低频和多频带弹性波控制用多模态三维拓扑超材料的揭示与实验实现

Patrick Dorin、Mustafa Khan、K. W. Wang

美国密歇根州安娜堡市密歇根大学机械工程系，邮编 48109

电子邮箱： pdorin@umich.edu

摘要

拓扑超材料能够在机械结构中实现受限且稳健的弹性波控制。近期的突破推动了三维拓扑机械超材料的发展，使其超越传统的一维和二维超材料，能够沿二维平面及依赖层结构的弹性波导实现非凡的波操控。尽管前景广阔，三维拓扑超材料在实际应用方面仍存在显著的研究空白。迄今为止研究的三维拓扑超材料仅能在单一频带内工作，且通常处于高频区间，同时全面的实验研究仍未实现。本文针对这些研究空白，通过合成并实验实现一种三维拓扑超材料，推动了该领域的发展。该材料利用多模局域共振，实现多个不同频带内的低频弹性波控制。所提出的超材料采用特定几何构型，形成多模局域谐振器，其频率特性决定了四种独特低频拓扑态的出现。数值模拟揭示了如何利用这些拓扑态，在三维结构中实现依赖偏振、频率和层结构的波操控。实验研究获得了完整的波场，明确展示了二维拓扑波导以及物理测试平台中的多偏振波控制。本研究成果为未来三维拓扑机械超材料研究开辟了道路，并展现了所提出超材料在各种波控制应用中的适用性。

意义陈述

三维拓扑超材料的发展已超越一维和二维系统，使人们能够以前所未有的方式控制机械结构中弹性波的传播。然而，迄今研究的三维拓扑机械超材料大多仅限于单一频率和高频工作，而全面的实验研究仍未实现。本文合成了一种三维拓扑超材料，利用多模态局域共振，实现多频带和低频弹性波控制。本研究采用创新的制造与测量技术，为二维平面和多偏振弹性波导提供了确凿的实验证据。本研究成果将为未来研究及三维波动机械器件的实际工程应用铺平道路；这类器件可用于信息处理、振动隔离和能量采集。

正文

引言

拓扑相已被用于实现量子系统中的稳健电子输运，其依托的是受到保护、免受局域扰动影响的导电态 [1]–[4]。近年来，拓扑相被融入弹性（即机械）超材料的设计中，从而能够超常地控制机械系统中弹性波所携带的能量和信息流动。这类所谓的拓扑超材料借助局域拓扑态实现弹性波的低损耗输运和任意方向操控；这些拓扑态受到保护，即使存在结构缺陷或无序，也能免受不必要的散射 [5]–[9]。拓扑超材料卓越的性能与稳健性已被用于提升多种技术应用的表现，包括振动能量采集器 [10]–[13], 片上通信 [14]–[17], 弹性天线 [18], 隔离器 [19], 以及机械信息处理 [20]–[22]。

关于拓扑超材料的早期研究主要集中于理论预测和实验验证一维（1D）机械结构中的零维（0D）拓扑态（例如，波局域于杆中的一个点）以及二维（2D）机械结构中的一维拓扑态（例如，波沿薄板中的线状波导局域传播）[23]–[35]。基于 这些令人鼓舞的初步成果，研究人员开始探索传统一维和二维系统之外的领域，以实现三维（3D）结构中的二维拓扑态（例如，波沿三维立方体几何结构中的平面波导局域传播）。为了构建三维拓扑超材料，研究人员通过精心配置三维周期性晶格几何结构的空间对称性，构建了源自电子系统的外尔半金属或量子谷霍尔效应（QVHE）的弹性波对应体系 [36]–[42]。此前关于三维拓扑超材料的研究揭示了多种前所未有的功能，包括沿多个空间方向上的二维平面波导实现稳健的弹性波操控、多功能波分束器/网络，以及层选择性波控制。

尽管三维拓扑机械超材料展现出超越一维和二维超材料能力的潜力，但仍存在阻碍其在实践中成功应用的研究空白。尽管已有大量理论研究 [37]–[42], ，但由于制造和测试复杂三维机械结构面临诸多挑战，关于三维拓扑超材料中弹性波控制的实验证据仍然很少 [36], 。此外，尽管此前的研究已证明二维拓扑超材料能够实现多频带运行 [43]–[48], ，迄今为止开发的三维拓扑超材料仍局限于单一频带运行。这种单频带特性限制了三维拓扑超材料的工作带宽和信息承载能力，降低了其在多频带波动应用中的适用性，例如激光器 [49], 、滤波器 [50], 、谐振器 [51], 、片上电路 [52], 、隔离器 [53], [54], 和无线网络 [55]。最后，由于通常依赖布拉格散射机制，以往开发的三维拓扑超材料大多工作在高频区间（即超声波范围：20千赫兹至 ~1 GHz）；若要实现低频（即几赫兹至20千赫兹）弹性波操控，则需要将其按比例放大到不切实际的尺寸。

本研究通过合成并实验实现一种新型三维拓扑超材料，利用多模局域共振实现低频和多频带弹性波控制，从而弥补上述空白并推动该领域的发展。所提出的机械超材料经过几何构型设计，可获得四种不同的低频（<6 kHz）拓扑态，这些拓扑态源自多模局域共振，且无需改变晶格常数即可进行调节。借助共振拓扑模态多种独特的偏振特性，该超材料呈现出丰富的偏振依赖行为。色散分析和全尺度响应模拟展示了这些拓扑态如何通过 QVHE 产生，以及如何利用它们实现频率和层依赖的弹性

三维结构中的波导。此外，全面的实验研究验证了理论预测，并首次实现了对三维拓扑超材料中完整波场及多极化弹性波导的测量。本文所呈现的研究成果为未来三维拓扑机械超材料的实验研究开辟了道路，同时揭示了所提出的超材料的多方面特性，这些特性将为各种应用带来巨大益处。

结果

三维超材料描述

所提出的超材料是一种三维周期性结构，由铝制连接杆（沿 z 方向连接，半径为 r_r = 0.93 mm）和晶胞内的两个谐振器组成（图 1a、b）。晶胞示意图如图 1b 所示，其中 a = 50 mm 为面内（x-y）晶格常数，h $_o$ = 25 mm 为面外（z）晶格常数，而 $\vec{a}_1 = a\hat{\imath}$, $\vec{a}_2 = a(1/2\hat{\imath} + \sqrt{3}/2\hat{\jmath})$ 和 $\vec{a}_3 = \mathrm{h}_o\hat{k}$ 为晶格基矢。谐振器由钢质质量块（E_m = 200 GPa，ρ_m = 8000 kg·m^{-3}, ν_m = 0.30）制成，其半径为 r_m = 7.0 mm，基准高度为 h $_m$ = 14 3 E_l = 69 ρ_l = 2700 $^{-3}$ ν_l = . mm，并 0 33 $_l$ = 1 5 $w_{l1\,l2}$ = 1 5 连接到铝制弹簧梁（ GPa，kg·m ， . ），弹簧梁的高度为 h . mm，宽度为 ， . mm。每个谐振器质量块由两个子质量块组成，其高度分别定义为 $\mathrm{h}_{m1} = \mathrm{h}_2^m(1-\alpha)$ 和 $\mathrm{h}_{m2} = \mathrm{h}_2^m(1+\alpha)$，其中 α 为质量块高度扰动参数。利用局域共振现象（该现象能够在谐振器的固有频率 [56], 附近实现波的调控），通过设计谐振元件获得多频带和低频波色散特性。晶格采用具有 D_{6h} 晶格对称性的蜂窝排列，以通过 QVHE [57]–[60] 获得非平庸拓扑特性。

晶胞色散与多模态共振效应

首先分析 ... ion 以探究所提出超材料的拓扑特性和独特波传播特征。如图 1c 所示，质量高度相同（α = 0）的晶胞被指定为 0 型晶格。能带结构采用商用有限元求解器 COMSOL Multiphysics 计算（有关模拟方法的更多详情，请参见补充信息的 S1 节）。0 型晶格具有的 D_{6h} 对称性，使能带结构在宽频率范围内出现四条不同的狄拉克节点线简并（图 1c）[1], [6], [59]。这些狄拉克简并按频率从低到高依次标记为 D 1, 2, 3, 4 f_{d-D1} = 0 37 f_{d-D2} = 1 41 f_{d-D3} = 3 66 f_{d-D4} = 4 76 D D 和 D，..... kHz、..... kHz、..... kHz 和..... kHz，数值取自 K-H 线的中点。定义一个偏振参数 $\Pi = \frac{\iiint_{V_U}|w|^2 dV}{\iiint_{V_U}|u|^2+|v|^2+|w|^2 dV}$，并测量能带结构中每个模态的该参数，其中 V_U 为晶胞体积，而 u、 v和w 分别为x、 y和z 方向上的位移分量。图 1c 中的狄拉克简并各自具有不同的偏振：D1 主要为面外极化（Π≈1，图 1c 中的黄色），D2 为混合极化（Π=0.5，图 1c 中的绿色），D3/D4 则包含面内极化位移（Π≈0，图 1c 中的蓝色）。当质量高度偏离基准值（$\alpha \neq 0$）时，D_{6h} 对称性降低为D_{3h} 对称性；当α < 0 时，晶格被指定为 A 型，而当α > 0时，则被指定为 B 型。对 α = ±0.11 情况的能带结构计算表明，对称性降低会使狄拉克简并分裂，并沿 K-H 线打开带隙（图 1d；注意，A 型和 B 型的能带结构重合，因为在 $|\alpha|$ = 0.11 时二者相同）。对于 $|\alpha|$ = 0.11 的情况，D2、D3 和 D4 处出现部分或完全带隙，图 1d 中以灰色阴影标示，其频率范围分别为 f = 1.3 至 1.5 kHz、f = 3.5 至 3.8 kHz，以及 f = 4.5 至 5.1 kHz。若进一步增大质量扰动$|\alpha|$，也可以在 D1 处打开带隙（参见补充信息的 S2 节）。通过计算每个带隙边界处能带的谷陈数 $C_{v-p} = \frac{1}{2\pi}\iint B_p(_v \quad k\ d^2k)$，评估 D2、D3 和 D4 带隙的拓扑性质；其中 $B_p(k)$为贝里曲率，p = 1

表示界定低频带隙边界的能带，而 p = 2 表示界定高频带隙边界的能带（有关 C_{v-p} C_{v-p} $C_{v-1}^{Type\ A}$ = 0 11 $C_{v-2}^{Type\ A}$ = 0 09 $C_{v-1}^{Type\ B}$ 计算的更多详情，= 0 11 $C_{v-2}^{Type\ B}$ = 0 09 2 $C_{v-1}^{Type\ A}$ = 0 14 $C_{v-2}^{Type\ A}$ = 0 17 $C_{v-1}^{Type\ B}$ = 0 15 请参见补充信息的 S3 节）。所得结果为：D 带隙对应……、……、-……、……；D 带隙对应-……、……、……、 $C_{v-2}^{Type\ B}$ -……；D4 带隙对= 0 18 3 $C_{v-1}^{Type\ A}$ = 0 25 $C_{v-2}^{Type\ A}$ = 0 30 $C_{v-1}^{Type\ B}$ = 0 26 $C_{v-2}^{Type\ B}$ = 0 30 应……、-……、-……、……。非零的 C_{v-p} 值揭示了各带隙的拓扑特性，而 A 型和 B 型构型计算得到的C_{v-p} 相等且互为反号，表明二者在拓扑上不同。

进一步分析晶胞的色散特性，揭示了所提出的三维超材料的多模态共振特征，并阐明了这一特征如何使多个频带上出现低频拓扑带隙。图 1e 展示了 |α|=0.11 情况下四个拓扑带隙边缘频带对应的模态形状。所有这些模态形状的位移主要局限于谐振器质量块中，这是局部共振机制形成带隙的显著特征 [56], [61]。此外，每组模态都呈现出不同的共振行为：D1 的面外平移 (Π≈1)、D2 的摇摆 (Π=0.6)、D3 的面内扭转 (Π≈0) 以及 D4 的面内平移 (Π≈0)，体现了所提出超材料的多模态特性（有关这些模态的更多详情，请参见补充信息的 S4 节）。

针对 α=0 情况开展参数研究，以考察多模态谐振器设计对图 1c 所示狄拉克简并的影响。参数研究结果（见图 2）表明，通过调节谐振器的频率特性，可以调整狄拉克简并对应的频率 f_d 。图 2a 显示，狄拉克频率与谐振器质量成反比，而谐振器质量通过质量块高度参数 h_m 进行调节。增加谐振器质量可大幅降低 D1–D4 的狄拉克频率，并使这四个简并点与无关的高频 (>6 kHz) 模态分离；否则，这些模态会使有效波导的构建变得困难（详情见补充信息的 S5 节）。通过利用局部共振机制以这种方式隔离狄拉克色散，所提出的超材料消除了三维弹性超材料本征上密集的能带结构中的拥挤现象；这种拥挤常常妨碍以往研究中的低频拓扑波控制。与谐振质量呈反比关系不同，狄拉克频率与谐振器弹簧的刚度呈正比关系，而弹簧刚度可通过改变连接梁宽度 w_{l1} 来调节（图 2b）。值得注意的是，从 1 mm 增至 3 mm 时，D3 的 f_d 受影响最大（D3 的 f_d 增加 168%，相比之下，D1、D2 和 D4 分别增加 37%、66% 和 77%）。D3 的这一大幅变化源于面内扭转模态对 w_{l1} 的敏感度高于图 1e 所示的其他三组模态。将弹簧连接梁视为长度为 L_l 的理想悬臂梁，可阐明这种更高敏感度的原因。在这一假设下，D1 模态的弯曲刚度为$S_{D1} = {}^{3w_{l1}\mathrm{h}}{}_{4L_l^3}{}^{3}_{l}$ [62]，而 D3 $S_{D3} = {}^{3}\mathrm{h}_{l}{}^{w_{l1}^3}_{4L_l^3}$ [62]，这解释了与 D1 相比，w_{l1} 对 D3 简并频率 f_d 的影响为何显著增强。这些发现表明，多模态设计中四种共振模态各自独特的刚度机制，可用于调节 D1、D2、D3 和 D4 的狄拉克频率，使其彼此相对变化。此外，这项参数研究的结果揭示了所提出超材料的多模态共振如何使低频处出现拓扑带隙（例如，对于 w_{l1} = 1 mm，所有 f_d < 4 kHz），且无需改变晶格常数 a 或 h_o 即可对其进行控制；这对体积受限的应用而言是一项显著优势。

二维拓扑态的超胞分析

为获得二维拓扑态，构建了一个八单元超胞，其中四个A型晶胞与四个B型晶胞在I型界面处连接（图3a）。沿 $y-s$ 和 $z-s$ 方向施加Floquet周期性边界条件，而左侧和右侧

边界保持自由。根据体-边界对应关系 [1], [6], 2，由于 A型和 B型晶格在拓扑上不同，预计位移局域于界面处的 $k_{y-s}-k_{z-s}$ D 拓扑态（即界面态）会出现在拓扑带隙内。沿投影到 $k_{y-s}-k_{z-s}$ 平面上的表面布里渊区计算超胞的能带结构（图3b、c）。定义局域化参数 $\Lambda_i=\iint_{V_{interface}} d^2\ dV/\iiint_{V_S} d^2\,dV$ （其中 $V_{interface}$ 是界面处两个晶胞的体积，V_S 是超胞的总体积），以测量每个本征模态的总位移 $d=\sqrt{|u|^2+|v|^2+|w|^2}$ 在界面处的局域程度。因此，界面模态具有 Λ_i≈1 （在能带结构中以红色能带表示），而体模态具有 Λ_i≈0 （在能带结构中以黑色能带表示）。如图3c所示，在三个不同的频率范围内发现了拓扑界面态，分别对应 D2、D3 和 D4 带隙。图3c底部展示了各拓扑界面态具有代表性的模态形状，显示了摇摆（频率范围为 1.3 至 1.5 kHz）、面内扭转（3.6 至 3.8 kHz）和面内平移（4.4 至 5.4 kHz）模态；其位移场与图1e中所示 D2、D3 和 D4 的晶胞共振模态相符。同样，由八个 B型单元胞构建了一个超胞，所得能带结构如图3d所示。B型超胞的能带结构与具有 I型界面的超胞几乎相同。定义局域化参数 $\Lambda_b=\iint_{V_{boundary}} d^2\ dV/\iiint_{V_S} d^2\,dV$ （其中 $V_{boundary}$ 是超胞两个边界处晶胞的体积），以测量 B型超胞边界处包含的模态位移。发现了摇摆、面内扭转和面内平移拓扑态，其位移局限于超胞的左边界（Λ_b≈1，图3d）。此前多项研究也报道了因晶格边界处发生拓扑转变而出现的类似拓扑边界态，并且体-边界对应关系 [1], [6], [24], [63]–[66]也对此作出了预测。这些拓扑边界态出现在 D2、D3 和 D4 拓扑带隙内，其频率范围与图3c所示的界面态相符。超胞分析所得结果表明，所提出超材料的多模态共振有助于实现多频带拓扑界面态和表面态。

进一步检查图3c、d中的能带结构可以发现，存在一些多余的体模态穿过浅灰色的 D2、D3 和 D4 带隙。虽然必须谨慎激发 D3 拓扑界面态，以避免激活附近的体模态，但在 $\tilde{\Gamma}$ 附近穿过 D2 和 D4 带隙的多余体模态具有特定偏振，不会与拓扑态发生不必要的杂化（更多细节见补充信息的 S6 节）。超胞能带结构的另一个重要特征是，在 $-\tilde{Z}-\tilde{\Gamma}$ 和 $\tilde{\Gamma}-\tilde{Z}$ 方向上，摇摆（1.3 至 1.5 kHz）拓扑态中出现了明显的凹陷。由于这一陡峭斜率（即较大的群速度）出现在 $\tilde{\Gamma}$ $-\tilde{}-$附近，$\tilde{\Gamma}-\tilde{}$ 而能带在其余 ZZ波数区域内保持平坦，这表明互连杆发生了准刚体运动（或极长波长运动），沿 z 方向传输波能量（见补充信息中的图 S8）。相比之下，两个面内拓扑态在 $-\tilde{Z}-\tilde{\Gamma}-\tilde{Z}$ 波数区域内呈平坦状态（即群速度为零）和/或存在带隙，因此不会沿 z传输波能量。不同拓扑态在 z 方向上的这种传输行为差异，为在全尺寸三维结构中实现偏振依赖和层依赖的波控制功能开辟了新的途径。

全尺寸三维超结构中的拓扑波导

开展了全尺寸有限元仿真，以研究有限三维超结构中超材料的弹性波控制能力（本文将超结构定义为由超材料构成且具有有限边界条件的机械结构）。三维超结构由超材料晶胞的8×8×6阵列构成（图4a）。超结构底部的四个角固定，其余边界均设为自由边界。通过指定A型和B型单元胞的分布，在超结构中构建了两种不同的弹性波导。

V形波导（图4a中间示意图中的蓝色阴影区域）由拓扑边界态构成，而Z形波导（图4a右侧示意图中的蓝色阴影区域）则通过将拓扑边界态和界面态串联而成。在波导一端的超结构六个层（L1-L6）上施加谐波激励。选择激励偏振和频率，以激活三种独特的拓扑态：摇摆态对应1.3 kHz的面外偏振，面内扭转态对应3.6 kHz的面内偏振，面内平移态对应4.9 kHz的面内偏振。所得稳态位移场（图4b）显示，动态振动响应被限制在指定的二维波导内，并按照相应拓扑态进行偏振（摇摆波导为Π=0.6，面内波导为Π≈0 ）。这些拓扑波导表现出非常规的偏振和频率依赖行为。例如，如果在面内拓扑态的频率范围内施加面外激励，波会受到拓扑带隙的衰减，无法传播到输入位置之外（图4c）。此外，如果在超结构的第1层和第4层（L1和L4）上施加输入激励，面内拓扑态会表现出层锁定的波传播（图4d）。动态响应被锁定在L1和L4上，且沿z 方向没有波能量传输，这与这两种拓扑态的超胞能带结构一致。对于摇摆态，当以1.3 kHz的频率在两层上施加输入时，波会沿全部六层传播；当两层输入的频率提高到1.4 kHz时，则会发生层锁定传输（图4d）。通过考察超胞能带结构可以解释这种频率选择性行为：能带结构预测，在1.28至1.33 kHz范围内，波将沿z 方向传播；而在1.33至1.46 kHz范围内，由于$-\tilde{Z}-\tilde{\Gamma}-\tilde{Z}$ 上出现尖锐凹陷，波将表现出更强的层锁定行为（图3c、d；更多细节见补充信息S6节）。这些结果阐明了如何利用三维超材料的多模态拓扑态，在有限三维超结构中实现偏振、频率和层依赖的波控制。如补充信息S7节所示，这种多模态机制同样可以应用于二维拓扑超材料，凸显了所提出概念的普适性。

实验实现

开展了一项实验研究，以验证理论预测，并在实际环境中实现所提出的三维超材料。实验测试平台是一个三维超结构，由B型超材料晶胞按照4x4x4的方式进行排列构成（图5a，关于制造和实验测试的详细描述，请参见补充信息的S8节）。超胞分析（针对四单元超胞）揭示了一种拓扑边界态，该边界态具有摇摆偏振，并出现在1.3至1.5 kHz的频率范围内（图5b）。利用这一边界态，在三维超结构中设计了一种V形波导，如图5c右上角示意图中的蓝色阴影区域所示。在图5c所示的位置，即超结构的中间两层（L2和L3），施加带宽为0至5 kHz的周期性啁啾振动输入。激励由一对压电（锆钛酸铅，或PZT）致动器提供，该致动器可在z 方向产生谐波弯曲位移。采用扫描式激光多普勒测振仪（SLDV，Polytec PSV-500）获取非接触式面外速度幅值$v_{op}=|\dot{w}|$的测量数据，该测量仅需使用一束激光。通过引导激光穿过最靠近测振仪探头的各层间隙，获取超结构全部四层（L1-L4）的测量数据。在f_{m1} = 1.3 kHz下获得的面外速度v_{op} 场表明，动态响应成功限制在指定的二维波导内，并且与有限元仿真结果高度吻合（图5c，L1层动态响应的动画见补充视频S1）。分别在四层中的波导内部点（图5c中的A点）和波导外部点（图5c中的B点）采集频率响应。图5d所示的频率响应表明，存在一个较宽的频率范围（灰色阴影区域），在该范围内，对于全部四层，波导内部点（A点，结果以实线表示）处测得的面外速度 v_{op} 显著高于波导外部点（B点，结果以虚线表示）处的速度（详见补充信息的S9节）。

补充信息（用于获取更多频率响应数据）。这些结果代表着一项显著进展，因为这是首次通过实验获取展示二维拓扑波导的全场动态响应信息，且对象为三维机械结构。

三维超结构中的面内扭转和面内平移拓扑态也得到了实验表征。面内扭转态（见图 6a 底部）用于构建一条沿图 6a 中红色阴影标示的两个平面边界延伸的波导。采用压电堆叠致动器向结构的 L4 层施加面内周期啁啾激励（带宽为 0 至 10 kHz）。使用三维 SLDV（Polytec PSV QTec 3D）测量面内速度分量 $\dot{u}$ 和 $\dot{v}$ ，并将面内总速度幅值计算为 $v_{ip} = \sqrt{|\dot{u}|^2 + |\dot{v}|^2}$。面内测量需要使用三台激光器，因此可供测量的唯一表面是最靠近三维 SLDV 探头的 L4 层。在 f_{m2} = 3.7 kHz 测得的速度场表明，拓扑扭转态有效地将动态响应限制在波导内，且与有限元仿真结果吻合（图 6b，动画见补充视频 S2 和 S3）。在波导内部点和波导外部点测得的频率响应（见图 6a 示意图）表明，波导行为出现在 3.5 至 3.9 kHz 的频率范围内（图 6c ），该范围包含在面内扭转态的带宽（ 3.5 至 3.7 kHz ）内。面内平移拓扑态也采用相同的实验方法。构建波导，使其沿图 6d 中的蓝色表面延伸；实验测量结果表明，在 f_{m3} = 4.4 kHz 下实现了成功的波导传输（图 6e，动画见补充视频 S4 和 S5）。图 6f 所示结果表明，波场沿指定路径受限，其频率范围为 4.3 至 5.0 kHz，与图 6d 中报告的面内平移态带宽（4.4 至 5.3 kHz）重叠。这项实验研究的成果超越了此前关于三维拓扑超材料的研究；此前的研究绝大多数集中于单一拓扑态的理论探究 [36]– [42], ，而本研究则实现了具有多种（即三种：摇摆、面内扭转和面内平移）不同偏振和频带的拓扑波导实验波场。

讨论

本文所介绍的研究通过构建一种三维拓扑超材料，利用多模态局域共振实现低频和多频带弹性波操控，从而推动了该领域的技术发展。能带结构分析揭示了四种出现在不同频率区域的拓扑态，分别与面外平移、摇摆、面内扭转和面内平移共振相关。通过参数研究，可以深入理解每种拓扑态的频率范围与相应共振模态的基本特性（即各模态的质量和刚度）之间的联系。这种参数分析阐明了如何通过调节局域谐振器的质量和刚度特性，在不增加超材料体积的情况下，使拓扑态在宽频带和低频范围内实现（例如，所有频率均低于 6 kHz）。对全尺寸三维超结构进行的有限元仿真揭示了如何利用这些拓扑态实现具有复杂频率依赖性和偏振依赖性行为的二维平面波导和层锁定波导。为补充理论研究结果，本研究开展了实验，以验证数值预测，并为三维机械结构中拓扑现象的实验研究确立新的基准。本文报告的实验进展包括获取能够明确展示二维拓扑波导的完整波场，以及测量三维结构中的多偏振波控制。这些成果有望启发未来关于三维机械系统中波控制和拓扑物理的实验研究。所提出的三维超材料具有卓越的性能和直观的设计方法，有望提升涉及低频和多频带弹性波控制的工程应用性能，例如振动能量采集器和隔离器 [10]–[13], [19], [53], [54]。此外，该超材料丰富的三维、多频带、频率依赖性和偏振依赖性特征还可用于

构建信息密集型声子电路（即基于弹性波的电路），用于机械计算机、波滤波器和片上通信 [14]–[17], [20]–[22], [67]。例如，所提出的超材料可用作三维声子电路的构建模块，该电路具有多个工作通道，能够根据外部输入的偏振和频率，以依赖于层的方式引导波传播。

材料与方法

数值模拟的完整细节见补充信息的 S1 节。实验方法，包括制造和测试的具体内容，均在补充信息的 S8 节中进行了全面描述。

致谢

作者感谢 Osama Jameel 和 Polytec 在实验测量以及提供 PSV QTec 3D SLDV 设备使用方面给予的支持。作者感谢美国空军科学研究办公室通过项目编号 FA9550-21-1-0032 提供的经费支持。P.D. 还感谢密歇根大学提供的拉克姆优秀奖学金和拉克姆研究生研究基金的经费支持。

参考文献

[1] M. Z. Hasan 和 C. L. Kane，“专题讨论：拓扑绝缘体”，《现代物理评论》，第 82 卷，第 4 期，第 3045–3067 页，2010 年。[2] X. L. Qi 和 S. C. Zhang，“拓扑绝缘体与超导体”，《现代物理评论》，第 83 卷，第 4 期，第 1057–1110 页，2011 年。[3] A. Kitaev，“拓扑绝缘体与超导体的周期表”，《美国物理学会会议录》，第 1134 卷，第 1 期，第 22–30 页，2009 年。[4] C. L. Kane，拓扑能带理论与*Z2* 不变量，第 6 卷。爱思唯尔，2013 年。[5] H. Xue、Y. Yang 和 B. Zhang，“拓扑声学”，《自然综述：材料》，第 7 卷，第 974–990 页，2022年。[6] G. Ma、M. Xiao 和 C. T. Chan，“声学与机械系统中的拓扑相”，《自然综述：物理》，第 1 卷，第 4 期，第 281–294 页，2019年。[7] Y. Liu、X. Chen 和 Y. Xu，“拓扑声子学：从基本模型到实际材料”，《先进功能材料》，第 30 卷，第 8 期，文章编号 1904784，2020年。[8] S. Zheng、G. Duan 和 B. Xia，“拓扑力学进展”，《应用科学》，第 12 卷，第 4 期，文章编号 1987，2022年。[9] S. D. Huber，“拓扑力学”，《自然·物理》，第 12 卷，第 7 期，第 621–623 页，2016年。[10] Z. Wen、Y. Jin、P. Gao、X. Zhuang、T. Rabczuk 和 B. Djafari-Rouhani，“用于稳健能量采集的声子板拓扑腔”，《机械系统与信号处理》，第 162 卷，文章编号 108047，2022年。[11] C. Lan、G. Hu、L. Tang 和 Y. Yang，“局域共振拓扑超材料中的能量局域化与拓扑保护，实现稳健振动能量采集”，《应用物理学杂志》，第 129 卷，第 18 期，文章编号 184502，2021年。[12] G. J. Chaplain、J. M. De Ponti、G. Aguzzi、A. Colombi 和 R. V. Craster，“渐变 Su-Schrieffer-Heeger 系统中的拓扑彩虹俘获与弹性能量采集”，《物理评论应用》，第 14 卷，第 5 期，文章编号 054035，2020年。[13] T. X. Ma、Q. S. Fan、C. Zhang 和 Y. S. Wang，“利用声子晶体梁的拓扑界面态进行弯曲波能量采集”，《极端力学快报》，第 50 卷，文章编号 101578，2022年。[14] M. Yan 等，“用于弹性波操控的片上谷拓扑材料”，《自然·材料》，第 17 卷，第 993–998 页，2018年。[15] Y. Wu、M. Yan、Z. K. Lin、H. X. Wang、F. Li 和 J. H. Jiang，“片上高阶拓扑微机械超材料”，《科学通报》，第 66 卷，1966，2021 19，1959 no. pp. –。

[16] M. Yan 等，“赝磁场实现片上弹性波操控”，《物理评论快报》，第 127 卷，第 13 期，文章编号 136401，2021年。[17] J. Zhao 等，“具有渐变拓扑界面的片上谷声子晶体板”，《国际机械科学杂志》，第 227 卷，文章编号 107460，2022年。[18] H. Huang、Z. Tan、S. Huo、L. Feng、J. Chen 和 X. Han，“赝自旋霍尔声子晶体中弹性波的拓扑保护零折射”，《通讯物理》，第 3 卷，文章编号 46，2020年。[19] X. Wu、Y. Jin、A. Khelif、X. Zhuang、T. Rabczuk 和 B. Djafari-Rouhani，“用于稳健振动衰减与能量采集的拓扑表面波超材料”，《机械、先进材料与结构》，第 29 卷，第 26 期，第 4759–4767 页，2022年。[20] F. Zangeneh-Nejad 和 R. Fleury，“拓扑模拟信号处理”，《自然·通讯》，第 10 卷，文章编号 2058，2019年。[21] M. P. Makwana 和 R. V. Craster，“多向能量分束器与拓扑谷超网络的设计”，《物理评论B辑》，第 98 卷，第 23 期，文章编号 235125，2018年。[22] N. Gao、S. Qu、L. Si、J. Wang 和 W. Chen，“可重构声子晶体板中弹性波的宽带拓扑谷输运”，《应用物理快报》，第 118 卷，第 6 期，文章编号 063502，2021年。[23] R. Chaunsali、E. Kim、A. Thakkar、P. G. Kevrekidis 和 J. Yang，“在圆柱形颗粒链中展示原位拓扑能带转变”，《物理评论快报》，第 119 卷，第 2 期，文章编号 024301，2017年。[24] H. Chen、H. Nassar 和 G. L. Huang，“一维和二维机械晶格中拓扑效应的研究”，《固体力学与物理学杂志》，第 117 卷，第 22–36 页，2018年。[25] T.-W. Liu 和 F. Semperlotti，“声子弹性板中的合成克拉默斯对与位错界面上的螺旋边缘态”，《先进材料》，第 33 卷，2005160，2021 9，no. p. . [26] R. Süsstrunk 和 S. D. Huber，“机械拓扑绝缘体中声子螺旋边缘态的观测”，《科学》，第 349 卷，第 6243 期，第 47–50 页，2015年。[27] Y. Guo 等，“用于拓扑弹性波导引的基于极小曲面的材料”，《先进功能材料》，第 32 卷，文章编号 2204122，2022年。[28] J. Yin、M. Ruzzene、J. Wen、D. Yu、L. Cai 和 L. Yue，“一维弹性声子晶体中的能带转变与拓扑界面模态”，《科学报告》，第 8 卷，文章编号 6806，2018年。[29] L. M. Nash、D. Kleckner、A. Read、V. Vitelli、A. M. Turner 和 W. T. M. Irvine，“陀螺超材料的拓扑力学”，《美国国家科学院院刊》，第 112 卷，第 47 期，第 14495–14500 页，2015年。[30] R. Chaunsali、C. W. Chen 和 J. Yang，“区折叠诱导拓扑板中弯曲波的亚波长与方向控制”，《物理评论B辑》，第 97 卷，054307，2018 5，no. p. .[31] S. H. Mousavi、A. B. Khanikaev 和 Z. Wang，“声子超材料中的拓扑保护弹性波”，《自然·通讯》，第 6 卷，文章编号 8682，2015年。[32] Z. Du、H. Chen 和 G. Huang，“通过合理设计贝里曲率与能带结构，优化量子谷霍尔绝缘体”，《固体力学与物理学杂志》，第 135 卷，文章编号 103784，2020年。[33] H. Zhu、T. W. Liu 和 F. Semperlotti，“类双原子石墨烯弹性波导中谷霍尔边缘态的设计与实验观测”，《物理评论B辑》，第 97 卷，第 17 期，文章编号 174301，2018年。[34] J. Xu 等，“基于材料差异在声子晶体中实现弹性波拓扑谷霍尔边缘态”，《物理评论应用》，第 19 卷，文章编号 034062，2023年。[35] J. M. De Ponti、L. Iorio、G. J. Chaplain、A. Corigliano、R. V. Craster 和 R. Ardito，“利用手性分层超材料定制拓扑边缘波”，《物理评论应用》，第 19 卷，文章编号 034079，2023年。[36] S. Y. Huo 等，“三维声子晶体中弹性波谷保护的背向散射抑制与层间拓扑输运的实验演示”，《机械系统与信号处理》，第 154 卷，文章编号 107543，2021年。[37] S. Y. Huo、H. B. Huang、C. M. Fu 和 J. J. Chen，“理想 II 型外尔相与表面

三维固体声子晶体中的弹性波态，《物理学杂志》，第96卷，第12期，第125714页，2021年。[38] X. Shi、R. Chaunsali、F. Li和J. Yang，《三维结构中的弹性外尔点与表面弧态》，《物理评论应用》，第12卷，第2期，第024058页，2019年。[39] G. Zhang和Y. Gao，《具有可调弹性波路径和频率的三维磁弹性谷霍尔绝缘体》，《应用物理学杂志》，第132卷，224108，2022年 22，第期，页码 .[40] P. Dorin、X. Liu和K. W. Wang，《可编程三维拓扑超材料中双层锁定态的出现与弹性波网络的合成》，《应用物理快报》，第120卷，第22期，第221703页，2022年。[41] S. S. Ganti、T. W. Liu和F. Semperlotti，《三维夹层型弹性晶格中的外尔点与拓扑表面态》，《新物理学杂志》，第22卷，083001，2020年 8，第期，页码 .[42] Y.-T. Wang和Y.-W. Tsai，《弹性手性晶格中的多个外尔点与双外尔点》，《新物理学杂志》，第20卷，第8期，第083031页，2018年。[43] H. Liu，《基于基本机械元件的弹性蜂窝结构实现的多带拓扑保护态》，《欧洲力学杂志A/固体》，第97卷，104803，2023年，第页 .[44] Z. D. Zhang、S. Y. Yu、M. H. Lu和Y. F. Chen，《固态弹性波中的双带螺旋边缘态与离散狄拉克涡旋》，《物理评论应用》，第17卷，第3期，第034029页，2022年。[45] W. Yuan、J. Zhao、Y. Long、J. Ren和Z. Zhong，《具有双面称柱的声子晶体板中反对称板波的多分支谷手性边缘态》，《国际机械科学杂志》，第197卷，第106347页，2021年。[46] S. Y. Huo、J. J. Chen、H. B. Huang和G. Huang，《带有脉络的二维声子晶体中剪切垂直波的同步多带谷保护拓扑边缘态》，《科学报告》，第7卷，第10335页，2017年。[47] G.-G. Xu、X.-W. Sun、X.-D. Wen、X.-X. Liu、T. Song和Z.-J. Liu，《通过局域共振声子晶体板中的双带弹性拓扑边缘态实现谷输运》，《应用物理学杂志》，第133卷，第095110页，2023年。[48] J. Ma、X. Xi和X. Sun，《双带纳机电谷霍尔拓扑超材料的实验验证》，《先进材料》，第33卷，第2006521页，2021年。[49] K. Guesmi等，《采用多波段红外激光器的双颜色深层组织三光子显微镜》，《光：科学与应用》，第7卷，第12页，2018年。[50] G. Shambat、M. S. Mirotznik、G. W. Euliss、V. Smolski、E. G. Johnson和R. A. Athale，《用于单片基底上多波段光学滤波的光子晶体滤波器》，《纳米光子学杂志》，第3卷，第1期，第031506页，2009年。[51] O. Turkmen、E. Ekmekci和G. Turhan-Sayan，《嵌套式U形环谐振器：微波区域中的一种新型多频带超材料设计》，《IET微波、天线与传播》，第6卷，第10期，第1102–1108页，2012年。[52] Y. Chen、Z. Lan和J. Zhu，《逆向设计的具有多带角态的二阶光子拓扑绝缘体》，《物理评论应用》，第17卷，第5期，第054003页，2022年。[53] Y. Chen、F. Qian、L. Zuo、F. Scarpa和L. Wang，《带有正弦形杆件的晶格超材料中的宽带与多带减振》，《极端力学快报》，第17卷，第24–32页，2017年。[54] V. Gorshkov、P. Sareh、N. Navadeh、V. Tereshchuk和A. S. Fallah，《作为多波段超结构的多谐振器超材料》，《材料设计》，第202卷，第109522页，2021年。[55] J. Chen、K. F. Tong、A. Al-Armaghany和J. Wang，《用于GPS和Wi-Fi应用的双频双极化缝隙贴片天线》，《IEEE天线与无线传播快报》，第15卷，第406–409页，2016年。[56] H. H. Huang和C. T. Sun，《具有负有效质量密度的声学超材料中的波衰减机制》，《新物理学杂志》，第11卷，第013003页，2009年。[57] D. Torrent、D. Mayou和J. Sánchez-Dehesa，《石墨烯的弹性类似物：狄拉克锥

以及薄板中弯曲波的边缘态，《物理评论B辑》，第87卷，115143，2013年 11，第期，页码 .
[58] D. Xiao、W. Yao和Q. Niu，《石墨烯中的谷对比物理：磁矩与拓扑输运》，《物理评论快报》，第99卷，第23期，第236809页，2007年。 [59] N. M. R. Peres，《综述：石墨烯的输运性质：导论》，《现代物理评论》，第82卷，第3期，第2673–2700页，2010年。 [60] A. Rycerz、J. Tworzydło和C. W. J. Beenakker，《石墨烯中的谷滤波器与谷阀》，《自然·物理》，第3卷，第3期，第172–175页，2007年。 [61] X. An、C. Lai、W. He和H. Fan，《具有隔振性能的三维超桁架晶格复合结构》，《极端力学快报》，第33卷，100577，2019年，第页 .[62] M. F. Ashby、H. Shercliff和D. Cebon，《材料：工程、科学、加工与设计》，第4版。Butterworth-Heinemann，2019年。 [63] P. Dorin和K. W. Wang，《利用压电超材料实现拓扑波传播的宽带频率与空间按需调控》，《材料前沿》，第7卷，第602996页，2021年。 [64] X. Liu、G. Cai和K. W. Wang，《亚稳态结构中可重构的拓扑保护波传播》，《声学与振动杂志》，第492卷，第115819页，2021年。 [65] T. W. Liu和F. Semperlotti，《可重构声子弹性波导中的可调声学谷霍尔边缘态》，《物理评论应用》，第9卷，第1期，第014001页，2018年。 [66] A. Darabi和M. J. Leamy，《弹性波的可重构拓扑绝缘体》，《美国声学学会杂志》，第146卷，第1期，第773–781页，2019年。 [67] H. Yasuda 等，《机械计算》，《自然》，第598卷，第7879期，第39–48页，2021年。

图

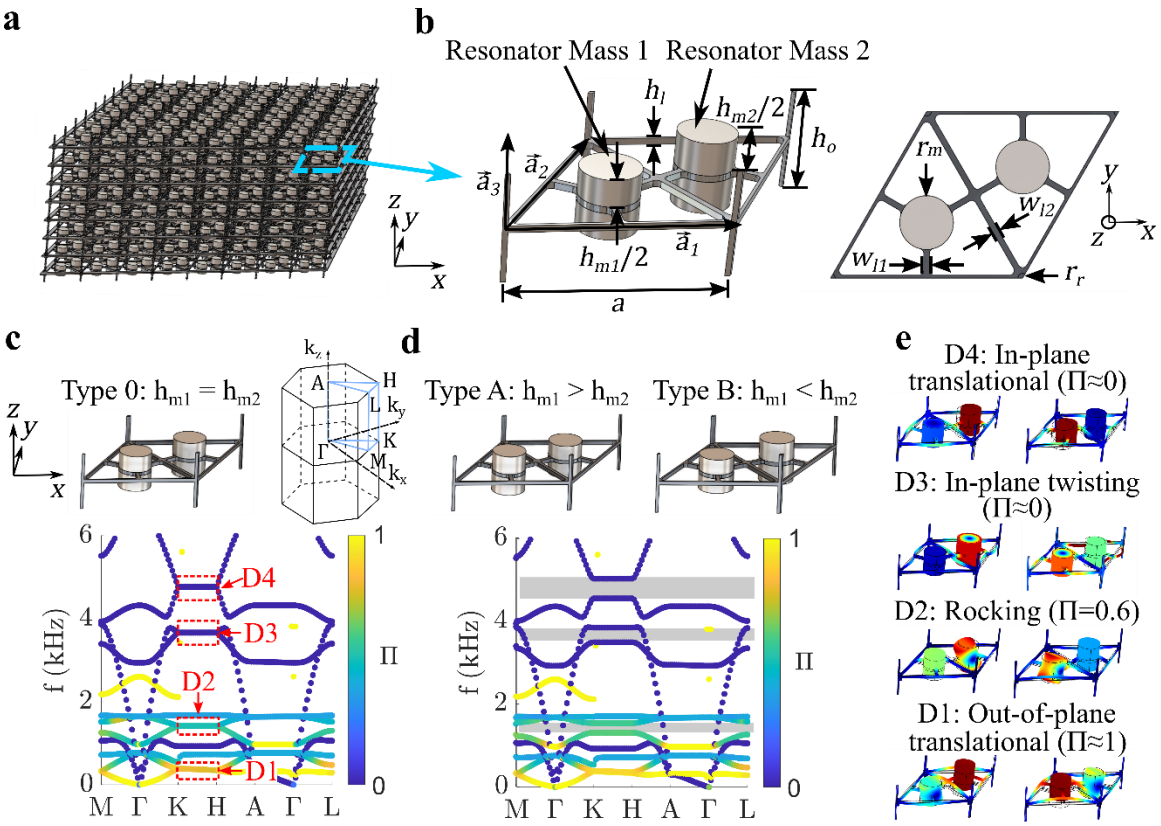

图 1. a）三维拓扑超材料示意图。b）超材料晶胞的等轴测图和俯视图。c）0型晶格（α = 0）的能带结构。四条狄拉克节点线简并以红色虚线框标示。色条表示由参数 Π 量化的模态偏振。d）A型/B型（α = -0.11/0.11）晶格的能带结构。A型和B型晶格的能带结构相同且相互重叠。三个拓扑带隙以灰色阴影标示。e） $|\alpha|$=0.11 情况下，界定四个（D1、D2、D3 和 D4）拓扑带隙的能带对应的模态形状（沿K-H方向截取），展示了多模态共振。

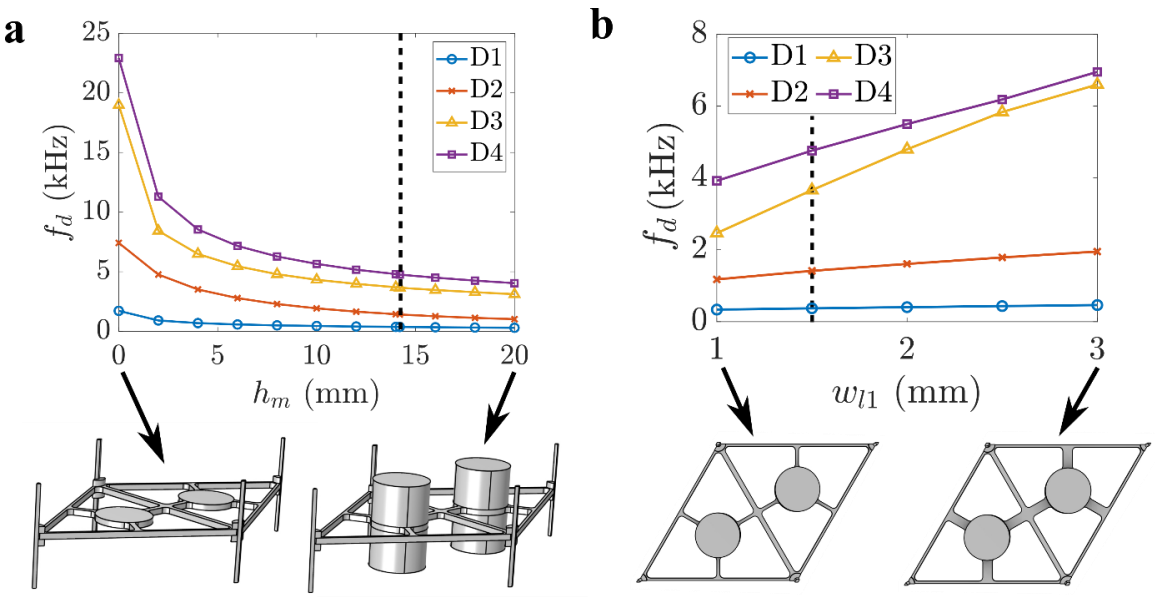

图 2. 参数研究展示了 a) 质量块高度 h_m 和 b) 弹簧细梁宽度 w_{l1} 对狄拉克节点线频率 f_d的影响。对于每个 D1-D4，该频率取 K 与 H 之间的中点处的值。所有展示的数值均对应 0型晶格构型（$\alpha = 0$）。插图展示了 h_m 和 w_{l1}在所指定最小值和最大值时的晶胞几何结构。垂直虚线表示本文其他所有结果所采用的指定 h_m 和 w_{l1} 。

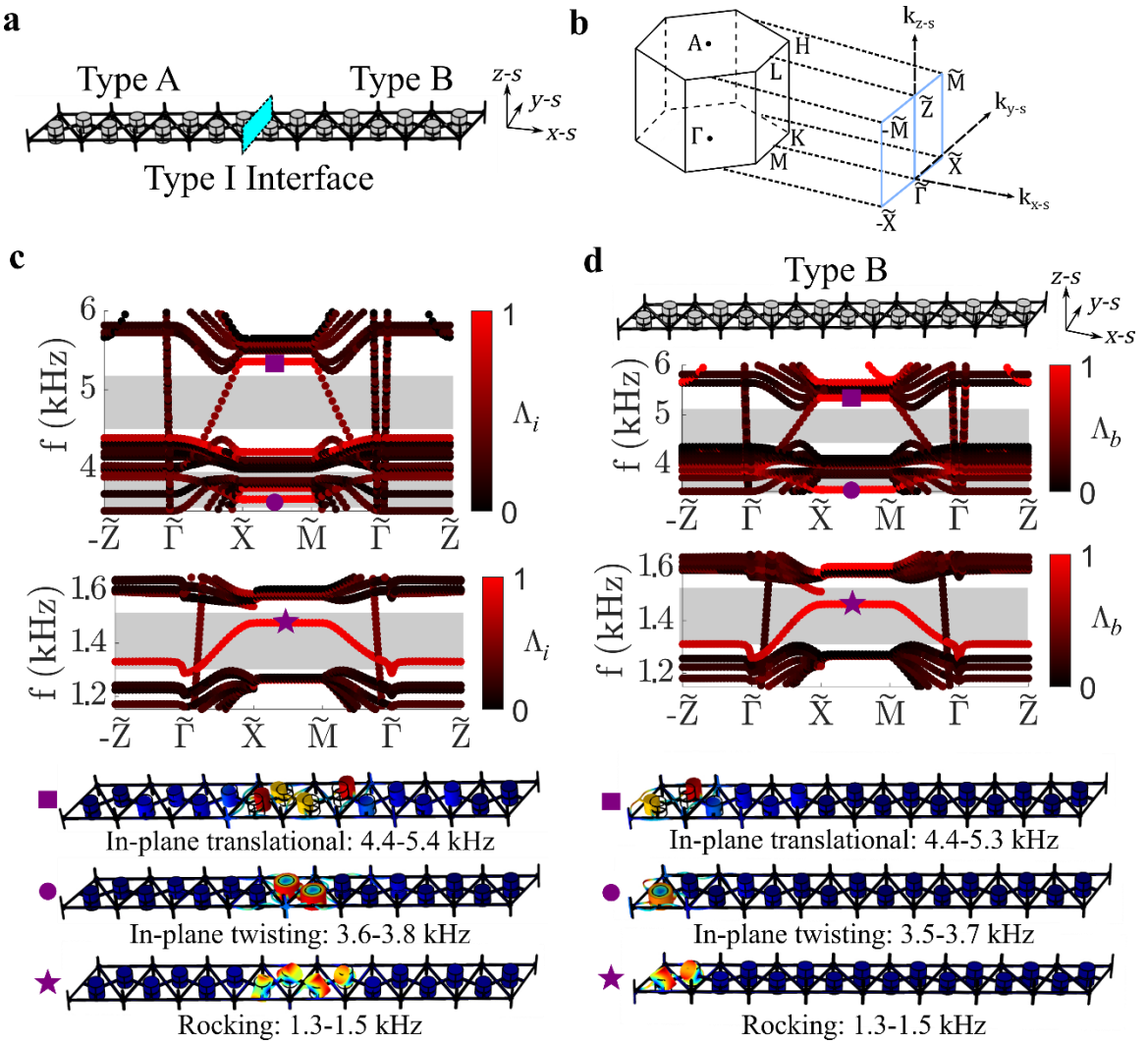

图3. a) 八单元超胞示意图，蓝色平面表示 I型界面。b) 倒易空间，表面布里渊区的一半投影到以浅蓝色勾勒的 $k_{y-s} - k_{z-s}$ 平面上。c) (a) 中所示超胞的能带图。拓扑带隙以浅灰色阴影标示。红色能带 (Λ_i≈1) 为界面模态，黑色能带 (Λ_i≈0) 为体模态。底部展示了摇摆（紫色星形）、面内扭转（紫色圆形）和面内平移（紫色方形）拓扑界面态的代表性模态形状。d) 由八个 B型单元胞组成的超胞示意图及其能带图。红色能带 (Λ_b≈1) 为边界模态，黑色能带 (Λ_b≈0) 为体模态。底部展示了拓扑边界态的代表性模态形状。

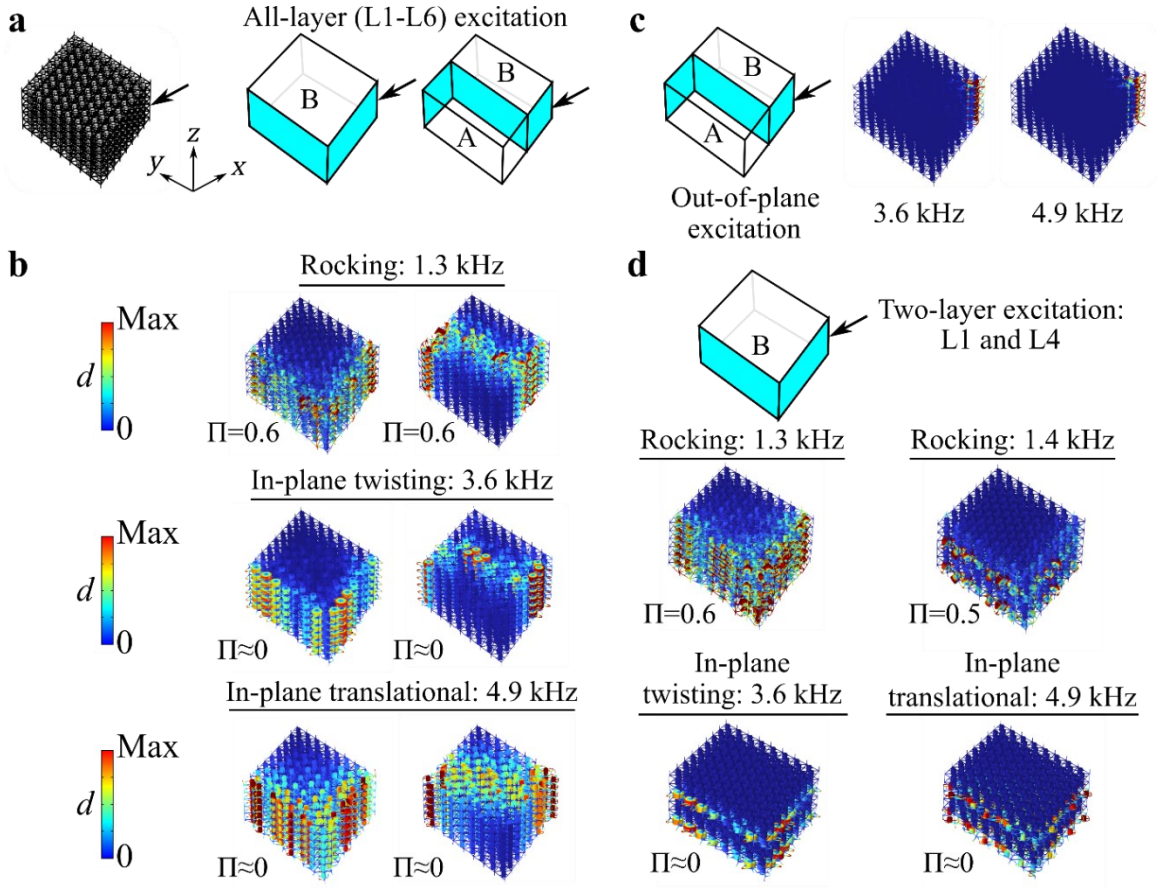

图4. a) 由超材料晶胞按 8x8x6 阵列构建的全尺寸三维超结构示意图（左），以及 V 形（中）和 Z 形（右）波导示意图。A型和B型单元胞的分布分别用字母“A”和“B”表示。b) 在 1.3 kHz（摇摆）、3.6 kHz（面内扭转）和 4.9 kHz（面内平移）频率下，对所有层（L1-L6）施加输入激励时，展示波导特性的稳态位移场。c) 在面内拓扑态的频率范围内施加面外激励时的波衰减情况。d) 在 1.4 kHz（摇摆）、3.6 kHz（面内扭转）和 4.9 kHz（面内平移）频率下，对两层（L1 和 L4）施加输入激励时，展示层锁定波导特性的稳态位移场。对于 1.3 kHz 的双层输入，摇摆态表现出跨越全部六层的波传输。

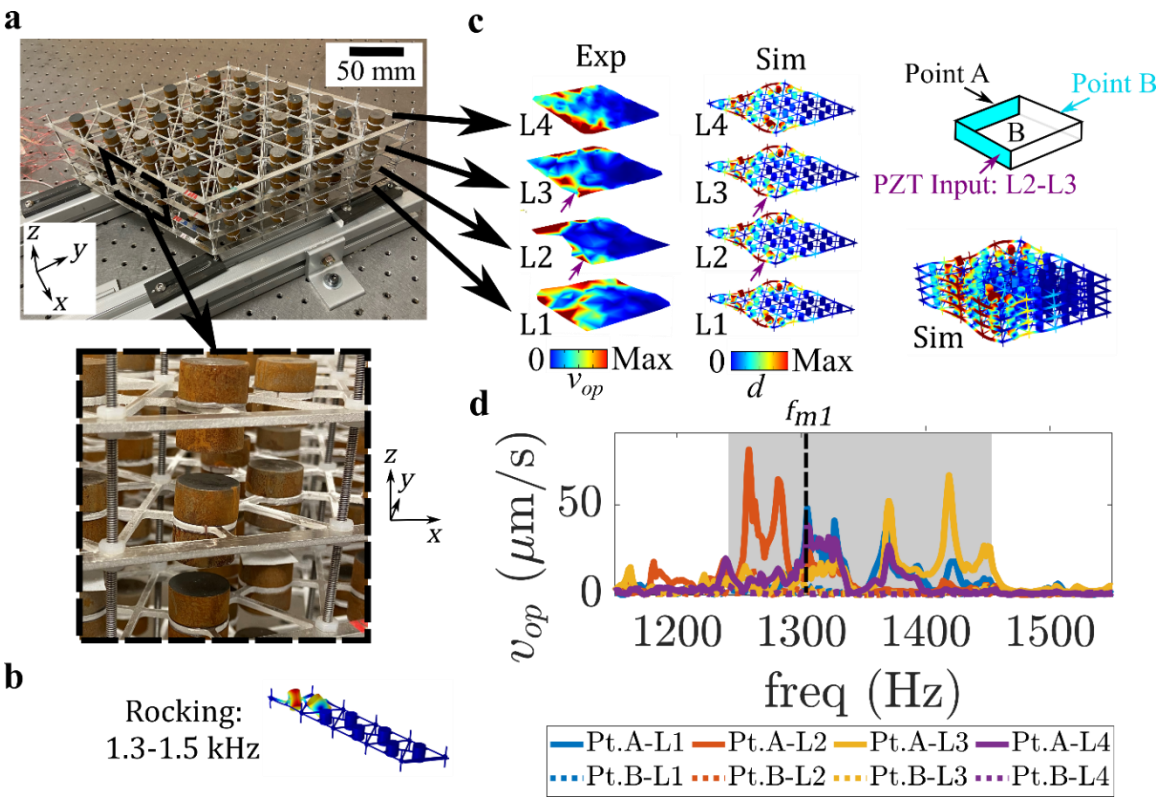

图 5. a) 实验测试平台，插图展示了晶胞的细节。b) 在四单元超胞的能带结构中发现的具有摇摆偏振的拓扑边界态。c) 在 f_{m1} = 1.3 kHz 下获得的三维超结构的实验测量面外速度场（左）和有限元模拟位移场（右）。为清晰起见，展示了模拟位移场的全尺度视图和分层视图。右上方给出了三维超结构测试平台示意图，其中蓝色阴影表示 V形波导。d) 四层中 A 点（实线）和 B 点（虚线）的实验测量面外速度（v_{op}）。有效波导传输的频率范围以灰色阴影标示。

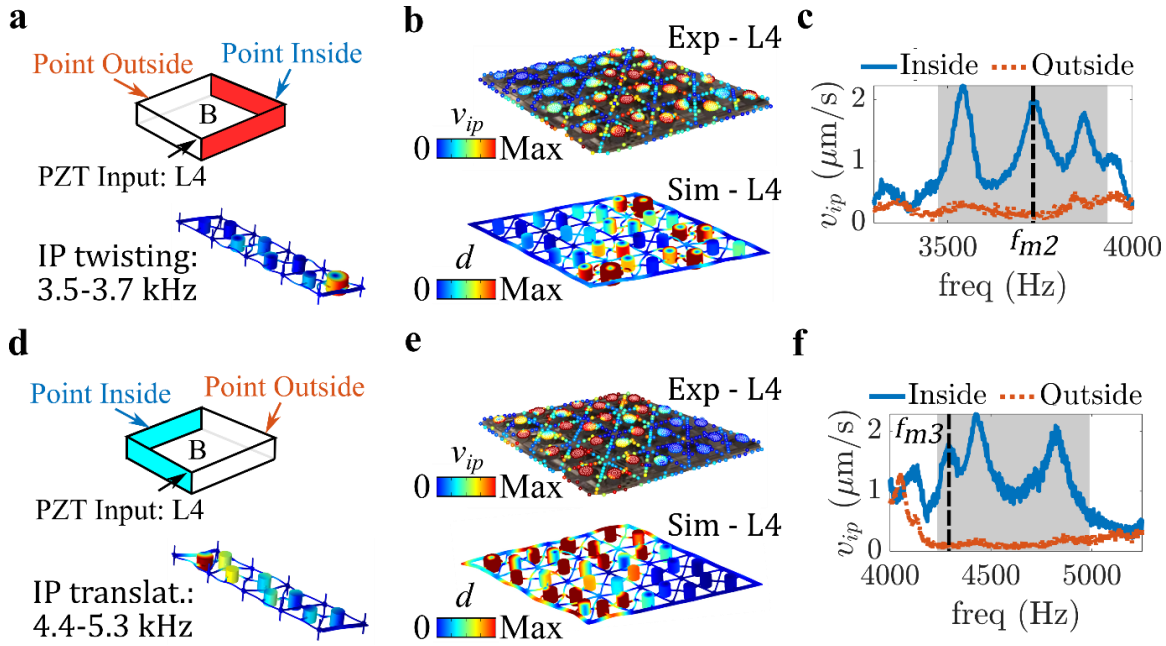

图 6. a)（上）三维超结构测试平台示意图，红色阴影表示V形波导的路径。（下）四单元超胞的能带结构中发现的具有面内扭转极化的拓扑边界态。b) 在 f_{m2} = 3.7 kHz 下获得的三维超结构 L4 的实验测量面内速度场和有限元模拟位移场。c) 实验测得的 L4 上波导内部点和外部点的面内速度（v_{ip}）。有效波导传输的频率范围以灰色阴影标出。d)（上）三维超结构测试平台示意图，蓝色阴影表示V形波导的路径。（下）四单元超胞的能带结构中发现的具有面内平移极化的拓扑边界态。e) 在 f_{m3} = 4.4 kHz 下获得的三维超结构 L4 的实验测量面内速度场和有限元模拟位移场。f) 实验测得的 L4 上波导内部点和外部点的面内速度（v_{ip}）。有效波导传输的频率范围以灰色阴影标出。c) 和 f) 对应的传输比图见《补充信息》第 S9 节。