arXiv:2305.04642v1 [math.DS] 8 May 2023

区间交换变换群的自由作用与几乎阿贝尔群的动力系统

NANCY GUELMAN 和 ISABELLE LIOUSSE

Abstract. H¨older 定理指出，任何通过圆周同胚自由作用的群都是阿贝尔群；但对于区间交换变换，这一结论不再成立：我们首先给出非阿贝尔群自由作用的例子。

然后，在指出通过区间交换变换自由作用的有限生成群几乎阿贝尔之后，我们对包含 $\mathbb{Z}^2$ 的群的自由作用进行分类，并证明这些作用"共轭"于某些特定子群 G_n 中的作用，即 $G_n \simeq (\mathcal{G}_2)^n \rtimes \mathcal{S}_n$ 其中$\mathcal{G}_2$ 是将圆周旋转视为对 2 个区间进行交换所得到的群，而 $\mathcal{S}_n$ 是通过置换 $\mathcal{G}_2$ 的副本而作用的 $\{1, ..., n\}$ 的置换群。

我们还研究几乎阿贝尔群的非自由作用，并对任何包含一个与无周期点且支撑不相交的受限旋转之乘积共轭的此类群，得到了相同的结论。

由此，我们给出了区间交换变换的非几乎幂零子群的例子。特别地，我们证明，由 $f \in G_n$ 无周期点且$g \notin G_n$ 生成的群不是几乎幂零的。此外，我们还展示了区间交换变换的有限生成非几乎幂零子群的例子，其中一些是亚交换群，另一些则不是几乎可解群。

1. Introduction.

定义 1.1. 区间交换变换（IET）是一个双射映射 f :$[0, 1) \to [0, 1)$，它由单位区间的有限个左闭右开子区间划分以及通过平移对这些区间重新排序来定义。若该划分的基数为 r，则称 f 为一个 r-区间交换变换。

圆周旋转可视为 2-区间交换变换，而支撑为子区间的区间交换变换 g 是受限旋转，当且仅当从 I 到 $[0, 1$ 的保向仿射映射将 $g_{|I}$ 共轭到一个 2-区间交换变换。它记作 $\boldsymbol{R_\alpha}$, $_I$其中 $\alpha \in {}^{[a,b)}\overline{b\sim a}$由 $g(a) - a$ 表示。

我们用 G 表示由所有区间交换变换构成的群，用 $\mathsf{G_2}$ 表示由所有圆周旋转构成的群， $\boldsymbol{R_\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{S}^1)$, 并将其视为 2-区间交换变换。

仿射区间交换变换（AIET）是一个双射映射 f: $[0, 1) \to [0, 1)$，它由单位区间的有限划分定义，该划分将单位区间分成半开子区间，并且在每个子区间上的限制都是保向仿射映射。

作为 $[0, 1)$ 的同胚的 AIET 称为分段线性同胚。

如果一个群中只有单位元的作用具有不动点，则称该群的作用是自由的。特别地，自由作用是忠实的。

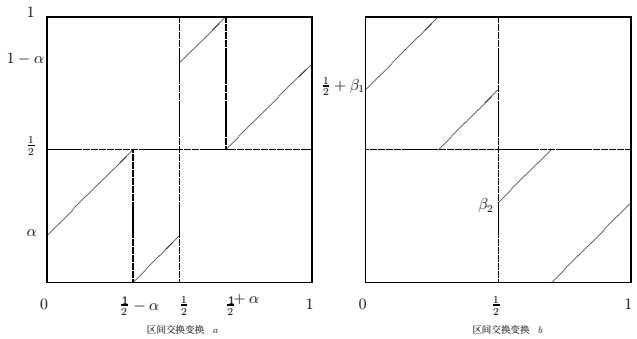
根据 H¨older 定理（例如参见 [Nav11] 的定理 2.2.32），通过圆周同胚自由作用的群都是阿贝尔群。

注 1.2. 由于平移彼此可交换， H of $\mathcal{G}$ 的任意点在一个有限生成子群作用下的轨道都具有多项式增长。因此，若 H 自由作用，则它具有

多项式增长，故根据格罗莫夫 [Gro81]，它几乎幂零。此外，由于任意有限生成幂零群都是多循环群， [DFG20] 的定理 2 推出 H 几乎阿贝尔。

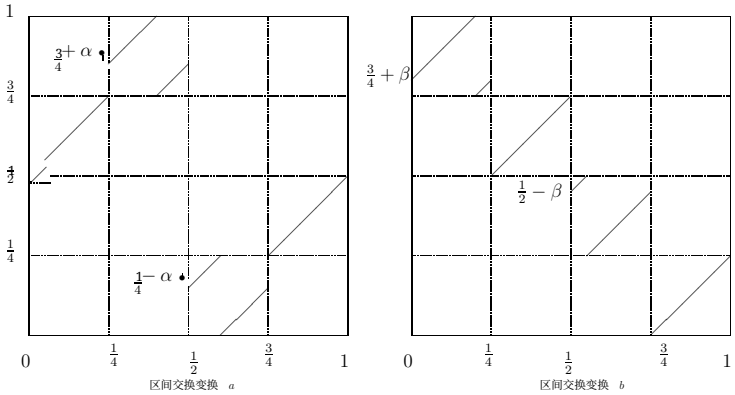
为了说明 H¨older 定理对于由 $\mathcal{G}$的元素所生成的自由作用不再成立，请读者验证:

(1) 以下区间交换变换 a和 b 生成 Baumslag-Solitar 群 $BS(1,-1)$ 的一个自由且极小的作用: $=\langle a, b \mid bab^{-1}=a^{-1}\rangle$，前提是 1, α, β_1 和 β_2 是有理线性无关数。



此外，这个例子补全了作者的结果（[GL19a]），该结果证明，由 $BS(m,n)=\langle a, b \mid ba^m b^{-1}=a^n\rangle$ 定义的鲍姆斯拉格–索利塔尔群（[BS62]）在 $|m|\neq|n|$时不能通过 AIET 忠实作用。

(2) 以下区间交换变换 a 和 b 生成晶体群 $C_1=\langle a,b \mid ba^2b^{-1}=a^{-2}, ab^2a^{-1}=b^{-2}\rangle$ 的自由极小作用，前提是 1, α 和 β 是有理线性无关数。



注意到，前面两个群是 $\mathcal{G}$ 的某些非常特殊的子群的子群，即下文所述的群 G_n

定义 1.3. 设 n 为正整数，$\mathbb{S}_n=[0,\frac{1}{n}]/0=\frac{1}{n}$ 为长度为 $\frac{1}{n}$ 的圆。我们将 $\boldsymbol{G_n}$ 定义为在 $[0,1)$ 上的区间交换变换集合，这些变换保持划分 $[0,1)=[0,\frac{1}{n})\cup[\frac{1}{n},\frac{2}{n})\ldots\cup[\frac{n-1}{n},1)$，且在区间 $I_i=[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n})$ 上的限制是仅有一个内部间断点的区间交换变换。

对于 $g\in G_n$，我们将 $\boldsymbol{\sigma_g}$ 定义为 $\mathcal{S}_n$ 中由 $\sigma_g(i)=j$ （若 $g(I_i)=I_j$）给出的元素。

It f可推出 $g_{|I_i}=R_{\alpha_i,\ \sigma_g(i)}$ 其中 $R_{\alpha_i,\ \sigma_g(i)}(x)=R_{\alpha_i,\ I_i}(x)+{}^{\sigma_g(i}-i)$对于 $x\in I_i$.

我们将 g的旋转向量定义为 $\boldsymbol{\alpha_g}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=(\alpha_1(g)\ldots,\alpha_n^n(g))\in{\mathbb{S}_n}^n$，并记作 $\boldsymbol{g}=(\boldsymbol{\alpha_g},\boldsymbol{\sigma_g})$。

例 1.1. 上图以图形表示的区间交换变换 a 和 b，可表示为：

(1) $a, b \in G_2$, $\left\{ \begin{array}{l} \alpha_a = (\alpha, -\alpha) \\ \sigma_a = Id \end{array} \right\}$ and $\left\{ \begin{array}{l} \alpha_b = (\beta_1, \beta_2) \\ \sigma_b \text{ is the transposition } (1,2) \end{array} \right\}$.

(2) $a, b \in G_4$, $\left\{ \begin{array}{l} \alpha_a = (0, \alpha, -\alpha, 0) \\ \sigma_a = (2,4) \circ (1,3) \end{array} \right\}$ and $\left\{ \begin{array}{l} \alpha_b = (\beta, 0, -\beta, 0) \\ \sigma_b = (2,3) \circ (1,4) \end{array} \right\}$.

注 1.4. 根据这个定义可直接得出，G_n 是一个群，且将 G_n中的两个元素 f和 g 复合后，得到 $\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{f\circ g} = \sigma_g(\alpha_f) + \alpha_g \\ \sigma_{f\circ g} = \sigma_f \circ \sigma_g \end{array} \right\}$，其中 σ_g通过置换向量 α_f 的坐标来作用于该向量。

因此，映射 $(\alpha, \sigma) : G_n \to (\mathbb{S}_n)^n \rtimes \mathcal{S}_n$ 是一个同构。特别地，群 G_n 是几乎阿贝尔群；根据 [DFG20], 的命题 1.2，任意有限生成的几乎阿贝尔群都同构于某个 G_n的子群。

在命题 2.1 中，我们将具体说明 [DFG20] 的构造，以提供自由作用，并由此得出：以 $\mathcal{G}$中的元素形式自由作用的有限生成群，恰好是几乎阿贝尔群；它们同构于 G_n的子群。

除了最后这一事实之外，我们还注意到，G_n 的子群具有某些代数或动力学性质，特别容易理解，因此这些群为 $\mathcal{G}$提供了玩具模型。在一篇“即将发表的工作”中，我们研究 $\mathcal{G}$ 的可逆元，首先描述并分类 G_n 的可逆元（初步版本见 [GL19b] ）。

注意到 H¨older 定理可以进一步明确为：“圆上的自由作用在拓扑意义下半共轭于旋转群的作用”（例如，参见 [Nav11]中定理 2.2.32 后的评论），因此对 $\mathcal{G}$的自由作用进行动力学分类是有意义的。我们将通过共轭来分类，但不要求映射属于 $\mathcal{G}$；事实上，我们的共轭映射定义为

定义 1.5. 若 $f \in \mathcal{G}$ 可通过映射 $P \circ E$与 $\boldsymbol{F} \in \boldsymbol{G_n}$作 PL ◦ G-共轭，则称 $f \in \mathcal{G}$ 与 $\boldsymbol{F} \in \boldsymbol{G_n}$PL ◦ G-共轭，其中 $E \in \mathcal{G}$ 且 P是一个分段线性同胚，并且对任意 $k \in \{1, ..., n\}$，P^{-1}在$[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n})$ 上是仿射的。

这里，我们将证明

定理 1. 任意包含 $\mathbb{Z}^2$ 的有限生成群的自由作用在 $\mathcal{G}$ 中的像，均与某个 G_n 的子群 PL ◦$\mathcal{G}$-共轭。

我们的证明策略并不严格要求作用是自由的，而是要求存在一些特定的元素，这些元素会在考虑足够大的自由作用时出现。更准确地说，第一步是

命题 1.6. $\mathbb{Z}^2$ 在 $\mathcal{G}$ 上的任何自由作用都由无周期点映射构成，这些映射有一个迭代，在 $\mathcal{G}$ 中共轭于一组支撑互不相交的受限旋转的乘积。

注意，该命题意味着，$\mathbb{Z}^2$ 在 $\mathcal{G}$ 中的任意自由作用的像始终包含一些映射，这些映射在 $\mathcal{G}$ 中共轭于由具有不相交支集且没有周期点的受限旋转构成的乘积。而第二步是

定理 2. 设 G 是 $\mathcal{G}$的一个几乎阿贝尔子群。如果 G 包含一个元素，该元素在 $\mathcal{G}$ 中共轭于若干个支集不相交且没有周期点的受限旋转的乘积，那么 G 在 PL ◦$\mathcal{G}$ 意义下共轭于某个 G_n 的子群。

一些额外的动力学假设可以带来更强的刚性结果：

定义 1.7。

- 如果对所有 $p \in \mathbb{Z}^*$，映射 f^p 都是极小的，则称区间交换变换 f 是全极小的。更一般地：
- 群 G 的 $\mathcal{G}$ 元素所生成的作用称为全极小，如果 G 的任意有限指数子群都在 $[0,1$ 上极小作用。

注。根据 Keane [Kea75], ，最大连续区间长度在有理数上线性无关的区间交换变换是全极小的。

推论 1。设 G 是一个几乎阿贝尔群，且包含 $\mathbb{Z}^2$ 的一个副本。那么， G 在 $\mathcal{G}$ 上的任意忠实全极小作用，在 $\mathcal{G}$ 中都与一个旋转作用共轭。

根据 Schreier 引理和有限生成阿贝尔群的分类，任意有限生成的几乎阿贝尔群要么是几乎循环的，要么包含 $\mathbb{Z}^2$ 的一个副本。结合注 1.2 中涉及的 [DFG20] 的结果，我们推得

推论 2. 设 G 是 $\mathcal{G}$ 的有限生成子群，其中包含一个与旋转不共轭的全极小区间交换变换，则 G 要么是几乎循环的，要么不是几乎幂零的。

利用定理 2 及其证明中的要素，我们可以给出 $\mathcal{G}$ 的非几乎幂零子群的具体例子：

推论 3 。由下列 f 和 g 生成的群 G 不是几乎幂零的 $t.$

(1) f 是无理旋转，且 g 不是旋转。(2) $f \in G_n$ 无周期点，且 $g \notin G_n$。

对于 $n = 1$，这也可由 [JMBMdlS18] 的命题 5.9 推出。此外，在最后一节中，我们给出了一些有限生成的非几乎幂零子群的例子，这些子群具有亚交换或非几乎可解等额外性质。具体而言，这些子群由旋转和挠元生成，正如 Boshernitzan 在 [Bos16] 中所研究的那些群一样。

注记 1.8. 根据 [DFG20], ，推论 2、3、5 及最后一节中涉及的所有有限生成且非几乎幂零的 $\mathcal{G}$ 子群都不是多循环的。

研究 $\mathcal{G}$ 的几乎阿贝尔子群的动力系统的另一动机，来自鲍姆斯拉格–索利塔尔群 $BS(1,-1) = \langle\, a,\ b \mid bab^{-1} = a^{-1} \,\rangle$ 以及它与可逆映射的联系：O'Farrell 和 Short（[OS15]）指出了可逆性在动力系统和群论中的重要性，并提出了以下问题：给定一个群 G，其中所有可逆元是否都能由一个对合实现可逆？在 [GL19b], 中，我们研究可逆的区间交换变换，而 $BS(1,-1)$ 的自由作用对 O'Farrell 和 Short 的问题起着关键作用。特别是，定理 1 适用于此类作用（因为子群 $\langle\, a, b^2 \,\rangle$ 同构于 $\mathbb{Z}^2$ 且指数为 2），由此得到

推论 4. $\mathcal{G}$ 的元素对 $BS(1,-1)$ 的任意自由作用，都与某个 G_n 的元素对 $BS(1,-1)$ 的自由作用 $PL \circ \mathcal{G}$-共轭。

致谢。我们感谢 MathAmSud 项目 GDG 18- MATH-08、Labex CEMPI (ANR-11-LABX-0007-01)、ANR Gromeov、里尔大学 (BQR) 以及 I.F.U.M.I. 的支持。

2. Preliminaries.

2.1. 由 $\mathcal{G}$ 中元素自由作用的有限生成群的代数分类

命题 2.1. 每个有限生成的几乎阿贝尔群都能作为某个 G_n 的子群自由作用。

证明。设 G 是一个有限生成的几乎阿贝尔群。根据有限生成阿贝尔群的分类，存在一个与某个 $\mathbb{Z}^m$ 同构的 $H \lhd G$，使得 $F = G/H$ 是有限群。此外，H 可表示为圆旋转群 A（视为 $[0,1$ 的 2-区间交换变换）。也就是说，$A = \langle R_{\alpha_1}、...、R_{\alpha_m}\rangle$ 和 1、α_1、$\cdots$、α_m 是 $\mathbb{Q}$ 线性无关的。

根据 Krasner-Kalaynie（见 [KK]），G 嵌入 $H^F \rtimes F$ 中，其中 F 通过置换坐标作用于 H^F。因此，只需证明 $A^F \rtimes F$ 通过某个 G_n 的元素自由作用即可。

对于任意 $(a_s)_{s\in F} \in A^F$ 和 $\sigma \in F$，我们关联一个映射

$$E((a_s),\sigma) : \begin{cases} [0,1)\times F \to [0,1)\times F \\ (x,s) \mapsto (a_s(x), \sigma s) \end{cases}$$

注意到 $E((a_s)\ \sigma) \circ E((a'_s)\ \sigma') = E((a_{\sigma' s} \circ a'_s)\ \sigma\sigma')$，我们得到 E 诱导了一个从 $A^F \rtimes F$ 到群 $\mathrm{M}\mathcal{G}_2([0,1) \times F) := \{E((a_s)\ \sigma), (a_s) \in(\mathcal{G}_2)^F, \sigma \in F\}$ 的单射态射。

此外，其像在 $[0,1) \times F$ 上自由作用，因为 $1, \alpha_1, ..., \alpha_m$ 线性无关。

最后，通过将 $[0,1)$ 细分为 $\#F$ 个等长区间，$\mathrm{M}\mathcal{G}_2([0,1) \times F)$ 嵌入 $G_{\#F}$ 中。□

2.2. 区间交换变换的动力学性质。

定义 2.2。

- 区间交换变换 f 的断点集是将初始点 0 加入 f 的不连续点集得到的，记作 $\mathrm{BP}(f)$。由 $\mathrm{BP}(f)$ 中各点的 f-轨道组成的集合记作 $\mathrm{BP}_\infty(f)$。g 的平移集为 $\{g(x) - x,\ x \in [0,1)\}$。
- 有限生成子群 G 的断点集 $\mathcal{G}$ 为 $\mathrm{BP}(G) := \bigcup \mathrm{BP}(g)^{g\in G}$，其平移集为 $\{g(x) - x,\ g \in G,\ x \in [0,1)\}$。

以下内容留给读者验证

性质 2.3. 设 f, g 属于 $\mathcal{G}$ 且 $n \in \mathbb{N}$。
(a) $\mathrm{BP}(f \circ g) \subseteq \mathrm{BP}(g) \cup g^{-1}(\mathrm{BP}(f))$，(b) $\mathrm{BP}(f^{-1}) = f(\mathrm{BP}(f))$，
以及 (c) $\mathrm{BP}(f^n) \subseteq \mathrm{BP}(f) \cup f^{-1}(\mathrm{BP}(f)) \cup ... \cup f^{-n+1}(\mathrm{BP}(f))$。

注 2.4. 根据这些性质，$\#\mathrm{BP}(f^n)$ 有上界，且上界为 $\#\mathrm{BP}(f)\times|n|$。然而，对于有限阶区间交换变换，以及无理旋转等极小区间交换变换，$\#\mathrm{BP}(f^n)$ 可能不依赖于 n 而有界；进而，对于 G_n 的所有元素也可能如此。在这种情况下，我们称 f 为有界断点型。

定义 2.5。设 $f \in \mathcal{G}$。

•令 $p \in \mathbb{N}^*$，我们用 $\mathrm{Per_p}(f)$ 表示满足以下条件的点集 x：$\mathrm{O}f(x)$，x 的 f-轨道的基数为 p。f 的不动点集为 $\mathrm{Fix}(f) = \mathrm{Per_1}(f)$。

• 令 V 为 $[0,1$的一个子集），如果 V 是由有限个形如 $[b,c)$ 的区间构成的非空并集，其中 b、c 属于 $\mathrm{BP}_\infty(f)$，则称 V 为 $\mathcal{M}$ 型。对于包含关系而言，在所有非空的 $\mathcal{M}$ 型且 f 不变的 $[0,1)$ 子集中，若一个 $\mathcal{M}$ 型且 f不变的集合是极小的，则称其为一个 f分量。

IET 的极小分支与周期分支的著名分解，最初由 Mayer 于 1943 年针对带测度曲面流给出（[May43]），随后由 Arnoux（[Arn81]）和 Keane（[Kea75]）针对区间交换变换重新表述。

Arnoux-Keane-Mayer 分解定理断言，$[0,1)$ 可以分解为 $[0,1)$ $= P_1 \cup ... P_l \cup M_1 ... \cup M_m$，其中

• P_i是一个 f周期分支：P_i是区间 $[b,c)$ 的 f轨道，其中 b、c属于 $\mathrm{BP}_\infty(f)$，且 f的所有迭代 f^k在 $[b,c)$ 上都是连续的。特别地，P_i中的点具有相同的周期，且都是周期点。

• M_j是一个 f极小分支：对于任意 $x \in M_j$，轨道 $\mathcal{O}_f(x)$ 在 M_j 中稠密。

为方便起见，包含 $x \in I$ 的 f分支记为 $\boldsymbol{M_f(x)}$。

根据注 2.4，给出如下定义是有意义的

定义 2.6。我们定义 IET f 在经过给定点 x 的 f轨道上的迭代的不连续点数量的增长率为

$$\boldsymbol{\mathcal{N}_x(f)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\#\{\mathrm{BP}(f^n) \cap \mathcal{O}_x(f)\}}{n}.$$

性质 2.7. 设 f, g属于 $\mathcal{G}$和 $x \in [0,1)$.

(1) 若 $BP(f) \cap \mathcal{O}_x(f) = \emptyset$，则 $\mathcal{N}_x(f) = 0$.

(2) $\mathcal{N}_{g(x)}(g \circ f \circ g^{-1}) = \mathcal{N}_x(f)$.

证明。

条目 (1) 由性质 2.3 的条目 (c) 得出。

条目 (2). 设 $N \in \mathbb{N}$，若 $A \subset B \cup F$ 且 $\#F \leq N$，则记作 $\boldsymbol{A \underset{N}{\subset} B}$。

设 $C = 2\#\mathrm{BP}(g)$ 且 $f_g = g \circ f \circ g^{-1}$，则有 $\mathcal{O}_{g(x)}(f_g) = g(\mathcal{O}_x(f))$.

由性质 2.3 的条目 (a) 可知:

- $\mathrm{BP}(f_g^n) \subseteq \mathrm{BP}(g^{-1}) \cup g(\mathrm{BP}(f^n)) \cup g \circ f^{-n}(\mathrm{BP}(g)) \underset{C}{\subset} g(\mathrm{BP}(f^n))$ and
- $\mathrm{BP}(f^n) = \mathrm{BP}(g^{-1} \circ f_g^n \circ g) \subseteq \mathrm{BP}(g) \cup g^{-1}(\mathrm{BP}(f_g^n)) \cup g^{-1} \circ f_g^{-n}(\mathrm{BP}(g^{-1})) \underset{C}{\subset} g^{-1}(\mathrm{BP}(f_g^n))$.

Therefore $\mathrm{BP}(f_g^n) \cap \mathcal{O}_{g(x)}(f_g) \underset{C}{\subset} g\big(\mathrm{BP}(f^n) \cap g^{-1}(\mathcal{O}_{g(x)}(f_g))\big) = g\big(\mathrm{BP}(f^n) \cap \mathcal{O}_x(f)\big)$

and $\mathrm{BP}(f^n) \cap \mathcal{O}_x(f) \underset{C}{\subset} g^{-1}(\mathrm{BP}(f_g^n) \cap g(\mathcal{O}_x(f)) = g^{-1}(\mathrm{BP}(f_g^n) \cap \mathcal{O}_{g(x)}(f_g))$.

Finally, we get

$$\#\left(\mathrm{BP}(f^n) \cap \mathcal{O}_x(f)\right) - C \leq \#\left(\mathrm{BP}(f_g^n) \cap \mathcal{O}_{g(x)}(f_g)\right) \leq \#\left(\mathrm{BP}(f^n) \cap \mathcal{O}_x(f)\right) + C.$$

我们通过除以 n 并取极限得出结论。 □

此外，$\mathcal{N}_x$（f）给出了有界断点型的刻画。更确切地说，由 [Nov09], 我们可以推得

定理 2.1。改编自 [Nov09]中的定理 1.1 和定理 1.2。

设 $f \in \mathcal{G}$，以下断言等价

(1) 对任意 $x \in I$，有 $\mathcal{N}_x(f) = 0$。(2) 映射 f 属于有界断点型。(3) 存在正整数 p，使得 f^p 在 $\mathcal{G}$ 中共轭于若干个支集两两不相交的受限旋转的乘积。(4) 存在两个正整数 p 和 n、一个区间交换变换 E 以及一个分段线性同胚 $P\colon I \to I$，使得 $\Phi = (P \circ E) \circ f^p \circ (P \circ E)^{-1} \in G_n$，$\sigma_\Phi = \mathrm{Id}$，且映射 P^{-1} 在每个 $I_i = [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n})$ 上都是仿射的。

证明。

Since $\mathrm{BP}(f^n) = \bigcup_{a \in \mathrm{BP}(f)} \mathrm{BP}(f^n) \cap \mathcal{O}_f(a)$, the implication (1)$\Longrightarrow$(2) is a direct conse-

由 [Nov09] 的定理 1.1 可知，要么 #BP(f^n) 有界，要么 #$BP(f^n)$ 呈线性增长。

(2)$\Longrightarrow$(3) 的推论正是 [Nov09] 的定理 1.2。

我们证明（3）$\Longrightarrow$（4）。设 E 是一个区间交换变换，它将 f^p 共轭到 F，其中 F 是一组支集两两不相交的受限旋转的乘积。我们将 I 分解为连续半开区间 J_i、$i = 1$、.....、n 的不交并，其中 J_i 要么是 F 中某个受限旋转的支撑，要么是 Fix(F) 的一个连通分支。我们定义 P 为满足 $P(J_i) = I_i$ 且 $P_{|J_i}$ 为仿射映射的分段线性同胚。容易看出 $\Phi = P \circ F \circ P^{-1} \in G_n$ 且 $\sigma_\Phi = \mathrm{Id}$。

还需证明 (4)$\Longrightarrow$(1)。由于 $\Phi \in G_n$，对任意 $x \in I$，有 $\mathcal{N}_x(\Phi) = 0$，而且$\mathcal{N}_x(P^{-1} \circ \Phi \circ P) = 0$，因为 P 是同胚。因此，性质 2.7 的条目 (2) 表明，对任意 $x \in I$，有 $\mathcal{N}_x(f^p) = 0$。由此可得，对任意 $x \in I$，有 $\mathcal{N}_x(f) = 0$。事实上：

$p-1$设 $x \in I$且 $n \in \mathbb{N}^*$，则有 $\mathcal{O}_f(x) = \bigcup_{j=0} \mathcal{O}_{f^p}(f^j(x))$，于是

$$\frac{\#\big(\mathrm{BP}(f^{pn}) \cap \mathcal{O}_f(x)\big)}{pn} \leq \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} \frac{\#\big(\mathrm{BP}(f^{pn}) \cap \mathcal{O}_{f^p}(f^j(x))\big)}{n}$$

取 n 趋于无穷时的极限，可得 $\mathcal{N}_x(f) \leq \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} \mathcal{N}_{f^j(x)}(f^p)$。

最后，由性质 2.7 的条目 (2)，对任意整数j，有 $\mathcal{N}_x(f^p) = \mathcal{N}_{f^j(x)}(f^p)$，于是 $\mathcal{N}_x(f) \leq \mathcal{N}_x(f^p) = 0$。□

2.3. 中心化子。

2.3.1. 一般性质。

设 G 是一个群，且 $f \in G$。众所周知，G 中 f 的中心化子 $\mathrm{C}(f) := \{h \in G : h \circ f = f \circ h\}$ 是 G 的一个子群。

引理 2.8. 设 f、h 是集合 X 的双射，且 $h \in \mathrm{C}(f)$，则：

- 对于任意 $x \in X$，$h(\mathcal{O}_f(x)) = \mathcal{O}_f(h(x))$。
- 对于任意 $p \in \mathbb{N}^*$，精确周期为 p 的 f-周期点集合 $\mathrm{Per}_p(f)$，在 h 下是不变的。

证明。

- 第一条是以下事实的直接推论：对于任意 $x \in X$，都有$h(f^n(x)) = f^n(h(x))$。

- 设 $p \in \mathbb{N}^*$， $x \in \mathrm{Per}_p(f)$ 表示 $\#\mathcal{O}_f(x) = p$。由第一条可得 $\#\mathcal{O}_f(h(x)) = p$，因此 $h(x) \in \mathrm{Per}_p(f)$。□

引理 2.9. 设 f， $h \in \mathcal{G}$， $h \in \mathrm{C}(f)$，且 x 是一个非 f-周期点。

那么 $h(x)$ 不是 f-周期的，且 $h(M_f(x)) = M_f(h(x))$。此外，存在一个正整数 r，使得 $h^r(M_f(x)) = M_f(x)$。

证明。由于 x 不是 f-周期的，轨道 $\mathcal{O}_f(x)$ 在 $M_f(x)$ 中稠密。根据引理 2.8，点 $h(x)$ 不是 f- 周期的，且 $h(\mathcal{O}_f(x)) = \mathcal{O}_f(h(x))$；取闭包可得 $h(M_f(x)) = M_f(h(x))$。[1] 此外，f-极小分支的数目有限，这意味着存在两个不同的整数 s 和 t，使得 $h^s(M_f(x)) = h^t(M_f(x))$，因此$h^{t-s}(M_f(x)) = M_f(x)$。□

2.3.2. 有界断点型区间交换变换的中心化子。我们先回顾

性质 2.10.（[Nov09], 引理 5.1 及其证明。）

(1) 两个无理旋转 R_α 和 R_β，其中 $\alpha \neq \beta$ 模 1，在 $\mathcal{G}$中不同共轭。(2) 无理旋转在 $\mathcal{G}$ 中的中心化子是旋转群 $\mathcal{G}_2$。

这可推广为

引理 2.11. 设 $F \in G_n$ 没有周期点，则 $\mathrm{C}(F) \subset G_n$。

证明. 设 $F \in G_n$ 没有周期点。注意到，对所有 $n \in \mathbb{Z}$， $C(F) \subset C(F^n)$ 都成立；将 F 替换为某个迭代 F^p后，可假设 $\sigma_F = \mathrm{Id}$。于是区间 $I_i = [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n})$ 是 F的极小分支，因为 F没有周期点。

令 $H \in \mathrm{C}(F)$。根据引理 2.9，存在一个置换 $\gamma \in \mathcal{S}_n$，使得 $H(I_i) = I_{\gamma(i)}$，并且 H 将无理旋转 $F_{|I_i}$ 共轭为无理旋转 $F_{|I_{\gamma(i)}}$。因此，性质 2.10 的第 (1) 项意味着 $\alpha_{\gamma(i)}(F) = \alpha_i(F)$。

接下来，我们考虑由 $\alpha(K) = 0$ 和 $\sigma_K = \gamma$定义的 K of G_n 映射。容易看出 $K \in \mathrm{C}(F)$，因此 $K^{-1} \circ H$ 是一个与 F 交换且固定每个I_i的区间交换变换。根据性质 2.10 的条目（2），对于任意 i，有 $(K^{-1} \circ H)_{|I_i} = R_{\beta_i}$，这意味着$K^{-1} \circ H \in G_n$， H也如此。□

更一般地，我们有

命题 2.12. 设 f 是一个没有周期点的区间交换变换，且它与 $F \in G_n$ 共轭，其中共轭映射 P 是分段线性同胚，并且 $P^{-1}_{|I_i}$ 是保方向的仿射映射。那么映射 P 将 $\mathrm{C}(f)$ 共轭到 G_n 的一个子群。

[1] 映射 h 可能不连续。然而，通过 Denjoy 膨胀，由 f 和 h生成的群 G 的动力系统可以提升为作用在 $X = [0,1) \sqcup \mathrm{BP}_\infty^-(G)$ 上的同胚群的动力系统，其中 $\mathrm{BP}_\infty^-(G)$ 是 $\mathrm{BP}_\infty(G)$ 的一个抽象副本。对于任意一个 $x \in \mathrm{BP}_\infty(G)$， X中对应两个点： $x^+ \in [0,1)$ 和 $x^- \in \mathrm{BP}_\infty^-(G)$。 X 上的拓扑由 X 上定义的全序给出：在 $\mathrm{BP}_\infty^-(G)$ 和 $[0,1)$ 上取通常的序，并规定对于 $x^- \in \mathrm{BP}_\infty^-(G)$ 和 $y \in [0,1)$：$x^- < y \Longleftrightarrow x^+ \leq y$。更多细节可参见例如 [Arn81] 或 [Cor20] §3.2。

证明. 与引理 2.11 的证明相同，映射 f 没有周期点，因此将 f 替换为某个迭代后，我们可以假设区间 $J_i := P^{-1}(I_i)$ 是 f 的极小分支。设 $g \in C(f)$，根据引理 2.9，存在一个置换$\gamma \in \mathcal{S}_n$，使得 $g(J_i) = J_{\gamma(i)}$。特别地，J_i 和 $J_{\gamma(i)}$ 长度相同，因此 P 在 J_i 上以及在 $J_{\gamma(i)}$ 上的限制都是斜率相同的仿射映射。

这意味着，先验上为 AIET 的 $G = P \circ g \circ P^{-1}$，对任意 i，将 $P(J_i) = I_i$映射到$P(J_{\gamma(i)}) = I_{\gamma(i)}$，实际上是一个区间交换变换。最后，$G$ 是一个与 F 对易的区间交换变换（即 $G \in C(F)$），因此，根据引理 2.11，G 属于 G_n。□

3. Free actions of $\mathbb{Z}^2$ by IET

本节旨在证明命题 1.6。根据定理 2.1，该命题可重新表述为：“$\mathbb{Z}^2$ 在 $\mathcal{G}$ 上的任意自由作用都由有界断点型的区间交换变换组成。”

这个证明受到 Minakawa 对 $\mathbb{Z}^2$ 在圆上的分段线性同胚自由作用的描述（见 [Min97]）的启发，利用了速率 $\mathcal{N}_x(f)$ 的性质。

由于 $\mathbb{Z}^2$ 的作用 $\langle f, h\rangle$ 是自由的，对于每个 $x \in I$ 和 k, q，任意两个不同的整数，有：

$$\mathcal{O}_f(h^k(x)) \cap \mathcal{O}_f(h^q(x)) = \emptyset.$$

因此，由于 $\#BP(f)$ 是有限的，存在一个正整数 N_0，使得：

$$\forall n \geq N_0, \quad \mathcal{O}_f(h^n(x)) \cap BP(f) = \emptyset.$$

使用条目　性质 2.7 的 (1)，可得 $\mathcal{N}_{h^n(x)}(f) = 0$ 对于 $n \geq N_0$，并且根据条目 (2)　　，

$$\mathcal{N}_{h^n(x)}(h^n \circ f \circ h^{-n}) = \mathcal{N}_x(f).$$

由交换性可知，$\mathcal{N}_{h^n(x)}(h^n \circ f \circ h^{-n}) = \mathcal{N}_{h^n(x)}(f)$。

结合这些性质，我们得到 $\mathcal{N}_x(f) = 0$ 对于任意 $x \in I$。最后，根据定理 2.1，f 具有有界断点型。

4. Proof of Theorem 2.

经过区间交换变换共轭后，只需证明

命题 4.1. 设 G 是 $\mathcal{G}$ 的几乎阿贝尔子群。如果 G 包含一组支集不相交且没有周期点的受限旋转之积，f_1，那么 G 可通过将 f_1 共轭到 G_n 的某个元素的典范分段线性同胚，共轭到某个 G_n 的子群。

4.1. 命题 4.1 的证明

设 $G < \mathcal{G}$ 和 $H \lhd G$ 是 G 的一个有限指数阿贝尔子群，p。

断言 4.2. 对任意 $f \in G$，我们可以关联一个正整数 p_f，使得映射 f^{p_f} 两两可交换。

事实上，令 $f \in G$，由于集合 G/H 是有限的，存在整数 $0 \leq s < t$，使得 f^s 和 f^t 模 H 同余，即 $f^{t-s} \in H$。因此，取 $p_f = t - s$ 即可得到所需结论。

考虑 P，即与 f_1 相关联的分段线性同胚，它用于证明定理 2.1 的 (3) $\Longrightarrow$(4)。特别地， f_1-分支是区间 $J_i = P^{-1}(I_i)$，其中 $i = 1$，.....， n；它们是极小的，并且对于任意 $i \in \{1, \cdots, n\}$，$P_{|J_i}$ 都具有常斜率。

设 $f \in G$ 和 $\phi = f \circ f_1 \circ f^{-1}$。根据断言 4.2，存在 p_{f_1}、$p_\phi \in \mathbb{N}^*$，使得 $f_1^{p_{f_1}}$ 与 ϕ^{p_ϕ} 可交换。因此，命题 2.12 适用于 $\phi^{p_\phi} \in \mathsf{C}(f_1^{p_{f_1}})$，并推出 ϕ^{p_ϕ} 通过 P 共轭于 G_n 中的一个元素，即 $P \circ \phi^{p_\phi} \circ P^{-1} \in G_n$。

此外，由于 ϕ^{p_ϕ} 没有周期点，最终将 p_ϕ 替换为其某个倍数后，我们可以假设 ϕ^{p_ϕ} 的分支是区间 J_i，且它们是极小的。

因此，由于 f 共轭 ϕ^{p_ϕ} 和 $f_1^{p_\phi}$，映射 f 置换了 J_i。这意味着先验的 AIET $P \circ f \circ P^{-1}$ 是一个区间交换变换。事实上，对于任意 $i = 1$，...， n，有

- 映射 P^{-1} 将 I_i 映到 J_i，常斜率为 $\frac{|J_i|}{|I_i|}$，
- 区间交换变换 f 将 J_i 映到某个长度相同的 J_k，斜率恒为 1，且
- 映射 P 将 J_k 映到 I_k，常斜率为 $\frac{|I_k|}{|J_k|} = \frac{|I_i|}{|J_i|}$。

现在，只需证明 $P \circ f \circ P^{-1} \in G_n$。

引理 4.3. 设 n 为正整数， $T \in G_n$ 为无周期点的区间交换变换。若 $S \in \mathcal{G}$ 满足 $T' = STS^{-1} \in G_n$，则 $S \in G_n$。

证明。

- 若 $n = 1$，则 T 和 T' 是无理旋转，且 $T'S = ST$。将 $[0, 1)$ 与 $\mathbb{S}^1$ 等同后，映射 T 和 T' 变为连续映射。计算断点集可得

$$\mathsf{BP}(S) = \mathsf{BP}(T'S) = \mathsf{BP}(ST) = T^{-1}(\mathsf{BP}(S)).$$

因此，BP(S) 是一个有限的 T-不变集，所以由 T 的极小性可知它为空，进而 S 是一个旋转。

- 若 $n \geq 2$，则经过适当迭代后改变 T，可以假设 σ_T 和 $\sigma_{STS^{-1}}$ 是平凡的。

  - 若 S 保持每个 I_j 不变，则将 T 和 S 限制到 I_j 上，并对它们应用 $n = 1$ 的情形。由此可得 $S|_{I_j}$ 是一个旋转，进而 $S \in G_n$。
  - 若 S 不保持每个 I_j 不变。由于 S 将 G_n 中的两个无周期点映射共轭起来，存在一个置换 γ，使得 $S(I_j) = I_{\gamma(j)}$。我们考虑由 $\sigma_K = \gamma$ 和 $\alpha_K = 0$ 定义的元素 $K \in G_n$。我们有 $K^{-1}S \circ T \circ S^{-1}K \in G_n$，且 $K^{-1}S$ 保持每个 I_j 不变。根据前一种情形， $K^{-1}S \in G_n$，因此 $S \in G_n$。 □

最后，我们将引理 4.3 应用于 $T = P \circ f_1^{p_\phi} \circ P^{-1} \in G_n$ 和 $S = P \circ f \circ P^{-1}$。

5. Proofs of Theorem 1 and corollaries 1 and 2.

定理 1 的证明。设 G 是一个由区间交换变换自由作用的有限生成群，且 $\Gamma < \mathcal{G}$ 是包含于 G 中的 $\mathbb{Z}^2$ 的一个副本的像。根据注 1.2， G 几乎阿贝尔。显然， Γ 也自由作用，因此命题 1.6 蕴含 Γ 包含一些区间交换变换，它们在 $\mathcal{G}$ 中共轭于支集不相交且没有周期点的受限旋转之积。因此， G 满足定理 2 的假设，进而满足其结论。

推论 1 的证明。设 G 是 $\mathcal{G}$ 的一个几乎阿贝尔子群，其中包含 $\mathbb{Z}^2$ 的一个副本$\langle a,\ b\rangle$，且其作用是全极小的。

设 K 是 G 的有限指数阿贝尔正规子群。断言 4.2 表明，存在整数 p 和 q，使得 a^p 和 b^q 在 K 中生成一个 $\mathbb{Z}^2$ 的副本 Z。我们断言 Z 自由作用。

> 事实上，我们用反证法，假设存在 $h \in Z \setminus \{\mathrm{Id}\}$ 和 $x \in I$，使得 $x \in$Fix(h)。由于 K 是阿贝尔的，引理 2.8 表明 Fix(h) 是一个非空的 K-不变集。由 G 的全极小性可知，所有 K 轨道都稠密，因此 Fix(h) $= [0, 1)$，进而 $h = \mathrm{Id}$，矛盾。

因此，根据命题 1.6，G 包含一些映射，它们在 $\mathcal{G}$ 中共轭于由支撑不相交且没有周期点的受限旋转构成的乘积。设 f_1 是 G 中这样的一个元素，定理 2 适用于 G，由此可得存在一个映射 $H = P \circ E$，将 G 共轭到某个 G_n 的子群，其中 P 是分段线性同胚，$E \in \mathcal{G}$ 和 H 在 f_1 的每个极小分支上都具有常斜率。

此外，由于通过 H 进行的共轭保持全极小性（这依据的是关于拓扑共轭的经典论证，以及引理 2.9 的证明和脚注中给出的额外论证），该子群也全极小。

我们断言，$G_n, n \geq 2$ 的任何子群都不是全极小的。

> 事实上，若 $G < G_n$，则 $G_0 = \{g \in G \mid \sigma_g = \mathrm{Id}\}$ 是 G 的有限指数子群，它保持任意 $I_i, i = 1, ..., n$。因此，要使 G_0 极小，必须有 $n = 1$。

最后 $n = 1$，所以映射 f_1 是极小的，进而 H 的斜率为常数 1。总之，G 在 $\mathcal{G}$ 中共轭于 G_1 的一个子群。

推论 2 的证明。设 G 是 $\mathcal{G}$ 的一个有限生成子群，且 $f \in G$ 是一个全极小的区间交换变换，它不共轭于旋转。

我们首先注意到，G 的作用也是全极小的，因为 G 的任意有限指数子群都包含 f的某个非平凡幂。

接下来我们通过反证法进行论证，假设 G 几乎幂零但并非几乎循环。根据 [DFG20]，G 几乎阿贝尔且并非几乎循环，因此它包含一个 $\mathbb{Z}^2$的副本。因此，应用推论 1，我们得到 f 在 $\mathcal{G}$ 中与一个旋转共轭，这就产生了矛盾。

6. Non virtually abelian subgroups of $\mathcal{G}$.

6.1. 推论 3 的证明。

Item (1) 是条目 (2) 的特殊情形，因此我们只证明条目 (2)：我们通过反证法进行论证，假设 G几乎阿贝尔。于是，根据断言 4.2，存在整数 p和 q，使得 $f^p \in G_n$与 gf^qg^{-1}可交换。因此，由引理 2.11 得到 $gf^qg^{-1} \in G_n$，进而引理 4.3推出 $g \in G_n$，这就产生了矛盾。

6.2. 涉及算术条件的相关示例。

记号。设 $s \in \mathbb{N}^*$ 和 $\alpha_1, ..., \alpha_s$ 是 s $\mathbb{Q}$-线性无关的无理数。由 1 和这些 α_i生成的 $\mathbb{R}$ 的加法子群记作 $\langle 1, \alpha_1, ..., \alpha_s\rangle_{\mathbb{Q}}$。我们令

- $\boldsymbol{\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}} = \{g \in \mathcal{G} \mid g(x) - x \in \mathbb{Q},\ \forall x \in I\}$ *and*
- $\boldsymbol{\mathcal{G}_{\alpha_1,...,\alpha_s}} = \{g \in \mathcal{G} \mid g(x) - x \in \langle 1, \alpha_1, ..., \alpha_s\rangle_{\mathbb{Q}},\ \forall x \in I\}$.

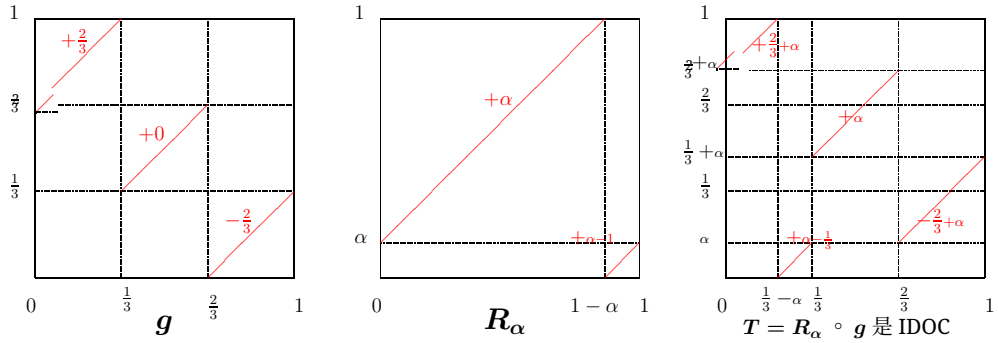
推论 5。设 $p, r \in \mathbb{N}^*$, $r < p$ 和 $\alpha_1, ..., \alpha_p$ 是 p $\mathbb{Q}$-线性无关的无理数。如果 $f \in \mathcal{G}_{\alpha_1,...,\alpha_r}$ 是全极小的，且不共轭于一个旋转，并且 $g \in \mathcal{G}_{\alpha_{r+1},...,\alpha_p}$，那么由 f 和 g 生成的群不是几乎幂零的。

证明。根据推论 2， G 要么是几乎循环的，要么不是几乎幂零的。假设与我们的结论相反， G 是几乎循环的。因此，存在 $h \in G$，使得 $Z = \langle h \rangle$ 在 G 中具有有限指数，进而对于某些正整数 m、 n、 q 和 t，有 $f^m = h^n$ 和 $g^q = h^t$。因此，$f^{mt} = h^{nt} = g^{qn} \in \mathcal{G}_{\alpha_1, \ ..... \ , \alpha_r} \cap \mathcal{G}_{\alpha_{r+1}, \ ..... \ , \alpha_p} = \mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$ 只包含有限阶映射[2]，特别是 f 不是全极小的，矛盾。最后， G不是几乎幂零的。□

在接下来的小节中，我们将展示 $\mathcal{G}$ 的有限生成、非几乎幂零子群的一些例子，这些子群还具有其他性质。第一小节给出亚交换例子，第二小节则给出非几乎可解群的例子。

6.3. 亚交换例子。

令 G 为由 R_α、 $\alpha \in [0, \frac{1}{3}) \setminus \mathbb{Q}$ 生成的 $\mathcal{G}$ 子群，以及由下图描述的映射 $g \in G$。



注意，由于 g 的阶为 2，任意 $f \in G$ 都可以写成

$$f = R_\alpha^{p_s} \ g \ R_\alpha^{p_{s-1}} \ g \ \cdots \ R_\alpha^{p_1} \ g \ R_\alpha^{p_0} \ , \quad \text{where } p_j \in \mathbb{Z}.$$

命题 6.1。群 G 是亚交换群，且并非几乎幂零。更具体地说，其交换子子群 $[G, G]$ 是一个非有限生成的阿贝尔群，其非单位元的阶均为 3。

引理 6.2。 对于任意 $f \in G$，存在唯一的 $\ell(f) \in \mathbb{Z}$，使得对所有 $x \in [0, 1)$ ，

$$f(x) = x + \ \ell(f) \ \alpha \ + \frac{p_f(x)}{3} \ , \quad \textit{where } p_f(x) \in \mathbb{Z}.$$

证明。我们对 $f \in G$ 作为 $S = \{g, R_\alpha\}$ 中的一个字的长度 $L_S(f)$ 进行归纳。确实，如果 $L_S(f) = 1$，那么要么 $f = g$，要么 $f = R_\alpha^{\pm 1}$，且该性质成立。

设 $n \in \mathbb{N}^*$，假设长度小于或等于 n 的 G-元素具有所需性质。考虑满足 $L_S(f) = n + 1$ 的 $f \in G$，则要么 $f = R_{\pm\alpha} f_0$，要么 $f = g f_0$，其中 $L_S(f_0) = n$。因此，对于任意 $x \in [0, 1)$，我们有以下两种情况之一

$$f(x) = f_0(x) \pm \alpha + \epsilon \quad \text{or} \quad f(x) = f_0(x) + \epsilon \ \frac{2}{3} \ , \qquad \text{where } \epsilon \in \{-1, 0, 1\}.$$

[2] 设 $f \in \mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$，且 q 是 f 的平移的分母的最小公倍数，则 $\mathcal{O}_f(x) \subset \{x + \frac{p}{q}, \ p \in \mathbb{Z}\} \cap [0, 1)$ 是有限的。

因此，要么

$$f(x)=x+\ (\ell(f_0)\pm 1)\ \alpha\ +\frac{p_{f_0}(x)+3\epsilon}{3}\quad \text{or}\quad f(x)=x+\ \ell(f_0)\ \alpha\ +\frac{p_{f_0}(x)+2\epsilon}{3}.$$

在这两种情况下， f 具有所需的形式，并且由于 α 是无理数， $\ell(f)$是唯一的。 □

引理 6.3.

(1) 映射 $\ell\colon G\to\mathbb{Z}$ 是一个态射。(2) 任意 $f\in G$ 都可以写成 $f=P_f\ R_\alpha^{\ell(f)}=R_\alpha^{\ell(f)}\ Q_f$，其中 $P_f,\ Q_f\in\ker\ \ell$。(3) 任意 $x\in[0,1)$的 $\ker\ \ell$-轨道至多包含 3 个点。特别地，任意$P\in\ker\ \ell$ 的阶为 1、2 或 3。(4) 群 $\ker\ \ell$ 包含 $[G,G]$ 和 $\ker\ \ell=\boldsymbol{G_{\mathrm{per}}}=\{f\in G\colon\ \exists m\in\mathbb{N}^*, f^m=\mathrm{Id}\}$。(5) 对任意 $\beta\in[0,1)$，映射 $[R_\beta,g]$ 的阶为 3。 [3]

证明。

(1) 显然，我们有 $\ell(\mathrm{Id})\ =0$ and $\ \ell(R_\alpha)\ =1$。给定 $f,h\in G$ and $x\in[0,1)$，计算 $hf(x)$ 得到

$$hf(x)=x+\ (\ell(f)+\ell(h))\ \alpha\ +\frac{p_f(x)+p_h(f(x))}{3}$$

因此

$$\ell(hf)=\ell(f)+\ell(h)\quad \text{and}\quad p_{hf}(x)=p_f(x)+p_h(f(x))$$

特别地， ℓ 是从 G 到 $(\mathbb{Z},+)$ 的态射。

(2) 设 $f\in G$，则有 $\ell\left(fR_\alpha^{-\ell(f)}\right)=\ell(f)+\ell(R_\alpha^{-\ell(f)})\ =\ell(f)\ -\ell(f)\ =0$。于是 $P_f=f\ R_\alpha^{-\ell(f)}\in\ker\ell$ 且 $f=P_f\ R_\alpha^{\ell(f)}$。类似地，我们得到 $Q_f=R_\alpha^{-\ell(f)}\ f\in\ker\ \ell$ 且 $f=R_\alpha^{\ell(f)}\ Q_f$。

(3) 设 $x\in[0,1)$， x 的 $\ker\ \ell$-轨道是集合 $\{f(x)\mid f\in\ker\ \ell\}$，且它包含于 $S=\left\{x+\frac{p}{3},\ p\in\mathbb{Z}\right\}\cap[0,1)$ 中；该集合的基数为 3，因为 $S\subset[0,1)$，并且 S 中两个不同元素之间的距离为 $\frac{1}{3}$ 或 $\frac{2}{3}$。

（4）由于 ℓ 是到阿贝尔群的态射，其核包含 $[G,G]$。此外，设 $f\in G_{\mathrm{per}}$ 的阶为 $m\in\mathbb{N}^*$ 且 $x\in[0,1)$ 。有

$$f^m(x)=x+\ m\ell(f)\ \alpha\ +\frac{p_{f^m}(x)}{3}=x$$

由 α的无理性可得 $\ell(f)\ =0$，即 $f\in\ker\ \ell$。

(5) 令 $\beta\in[0,\frac{1}{3})$，我们计算映射 $[R_\beta,g]=R_\beta\ g\ R_{-\beta}\ g$。

$$\begin{aligned}
&[\mathbf{0},\boldsymbol{\beta})\ \xrightarrow[+\frac{2}{3}]{g}\ [\frac{2}{3},\frac{2}{3}+\beta)\ \xrightarrow[-\beta]{R_{-\beta}}\ [\frac{2}{3}-\beta,\frac{2}{3})\ \xrightarrow[+0]{g}\ [\frac{2}{3}-\beta,\frac{2}{3})\ \xrightarrow[\beta]{R_\beta}\ [\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}},\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}+\boldsymbol{\beta})\\
&[\boldsymbol{\beta},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}})\ \xrightarrow[+\frac{2}{3}]{g}\ [\frac{2}{3}+\beta,1)\ \xrightarrow[-\beta]{R_{-\beta}}\ [\frac{2}{3},1-\beta)\ \xrightarrow[-\frac{2}{3}]{g}\ [0,\frac{1}{3}-\beta)\ \xrightarrow[\beta]{R_\beta}\ [\boldsymbol{\beta},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}})\\
&[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}+\boldsymbol{\beta})\ \xrightarrow[0]{g}\ [\frac{1}{3},\frac{1}{3}+\beta)\ \xrightarrow[-\beta]{R_{-\beta}}\ [\frac{1}{3}-\beta,\frac{1}{3})\ \xrightarrow[+\frac{2}{3}]{g}\ [1-\beta,1)\ \xrightarrow[\beta-1]{R_\beta}\ [\mathbf{0},\boldsymbol{\beta})
\end{aligned}$$

[3]这将用于 G中的映射，也就是对 $\beta=n\alpha$ 模 1。

$$[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}+\boldsymbol{\beta},\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}) \xrightarrow[0]{g} [\frac{1}{3}+\beta,\frac{2}{3}) \xrightarrow[-\beta]{R_{-\beta}} [\frac{1}{3},\frac{2}{3}-\beta) \xrightarrow[0]{g} [\frac{1}{3},\frac{2}{3}-\beta) \xrightarrow[\beta]{R_{\beta}} [\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}+\boldsymbol{\beta},\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}})$$

$$[\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}},\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}+\boldsymbol{\beta}) \xrightarrow[-\frac{2}{3}]{g} [0,\beta) \xrightarrow[1-\beta]{R_{-\beta}} [1-\beta,1) \xrightarrow[-\frac{2}{3}]{g} [\frac{1}{3}-\beta,\frac{1}{3}) \xrightarrow[\beta]{R_{\beta}} [\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}+\boldsymbol{\beta})$$

$$[\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}+\boldsymbol{\beta},\mathbf{1}) \xrightarrow[-\frac{2}{3}]{g} [\beta,\frac{1}{3}) \xrightarrow[-\beta]{R_{-\beta}} [0,\frac{1}{3}-\beta) \xrightarrow[+\frac{2}{3}]{g} [\frac{2}{3},1-\beta) \xrightarrow[\beta]{R_{\beta}} [\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}+\boldsymbol{\beta},\mathbf{1})$$

总之，$[R_\beta, g]$的支撑为 $[0,\beta) \sqcup [\frac{1}{3},\frac{1}{3}+\beta) \sqcup [\frac{2}{3},\frac{2}{3}+\beta)$，且其限制是精确周期为 3 的周期映射。因此，$[R_\beta, g]$ 的阶为 3。

情形 $\beta \in (\frac{2}{3}, 1)$ 可通过注意到 $\beta' = 1-\beta \in (0, \frac{1}{3})$ 和 $R_\beta = R_{\beta'}^{-1}$，由前一种情形推得。

最后，对于情形 $\beta \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$，由于 $C = [R_\beta, g]$的阶为 1、2 或 3，只需验证 C-轨道中 0 的基数大于 2。通过计算 $C(0) = \frac{1}{3}$和 $C(\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$即可得证。□

引理 6.4.

(1) 群 $\ker \ell$ 由 $\{R_\alpha^n g R_\alpha^{-n}, n \in \mathbb{Z}\}$生成。(2) 群 $[G,G]$ 由 $\{[R_\alpha^n, g], n \in \mathbb{Z}\}$生成。(3) 群 $[G,G]$ 与 $[\ker \ell, \ker \ell]$相同。

证明。

（1）显然，映射 $R_\alpha^n g R_\alpha^{-n}$、 $n \in \mathbb{Z}$ 属于 $\ker \ell$。我们此前指出，任意 $f \in G$ 都可以分解为

$$f = R_\alpha^{p_s} g R_\alpha^{p_{s-1}} g \cdots R_\alpha^{p_1} g R_\alpha^{p_0}, \text{ where } p_j \in \mathbb{Z},$$

于是我们可以写成：

$$f = R_\alpha^{p_s} g \boldsymbol{R_\alpha^{-p_s}\ R_\alpha^{p_s}} R_\alpha^{p_{s-1}} g R_\alpha^{p_{s-2}} \cdots R_\alpha^{p_1} g R_\alpha^{p_0}$$

反复进行这一过程，我们得到：

$$f = R_\alpha^{p_s} g R_\alpha^{-p_s}\ \ R_\alpha^{p_s+p_{s-1}} g R_\alpha^{-(p_s+p_{s-1})}\ \cdots\ R_\alpha^{p_s+p_{s-1}+\cdots p_1} g R_\alpha^{-(p_s+p_{s-1}+\cdots p_1)}\ \ R_\alpha^{\sum_{j=0}^s p_j}$$

此外，$f \in \ker \ell$ 当且仅当 $\sum_{j=0}^s p_j = 0$，因此任意 $f \in \ker \ell$ 都是形如 $R_\alpha^p g R_\alpha^{-p}$ 的元素之积。

（2）我们首先注意到，对于所有 p、$q \in \mathbb{Z}$，都有

$$(*)\quad R_\alpha^p g R_\alpha^{-p}\ \ R_\alpha^q g R_\alpha^{-q} = R_\alpha^p g R_\alpha^{-p} \boldsymbol{g}\ \ \boldsymbol{g} R_\alpha^q g R_\alpha^{-q} = [R_\alpha^p, g]\ \ [R_\alpha^q, g]^{-1}.$$

接下来，我们断言，$[G,G]$ 的任意元素都可以写成偶数个 $R_\alpha^n g R_\alpha^{-n}$的乘积，从而根据（$*$）可写成 $[R_\alpha^p, g]$ 和 $[R_\alpha^q, g]^{-1}$ 的乘积。

事实上，只需对换位子 $f = [a,b]$ with$a, b \in G$证明这一性质。根据引理 6.3 (2)，f 可以写成

$$f = P_a R_\alpha^{\ell(ab)} Q_b Q_a^{-1} R_\alpha^{-\ell(ab)} P_b^{-1} = P_a\ R_\alpha^{\ell(ab)} Q_b \boldsymbol{R_\alpha^{-\ell(ab)}\ R_\alpha^{\ell(ab)}} Q_a^{-1} R_\alpha^{-\ell(ab)}\ P_b^{-1}$$

根据条目 (1)，P_a、P_b、Q_a 和 Q_b 可以写成 $R_\alpha^n g R_\alpha^{-n}$的乘积。此外，对于任意 $c \in G$、$Q_c = R_\alpha^{-\ell(c)} P_c R_\alpha^{-\ell(c)}$，映射 P_c、P_c^{-1}、Q_c、Q_c^{-1}及其经 R_α^m（$m \in \mathbb{Z}$）共轭所得的映射，都可以分解为相同数量的 $R_\alpha^n g R_\alpha^{-n}$的乘积。最后，$f$ 可以写成偶数个$R_\alpha^n g R_\alpha^{-n}$的乘积。

（3）根据前一点，要证明 $[G,G]\subset[\ker\ell,\ker\ell]$，只需证明对于任意 $n\in\mathbb{Z}$，$[R_\alpha^n,g]\in[\ker\ell,\ker\ell]$，我们断言 $[\boldsymbol{R_\alpha^n},\boldsymbol{g}]=[\boldsymbol{g},\boldsymbol{R_\alpha^n g R_\alpha^{-n}}]$。

事实上，注意到如果 $a^2=b^2=\mathrm{Id}$，那么 $[a,b]=(ab)^2$，并且 g 和 $R_\alpha^n g R_\alpha^{-n}$的阶为 2，我们得到 $[g,R_\alpha^n g R_\alpha^{-n}]=(gR_\alpha^n g R_\alpha^{-n})^2=[g,R_\alpha^n]^2=[R_\alpha^n,g]^{-2}$。

此外，由引理 6.3 (5)，映射 $[R_\alpha^n,g]=[R_{n\alpha},g]$ 的阶为 3，于是 $[g,R_\alpha^n g R_\alpha^{-n}]=[R_\alpha^n,g]$。□

引理 6.5。

(1) 设 $f\in\ker\ell$ 且 $J\subset[0,\frac{1}{3})$ 满足：J、$J+\frac{1}{3}$和 $J+\frac{2}{3}$是 f 的连续区间，则存在 $\sigma=\sigma_{f,J}\in\mathfrak{S}_3$，即集合 $\{0,1,2\}$ 的置换群，使得 $f(J+\frac{i}{3})=J+{}^{\sigma(i)}3$。(2) 设 f、$h\in\ker\ell$ 且 $J\subset[0,\frac{1}{3})$ 满足：J、$J+\frac{1}{3}$和 $J+\frac{2}{3}$是 f 的连续区间，且 h，则 J、$J+\frac{1}{3}$和 $J+\frac{2}{3}$是 fh 的连续区间，并且

$$\sigma_{fh,J}=\sigma_{f,J}\circ\sigma_{h,J}$$

证明。

(1) 令 $f\in\ker\ell$，由于 $J\subset[0,\frac{1}{3})$ 是 f 的一个连续区间，映射 p_f 在 J 上为常值，等于某个 $p\in\mathbb{Z}$，且 $f(J)=\{x+\frac{p}{3},x\in J\}=J+\frac{p}{3}$ 包含于 $[\frac{p}{3},\frac{p+1}{3})\cap[0,1)$ 中。因此，$p\in\{0,1,2\}$，并且 $f(J)$ 或者是 J、$J+\frac{1}{3}$ 或 $J+\frac{2}{3}$。

类似地，对于 $i=1$，2，我们得到 $f(J+\frac{i}{3})$ 或者是 J、$J+\frac{1}{3}$ 或 $J+\frac{2}{3}$。这就定义了所需的 $\sigma\in\mathfrak{S}_3$。

(2) 令 f、$h\in\ker\ell$ 和 $J\subset[0,\frac{1}{3})$，使得 f 和 h 在 J、$J+\frac{1}{3}$、$J+\frac{2}{3}$ 上连续。对于任意 $i\in\{0,1,2\}$，我们有 h 在 $J+\frac{i}{3}$ 上连续，并且

$$fh(J+\frac{i}{3})=f\left(J+\frac{\sigma_{h,J}(i)}{3}\right)=J+\frac{\sigma_{f,J}\left(\sigma_{h,J}(i)\right)}{3}$$

因为 f 在区间 $J+\frac{i}{3}$ 上连续。□

命题 6.1 的证明。

根据推论 3 的条目 (1)，群 G 不是几乎幂零的。

我们断言，$[G,G]\setminus\{\mathrm{Id}\}$ 中的所有映射都可交换，且阶为 3。

事实上，设 $C=[f,h]\in[G,G]\setminus\{\mathrm{Id}\}$ 是一个非平凡换位子。根据引理 6.4 (3)，我们可以假设 $f,h\in\ker\ell$。将 $[0,1)$ 分解为三元组区间 J, $J+\frac{1}{3}$, $J+\frac{2}{3}$ 的并，其中 $J\subset[0,\frac{1}{3})$，使得 f,h,f^{-1},h^{-1} 在 J, $J+\frac{1}{3}$, $J+\frac{2}{3}$ 上连续。

设 J 是这样的一个区间，根据引理 6.5 的条目 (2)，可得

$$\sigma_{[f,h],J}=[\sigma_{f,J}\ ,\ \sigma_{h,J}]\in[\mathfrak{S}_3,\mathfrak{S}_3]=\mathfrak{A}_3$$

注意到 $\mathfrak{A}_3$ 的非平凡元素都是 3-循环，我们得到 $\sigma_{[f,h],\ J}$ 要么是单位元，要么阶为 3；由其连续性，$C_{|J}$ 也同样如此。由于 $C\neq\mathrm{Id}$，存在某个 J 使得 $C_{|J}\neq\mathrm{Id}$，于是 C 的阶为 3。

由于 $\mathfrak{A}_3$ 是阿贝尔的，$[G,G]$ 中的两个换位子在其共同的连续区间上对应的置换彼此交换，因此它们也彼此交换。

最后，由于 $[G,G]$ 由换位子生成，且两个阶为 3 的可交换元素的乘积要么阶为 3，要么是平凡元素，因此得证。

此外， $[G,G]$ 不是有限生成的。这是因为任何有限生成的阿贝尔挠群都必定是有限群，而 $[G,G]$-元素 $[R_\alpha^n, g]$、 $n \in \mathbb{Z}$两两不同；这是因为引理 6.3 中条目 (5) 的证明表明，它们的断点集两两不同。

6.4. 非虚拟可解的例子。

设 $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 5$，我们令交错群 $\mathcal{A}_n$ 作用于 $[0,1)$，使其成为 G_n的一个子群，从而与 $a \in \mathcal{A}_n$, t_a相关联的区间交换变换将区间 $J_p = [\frac{p-1}{n}, \frac{p}{n})$ 映射到$J_{a(p)} = [\frac{a(p)-1}{n}, \frac{a(p)}{n})$，并且其旋转向量为平凡向量。特别地，对于任意 $x \in [0,1)$，都存在一个整数 $p_a(x)$，使得 $t_a(x) = x + \frac{p_a(x)}{n}$。令 G 为由 $\mathcal{A}_n$ 和 R_α, $\alpha \in [0, \frac{1}{n}]$ 生成的 $\mathcal{G}$ 的子群 $\setminus \mathbb{Q}$。

注意，任意一个 $f \in G$ 都可以写成

$$f = R_\alpha^{p_s} a_s R_\alpha^{p_{s-1}} a_{s-1} \cdots R_\alpha^{p_1} a_1 R_\alpha^{p_0}, \text{ where } a_j \in \mathcal{A}_n \text{ and } p_j \in \mathbb{Z}.$$

命题 6.6. 群 G 是初等可和的、非虚拟可解的，其换位子群 $[G,G]$ 是一个完美但非单的局部有限 [4] 挠群。

引理 6.7。设 $f \in G$。那么存在唯一的 $\ell(f) \in \mathbb{Z}$，使得对于所有 $x \in [0,1)$，均有

$$f(x) = x + \ell(f)\alpha + \frac{p_f(x)}{n} \text{ , where } p_f(x) \in \mathbb{Z}.$$

证明。如引理 6.2 中所述，我们对 $f \in G$ 作为 $S = \{\mathcal{A}_n, R_\alpha\}$ 中一个词的长度 $L_S(f)$ 进行归纳。变化发生在归纳步骤的 $f = gf_0$ 情形中。此处，我们有 $f = af_0$，其中 $a \in \mathcal{A}_n$，而所涉及的平移 $\epsilon\frac{2}{3}$ 被替换为 $\frac{p_a(x)}{n}$。□

引理 6.8.

(1) 映射 $\ell\colon\ G \to \mathbb{Z}$ 是一个态射。(2) 任意 $f \in G$ 都可以写成 $f = P_f R_\alpha^{\ell(f)} = R_\alpha^{\ell(f)} Q_f$，其中 P_f、 $Q_f \in$ 属于 $\ker \ell$。

证明与引理 6.4 的证明类似。

引理 6.9。

(1) The group $\ker \ell$ *is generated by* $\{R_\alpha^k a R_\alpha^{-k},\ k \in \mathbb{Z},\ a \in \mathcal{A}_n\}$.

(2) The group $\ker \ell$ *is perfect and* $[G,G] = \ker \ell$.

(3) The $\ker \ell$*-orbit of* $x \in [0, \frac{p}{n})$ *is* $\{x + \frac{p}{n},\ p = 0, \cdots, n-1\}$ *and* $\ker \ell = G_{per}$.

证明。

(1) 我们此前注意到，任意 $f \in G$ 都可以写成

$$f = R_\alpha^{p_s} a_s R_\alpha^{p_{s-1}} a_{s-1} \cdots R_\alpha^{p_1} a_1 R_\alpha^{p_0}, \text{ where } p_j \in \mathbb{Z},$$

并且如引理 6.4 的证明中所示，我们得到：

$$f = R_\alpha^{p_s} a_s R_\alpha^{-p_s} \ R_\alpha^{p_s+p_{s-1}} a_{s-1} R^{-(p_s+p_{s-1})}_\alpha \cdots R_\alpha^{p_s+p_{s-1}+\cdots p_1} a_1 R^{-(p_s+p_{s-1}+\cdots p_1)}_\alpha R_\alpha^{\sum_{j=0}^s p_j}$$

此外，由于 ℓ 是一个态射，因此 $f \in \ker \ell$ 当且仅当 $\sum_{j=0}^s p_j = 0$，所以任何$f \in \ker \ell$ 都是形如 $R_\alpha^k a R_\alpha^{-k}$的元素的乘积。

[4]，即其有限生成子群都是有限的

(2) 设 $f \in \ker \ell$，根据前一点，f 可以写成

$$f = \prod_j R_\alpha^{n_j} a_j R_\alpha^{-n_j} \text{ where } n_j \in \mathbb{Z} \text{ and } a_j \in \mathcal{A}_n$$

由于 $\mathcal{A}_n$ 是完美的，且 $\mathcal{A}_n < \ker \ell$，任意 a_j 都属于 $[\ker \ell, \ker \ell]$。最后，$[\ker \ell, \ker \ell]$ 是 G 中的正规子群，因此任意 $R_\alpha^{n_j} a_j R_\alpha^{-n_j}$ 都属于 $[\ker \ell, \ker \ell]$，进而 f 属于$[\ker \ell, \ker \ell]$，这就证明了 $\ker \ell$ 是完美的。

此外，由于 ℓ 是到阿贝尔群的态射，$[G,G] < \ker \ell$；另一方向的包含关系则由 $\ker \ell$ 是完美的这一事实得出。

(3) 设 $x \in [0, \frac{p}{n})$ 且 $f \in \ker \ell$。引理 6.7 给出 $f(x) = x + {}^{p_f(x)}n$，其中某个 $p_f(x) \in \mathbb{Z}$ 和 $f(x) \in [0,1)$ 蕴含 $p_f(x) \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$。此外，通过选取满足 $a(1) = p$ 的 $a \in \mathcal{A}_n$，我们得到 $t_a(x) = x + \frac{p-1}{n}$。因此，$x$ 的 $\mathcal{A}_n$-轨道是$\{x + \frac{p}{n},\ p = 0, \cdots, n-1\}$。最后，$\ker \ell$ 包含于 $\mathcal{G}_\mathbb{Q}$，因此也包含于 G_{per}；另一方向的包含关系由 $\alpha \notin \mathbb{Q}$ 得出。□

定义 6.10. 设 $f \in \ker \ell$, $x \in [0, \frac{1}{n})$ 且 $\beta \in (0, \frac{1}{n})$，使得对于所有 $p = 1, \cdots, n$，f 在区间 $J_p(x,\beta) = [x + \frac{p-1}{n}, x + \frac{p-1}{n} + \beta)$ 上连续。

由于 f 的平移属于 $\{\frac{p}{n},\ p \in \mathbb{Z}\}$，映射 f 置换了 $J_p(x,\beta)$，因此存在 $\omega \in \mathcal{S}_n$ 使得

$$f(J_p(x,\beta)) = J_{\omega(p)}(x,\beta) = [x + \frac{\omega(p)-1}{n}, x + \frac{\omega(p)-1}{n} + \beta)$$

容易看出，ω 不依赖于合适的 β 的选择，记作 $\omega(f,x)$，并称为 f 在 x 处的局部置换。

命题 6.11. 设 $x \in [0, \frac{1}{n})$.

$$\textit{The map } \omega_x : \begin{cases} \ker \ell & \to & \mathcal{S}_n \\ f & \mapsto & \omega(f,x) \end{cases} \textit{ is a morphism and its image is } \mathcal{A}_n.$$

证明. 设 $x \in [0, \frac{1}{n})$，显然 $\omega(\mathrm{Id}\ x) = \mathrm{Id}$。设 $f, h \in \ker \ell$，并取足够小的 $\beta \in (0, \frac{1}{n})$，使得 f 和 h 在区间 $J_p(x,\beta)$ 上连续。因此，对于任意 $p \in \{1, \cdots, n\}$，我们有

$$h \circ f(J_p(x,\beta)) = h\big(J_{\omega(f,x)(p)}(x,\beta)\big) = J_{\omega(h,x)\omega(f,x)(p)}(x,\beta),$$

因此 $\omega(h \circ f, x) = \omega(h,x)\ \omega(f,x)$。

由于 $\ker \ell$ 是完美群，ω_x 的像包含于 $[\mathcal{S}_n, \mathcal{S}_n] = \mathcal{A}_n$中。此外，容易验证，与 $\tau \in \mathcal{A}_n$ 相关联的区间交换变换 t 满足 $\omega(t,x) = \tau$，于是我们得到$\omega_x(\ker \ell) = \mathcal{A}_n$。□

命题 6.12. 对任意 $\beta \in (0, \frac{1}{n})$，$\ker \ell$ 中支撑于$\bigcup_{p=1}^{n} [\frac{p-1}{n}, \frac{p-1}{n} + \beta)$ 的映射集合 S_β 是 $\ker \ell$ 的正规子群，且其在 ω_0 下的像为 $\mathcal{A}_n$。

证明。S_β 的正规性直接来自以下事实：$\ker \ell$的平移集是 $\{\frac{p}{n},\ p \in \mathbb{Z} \cap [-(n-1)\ n-1]\}$，而 $h \circ f \circ h^{-1}$的支撑是由 h 将 f的支撑映射得到的。因此，ω_0 对 S_β 的像是$\mathcal{A}_n$ 的正规子群，而$\mathcal{A}_n$ 是单群，所以 $\omega_0(S_\beta)$要么是平凡群，要么等于 $\mathcal{A}_n$。因此，证明

命题 6.12 可归结为证明 $\omega_0(S_\beta)$非平凡。取$\beta \in (0, \frac{1}{n}) \cap \{\frac{p}{n} + k\alpha,\ p, k \in \mathbb{Z}\}$ 使得 $R_\beta \in G$, 即可由下述内容证明这一点

引理 6.13。令 $\beta \in (0, \frac{1}{n})$, $\tau \in \mathcal{A}_n$ 和 $t \in \ker \ell$ 为其关联的 IE T.

则映射 $C_{\beta,\ t} = [R_\beta, t] = R_\beta t R_{-\beta} t^{-1}$ 的支撑包含于 $\bigcup_{p=1}^{n} [\frac{p-1}{n}, \frac{p-1}{n} + \beta)$ 中，并且其在 0 处的局部置换为 $\omega(C_{\beta,\ t},\ 0) = [\sigma, \tau]$，其中 σ 是 n-循环置换 $(1, 2,\ \cdots,\ n) \in \mathcal{S}_n$。

证明。我们明确计算映射 $C_{\beta,\ t} = [R_\beta, t] = R_\beta t R_{-\beta} t^{-1}$。首先注意到，$C_{\beta,\ t}$的断点集包含于 $\{\frac{p-1}{n},\ \frac{p-1}{n} + \beta$中；$p \in \{1, ..., n\}\}$ 并且我们有

$$[\frac{\boldsymbol{p-1}}{\boldsymbol{n}}, \frac{\boldsymbol{p-1}}{\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{\beta}) \xrightarrow{t^{-1}} [\frac{\tau^{-1}(p)-1}{n}, \frac{\tau^{-1}(p)-1}{n} + \beta) \xrightarrow{R_{-\beta}} [\frac{\tau^{-1}(p)-1}{n} - \beta, \frac{\tau^{-1}(p)-1}{n})$$
$$\xrightarrow{t} [\frac{\tau(\tau^{-1}(p)-1)}{n} - \beta, \frac{\tau(\tau^{-1}(p)-1)}{n}) \xrightarrow{R_\beta} [\frac{\boldsymbol{\tau(\tau^{-1}(p)-1)}}{\boldsymbol{n}}, \frac{\boldsymbol{\tau(\tau^{-1}(p)-1)}}{\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{\beta})$$

and

$$[\frac{\boldsymbol{p-1}}{\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{\beta}, \frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{n}}) \xrightarrow{t^{-1}} [\frac{\tau^{-1}(p)-1}{n} + \beta, \frac{\tau^{-1}(p)}{n}) \xrightarrow{R_{-\beta}} [\frac{\tau^{-1}(p)-1}{n}, \frac{\tau^{-1}(p)}{n} - \beta)$$
$$\xrightarrow{t} [\frac{p-1}{n}, \frac{p}{n} - \beta) \xrightarrow{R_\beta} [\frac{\boldsymbol{p-1}}{\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{\beta}, \frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{n}})$$

这证明了 $C_{\beta,t}$ 在 $\bigcup_{p=1}^{n} [\frac{p-1}{n}, \frac{p-1}{n} + \beta)$ 中有支撑。此外，其在 0 处的局部置-换由 $\omega(p) - 1 = \tau(\tau^{-1}(p) - 1)$ 给出，即

$$\omega(p) = \tau(\tau^{-1}(p) - 1) + 1 = \sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1} = [\sigma, \tau].$$

□

Note 即，如果 $\tau \notin C(\sigma)$，那么 R_β 和 t 不对易，且 $C_{\beta,\ t}$ 是非平凡的。

命题 6.6 的证明。

我们首先证明与 $[G, G]$ 相关的性质。引理 6.9 表明，$[G, G] = \ker \ell$ 是一个完美挠群，并且根据命题 6.12，由于它具有非平凡的正规子群 S_β，因此它不是单群。

我们断言，$[G, G] = \ker \ell$ 的有限生成子群都是有限群。

事实上，设 $H = \langle m_i \rangle < \ker \ell$ 是 $\ker \ell$ 的一个有限生成子群。由性质 2.3，集合 $\mathrm{BP}(H)$ 包含于有限集$\cup \mathrm{BP}(m_i)$ 的 H-轨道中，因此它是有限的，因为所有 $\ker \ell$-轨道都是有限的。

群 G 是初等可和的，因为 $G/[G, G] \simeq \mathbb{Z}$ 是阿贝尔的，且 $[G, G] = \ker \ell$ 是其有限生成子群（这些子群均为有限群）的直极限。

根据推论 3 的条目 (1)，G 不是几乎幂零的。此外，我们将证明 $\ker \ell$ 的任何有限指数子群都不可解。事实上，设 R 是 $\ker \ell$的一个有限指数子群。由于有限指数子群总是包含一个同样具有有限指数的正规子群，我们不妨设 R 是 G的正规子群。因此，对于任意 $x \in [0, \frac{1}{n})$，群 $\omega_x(R)$ 要么是平凡群，要么等于 $\mathcal{A}_n$。由于 $\ker \ell$ 是无限的，R 并不平凡，因此存在 $x \in [0, \frac{1}{n})$，使得 $\omega_x(R)$ 非平凡，进而等于 $\mathcal{A}_n$。

最后，由于 $\mathcal{A}_n$ 是单群，ω_x 将 R 的任意迭代换位子子群满射到 $\mathcal{A}_n$。特别地，R 不可解，因此 $\ker \ell$，进而 G，都不是几乎可解的。

注 6.14。由于 SAF不变量（见 [Bos16]），第 6.3 节和第 6.4 节中构造的群在 α 有理独立时，在 $\mathcal{G}$中不共轭。此外，类似的论证表明，命题 6.6 对于由 R_{α_1}、...、R_{α_m} 和$\mathcal{A}_n$ 生成的群也成立，其中 $n \geq 5$。特别地，这些群不是线性的，因为根据 Schur 定理（[Sch11]），任何线性挠群都是几乎阿贝尔的。

References

[Arn81] Pierre Arnoux. ´区间交换与曲面上的流。载于《遍历理论》（研讨会，Les Plans-sur-Bex, 1980）（法文），《数学教学专著》第29卷，第5–38页。日内瓦大学，日内瓦，1981年。[Bos16] Michael Boshernitzan。由挠元和旋转生成的区间交换子群。《美国数学会会刊》，144(6):2565–2573，2016年。[BS62] Gilbert Baumslag 和 Donald Solitar。某些由两个生成元、一个关系定义的非 Hopf 群。《美国数学会通报》，68:199–201，1962年。[Cor20] Yves Cornulier。圆上分段连续变换群的实现。《现代动力学杂志》，16(0):59–80，2020年。[DFG20] Fran.cois Dahmani、Koji Fujiwara 和 Vincent Guirardel。区间交换变换的可解群。《图卢兹数学学院科学年刊》（第六辑），29(3):595–618，2020年。[GL19a] Nancy Guelman 和 Isabelle Liousse。仿射区间交换变换群中的扭曲。《群、几何与动力学》，13(3):795–819，2019年。[GL19b] Nancy Guelman 和 Isabelle Liousse。区间交换变换群中的可逆映射与对合的乘积。arXiv:1907.01808，2019年。[Gro81] Mikhael Gromov。多项式增长群与扩张映射。《法国高等科学研究所数学出版物》，(53):53–73, 1981年。[JMBMdlS18] Kate Juschenko、Nicol´as Matte Bon、Nicolas Monod 和 Mikael de la Salle。广延可 amen 性及其在区间交换中的应用。《遍历理论与动力系统》，38(1):195–219，2018年。[Kea75] Michael Keane。区间交换变换。《数学杂志》，141:25–31，1975年。[May43] A. Mayer。闭可定向曲面上的轨道。《数学文摘》（新系列），12(54):71–84，1943年。[Min97] Hiroyuki Minakawa。PL+(S^1) 奇异圆的分类。《北海道数学杂志》，26(3):685–697，1997年。[Nav11] Andr´es Navas。《圆微分同胚群》。《芝加哥数学讲座》。芝加哥大学出版社，芝加哥，伊利诺伊州，西班牙语版，2011年。[Nov09] Christopher F. Novak。区间交换映射的不连续性增长。《现代动力学杂志》，3(3):379–405，2009年。[OS15] Anthony G. O'Farrell 和 Ian Short。《动力系统与群论中的可逆性》，伦敦数学会讲义丛书第416卷。剑桥大学出版社，剑桥，2015年。[Sch11] Issai Schur。论周期置换群。《普鲁士科学院会议录》，第619–627页，1911年。

NANCY GUELMAN，IMERL，工程学院，乌拉圭共和国大学，C.C. 30，乌拉圭蒙得维的亚。nguelman@fing.edu.uy。

Isabelle LIOUSSE，法国里尔大学、法国国家科学研究中心（CNRS）、UMR 8524 保罗·潘勒维实验室，F-59000 里尔，法国。isabelle.liousse@univ-lille.fr。