R}_H B^N \rangle$ 可逆，其中

$$B^L(\theta) = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_d & O \end{pmatrix} P(\theta+\omega)^{-1} D_a F(K(\theta), a),$$

$$B^N(\theta) = \begin{pmatrix} O & \mathrm{Id}_d \end{pmatrix} P(\theta+\omega)^{-1} D_a F(K(\theta), a),$$

and

$$T(\theta) = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_d & O \end{pmatrix} P(\theta+\omega)^{-1} D_z F(K(\theta), a) N^0(\theta).$$

2.3 丢番图向量与 R¨ussman 估计

我们用无理旋转向量 ω 来表述准周期性，但按照 KAM 理论中的惯例，为了获得有用的结果，我们需要缩小所考虑的向量范围。若向量 $\omega \in \mathbb{R}^d$ 满足以下条件，我们称其为类型为 (γ, τ) 的丢番图向量，其中 $\gamma > 0$ 和 $\tau \geq d$ 为

$$|\omega \cdot q - p| \geq \frac{\gamma}{|q|^\tau}, \quad \text{for all } q \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\} \text{ and } p \in \mathbb{Z}.$$

若向量 ω 满足 ω 是具有常数 (γ, τ) 的丢番图向量，且属于某个 $\gamma > 0$，则称该向量为 τ 类丢番图向量。对于某个 $\tau \geq d$ 而言，属于 τ 类的向量有时也简称为丢番图旋转向量。

计算定理 2.2 中的常数时，需要一个值 c_R，该值由所用的丢番图旋转向量 ω 决定。下面的引理说明了这个值的来源，并给出一种计算方法。

引理2.1（R¨ussman 估计）。设 ω 是类型为 (γ, τ) 的丢番图数，$\gamma > 0, \tau \geq d$。那么，存在一个常数 $c_R > 0$，使得对任意 $\hat{}\eta \in A_\rho$，方程存在唯一的零平均解 $\xi := \mathcal{R}(\hat{}\eta)$

$$\xi(\theta) - \xi(\theta+\omega) = \hat{\eta}(\theta) - \langle \hat{\eta} \rangle,$$

使得，对于任意的 $0 < \delta < \rho$、$\xi \in A_{\rho-\delta}$，并且满足

$$\|\xi\|_{\rho-\delta} \leq \frac{c_R}{\gamma \delta^\tau} \|\hat{\eta}\|_\rho.$$

满足该引理的 c_R 的不同取值已被推导出来，而我们将使用的取值是

$$c_R = \frac{\sqrt{2^{d-3}\zeta(2, 2^\tau)\Gamma(2\tau+1)}}{(2\pi)^\tau},$$

其中，ζ 是赫尔维茨ζ函数，Γ是伽马函数。关于c_R 的这个公式是经典公式，推导过程可见 [HCF+16，引理 4.20]。当选择非常小的 δ 时，可能需要更精确的界；[FHL16，引理 4.3]给出了一个专为严格数值计算设计的此类界。

2.4 KAM 类定理

以下定理陈述了精确条件：在何种情况下，具有丢番图旋转向量的准周期正规双曲近似 F_a-不变环面，能够保证对于某个接近a的参数值 a^∞ ，存在一个具有相同旋转向量的准周期 F_{a^∞}-不变环面。定理还给出了这些环面之间的距离以及参数值 a 和 a^∞之间距离的可计算界，并列出了局部唯一性的条件。该定理及其完整证明是 [CH17]的主题。

定理 2.2。设 $\mathcal{B} \subset \mathbb{T}^d_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}^n$ 是环带 $\mathcal{A} \subset \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^n$ 的一个复邻域。设

$$F \in \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + C^2(\mathcal{U}, (A^2_{\mathcal{B}})^{d+n})$$

是一个 C^2 参数族的实解析映射 $F\colon \mathcal{B} \times \mathcal{U} \to \mathbb{T}^d_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}^n$，与恒等映射同伦，其中 $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$ 是参数的（开）集。设 $a \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$ 是一个参数值。设 $N^0 \in (A_\rho)^{(d+n)\times n}$ 是一个矩阵值映射 $N^0\colon \bar{\mathbb{T}}^d_\rho \to \mathbb{C}^{(d+n)\times n}$。设

$$K \in \begin{pmatrix} \theta \\ 0 \end{pmatrix} + (A^1_\rho)^{d+n}$$

是一个与零截面同伦的实解析参数化 $K\colon \bar{\mathbb{T}}^d_\rho \to \mathcal{B}$，并假设 $\langle K^x(\theta) - \theta \rangle = 0$。注意，$\operatorname{dist}(K(\bar{\mathbb{T}}^d_\rho)\ \partial\mathcal{B}) > 0$。设 $\omega \in \mathbb{R}^d$ 为一个频率向量，并设 $E \in (A_\rho)^{d+n}$ 为误差函数 $E\colon \bar{\mathbb{T}}^d_\rho \to \mathbb{C}^{(d+n)}$，定义为

$$E(\theta) = F(K(\theta), a) - K(\theta + \omega).$$

假设存在常数：

H1 $c_{F,\ 1,\ z}$,$c_{F,\ 1,\ a}$,$c_{F,\ 2}$ 使得

$$\|D_z F\|_{\mathcal{B}\times\mathcal{U}} < c_{F,1,z},\ \|D_a F\|_{\mathcal{B}\times\mathcal{U}} < c_{F,1,a},\ \|D^2 F\|_{\mathcal{B}\times\mathcal{U}} < c_{F,2},$$

and c_N *such that* $\|N^0\|_\rho < c_N$*;*

H2 σ_L 使得 $\|DK\|_\rho < \sigma_L$;

H3 σ_P使得 $P = (DK\ N^0)$ 可逆，且满足 $\|P^{-1}\|_\rho < \sigma_P$;

H4 σ_H 使得映射 (H, R_ω) 是双曲的，且满足 $\|\mathcal{R}_H\|_\rho < \sigma_H$。

H5 σ_D 使得常矩阵 $\langle B^L - T\mathcal{R}_H B^N \rangle$ 可逆，且满足 $\|\langle B^L - T\mathcal{R}_H B^N \rangle^{-1}\| < \sigma_D$。

H6 γ，τ使得 $|\omega \cdot q - p| \geq \gamma |q|^{-\tau}$、 $q \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ 和 $p \in \mathbb{Z}$。

那么，对于任意 $0 < \delta < \frac{\rho}{2}$ 和 $0 < \rho_\infty < \rho - 2\delta$，存在常数$\hat{}$ C_*、$\hat{}C_{**}$和 C_{***}（显式地取决于初始数据、初始解析性条带 ρ、最终解析性条带 ρ_∞ 以及 δ），使得：

T1（存在性）如果满足以下条件

$$\frac{\hat{C}_* \|E\|_\rho}{\gamma^2 \rho^{2\tau}} < 1,$$

¯那么，存在一对 (K_∞, a_∞)，满足 $K_\infty : \mathbb{T}_{\rho_\infty} \to \mathcal{B}$ 使得

$$K_\infty \in \begin{pmatrix} \theta \\ 0 \end{pmatrix} + (A^1_{\rho_\infty})^{d+n},$$

以及 $a_\infty \in \mathcal{U}$，使得

$$\begin{aligned} F(K_\infty(\theta), a_\infty) - K_\infty(\theta + \omega) &= 0, \\ \langle K^x_\infty(\theta) - \theta \rangle &= 0. \end{aligned}$$

也就是说，$\mathcal{K}_\infty = K_\infty(\hat{\mathbb{T}}_{\rho_\infty})$ 是 F_{a_∞} 的 QP-NHIT，频率为 ω。此外，K_∞ 满足假设 H2-H5。

T2（接近性）环面 $\mathcal{K}_\infty$ 与原始近似解接近，具体而言

$$\|(K_\infty - K, a_\infty - a)\|_{\rho_\infty} \leq \frac{\hat{C}_{**}}{\gamma \rho^\tau} \|E\|_\rho$$

T3（局部唯一性）如果满足以下条件

$$\frac{\hat{C}_{***}}{\gamma^2 \rho^\tau_\infty \rho^\tau} \|E\|_\rho < 1,$$

那么，如果 (K'_∞, a'_∞) 满足

$$\begin{aligned} F(K'_\infty(\theta), a'_\infty) - K'_\infty(\theta + \omega) &= 0, \\ \langle {K'_\infty}^x(\theta) - \theta \rangle &= 0, \end{aligned}$$

and

$$\|(K'_\infty - K, a'_\infty - a)\|_{\rho_\infty} < \hat{C}_{**} \left(\frac{\gamma \rho^\tau_\infty}{\hat{C}_{***}} - \frac{1}{\gamma \rho^\tau} \|E\|_\rho \right),$$

那么，$(K'_\infty, a'_\infty) = (K_\infty, a_\infty)$。

ˆ ˆ ˆ 关于如何计算常数 C_*、C_{**} 和 C_{***} 的说明，可参见附录 A。

3 周期函数的近似与估计

本节介绍一系列处理周期函数 f 的方法：$\mathbb{T}^d_\rho \to \mathbb{C}$ 由其傅里叶级数给出

$$f(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f_k e^{2\pi \mathrm{i} k \cdot \theta}, \quad \theta \in \mathbb{T}^d,$$

其中，傅里叶系数 f_k 由下式给出

$$f_k = \int_{\mathbb{T}^d} f(\theta) e^{-2\pi \mathrm{i} k \cdot \theta} d\theta, \quad k \in \mathbb{Z}^d. \tag{3.1}$$

我们将沿用 [FHL16] 中的记号和定义，因为之后会用到其中的一些结果。我们将范数 $\|\cdot\|_{F,\,\rho}$ 称为傅里叶范数，其定义为

$$\|f\|_{F,\rho} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |f_k| e^{2\pi|k|_1\rho},$$

其中 $|k|_1 = \sum_{\ell=1}^{d} |k_\ell|$。我们观察到 $\|f\|_\rho \le \|f\|_{F,\,\rho}$ 对所有 $\rho > 0$ 均成立。

现在考虑在大小为规则网格上采样一些点。
$N_F = (N_{F,1}, \ldots, N_{F,d}) \in \mathbb{N}^d$

$$\theta_j := (\theta_{j_1}, \ldots, \theta_{j_d}) = \left(\frac{j_1}{N_{F,1}}, \ldots, \frac{j_d}{N_{F,d}}\right), \quad 0 \le j < N_F,$$

其中，$j = (j_1, \ldots, j_d) \in \mathbb{Z}^d$，而 $0 \le j < N_F$ 表示 $0 \le j_\ell < N_{F,\ell}$ 对于 $\ell = 1, \ldots, d$。点的总数为 $N_D = N_{F,1} \cdots N_{F,d}$。利用由 $f_j = f(\theta_j)$ 给出的 f 采样，我们可以使用梯形法则近似式 (3.1) 中的积分，从而得到 $\{f_j\}$ 的离散傅里叶变换（DFT）。

$$\tilde{f}_k = (\mathrm{DFT}\{f_j\})_k := \frac{1}{N_D} \sum_{0\le j\le N_F} f_j e^{-2\pi \mathrm{i} k\cdot\theta_j}, \quad k \in \mathbb{Z}^d$$

˜这里注意到，f_k 分别在分量 k_1、.....、k_d 上周期为 $N_{F,\,1}$、.....、$N_{F,\,d}$。现在可以用离散傅里叶逼近来逼近函数 f。

$$\tilde{f}(\theta) = \sum_{k\in\mathcal{I}_{N_F}} \tilde{f}_k e^{2\pi \mathrm{i} k\cdot\theta}, \quad \theta \in \mathbb{T}^d, \tag{3.2}$$

其中，求和是对有限集合进行的

$$\mathcal{I}_{N_F} = \left\{ k \in \mathbb{Z}^d : \frac{-N_{F,\ell}}{2} \le k_\ell < \frac{N_{F,\ell}}{2},\ \ell = 1, \ldots, d \right\}.$$

˜注意，如果我们在点 $\{\theta_j\}$ 处对 f 进行采样（见式 (3.2)），就会得到逆离散傅里叶变换 (逆离散傅里叶变换)

$$\tilde{f}_j = (\mathrm{IDFT}\{f_k\})_j := \sum_{k\in\mathcal{I}_{N_F}} \tilde{f}_k e^{2\pi \mathrm{i} k\cdot\theta_j}, \quad 0 \le j < N_F,$$

当然，我们知道 IDFT $= \mathrm{DFT}^{-1}$，因此 $\tilde{f}_j = f_j$ 对于 $0 \le j < N_F$。

备注 3.1。我们将努力始终使用 k 为频率域编索引，并使用 j 为 $\mathbb{T}^d$ 的规则采样编索引，以避免对类似 f_k 和 f_j 的记法所产生的歧义感到困惑。这也是我们将在第 3.1 节中使用 i 为 $\mathbb{T}^d$ 上的准周期轨道编索引的原因。

在第 3.1 节中，我们介绍一种方法，用于根据 $\mathbb{T}^d$ 的准周期轨道上 f 的给定值来近似 f_k。这是一种非严格方法，仅用于设定初始近似。在第 3.2 节中，我们探讨如何根据 $\mathbb{T}^d$ 的规则网格上 f 的给定值来近似 f_k。这里的误差界是严格的，可用于计算机辅助证明。最后，第 3.3 节将讨论如何根据 f_k 的界计算 f 的取值范围界。

3.1 使用加权伯克霍夫和逼近周期函数

我们称 $w\colon \mathbb{R}\to[0,\infty)$ 为 C^r 凸起函数 $r\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$，若 $w\in C^r(\mathbb{R})$，且 $\operatorname{supp} w\subset[0,1]$ 和 $\int_{\mathbb{R}} w(t)dt\neq 0$。

设 $s\colon \mathcal{M}\to E$ 是从流形 $\mathcal{M}$ 到向量空间 E 的映射，且 $T\colon \mathcal{M}\to\mathcal{M}$ 是从 $\mathcal{M}$ 到其自身的映射。给定一个 C^r 凸起函数 w 和起始点 $z_0\in\mathcal{M}$，我们将从点 z_0 开始的 s 的加权伯克霍夫平均 WB_N 定义为

$$(\mathrm{WB}_N\, s)(z_0) := \frac{1}{A_N}\sum_{i=0}^{N-1} w\left(\frac{i+1}{N+1}\right) s\left(T^i z_0\right), \quad A_N := \sum_{i=0}^{N-1} w\left(\frac{i+1}{N+1}\right).$$

定理 3.2. 设 $m>1$ 为整数，且 w 是某个 $r\geq m$ 的 C^r 凸起函数。对于 $M\in\mathbb{N}$，设 $\mathcal{M}$ 为一个 C^M 流形，$T\colon \mathcal{M}\to\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{M}_0\subseteq\mathcal{M}$ 上的一个 C^M d 维准周期映射，其不变概率测度为 χ，旋转向量属于丢番图类 τ。设 $s\colon \mathcal{M}\to E$ 为 C^M，其中 E 是有限维实向量空间。那么存在一个常数 C_m，它依赖于 w、s、m、M 和 τ，但与 $z_0\in\mathcal{M}_0$ 无关，使得

$$\left|(\mathrm{WB}_N\, s)(z_0) - \int_{\mathcal{M}_0} s\, d\chi\right| \leq C_m N^{-m}, \quad \textit{for all } N>0,$$

前提是“光滑度”M 满足

$$M > d + m(d+\beta).$$

该定理的证明见 [DY18]。我们尤其关注$\mathcal{M}$、T、s 和 w 均为 C^∞的情形，由此得到以下推论。

推论 3.3. 设 $\mathcal{M}$ 为一个 C^∞ 流形，且 $T\colon \mathcal{M}\to\mathcal{M}$ 是一个 d 维 C^∞ 映射，其在 $\mathcal{M}_0\subset\mathcal{M}$ 上是准周期的，具有不变概率测度 χ 和一个丢番图旋转向量。设 $s\colon \mathcal{M}\to E$ 为 C^∞，其中 E 是一个有限维向量空间。假设 w 是一个 C^∞ 凸起函数。那么对于每个 $z_0\in\mathcal{M}_0$，加权伯克霍夫平均（$\mathrm{WB}_N\, s$）（z_0）以超多项式速度收敛至 $\int_{\mathcal{M}_0} f d\chi$，即存在常数 C_m 使得

$$\left|(\mathrm{WB}_N\, s)(z_0) - \int_{\mathcal{M}_0} s\, d\chi\right| \leq C_m N^{-m} \quad \textit{for all } m>0 \textit{ and } N>0.$$

定理 3.2 使我们能够取拟周期环面上的轨道（或其良好近似），并以高精度近似环面上的积分。许多感兴趣的对象都可以写成这样的积分，包括旋转数和李雅普诺夫指数。就我们的目的而言，我们关注的是环面的傅里叶系数对应的积分。因此，若令 $\mathcal{M}=\mathcal{M}_0=\mathbb{T}^d$、$E=\mathbb{C}$ 和 $T(\theta)=\theta+\omega$，其中 $\omega\in\mathbb{R}^d$ 是丢番图的，那么对于 $s(\theta)=f(\theta)e^{-2\pi \mathrm{i} k\cdot\theta}$，我们得到

$$\int_{\mathcal{M}_0} s\, d\chi = \int_{\mathbb{T}^d} f(\theta)e^{2\pi \mathrm{i} k\cdot\theta} d\theta = f_k,$$

因为 $\mathbb{T}^d$ 上的 T-不变测度由 $d\chi = d\theta$ 给出。因此我们看到，可以用以下求和来近似 f_k

$$(\mathrm{WB}_N\, s)(\theta_0) = \sum_{i=0}^{N-1} w_i f(\theta_0 + i\omega) e^{-2\pi \mathrm{i} k\cdot(\theta_0 + i\omega)},$$

其中 $w_i := A_N^{-1} w\left(\frac{i+1}{N+1}\right)$。

这里值得注意的是，当 $k\cdot\omega$ 非常接近一个整数时，必须谨慎处理由此产生的近共振，因为此时 $e^{2\pi \mathrm{i} k\cdot\omega}$ 非常接近 1，因此我们必须取非常大的 N，才能使 $e^{2\pi \mathrm{i} k\cdot i\omega}$ 以令人满意的方式覆盖单位圆。ω 的丢番图性质对这种情况可能变得多糟糕施加了一定的限制，但在选择 N 时仍需谨慎。

3.2 使用离散傅里叶变换逼近周期函数

虽然我们知道 $\tilde{f}(\theta_j) = f(\theta_j)$，$0 \le j < N_F$，但我们还需要 $|\tilde{f}(\theta) - f(\theta)|$，$\theta \in \mathbb{T}^d_\rho$ 的一致界，以及 $|\tilde{f}_k - f_k|$ 的界（尽管在这里我们只会使用 $f_0 = \langle f\rangle$ 的界）。命题3.4和3.5给出了此类界的显式公式。对于 $d = 1$ 的情况，这些公式可以简化，相关结果见推论3.6和3.7。所有这些命题和推论的完整证明均可在 [FHL16] 中找到。

命题3.4. 设 $f\colon \mathbb{T}^d_\rho \to \mathbb{C}$ 是复条带 $\mathbb{T}^d_\rho$ 中的一个解析有界函数，其宽度为 $\rho > 0$。设 $\tilde{f}$ 是 f 在大小为 $N_F =$ 的规则网格（$N_{F,\,1}$，…，$N_{F,\,d}$）$\in \mathbb{N}^d$ 上的离散傅里叶逼近。那么，对于 $-\frac{N_F}{2} \le k < \frac{N_F}{2}$：

$$|\tilde{f}_k - f_k| \le s^*_{N_F}(k,\rho)\|f\|_\rho$$

其中

$$s^*_{N_F}(k,\rho) = \prod_{\ell=1}^{d}\left(e^{-\pi\rho N_{F,\ell}}\frac{e^{2\pi\rho(|k_\ell| - N_{F,\ell}/2)} + e^{-2\pi\rho(|k_\ell| - N_{F,\ell}/2)}}{1 - e^{-2\pi\rho N_{F,\ell}}}\right) - e^{-2\pi\rho|k|_1}.$$

命题3.5. 设 f 为复条带 $\mathbb{T}^d_{\hat\rho}$ 中一个解析且有界的函数，其宽度为$\hat\rho > 0$。设 $\tilde{f}$ 为f在大小为 $N_F =$的规则网格（$N_{F,1}, \ldots, N_{F,d}$）$\in \mathbb{N}^d$上的离散傅里叶逼近。那么，

$$\|\tilde{f} - f\|_\rho \le C_{N_F}(\rho,\hat\rho)\|f\|_{\hat\rho}$$

对于 $0 \le \rho < \hat\rho$，其中 $C_{N_F}(\rho,\hat\rho) = S^{*1}_{N_F}(\rho,\hat\rho) + S^{*2}_{N_F}(\rho,\hat\rho) + T_{N_F}(\rho,\hat\rho)$ 由以下给出

$$S^{*1}_{N_F}(\rho,\hat\rho) = \prod_{\ell=1}^{d}\frac{1}{1 - e^{-2\pi\hat\rho N_{F,\ell}}}\sum_{\substack{\sigma\in\{-1,1\}^d\\ \sigma\neq(1,\ldots,1)}}\prod_{\ell=1}^{d} e^{(\sigma_\ell - 1)\pi\hat\rho N_{F,\ell}}\nu_\ell(\sigma_\ell\hat\rho - \rho),$$

$$S^{*2}_{N_F}(\rho,\hat\rho) = \prod_{\ell=1}^{d}\frac{1}{1 - e^{-2\pi\hat\rho N_{F,\ell}}}\left(1 - \prod_{\ell=1}^{d}\left(1 - e^{-2\pi\hat\rho N_{F,\ell}}\right)\right)\prod_{\ell=1}^{d}\nu_\ell(\hat\rho - \rho)$$

and

$$T^{*2}_{N_F}(\rho,\hat{\rho}) = \left(\frac{e^{2\pi(\hat{\rho}-\rho)}+1}{e^{2\pi(\hat{\rho}-\rho)}-1}\right)^d \left(1-\prod_{\ell=1}^{d}\left(1-\mu_\ell(\hat{\rho}-\rho)e^{-\pi(\hat{\rho}-\rho)N_{F,\ell}}\right)\right)$$

with

$$\nu_\ell(\delta) = \frac{e^{2\pi\delta}+1}{e^{2\pi\delta}-1}\left(1-\mu_\ell(\delta)e^{-\pi\delta N_{F,\ell}}\right) \quad \textit{and} \quad \mu_\ell(\delta) = \begin{cases} 1 & \textit{if } N_{F,\ell} \textit{ is even,} \\ \frac{2e^{\pi\delta}}{e^{2\pi\delta}+1} & \textit{if } N_{F,\ell} \textit{ is odd.} \end{cases}$$

推论3.6。设 $f:\ \mathbb{T}_{\hat{\rho}} \to \mathbb{C}$ 是一个解析且有界的函数。设$\{f_k\}$ 是 f 在大小为 $N_F \in \mathbb{N}$的规则网格上的傅里叶系数 $\{f_k\}$ 的离散近似。那么对于 $k = -\left[\frac{N_F}{2}\right], \ldots, \left[\frac{N_F-1}{2}\right]$,

$$|\tilde{f}_k - f_k| \le s^*_{N_F}(k,\rho)\|f\|_\rho$$

其中

$$s^*_{N_F}(k,\rho) = \frac{e^{-2\pi\rho N_F}}{1-e^{-2\pi\rho N_F}}\left(e^{2\pi\rho k}+e^{-2\pi\rho k}\right).$$

推论3.7。设 $f:\ \mathbb{T}_{\hat{\rho}} \to \mathbb{C}$ 是定义在宽度为 $\hat{}\rho > 0$ 的˜复条带 $\mathbb{T}_{\hat{\rho}}$ 上的解析有界函数。设 f 是f 在大小为 $N_F \in \mathbb{N}$ 的规则网格上的离散傅里叶逼近。那么，对于 $0 \le \rho < \hat{}\rho$, 有生物彩票平台注册

$$\|\tilde{f}-f\|_\rho \le C_{N_F}(\rho,\hat{\rho})\|f\|_{\hat{\rho}},$$

其中 $C_{N_F}(\rho,\hat{}\rho) = S^{*1}_{N_F}(\rho,\hat{}\rho) + S^{*2}_{N_F}(\rho,\hat{}\rho) + T_{N_F}(\rho,\hat{}\rho)$, 其中

$$S^{*1}_{N_F} = \frac{e^{-2\pi\hat{\rho}N_F}}{1-e^{-2\pi\hat{\rho}N_F}}\frac{e^{-2\pi(\hat{\rho}+\rho)}+1}{e^{-2\pi(\hat{\rho}+\rho)}-1}\left(1-e^{\pi(\hat{\rho}+\rho)N_F}\right),$$

$$S^{*2}_{N_F} = \frac{e^{-2\pi\hat{\rho}N_F}}{1-e^{-2\pi\hat{\rho}N_F}}\frac{e^{2\pi(\hat{\rho}-\rho)}+1}{e^{2\pi(\hat{\rho}-\rho)}-1}\left(1-e^{-\pi(\hat{\rho}-\rho)N_F}\right),$$

and

$$T_{N_F}(\rho,\hat{\rho}) = \frac{e^{2\pi(\hat{\rho}-\rho)}+1}{e^{2\pi(\hat{\rho}-\rho)}-1}e^{-\pi(\hat{\rho}-\rho)N_F}.$$

3.3 使用离散傅里叶变换界定函数的值域

在验证数值计算中，函数值域的包围是一项研究充分的问题，具体采用哪种方法取决于函数的表示方式。对于以有限傅里叶级数定义的函数，可以利用离散傅里叶变换高效地计算其值域的包围区间。

对于由有限傅里叶级数 $f(\theta)$ 给出的函数 $f\colon \mathbb{T}^d \to \mathbb{C}$，假设我们有傅里叶系数的包围区间 $E_{f_k} \supseteq f_k$，并引入由以下方式定义的 $\mathbb{T}^d$ 的覆盖 $\{\Theta_j\}_{0\le j<N_F}$

$$\Theta_j = \Theta_{j_1} \times \ldots \times \Theta_{j_n} = (\theta_{j_1}+U_{N_{F,1}}) \times \cdots \times (\theta_{j_d}+U_{N_{F,d}}) = \theta_j + U_{N_F},$$

其中 $U_{N_F} = U_{N_{F,1}} \times \ldots \times U_{N_{F,d}}$ 由以下公式给出

$$U_{N_{F,\ell}} = \left[0, \frac{1}{N_{F,\ell}}\right], \quad 1 \leq \ell \leq d.$$

现在考虑 Θ_j 在 f下的像。

$$f(\Theta_j) = \sum_{k \in \mathcal{I}_{N_F}} f_k e^{2\pi \mathrm{i} k \cdot \Theta_j} = \sum_{k \in \mathcal{I}_{N_F}} f_k e^{2\pi \mathrm{i} k \cdot U_{N_F}} e^{2\pi \mathrm{i} k \cdot \theta_j},$$

因此，利用这些包围区间 E_{f_k}，我们可以看到，

$$f(\Theta_j) \subseteq \left(\mathrm{IDFT}\{E_{f_k} e^{2\pi \mathrm{i} k \cdot U_{N_F}}\}_{k \in \mathcal{I}_{N_F}}\right)_j$$

并且对所有 j 的右侧并集取包围区间，就能得到 $f(\mathbb{T}^d)$ 的一个包围区间。用逆离散傅里叶变换来表示这一过程的优点是，我们可以在计算中使用快速傅里叶变换算法。

稍后我们将需要 $|f(\mathbb{T}^d_\rho)|$ 的一个包围区间，并且可以扩展上述包围区间来得到一个。因此，假设我们有 $|f(\mathbb{T}^d)| \subseteq [a, b]$, $0 \leq a \leq b$，并注意到

$$f(\theta + \mathrm{i}y) - f(\theta) = \sum_{k \in \mathcal{I}_{N_F}} f_k e^{2\pi \mathrm{i} k \cdot \theta} (e^{-2\pi k \cdot y} - 1).$$

由于这是一个全纯函数，其在 $\mathbb{T}^d_\rho$ 上的最大模在边界处取得，因此

$$\sup_{\theta + \mathrm{i}y \in \mathbb{T}^d_\rho} |f(\theta + \mathrm{i}y) - f(\theta)| \leq \sum_{k \in \mathcal{I}_{N_F}} (e^{2\pi |k|_1 \rho} - 1)|f_k| = \|f\|_{F,\rho} - \|f\|_{F,0}.$$

因此，我们可以看到，

$$|f(\mathbb{T}^d_\rho)| \subseteq \left[\max(a - \|f\|_{F,\rho} + \|f\|_{F,0}, 0), b + \|f\|_{F,\rho} - \|f\|_{F,0}\right].$$

我们还需要界定 $f(\mathbb{T}^d_\rho)$ 的虚部，其中假设 $f(\mathbb{T}^d) \subset \mathbb{R}$。然后，我们可以将（有限）傅里叶级数分成两部分：

$$f(\theta + \mathrm{i}y) = \sum_{k \in \mathcal{I}_{N_F}} f_k \cosh(2\pi k \cdot y) e^{2\pi \mathrm{i} k \cdot \theta} + \mathrm{i} \sum_{k \in \mathcal{I}_{N_F}} \mathrm{i} f_k \sinh(2\pi k \cdot y) e^{2\pi \mathrm{i} k \cdot \theta},$$

并注意到

$$f_{-k} \cosh(2\pi(-k) \cdot y) = \overline{f_k \cosh(2\pi k \cdot y)}$$

and

$$\mathrm{i} f_{-k} \sinh(2\pi(-k) \cdot y) = \overline{\mathrm{i} f_k \sinh(2\pi k \cdot y)}$$

因为 $f_{-k} = \overline{f_k}$。这意味着两个求和都是实值，因此分别构成 $f(\theta + \mathrm{i}y)$ 的实部和虚部。由于 f 是全纯函数，虚部是调和函数，其最大值在边界上取得；又由于对称性，最大值在两条边界上都能取得。因此 $\mathrm{Im} f(\mathbb{T}^d_\rho) \leq \mathrm{Im} f(\mathbb{T}^d + \mathrm{i}\rho)$，我们可以用之前的方法将其围住。

4 耗散标准映射的验证算法

本节将详细介绍定理 2.2 在耗散标准映射中的实现，该映射由以下公式给出。

$$F(z,\mu)=\begin{pmatrix} x+\varphi_\mu(x,y) \\ \varphi_\mu(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ 0\end{pmatrix}+F_p(z,\mu), \tag{4.1}$$

其中 $z=(x,y)^T\in\mathbb{T}\times\mathbb{R}$ 和 $\varphi_\mu(x,y)=\lambda y+\mu+\frac{\varepsilon}{2\pi}\sin(2\pi x)$。参数$\lambda,\varepsilon\in(0,1)$ 固定， μ 将用作调节参数 a。注意，对于该映射， $d=n=1$ 。

为此，我们必须估计满足以下条件的常数

$$\begin{aligned} \|D_zF\|_{\mathcal{B}\times\mathcal{U}}<c_{F,1,z}, \qquad & \|D_\mu F\|_{\mathcal{B}\times\mathcal{U}}<c_{F,1,a}, \quad \|D^2F\|_{\mathcal{B}\times\mathcal{U}}<c_{F,2},\\ \|N^0\|_\rho<c_N, \qquad & \|DK\|_\rho\le c_L<\sigma_L, \quad \|P^{-1}\|\le c_P<\sigma_P\\ \|\mathcal{R}_H\|_\rho\le c_H<\sigma_H, \quad & |\langle B^L-T\mathcal{R}_HB^N\rangle|\le c_D<\sigma_D, \qquad \|E\|_\rho\le c_E \end{aligned}$$

其中 $\mathcal{B}=\mathbb{T}\times\mathbb{R}$ 和 $\mathcal{U}=\mathbb{R}$。请注意，对于 c_* 和 σ_*的不同组合，我们希望 c_* 尽可能精确，同时保持合理的计算量；随后选择 σ_* ，使其接近 c_* ，但又不至于让 $(\sigma_*-c_*)^{-1}$ 变得过大。

此外，我们还将计算$\hat{c}_N$ 和$\hat{c}_L$ ，使得

$$\|N^0\|_{\hat\rho}<\hat{c}_N \quad \text{and} \quad \|DK\|_{\hat\rho}<\hat{c}_L.$$

这些将用于计算 c_H 和 c_D。

4.1 计算 $c_{F,1,z}$,$c_{F,1,a}$ 和 $c_{F,2}$

我们看到,

$$D_zF(z;\mu)=\begin{pmatrix} 1+\varepsilon\cos(2\pi x) & \lambda \\ \varepsilon\cos(2\pi x) & \lambda\end{pmatrix}, \quad D_\mu F(z;\mu)=\begin{pmatrix} 1 \\ 1\end{pmatrix},$$

并且除 $D_x^2F(z;\ \mu)\ =-2\pi\varepsilon\sin(2\pi x)$ 外，所有二阶导数均为零，因此我们可以选择

$$c_{F,1,z}=1+\lambda+e^{2\pi\rho}, \quad c_{F,1,\mu}=1+\epsilon_M, \quad c_{F,2}=2\pi e^{2\pi\rho},$$

其中， ϵ_M 是在所使用的精度下使 $1<1+\epsilon_M$ 成立的最小数。

4.2 寻找一个近似值 K_p

对吸引圆附近的一个点迭代应用映射 F_μ ，可以得到一条轨道，我们可用它来近似该圆。然而，这样得到的是 K 的近似，而不是近似傅里叶系数所需的 K_p 。为此，我们将使用以下准周期斜积系统 Q_ω： $\mathbb{R}^2\times\mathbb{T}\to\mathbb{R}^2\times\mathbb{T}$ 给定为

$$Q_\omega\begin{pmatrix} x\\ y\\ \theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x-\omega+\varphi(x+\theta,y)\\ \varphi(x+\theta,y)\\ \theta+\omega\end{pmatrix}.$$

那么，如果我们引入映射 $\Psi\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T} \to \mathbb{T} \times \mathbb{R}$，定义为

$$\Psi \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

我们看到， Ψ 是 F_a 与 Q_ω 之间的半共轭，因为

$$F_a \circ \Psi \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta + \omega \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x - \omega + \varphi(x+\theta, y) \\ \varphi(x+\theta, y) \end{pmatrix} = \Psi \circ Q_\omega \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix}.$$

这里的要点是，若我们有一个环面的参数化 K_Q，使得

$$K_Q(\theta) = \begin{pmatrix} K_p^x(\theta) \\ K_p^y(\theta) \\ \theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{T},$$

then

$$K(\theta) := \Psi \circ K_Q(\theta) = \begin{pmatrix} \theta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_p^x(\theta) \\ K_p^y(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ 0 \end{pmatrix} + K_p(\theta), \quad \theta \in \mathbb{T},$$

满足

$$|F \circ K(\theta) - K(\theta + \omega)| = |Q_\omega \circ K_Q(\theta) - K_Q(\theta + \omega)|, \quad \theta \in \mathbb{T}.$$

因此，为了近似傅里叶系数，我们取一个在Q_ω 作用下大小为 N_O 的轨道（起点非常接近吸引子），

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ \theta_i \end{pmatrix} = Q_\omega \begin{pmatrix} x_{i-1} \\ y_{i-1} \\ \theta_{i-1} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots, N_O - 1.$$

并在存储数值时忽略角度分量

$$z_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}, \quad i = 0, \ldots, N_O - 1.$$

接下来，我们按照第 3.1 节中的步骤，使用加权伯克霍夫和近似傅里叶系数。因此，选择 $K_p(\theta) = \sum_{|k|<N_A} K_k e^{2\pi \mathrm{i} k\theta}$，其中 $N_A > 0$ 是我们希望用于近似的频率数，傅里叶系数由下式给出

$$K_k = \sum_{i=0}^{N_O - 1} w_i z_i e^{-2\pi \mathrm{i} k i \omega}, \quad |k| < N_A,$$

其中我们使用 C^∞ 凸起函数

$$w(t) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{t(t-1)}\right) & \text{if } t \in (0,1), \\ 0 & \text{if } t \notin (0,1). \end{cases}$$

4.3 计算 c_N、 c_L、 c_P、 $\hat{c}_N$ 和 $\hat{c}_L$

令 P 为由 $P(\theta) = (DK(\theta)\ N^0(\theta))$ 给出的适配标架，其中

$$N^0(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} DK(\theta) \left(DK(\theta)^T DK(\theta)\right)^{-1}.$$

这里我们注意到

$$P(\theta) = \begin{pmatrix} DK_x(\theta) & N_x^0(\theta) \\ DK_y(\theta) & N_y^0(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad P(\theta)^{-1} = \begin{pmatrix} N_y^0(\theta) & -N_x^0(\theta) \\ -DK_y(\theta) & DK_x(\theta) \end{pmatrix}$$

因为对于所有 $\theta \in \mathbb{T}_{\mathbb{C}}$, $\det P(\theta) = 1$。

现在，为了得到这些常数，我们只需使用第 3.3 节中的方法估计 $|DK(\mathbb{T}_\rho)| \subset [\underline{r}, \overline{r}]$ 的取值范围。现在我们可以取 $c_L = \overline{r}$ 和 $c_N = \underline{r}^{-1}$，因为

$$|N^0(\theta)| < |N^0(\theta)|_2 = |DK(\theta)|_2^{-1} < |DK(\theta)|^{-1}$$

其中 $|z|_2 = \sqrt{|x|^2 + |y|^2}$、 $z = (x、\ y)^T \in \mathbb{C}^2$。$\hat{c}_N$ 和 $\hat{c}_L$ 以相同方式，通过包住 $|DK(\mathbb{T}_{\hat{\rho}})|$ 的取值范围计算得到。对于 c_P，我们只需注意到

$$|P(\theta)^{-1}| = \max(|N^0(\theta)|_1, |DK(\theta)|_1) \le 2\max(|N^0(\theta)|, |DK(\theta)|).$$

因此，我们可以取 $c_P = 2\max(c_L, c_N)$。

4.4 计算 c_H

首先注意到，我们可以将 h 写成

$$h(\theta) = (\varepsilon \cos(2\pi K_x(\theta))(DK_x(\theta+\omega) - DK_y(\theta+\omega)) - DK_y(\theta+\omega))N_x^0(\theta)$$

并可看到，利用区间算术，我们能够直接在网格点 $\{\theta_j\}$ 处计算 h。然后可以使用推论3.7来界定 $\|h\|_\rho$，但首先需要给出 $\|h\|_{\hat{\rho}}$的界。利用上述公式可得

$$\|h\|_{\hat{\rho}} \le (1 + 2\varepsilon + 2\lambda)\hat{c}_N \hat{c}_L$$

so

$$\|h\|_\rho \le \|\tilde{h}\|_{F,\rho} + C_{N_F}(\rho, \hat{\rho})((1 + 2\varepsilon + 2\lambda)\hat{c}_N \hat{c}_L).$$

引理4.1. 若 $H(\theta) = \lambda + h(\theta)$、 $\theta \in \mathbb{T}_\rho$以及 $\|h\|_\rho < 1 - \lambda$，则算子$\mathcal{R}_H$ 可界定为

$$\|\mathcal{R}_H\|_\rho \le \frac{1}{1 - \lambda - \|h\|_\rho}.$$

证明。对于解析函数 ξ、 η：求解上同调方程 $\mathbb{T}_\rho \to \mathbb{C}$

$$H(\theta)\xi(\theta) - \xi(\theta + \omega) = \eta(\theta), \quad \theta \in \mathbb{T}_\rho,$$

可得 $\mathcal{R}_H \eta = \xi$。现在考虑如下上同调方程

$$\lambda\xi^*(\theta) - \xi^*(\theta + \omega) = \eta(\theta), \quad \theta \in \mathbb{T}_\rho,$$

并将解记为 $\mathcal{R}_\lambda \eta = \xi^*$。那么，如果我们将第一个方程写成

$$\lambda\xi(\theta) - \xi(\theta + \omega) = \eta(\theta) - h(\theta)\xi(\theta)$$

显然，

$$\mathcal{R}_H\eta = \mathcal{R}_\lambda\left(\eta - h\mathcal{R}_H\eta\right)$$

由此可得

$$\|\mathcal{R}_H\|_\rho \le \|\mathcal{R}_\lambda\|_\rho\left(1 - \|h\|_\rho\|\mathcal{R}_H\|_\rho\right).$$

现在利用 $\|\mathcal{R}_\lambda\|_\rho = (1-\lambda)^{-1}$ 这一事实，我们可以解出这个不等式，从而得到所需的界。 □

将此引理与 $\|h\|_\rho$ 的界结合，可得常数

$$c_H = \frac{1}{1 - \lambda - \|\tilde{h}\|_{F,\rho} - C_{N_F}(\rho,\hat{\rho})((1+2\varepsilon+2\lambda)\hat{c}_N\hat{c}_L)},$$

~若 $1-\lambda > \|h\|_{F,\ \rho} + C_{N_F}(\rho,\ \hat{}\rho)((1+2\varepsilon+2\lambda)\hat{c}_N\hat{c}_L)$

4.5 计算 c_D

首先，我们注意到

$$\langle B^L - T\mathcal{R}_H B^N\rangle = \langle B^L - T\mathcal{R}_\lambda B^N\rangle - \langle Te_{\mathcal{R}}B^N\rangle$$

其中 $e_{\mathcal{R}} = \mathcal{R}_H - \mathcal{R}_\lambda$，因此

$$|\langle B^L - T\mathcal{R}_H B^N\rangle|^{-1} \le (|\langle B^L - T\mathcal{R}_\lambda B^N\rangle| - \|T\|_\rho\|e_{\mathcal{R}}\|_\rho\|B^N\|_\rho)^{-1}, \quad \rho > 0.$$

注4.2。由于 $\langle\cdot\rangle$ 对所有 ρ 都相同，因此这里不必像之前的估计那样使用相同的 ρ，不过我们还是会这样做，因为可以重复利用已经计算出的界。

注意到 T、B^L 和 B^N 可以显式地表示为

$$T(\theta) = (\varepsilon\cos(2\pi K_x(\theta))(N_y^0(\theta+\omega) - N_x^0(\theta+\omega)) + N_y^0(\theta+\omega))N_x^0(\theta)$$
$$+\lambda(N_y^0(\theta+\omega) - N_x^0(\theta+\omega))N_y^0(\theta),$$

$B^L(\theta) = N_y^0(\theta+\omega) - N_x^0(\theta+\omega)$ 和 $B^N(\theta) = DK_x(\theta+\omega) - DK_y(\theta+\omega)$。我们在此看到，$B^N$ 的傅里叶系数为 $B_k^N = 2\pi\mathrm{i}((K_k)_x - (K_k)_y)e^{2\pi\mathrm{i}k\omega}$，并通过以下方式计算 $\mathcal{R}_\lambda B^N$：

$$\mathcal{R}_\lambda B^N(\theta) = \sum_{|k|<N_A}\frac{B_k^N}{\lambda - e^{2\pi\mathrm{i}k\omega}}e^{2\pi\mathrm{i}k\theta}.$$

现在显然，T、B^L 和 $\mathcal{R}_\lambda B^N$ 可以在网格 $\{\theta_j\}$ 上求值，因为我们有 DK 和 $\mathcal{R}_\lambda B^N$ 的傅里叶级数，而 N^0 可表示为关于 DK 的公式。因此，令 $\Phi = B^L - T\mathcal{R}_\lambda B^N$，并令 $\tilde{\Phi}$ 为从 $\{\Phi(\theta_j)\}$ 得到的傅里叶近似。由推论3.6可得

$$|\langle B^L - T\mathcal{R}_\lambda B^N\rangle| \ge |\langle\tilde{\Phi}\rangle| - s^*_{N_F}(0,\rho)(\|B^L\|_\rho + \|T\|_\rho\|\mathcal{R}_\lambda B^N\|_\rho).$$

因为对于 $\Phi_k = \langle\Phi\rangle$ $k=0$，并且我们注意到 $\langle\tilde{\Phi}\rangle = N_F^{-1}\sum_j\Phi_j$。为了估计范数，我们看到

$$\|T\|_\rho \le \|\tilde{T}\|_{F,\rho} + (1+2\varepsilon+2\lambda)\hat{c}_N^2 C_{N_F}(\rho,\hat{\rho}),$$
$$\|B^L\|_\rho \le \|\tilde{B}^L\|_{F,\rho} + 2\hat{c}_N C_{N_F}(\rho,\hat{\rho}),$$
$$\|B^N\|_\rho \le \|B^N\|_{F,\rho} \quad \text{and} \quad \|\mathcal{R}_\lambda B^N\|_\rho \le \|\mathcal{R}_\lambda B^N\|_{F,\rho}$$

引理 4.3. 如果 $H = \lambda + h$ $\|h\|_\rho < 1 - \lambda$，那么

$$\|\mathcal{R}_H - \mathcal{R}_\lambda\|_\rho \leq \frac{\|h\|_\rho}{(1-\lambda)(1-\lambda-\|h\|_\rho)}.$$

证明。若 $\mathcal{R}_H\eta = \xi$ 和 $\mathcal{R}_\lambda\eta = \xi^*$，则通过将相应的上同调方程相减，我们可知

$$\xi(\theta+\omega) - \xi^*(\theta+\omega) = \lambda(\xi(\theta) - \xi^*(\theta)) + h(\theta)\xi(\theta)$$

这就给出了我们所需
的结果。

$$\|\mathcal{R}_H - \mathcal{R}_\lambda\|_\rho \leq \lambda\|\mathcal{R}_H - \mathcal{R}_\lambda\|_\rho + \|h\|_\rho\|\mathcal{R}_H\|_\rho.$$

利用 $\|\mathcal{R}_H\|_\rho \leq (1-\lambda-\|h\|_\rho)^{-1}$，我们可以求解上述不等式，得到
$\|\mathcal{R}_H - \mathcal{R}_\lambda\|_{\rho\circ}$ □

综合以上所有内容，我们得到 $c_D = (r_2^* - r_3^*)^{-1}$，其中

$$\begin{aligned}
r_1^* &= \|\tilde{T}\|_{F,\rho} + (1 + 2\varepsilon + 2\lambda)\hat{c}_N^2 C_{N_F}(\rho,\hat{\rho}),\\
r_2^* &= |\langle\tilde{\Phi}\rangle| - s_{N_F}^*(0,\rho)(\|\tilde{B}^L\|_{F,\rho} + 2\hat{c}_N C_{N_F}(\rho,\hat{\rho}) + r_1^*\|\mathcal{R}_\lambda B^N\|_{F,\rho}),\\
c_h &= \|\tilde{h}\|_{F,\rho} + C_{N_F}(\rho,\hat{\rho})((1 + 2\varepsilon + 2\lambda)\hat{c}_N\hat{c}_L),\\
r_3^* &= r_1^*\frac{c_h}{(1-\lambda)(1-\lambda-c_h)}\|B^N\|_{F,\rho}.
\end{aligned}$$

4.6 计算 c_E

令 $G(\theta) = F(K(\theta)\ \mu)$ 且 $K_\omega(\theta) = K(\theta+\omega)$，使得 $E(\theta) = G(\theta) - K_\omega(\theta)$,$\theta \in \mathbb{T}_{\hat{\rho}\circ}$ 这里我们应当注意， $G(\theta)$ 和 $K_\omega(\theta)$ 是环面上的值，因此它们之间的减法在严格意义上并未得到良好定义。我们应当改为将 E 理解为由 $E(\theta) = G_p(\theta) - K_{p,\omega}(\theta)$ 给出，其中

$$G(\theta) = \begin{pmatrix}\theta\\0\end{pmatrix} + G_p(\theta) \quad \text{and} \quad K_\omega(\theta) = \begin{pmatrix}\theta\\0\end{pmatrix} + K_{p,\omega}(\theta).$$

注意，我们可以使用第 4.2 节中的映射 Q_ω，根据 $K_p(\theta)$ 计算 $G_p(\theta)$。于是有

$$\|E\|_\rho \leq \|\tilde{G}_p - K_{p,\omega}\|_\rho + \|G_p - \tilde{G}_p\|_\rho \leq \|\tilde{G}_p - K_{p,\omega}\|_{F,\rho} + C_{N_F}(\rho,\hat{\rho})\|G_p\|_{\hat{\rho}}.$$

为了得到 $\|G_p\|_{\hat{\rho}}$ 的界，我们注意到

$$\|G_p\|_{\hat{\rho}} \leq \sup_{\theta\in\mathbb{T}_{\hat{\rho}}} |K_p^x(\theta)| + \lambda|K_p^y(\theta)| + \mu + \frac{\varepsilon}{2\pi}|\sin(2\pi(\theta + K_p^x(\theta)))|$$

如果我们计算 $\bar{\rho}$ 使得 $K_p^x(\mathbb{T}_{\hat{\rho}}) \subset \mathbb{T}_{\bar{\rho}}$，并按照第 3.3 节中所述估计 K_p 的范围，则得到

$$\|G_p\|_{\hat{\rho}} \leq (1+\lambda)\hat{c}_L + \mu + \frac{\varepsilon}{2\pi}e^{2\pi(\hat{\rho}+\bar{\rho})}.$$

因此我们取的是

$$c_E = \|\tilde{G}_p - K_{p,\omega}\|_{F,\rho} + C_{N_F}(\rho,\hat{\rho})\left((1+\lambda)\hat{c}_L + \mu + \frac{\varepsilon}{2\pi}e^{2\pi(\hat{\rho}+\bar{\rho})}\right).$$

4.7 算法

这里我们总结本节的结果，并描述一种算法，该算法可以检查应用于式 (4.1) 中耗散标准映射的定理 2.2 中存在性条件。该算法的输入为参数 λ、μ 和 ε，以及旋转向量 ω 的一个包围区间，连同其丢番图常数 γ 和 τ。

常数 $c_{F,\,1z}$，$c_{F,\,1,\,\mu}$ 和 $c_{F,\,2}$ 在第 4.1 节中给出，只需使用参数即可计算。常数 c_R 使用 γ 和 τ 计算，具体如第 2.3 节所述。为了计算其余常数，我们必须先按照第 4.2 节所述，求得近似不变环面的傅里叶系数 $\{K_k\}_{|k|<N_A}$。

现在，如何选择 N_F 以及 δ、ρ、$\hat{}\rho$ 和 ρ_∞ 来验证存在性条件，可能非常不明显。N_F 过大可能会导致计算时间难以承受，而其他参数通常需要相互权衡，既不能让 $\hat{}C^*$ 过大，也不能让 $\rho^{2\tau}$ 过小。我们将采用的一种可行策略是，依次测试一个值列表。因此，我们令 N_F 取自有序集合 $\mathcal{N}_F$，并令 $(\delta$、ρ、$\hat{}\rho$、$\rho_\infty)$ 取自 $\mathcal{P}_S$。这里需要注意的是，更改 $(\delta$、ρ、$\hat{}\rho$、$\rho_\infty)$ 的值时，我们不必重新计算所有内容，因此需要确定哪些内容可以在不使用这些值的情况下计算。

要计算 c_N、$\hat{c}_N$、c_L、σ_L、$\hat{c}_L$ 和 c_P，根据第4.3节，我们除了 ρ 和 $\hat{}\rho$ 外只需要 $\{K_k\} = \{K_k\}_{-\frac{N_F}{2}\le k<\frac{N_F}{2}}$，因此这里无法进行任何预先准备~。对于 c_H 和 σ_H，我们在第4.4节看到，它们由 $\{h_k\}$ 和 ρ 计算得到，因此在这里，提前计算 $\{h_k\}$~ 并在更改 ρ 之间保存它是有意义的。对于 c_D 和 σ_D，我们在第4.5节看到，除了 ρ 外，还需要 $\{\tilde{h}_k\}$、$\{\tilde{T}_k\}$、$\{\tilde{B}^L_k\}$、$\{B^N_k\}$、$\{(\mathcal{R}_\lambda B^N)_k\}$ 和 $\{\tilde{\Phi}_k\}$，因此所有这些傅里叶系数 $\hat{}$ 都可以在更改 ρ 之间保存。使用这些常数，我们可以按照附录 A 中的描述计算 C^*。要计算 c_E，我们需要 ~$G_p - K_{p,\omega}$ 的傅里叶系数，我们将其记为 $\{G_k - K_{k,\omega}\}$，此外还需要 ρ 和 $\hat{}\rho$。在算法 1 中，我们用伪代码写出完整算法。

算法 1：证明不变环面的存在性

```
数据：参数 λ、μ、ε 和 ω，以及 γ 和 τ
结果：如果程序能够证明不变
        环面的存在，则为真；否则为假
计算常数 c_{F,1z}、c_{F,1,μ}、c_{F,2} 和 c_R；
近似傅里叶系数 {K_k}_{|k|<N_A}；
对于 N_F ∈ 𝒩_F，执行
    计算 ~ 的包围区间 {h̃_k}，{T̃_k}，{B̃^L_k}，{B^N_k}，{(R_λ B^N)_k}，
     {Φ̃_k} 和 {G̃_k − K_{ω,k}} 用于 −N_F/2 ≤ k < N_F/2；
    对于 (δ, ρ, ^ρ, ρ_∞) ∈ 𝒫_S 执行
        计算 c_N、ĉ_N、c_L、σ_L、ĉ_L、c_P、σ_P、c_H、σ_H、c_D、σ_D, Ĉ_*、c_E；
        if Ĉ_* c_E < γ^2 ρ^{2τ} 然后
            返回 True；
        end
    end
end
返回 False；
```

ˆ 注释 4.4. 如果算法返回 True，我们当然也可以计算 C_{**}ˆ 和 C_{***}，以估计不变环面的接近程度，以及是否存在局部唯一性，前提是这些信息值得关注。

5 数值结果

为检验我们方法的实用性，我们在计算机上实现了算法 1。该实现采用 C++，并使用 MPFR 和 MPFI 库分别提供的多精度浮点数和区间数。我们使用了一个自定义 FFT，其实现基于[PTVF92]中的方法。

选择映射和算法的参数时都必须谨慎。对于旋转数，我们选择黄金分割数 $\omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$，因为它具有很强的丢番图性质；根据 [FHL16]，我们可取 $\tau = 1.26$ 和 $\gamma = 0.381966011250104$。我们固定 $\lambda = 0.4$（这是 [CF12]中采用的值），此后对于任意 ε，都可以使用 [Lin19]中所述的方法估算 μ。我们取轨道大小为 $N_O = 65296$，傅里叶模态数为 $N_A = 240$。我们令 N_F 取一列递增的 2 的幂，并从一列递减的浮点数中选择 ρ；固定 ˆ$\rho \approx 10^{-2}$，并令 $\rho_\infty = \delta = \rho/4$。算法的结果见表 1。请注意，定理 2.2 断言：若ˆ$\frac{C_*\|E\|_\rho}{\gamma^2\rho^{2\tau}} < 1$，则存在不变圆；而ˆ $\frac{C_{**}\|E\|_\rho}{\gamma\rho^\tau}$ 是近似解与不变圆之间距离的上界。这里需要指出，我们并非要将任何常数最小化，而只是要证明不变圆的存在性。

ε	ρ	N_F	$\frac{\hat{C}_*\|E\|_\rho}{\gamma^2\rho^{2\tau}}$	$\frac{\hat{C}_{**}\|E\|_\rho}{\gamma\rho^\tau}$
0.1	$1.95 \cdot 10^{-3}$	2048	$2.75 \cdot 10^{-3}$	$9.74 \cdot 10^{-13}$
0.2	$1.95 \cdot 10^{-3}$	2048	$6.82 \cdot 10^{-3}$	$1.67 \cdot 10^{-12}$
0.3	$1.95 \cdot 10^{-3}$	2048	$2.00 \cdot 10^{-2}$	$3.14 \cdot 10^{-12}$
0.4	$1.95 \cdot 10^{-3}$	2048	$7.29 \cdot 10^{-2}$	$6.70 \cdot 10^{-12}$
0.5	$1.95 \cdot 10^{-3}$	2048	$4.17 \cdot 10^{-1}$	$1.83 \cdot 10^{-11}$
0.6	$9.77 \cdot 10^{-4}$	2048	$3.74 \cdot 10^{-2}$	$1.83 \cdot 10^{-13}$
0.7	$3.9 \cdot 10^{-3}$	4096	$1.72 \cdot 10^{-7}$	$3.21 \cdot 10^{-15}$

表 1：算法 1 的结果，证明了不同 ε 值下具有黄金均值旋转数的不变圆的存在性。

参考文献

[CC07] Alessandra Celletti 和 Luigi Chierchia。KAM 稳定性与天体力学。《美国数学学会回忆录》，187(878):viii+134，2007年。[CC10] Renato Calleja 和 Alessandra Celletti。耗散标准映射的不变吸引子崩溃。《Chaos》（纽约州伍德伯里），20:013121，2010年3月。

[CCDlL20] Renato Calleja、Alessandra Celletti 和 Rafael De la Llave。耗散标准映射的KAM估计。2020年02月。[CCdlL22] Renato C. Calleja、Alessandra Celletti 和 Rafael de la Llave。耗散标准映射的KAM拟周期解。《Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.》，106：论文编号106111，29页，2022年。[CF12] Renato Calleja 和 Jordi-Llu´ís Figueras。耗散标准映射中拟周期吸引子不变丛的碰撞。《Chaos》，22(3):033114，10页，2012年。[CH17] Marta Canadell 和 `Alex Haro。拟周期正规双曲不变环面的计算：严格结果。《J. Nonlinear Sci.》，27(6):1869–1904，2017年。[CL20] Chiara Caracciolo 和 Ugo Locatelli。Birkhoff正规形的计算机辅助估计。《J. Comput. Dyn.》，7(2):425–460，2020年。[CL21] Chiara Caracciolo 和 Ugo Locatelli。具有少量节点的FPU非线性链中的椭圆环面。《Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.》，97：论文编号105759，23页，2021年。[CS12] Maciej J. Capi´nski 和 Carles Sim´o。正规双曲不变流形的计算机辅助证明。《Nonlinearity》，25(7):1997–2026，2012年。[DDS+16] Suddhasattwa Das、Chris B. Dock、Yoshitaka Saiki、Martin Salgado-Flores、Evelyn Sander、Jin Wu 和 James A. Yorke。拟周期性的测量。《EPL (Europhysics Letters)》，114(4):40005，2016年。[dlL01] Rafael de la Llave。KAM理论教程。载于《光滑遍历理论及其应用》（美国华盛顿州西雅图，1999年），《纯数学专题讨论会论文集》第69卷，第175–292页。美国数学学会，美国罗得岛州普罗维登斯，2001年。[dlLGJV05] R. de la Llave、A. Gonz´ález、 `A. Jorba 和 J. Villanueva。无作用-角变量的KAM理论。《Nonlinearity》，18(2):855–895，2005年。[DSSY17] Suddhasattwa Das、Yoshitaka Saiki、Evelyn Sander 和 James A. Yorke。定量拟周期性。《Nonlinearity》，30(11):4111–4140，2017年。[DY18] Suddhasattwa Das 和 James A Yorke。拟周期轨道遍历平均值的超收敛。《Nonlinearity》，31(2):491，2018年。[FH12] Jordi-Llu´ís Figueras 和 `Alex Haro。可靠计算濒临崩溃的鲁棒响应环面。《SIAM J. Appl. Dyn. Syst.》，11(2):597–628，2012年。

[FHL16] Jordi-Llu´ís Figueras、 `Alex Haro 和 Alejandro Luque。《KAM理论的严格计算机辅助应用：一种现代方法》。计算数学基础，17，2016年11月。[FHL20] Jordi-Llu´ís Figueras、Alex Haro 和 Alejandro Luque。《旋转数测度的有效上界》。Nonlinearity，33(2)：700–741，2020年。[HCF+16] `Alex Haro、Marta Canadell、Jordi-Llu´ís Figueras、Alejandro Luque 和 Josep Maria Mondelo。《不变流形的参数化方法》，应用数学科学丛书第195卷。施普林格国际出版公司，第一版，2016年。[Lin19] Victor Linroth。《三维Henon型映射族中准周期吸引不变圆的双曲性崩溃》。已投稿待发表手稿，2019年6月。[PTVF92] William H. Press、Saul A. Teukolsky、William T. Vetterling 和 Brian P. Flannery。《C语言数值算法》。剑桥大学出版社，美国剑桥，第二版，1992年。[SY18] Yoshitaka Saiki 和 James Yorke。《Siegel圆盘/球中的准周期轨道与巴比伦问题》。Regular and Chaotic Dynamics，23：735–750，2018年11月。[VL22] Lorenzo Valvo 和 Ugo Locatelli。《磁力线的哈密顿控制：证明KAM屏障存在性的计算机辅助结果》。J. Comput. Dyn.，9(4)：505–527，2022年。

计算 KAM型定理中的常数

如果我们有上界

$$c_L \geq \|DK\|_\rho, \quad c_P \geq \|P^{-1}\|_\rho, \quad c_H \geq \|\mathcal{R}_H\|_\rho,$$

$$c_D \geq |\langle B^L - T\mathcal{R}_H(B^N)\rangle^{-1}|, \quad c_B \leq \operatorname{dist}(K(\mathbb{T}^d_\rho), \partial\mathcal{B})$$

使得 $c_L < \sigma_L$、 $c_P < \sigma_P$、 $c_H < \sigma_H$ 和 $c_D < \sigma_D$, 以及下界 $c_U \leq \operatorname{dist}(a, \partial\mathcal{U})$, 我们可以通过以下公式计算定理 2.2 中的常数 $\hat{C}_*$、$\hat{C}_{**}$ 和 $\hat{C}_{***}$

$$\begin{aligned}
C_1 &= 1 + \sigma_H\sigma_P c_N c_{F,1,z},\\
C_2 &= 1 + \sigma_P\sigma_D c_{F,1,a} C_1,\\
C_3 &= C_2((\sigma_L+1)c_R\sigma_P C_1 + c_N\sigma_H\sigma_P\gamma\delta^\tau),\\
\hat{C}_2 &= \sigma_L C_3 + c_N\sigma_H\sigma_P C_2\gamma\delta^\tau,\\
\hat{C}_3 &= \sigma_D\sigma_P C_1,\\
\hat{C}_{2,3} &= \max(\hat{C}_2, \hat{C}_3\gamma\delta^\tau),\\
\hat{C}_4 &= 2\sigma_P^2 d\hat{C}_2,\\
C_4 &= c_N(\sigma_P c_{F,2}\hat{C}_{2,3}\delta + c_{F,1,z}\hat{C}_4),\\
\hat{C}_5 &= 2\sigma_H^2 C_4,\\
C_5 &= \hat{C}_4 c_{F,1,a} + \sigma_P c_{F,2}\hat{C}_{2,3}\delta,\\
C_6 &= C_5 + \sigma_H\sigma_P c_{F,1,a} C_4 + \sigma_P c_{F,1,z} c_N\sigma_H C_5 + \sigma_P c_{F,1,z} c_N\sigma_P c_{F,1,a}\hat{C}_5,\\
\hat{C}_6 &= 2\sigma_D^2 C_6,\\
\hat{C}_7 &= d c_R C_3\gamma\delta^{\tau-1} + \frac{1}{2}c_{F,2}\hat{C}_{2,3},\\
a_1 &= \frac{\rho-\rho_\infty}{\rho-2\delta-\rho_\infty}, \quad a_3 = \frac{\rho}{\delta},\\
\hat{C}_8 &= \max\left\{\frac{d\hat{C}_2}{\sigma_L - c_L}\frac{1}{1-a_1^{1-\tau}}, \frac{\hat{C}_4}{\sigma_P - c_P}\frac{1}{1-a_1^{1-\tau}},\right.\\
&\quad \frac{\hat{C}_5}{\sigma_H - c_H}\frac{1}{1-a_1^{1-\tau}}, \frac{\hat{C}_6}{\sigma_D - c_D}\frac{1}{1-a_1^{1-\tau}},\\
&\quad \left.\frac{\hat{C}_2\delta}{c_B}\frac{1}{1-a_1^{-\tau}}, \frac{\hat{C}_3\delta^{\tau+1}\gamma}{c_U}\frac{1}{1-a_1^{-2\tau}}\right\},\\
\hat{C}_* &= \max\left\{\hat{C}_7(a_1a_3)^{2\tau}, \hat{C}_8 a_3^{\tau+1}\gamma\rho^{\tau-1}\right\},\\
\hat{C}_{**} &= \max\left\{\frac{\hat{C}_2 a_3^\tau}{1-a_1^{-\tau}}, \frac{\hat{C}_3\gamma\rho^\tau}{1-a_1^{-2\tau}}\right\},\\
\tilde{C} &= \hat{C}_{2,3}\frac{1}{2}c_{F,2},\\
\hat{C}_{***} &= 4^\tau\tilde{C}\hat{C}_{**}.
\end{aligned}$$